2019학년도 제2학기 2차 지필평가 문제지

학년	과 목 명	과목코드	시 행 일	반	번호	성 명
2	수학II	03	2019년 12월 9일 1교시			

▣ 답안지에 필요한 인적 사항(학년, 반, 번호, 성명)을 쓰시오.

▣ 선택형 문항은 컴퓨터용 사인펜을 사용하여 각 해당란에 정확히 표기하시오.

▣ 서술형 · 논술형 문항은 검정색이나 청색 펜을 사용하여 답안을 작성하시오. (연필 사용 금지)

▣ 이 시험은 선택형 17문항 78점, 서술형 · 논술형 3문항 22점 입니다.

1. $\int_1^4 3dx$의 값은? [4점]

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

$[3x]_1^4 = 12-3$

2. 함수 $f(x)=x^3-9x^2+24x+5$의 극댓값은? [4.1점]

① 21　② 22　③ 23　④ 24　⑤ 25

$3x^2-18x+24$

$3(x^2-6x+8)$

$(x-4)(x-2)$?　$x=2$　$x=4$

$8-36+48+5$

25

3. 곡선 $y=x^2-1$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는? [4.2점]

① $\frac{4}{3}$　② $\frac{5}{3}$　③ 2　④ $\frac{7}{3}$　⑤ $\frac{8}{3}$

$x=\pm1$

$\frac{1}{6}2^3 = \frac{1}{6}\cdot 2\cdot 2\cdot 2$

4. 함수 $f(x)=\int(3x^2+ax+9)dx$가 $x=-1$에서 극값을 가질 때, a의 값은? [4.3점]

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

$f'(x)$ $3x^2+ax+9$

$3-a+9=0$

$12-a=0$

$a=12$

5. 닫힌구간 $[-1,2]$에서 함수 $f(x)=ax^3-6ax^2+b$의 최댓값이 3이고 최솟값이 -29일 때, 상수 a,b의 곱 ab의 값은? (단, $a>0$) [4.4점]

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

$3ax^2-12ax$

$3ax(x-4)$

$x=0$　$x=4$

$f(0)=b$

$f(4)=64a-96a+b=-32a+b$

$f(-1)=-a-6a+b=-7a+b$

$f(2)=8a-24a+b=-16a+b$

$M=3=b$

$-32a+b=-29$

$-32a+3=-29$

$a=1$

6. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+(8a-a^2)x+5$가 극값을 갖지 않도록 하는 양의 정수 a의 개수는? [4.4점]

미분해서 0되는 거X

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

$D\le0$

$3x^2+2ax+(8a-a^2)$

$a^2-3(8a-a^2)$

$a^2-24a+3a^2$

~~$2a^2-24a\le0$~~

~~$2a(a-12)\le0$~~

~~$0\le a\le12$~~

$4a^2-24a$

$4a(a-6)$

$a=0$　$a=6$

$0\le a\le6$

7. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여
$f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=g(x)$를 만족시킨다.
함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여 $\int_{-5}^{5}(x^3+1)h'(x)dx=14$일 때,
$h(5)$의 값은? [4.5점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

$\int_{-5}^{5} x^3 h'(x) + \int_{-5}^{5} h'(x)\,dx = 14$

$\int_0^5 h'(x) = 7$

$h(5)-h(0)=7$

8. 두 함수 $f(x)=x^4-3x+a$, $g(x)=-x^2+3x-3a$의 그래프가 오직 한 점에서 만날 때, 상수 a의 값은? [4.5점]

① −3 ② −1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

$x^4-3x+a=-x^2+3x-3a$

$x^4+x^2-6x+4a=0$

$4x^3+2x-6$

$2(2x^3+x-3)$

$2(x-1)(2x^2+2x+3)$

$1+1-6+4a=0$

$-4+4a=0$

$a=1$

9. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 위치 x가
$x=t^3-4t^2+at+4$이다. 점 P가 움직이는 방향이 바뀌지 않도록 하는 자연수 a의 최솟값은? [4.6점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$3t^2-8t+a$

$16-3a\le 0$

$16\le 3a$

$\frac{16}{3}\le a$

10. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [4.6점]

(가) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-20}{x}=0$ $f'(0)=0$

(나) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-12$의 교점의 개수는 2이다.

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$f(2)=8-24+20=4$

$f(0)=20$

x^3+ax^2+bx+c

$3x^2+2ax+b$, $b=0$

$f(x)=x^3+ax^2+20$, $a=-6$

$x^3+ax^2+20=-12$

$x^3+ax^2+32=0$ 교점개수 2개

$f(0)=32$

$3x^2+2ax$

$x(3x+2a)$

$x=0$ $x=-\frac{2a}{3}$

$f\left(-\frac{2a}{3}\right)=-\frac{8a^3}{27}+a\cdot\frac{4a^2}{9}+32=0$

$-\frac{8a^3}{27}+\frac{12a^3}{27}+32=0$

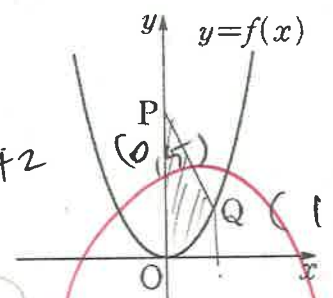
$\frac{4a^3}{27}=-32$

x^3-6x^2+32

$f(2)=8-24+32$

11. 자연수 n에 대하여 좌표가 $(0,\ 2n+1)$인 점을 P라 하고, 함수 $f(x)=nx^2$의 그래프 위의 점 중 y좌표가 2이고 제1사분면에 있는 점을 Q라 하자. $n=2$일 때, 선분 PQ와 곡선 $y=f(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4.7점]

$2x^2=2$



$PQ=-3(x-1)+2$
$-3x+3+2$
$-3x+5$

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{7}{4}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ $\frac{37}{12}$

$\int_0^1 -3x+5-2x^2 = \int_0^1 -2x^2-3x+5\,dx$

$\left[-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+5x\right]_0^1=-\frac{2}{3}-\frac{3}{2}+5=-\frac{4}{6}-\frac{9}{6}+\frac{30}{6}$

$-\frac{13}{6}+\frac{30}{6}=\frac{17}{6}$

12. 원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 $v_1(t)$, $v_2(t)$라 하면 $v_1(t)=-2t-1$, $v_2(t)=3t^2+1$이다. 선분 PQ의 중점을 R라 할 때, 점 R이 다시 원점을 지날 때까지 움직인 거리는? [4.7점]

① $\frac{4}{27}$ ② $\frac{5}{23}$ ③ $\frac{7}{24}$ ④ $\frac{17}{26}$ ⑤ $\frac{19}{21}$

$R=\frac{-t^2-t+t^3+t}{2}$

$R=\frac{t^3-t^2}{2}$

$t^2(t-1)$
$t=1$ 일때

$\frac{1}{2}t^3-\frac{1}{2}t^2$
$\frac{3}{2}t^2-t$
$t(\frac{3}{2}t-1)$ $t=\frac{2}{3}$

$\int_0^{\frac{2}{3}}\frac{t^3-t^2}{2}$

$\int_{\frac{2}{3}}^1\frac{-t^3+t^2}{2}$

$\left[\frac{t^3-t^2}{2}\right]_0^{\frac{2}{3}}+\left[\frac{-t^3+t^2}{2}\right]_{\frac{2}{3}}^1$

$\frac{8}{27}-\frac{12}{27}=-\frac{4}{27}$

$\frac{\frac{8}{27}-\frac{4}{9}}{2}$ $\frac{-\frac{8}{27}+\frac{4}{9}}{2}$

$\frac{8}{27}-\frac{4}{9}$

$\frac{4}{27}-\frac{2}{9}-\left(-\frac{4}{27}+\frac{2}{9}\right)=\frac{4}{27}-\frac{2}{9}+\frac{4}{27}-\frac{2}{9}$

13. 일차함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^1 f(x)dx=4$일 때, $\int_0^1\{f(x)\}^2dx$의 값을 k라고 하자. 이때, 정수 k의 최솟값은? [4.8점]

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

?

$\int_0^1 (f(x))^2\,dx=k$

14. k가 음의 상수일 때, 함수 $f(x)=\frac{3}{x}+k(x>0)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=mx+\int_1^x|f(t)|dt\ (x>0)$라 하자. 함수 $g(x)$가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 실수 m의 최댓값이 -3일 때, $f\left(\frac{1}{3}\right)$의 값은? [4.9점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

15. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x (x-t)f(t)dt = \int_0^x (t^3+at^2+bt)dt$$ 를 만족시킬 때,

$2f(a+b)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [5점]

$2f(-1)$

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

$\int_1^x xf(t) - \int_1^x tf(t) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2$

$x\int_1^x f(t) - \int_1^x tf(t) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2$

1. 대입

$0 = \frac{1}{4} + \frac{a}{3} + \frac{b}{2}$ | 12

$3+4a+6b$

$4a+6b=-3$

$-4a+4b=-4$

$2b=1$

2. 미분

$\cancel{xf(x)} + \int_1^x f(t) - \cancel{xf(x)} = t^3+at^2+bt$

$\int_1^x f(t) = t^3+at^2+bt.$

$b=\frac{1}{2}$

$t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t$

$1+a+b=0$

$a+b=-1$

$a=-\frac{3}{2}$

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$

$f(-1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ...?

$f(x) = 3t^2 - 3t + \frac{1}{2}$

~~$f(-1) = 12 - 6 + \frac{1}{2} = 6 + \frac{1}{2} = \frac{13}{6}$~~

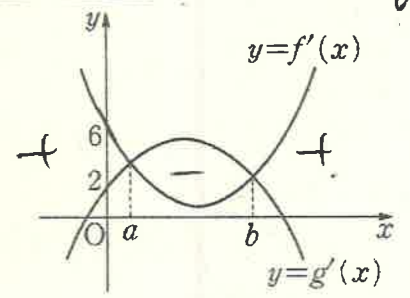
~~$2 \times \frac{13}{6} = \frac{13}{3}$~~

$f(-1) = 3+3+\frac{1}{2} = 6+\frac{1}{2} = \frac{13}{2}$

$-\frac{1}{2}$

16. 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$의 도함수 $y=f'(x)$, $y=g'(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표는 a, b $(0<a<b)$이다. 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $f'(0)=6$, $g'(0)=2$) [5.1점]

$h'(x) = f'(x) - g'(x)$



〈보 기〉

ㄱ. 함수 $h(x)$는 $x=b$에서 극솟값을 갖는다.

ㄴ. $h(a)=-1$이면 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. ?

ㄷ. $0<\alpha<\beta<b$인 두 실수 α, β에 대하여 $h(\beta)-h(\alpha)<4(\beta-\alpha)$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$h(a) = f(a) - g(a)$

17. 함수 $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2+k$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 양수 k의 값의 합은? [5.2점]

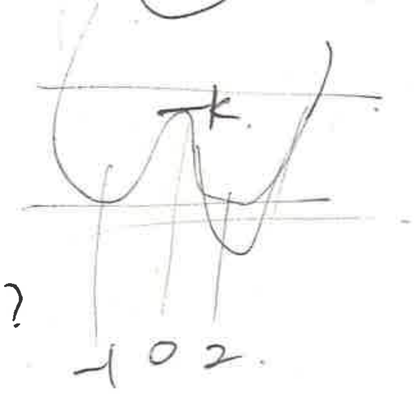
(가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
(나) 함수 $y=|f(x)|$가 서로 다른 네 개의 극값 $0, a, b, c\,(0<a<b<c)$를 갖고, a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

① $\frac{67}{16}$　② $\frac{69}{16}$　③ $\frac{71}{16}$　④ $\frac{73}{16}$　⑤ $\frac{75}{16}$

x^3-x^2-2x

$x(x^2-x-2)$

$x(x-2)(x+1)$



$-1\ 0\ 2$

$f(0)=k$　$\frac{3}{12}+\frac{4}{12}=\frac{7}{12}-\frac{12}{12}=-\frac{5}{12}$

$f(-1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1+k=-\frac{5}{12}+k$

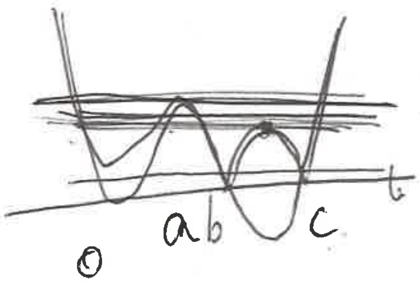
$f(2)=\cancel{4}-\frac{8}{3}-\cancel{4}+k=-\frac{8}{3}+k$

작음

모든양수 k값의 합

$-\frac{5}{12}$　$-\frac{24}{12}$

$-\frac{8}{3}+k=0$　$k=\frac{8}{3}$



$\frac{7}{6}$

$-\frac{8}{3}+k>0$

[서술형·논술형 1번]

양수 a와 삼차함수 $f(x)=2x^3-3(a+3)x^2+18ax+36a$에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서 부등식 $f(x)\geq 0$이 항상 성립하도록 하는 a의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $7(M+m)$의 값을 구하고, 그 과정을 서술하시오. [7점]

≥ 0

$6x^2-6(a+3)x+18a$

$6a+18$　18　-18

a　$-6a$

$(6x-18)(x-a)$

$x=3$　$x=a$

$2 \cdot 27 - 27(a+3)+54a+36a$

$54-27a-81+\cancel{54a}+36a$

$27a$

$63a=-27$

$a=\frac{27}{63}=\frac{3}{7}$

$\frac{81}{54}$

$\frac{27}{63}$

$\frac{4}{3}, 3$

[서술형·논술형 2번]

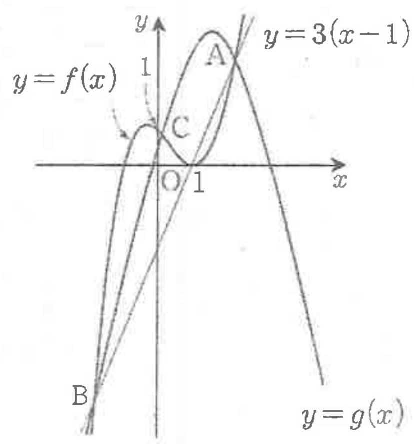
실수 t와 함수 $f(x)=|x|$에 대하여 함수 $g(t)$를

$g(t)=\int_0^2 xf(x-2t)dx$라 하자. 닫힌구간 $\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$에서 함수 $g(t)$의 최댓값을 구하고, 그 과정을 서술하시오. [7점]

[서술형·논술형 3번]

그림과 같이 함수 $f(x)=(x+1)(x-1)^2$의 그래프와 직선 $y=3(x-1)$은 제1사분면 위의 점 A와 제3사분면 위의 점 B에서 만난다. 최고차항의 계수가 음수인 이차함수 $g(x)$에 대하여 $y=g(x)$는 두 점 A, B를 지나고, 점 $\mathrm{C}(t,\ g(t))\left(0 \le t \le \frac{1}{2}\right)$에서 곡선 $y=f(x)$와 만난다. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 두 부분의 넓이의 합이 최대가 되도록 하는 함수 $g(x)$를 $M(x)$, 최소가 되도록 하는 함수 $g(x)$를 $m(x)$라 하자.

이때, $M(2)+m(2)$의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. [8점]



※ 확인사항

○ 문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.