

2021학년도 자연계열 모의논술고사

1. 출제문제

※ <문제 1>에서부터 <문제 4>까지 총 4개의 문제가 있고, 각 문제마다 3개의 세부 문항이 있습니다. 답안지의 지정된 양식 안에 각 세부 문항 별로 해당 문항 번호를 쓰고 답을 작성하십시오. 수식과 논리를 명확히 전개하고 근거와 과정을 제시하십시오.

(시험 시간: 100분, 답안 분량: 지정된 답안 양식 내 작성)

문제 1 실수 a 와 이차함수 $f(x) = x^2 - 2ax + 2a$ 에 대하여 구간 $1 \leq x \leq 2$ 에서의 $|f(x)|$ 의 최댓값을 $M(a)$ 라고 할 때, 다음 물음에 답하십시오. [총25점]

(1) $a \leq 1$ 일 때, $M(a)$ 를 a 에 대한 식으로 나타내시오. [5점]

(2) $1 < a$ 일 때, $M(a)$ 를 a 에 대한 식으로 나타내시오. [12점]

(3) 10 이상의 자연수 n 에 대하여 $\sum_{k=1}^n M(k-7)$ 을 구하십시오. [8점]

문제 2 함수 $f(x) = \sqrt{x}$ 의 그래프 위의 두 점 $(a, f(a))$ 와 $(b, f(b))$ 를 지나는 직선과 같은 기울기를 가지는 접선의 접점의 x 좌표를 c 라고 할 때, 다음 물음에 답하십시오. 단, $0 < a < c < b$ 이다. [총25점]

(1) $b - a = h$ 로 두고, c 를 a 와 h 에 대한 식으로 나타내시오. [8점]

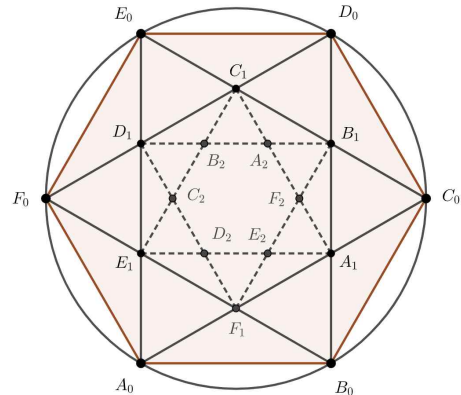
(2) $\lim_{b \rightarrow a} \frac{c-a}{b-a}$ 의 값을 구하십시오. [7점]

(3) $b = 4a$ 라고 하고, 구간 $[a, b]$ 와 곡선 $y = f(x)$ 사이의 넓이를 S , 네 점 $(a, 0)$, $(c, 0)$, $(c, f(c))$, $(a, f(a))$ 를 꼭짓점으로 하는 사다리꼴의 넓이를 S_1 , 네 점 $(c, 0)$, $(b, 0)$, $(b, f(b))$, $(c, f(c))$ 를 꼭짓점으로 하는 사다리꼴의 넓이를 S_2 라고 할 때, $S : (S_1 + S_2)$ 를 정수의 비율로 나타내시오. [10점]

문제 3 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정육각형의

꼭짓점을 그림과 같이 반시계방향으로

$A_0, B_0, C_0, D_0, E_0, F_0$ 라 하자. 그리고 그림과 같이 $\overline{A_0C_0}$ 와 $\overline{B_0D_0}$ 의 교점을 A_1 , $\overline{B_0D_0}$ 과 $\overline{C_0E_0}$ 의 교점을 B_1 , $\overline{C_0E_0}$ 와 $\overline{D_0F_0}$ 의 교점을 C_1 , $\overline{D_0F_0}$ 와 $\overline{E_0A_0}$ 의 교점을 D_1 , $\overline{E_0A_0}$ 와 $\overline{F_0B_0}$ 의 교점을 E_1 , $\overline{F_0B_0}$ 와 $\overline{A_0C_0}$ 의 교점을 F_1 이라 하자. [총25점]



(1) $\overline{A_0B_0}$, $\overline{A_0C_0}$, $\overline{A_0D_0}$ 의 길이와 삼각형 $A_0C_0E_0$ 의 넓이를 각각 구하시오. [7점]

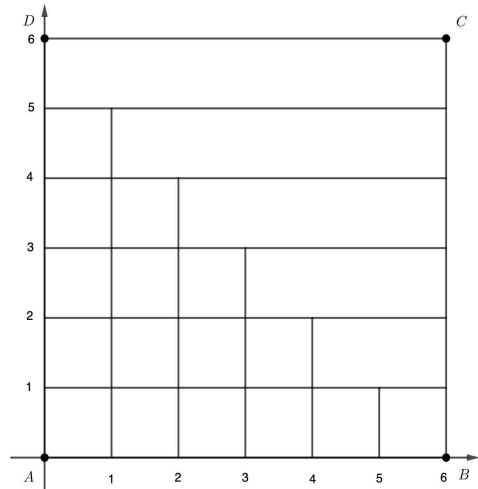
(2) 정육각형 $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$ 의 넓이와 정육각형 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 의 넓이의 차를 구하시오. [8점]

(3) 자연수 n 에 대하여 위의 과정을 n 번 반복하여 얻어지는 정육각형의 꼭짓점을 위의 그림과 같이 순서대로

각각 $A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n$ 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \overline{A_kA_{k+1}}$ 을 구하시오. [10점]

문제 4 자연수 n 에 대하여 $A(0,0)$, $B(n,0)$, $C(n,n)$,

$D(0,n)$ 을 꼭짓점으로 갖는 정사각형 ABCD의 네 변과 $1 \leq k \leq n-1$ 을 만족하는 자연수 k 에 대하여 점 $(0,k)$ 와 점 (n,k) 를 연결하는 x 축에 평행한 $(n-1)$ 개의 선분, 점 $(k,0)$ 과 점 $(k,n-k)$ 를 연결하는 y 축에 평행한 $(n-1)$ 개의 선분을 추가하여 오른쪽 그림과 같은 도로망을 만들었다. (그림은 $n=6$ 인 경우의 예시임) [총25점]



(1) 자연수 n 에 대하여 A에서 C로 가는 최단 경로의 수를 n 에 대한 식으로 표현하시오. [8점]

(2) 주어진 도로망에 놓여 있는 한 변의 길이가 k 인 정사각형의 개수를 a_k 라 할 때, 위의 그림과 같이 $n=6$ 인 경우 $1 \leq k \leq 6$ 인 자연수 k 에 대해 a_k 를 각각 구하시오. [5점]

(3) 주어진 자연수 n 에 대해 $\sum_{k=1}^n a_k$ 를 n 에 대한 식으로 표현하시오. [12점]