

논술 모의고사 문제지

(자연계열) : 120분

모집단위		전형유형	논술우수자
수험번호		성명	

■ 일반 유의사항

1. 시험시간은 120분, 배점은 100점입니다.
2. 답안을 구상할 때 문제지의 여백이나 문제지 내의 연습장을 사용하십시오.
3. 답안을 작성할 때 반드시 흑색 필기구만을 사용하십시오(연필, 샤프 사용 가능, 사인펜 불가).
4. 답안을 정정할 때 두 줄을 긋고 정정하십시오(수정 테이프, 지우개 사용 가능, 수정액 불가).
5. 답안은 반드시 해당 문항의 답란에 작성하고, 답란 밖에는 작성하지 마시오.
6. 본인이 지원한 모집단위에 해당하는 문항을 선택하여 답안을 작성하십시오.

(다른 모집단위 문항의 답안을 작성하면 0점 처리 됩니다.)

※ 답안지는 절대 교체할 수 없습니다.

■ 답안 작성 유의사항

1. 수험번호, 성명 등 신상에 관련된 사항을 답란이나 답안지의 여백에 드러내지 마시오.
2. 풀이과정이나 설명 없이 간략히 답만 쓰면 0점 처리됩니다.
3. 풀이의 과정을 순차적으로 서술하되, 필요한 경우에 수식 및 그림을 사용할 수 있으며, 수식은 반드시 문장 속에 포함 시키시오.



[자연계열 - 일반]

(의예과 제외)

 의예과는 5쪽부터 푸시오.

논술 모의고사 (자연계열 - 일반(의예과 외))

[문항 1] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) (점과 직선사이의 거리) 점 (x_1, y_1) 과 직선 $ax + by + c = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

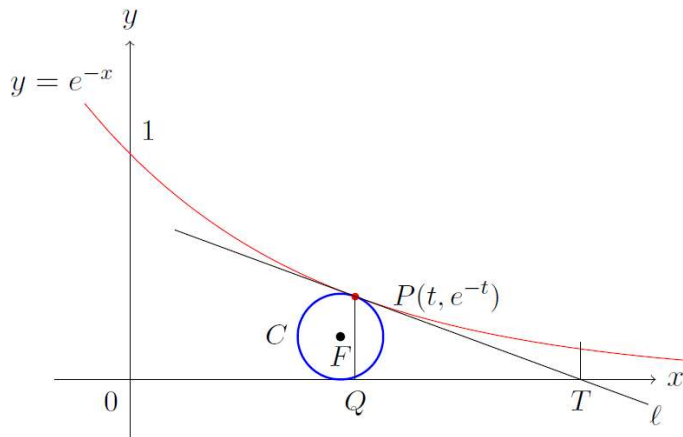
(나) (접선의 방정식) 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 미분가능할 때, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $P(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

(다) (합성함수의 미분법) 미분가능한 두 함수 $y = f(u)$, $u = g(x)$ 에 대하여 합성함수 $y = f(g(x))$ 의 도함수는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \quad \text{또는} \quad \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

(※) 아래 그림과 같이 곡선 $y = e^{-x}$ 위의 점 $P(t, e^{-t})$ 에서 접선 ℓ 이 x 축과 만나는 점을 T 라 하고 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 Q 라 하자. 이때 P 를 지나고 x 축과 ℓ 에 동시에 접하는 원 C 의 중심을 F , 반지름을 $r(t)$ 라 하고 Q 에서 접선 ℓ 까지의 거리를 $d(t)$ 라 하자.



(1-1) $r(a)d(a) = 1$ 을 만족하는 a 의 값을 구하시오. [10점]

(1-2) 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$ 가

$$f(x^3) = x^2 \left(r(x) + \frac{1}{d(x)} \right) \sin(\pi x)$$

를 만족할 때, $f'(0)$ 의 값을 구하시오. [10점]

(1-3) 점 T 를 지나고 y 축에 평행인 직선, 선분 PT , 곡선 $y = e^{-x}$ 으로 둘러싸인 영역의 넓이를 $S(t)$, 삼각형 PFT 의

넓이를 $A(t)$ 이라 할 때, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{S(t)}$ 의 값을 구하시오. [10점]

논술 모의고사 (자연계열 - 일반(의예과 외))

[문항 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 함수 $f(x)$ 가 $c \in [a, b]$ 인 어떤 c 와 $x \in [a, b]$ 를 만족하는 모든 x 에 대하여 부등식 $f(x) \leq f(c)$ 를 만족하면, 이 구간에서 함수 $f(x)$ 는 최댓값 $f(c)$ 를 갖는다.

역으로 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 $f(c)$ ($c \in [a, b]$)라고 하면, $x \in [a, b]$ 인 모든 x 에 대하여 부등식 $f(x) \leq f(c)$ 이 성립한다.

(나) (최대·최소 정리) 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이면, $f(x)$ 는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

(2-1) $f(x) = x^4 - 2x^2$ 일 때, 닫힌구간 $[a, b]$ 의 부분집합

$$\{c \in [a, b] \mid \text{모든 } x \in [a, b] \text{에 대하여, } f(c) \geq f(x)\}$$

의 원소의 개수가 3이다. a, b 의 값을 구하시오. [10점]

(2-2) $f(x) = \sin(x^2)$ 에 대하여 $\sqrt{2\pi n}$ 을 포함하는 닫힌구간 $[a, b]$ 중에서 부분집합

$$\{c \in [a, b] \mid \text{모든 } x \in [a, b] \text{에 대하여, } f(c) \geq f(x)\}$$

의 원소의 개수가 3이고 $b - a$ 의 값이 최소인 것을 $[a_n, b_n]$ 이라고 하자. (단, $n = 1, 2, \dots$)

$b_n - a_n < \frac{\sqrt{\pi}}{5}$ 인 가장 작은 자연수 n 의 값을 구하시오. [10점]

(2-3) 양수 α 에 대하여 함수 $g(x)$ 는 다음 조건을 만족한다.

- (i) $g(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속인 함수이다.
- (ii) 모든 $x \in [0, 1]$ 에 대하여 $0 \leq g(x) \leq 1$ 이다.
- (iii) 모든 $x \in [0, 1]$ 와 모든 $t \in [0, 1]$ 에 대하여 $\sin(\alpha x + g(x)) \geq \sin(\alpha x + t)$ 이다.

(a) $\alpha = 2$ 일 때 $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 의 값을 구하시오. [5점]

(b) 위 조건을 만족하는 함수 $g(x)$ 가 존재하도록 하는 양수 α 의 값 중에서 가장 큰 값을 구하시오. [10점]

논술 모의고사 (자연계열 - 일반(의예과 외))

[문항 3] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f''(x) \geq 0$ 이고 어떤 실수 a 에서 $f'(a) = 0$ 이면 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 최솟값을 갖는다.

(나) (사잇값 정리) 함수 $f(x)$ 가 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$ 이라고 하자. $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이의 임의의 k 에 대하여 $f(c) = k$ 인 $c \in (a, b)$ 가 적어도 하나 존재한다.

(다) (합성함수의 미분법) 미분가능한 두 함수 $y = f(u)$, $u = g(x)$ 에 대하여 합성함수 $y = f(g(x))$ 의 도함수는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \quad \text{또는} \quad \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

(※) 실수 전체 집합에서 두 번 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족한다.

(i) 모든 실수 x 에 대하여 $2\{f(x)\}^2 + \{f'(x)\}^2 \leq f(x)f''(x)$ 이다.

(ii) 곡선 $y = f(x)$ 의 $x = 0$ 에서의 접선은 $y = 1$ 이다.

(3-1) $f(x) > 0$ 일 때

$$\frac{d^2}{dx^2} \{\ln f(x)\} \geq 2$$

임을 보이시오. [10점]

(3-2) 함수 $g(x) = \{f(x)\}^2$ 는 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \geq 1$ 임을 보이시오. [10점]

(3-3) 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) \geq e^{-x^2}$$

임을 보이시오. [15점]

[자연계열 - 의예과]

논술 모의고사 (자연계열 - 의예과)

[문항 1] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) (점과 직선사이의 거리) 점 (x_1, y_1) 과 직선 $ax + by + c = 0$ 사이의 거리는

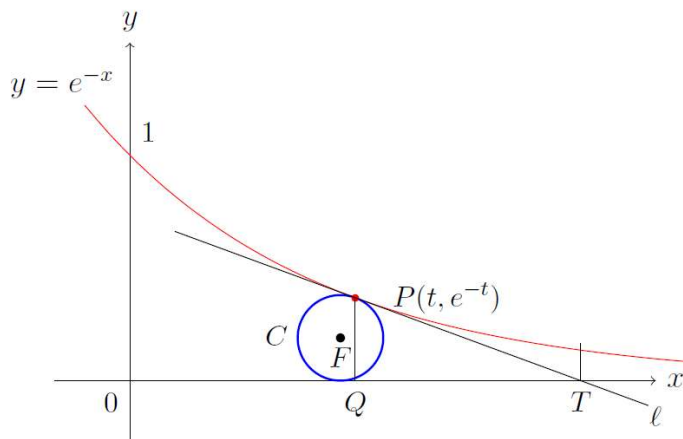
$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(나) (접선의 방정식) 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 미분가능할 때, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $P(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은 $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

(다) (합성함수의 미분법) 미분가능한 두 함수 $y = f(u), u = g(x)$ 에 대하여 합성함수 $y = f(g(x))$ 의 도함수는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \quad \text{또는} \quad \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

(※) 아래 그림과 같이 곡선 $y = e^{-x}$ 위의 점 $P(t, e^{-t})$ 에서 접선 ℓ 이 x 축과 만나는 점을 T 라 하고 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 Q 라고 하자. 이때 P 를 지나고 x 축과 ℓ 에 동시에 접하는 원 C 의 중심을 F , 반지름을 $r(t)$ 라 하고 Q 에서 접선 ℓ 까지의 거리를 $d(t)$ 라 하자.



(1-1) $r(a)d(a) = 1$ 을 만족하는 a 의 값을 구하시오. [10점]

(1-2) 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$ 가

$$f(x^3) = x^2 \left(r(x) + \frac{1}{d(x)} \right) \sin(\pi x)$$

를 만족할 때, $f'(0)$ 의 값을 구하시오. [10점]

(1-3) 점 T 를 지나고 y 축에 평행인 직선, 선분 PT , 곡선 $y = e^{-x}$ 으로 둘러싸인 영역의 넓이를 $S(t)$, 삼각형 PFT 의 넓이를 $A(t)$ 이라 할 때, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{S(t)}$ 의 값을 구하시오. [10점]

논술 모의고사 (자연계열 - 의예과)

[문항 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 함수 $f(x)$ 가 $c \in [a, b]$ 인 어떤 c 와 $x \in [a, b]$ 를 만족하는 모든 x 에 대하여 부등식 $f(x) \leq f(c)$ 를 만족하면, 이 구간에서 함수 $f(x)$ 는 최댓값 $f(c)$ 를 갖는다.

역으로 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 $f(c)$ ($c \in [a, b]$)라고 하면, $x \in [a, b]$ 인 모든 x 에 대하여 부등식 $f(x) \leq f(c)$ 이 성립한다.

(나) (최대·최소 정리) 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이면, $f(x)$ 는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

(2-1) $f(x) = x^4 - 2x^2$ 일 때, 닫힌구간 $[a, b]$ 의 부분집합

$$\{c \in [a, b] \mid \text{모든 } x \in [a, b] \text{에 대하여, } f(c) \geq f(x)\}$$

의 원소의 개수가 3이다. a, b 의 값을 구하시오. [10점]

(2-2) $f(x) = \sin(x^2)$ 에 대하여 $\sqrt{2\pi n}$ 을 포함하는 닫힌구간 $[a, b]$ 중에서 부분집합

$$\{c \in [a, b] \mid \text{모든 } x \in [a, b] \text{에 대하여, } f(c) \geq f(x)\}$$

의 원소의 개수가 3이고 $b - a$ 의 값이 최소인 것을 $[a_n, b_n]$ 이라고 하자. (단, $n = 1, 2, \dots$)

$b_n - a_n < \frac{\sqrt{\pi}}{5}$ 인 가장 작은 자연수 n 의 값을 구하시오. [10점]

(2-3) 양수 α 에 대하여 함수 $g(x)$ 는 다음 조건을 만족한다.

- (i) $g(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속인 함수이다.
- (ii) 모든 $x \in [0, 1]$ 에 대하여 $0 \leq g(x) \leq 1$ 이다.
- (iii) 모든 $x \in [0, 1]$ 와 모든 $t \in [0, 1]$ 에 대하여 $\sin(\alpha x + g(x)) \geq \sin(\alpha x + t)$ 이다.

(a) $\alpha = 2$ 일 때 $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 의 값을 구하시오. [5점]

(b) 위 조건을 만족하는 함수 $g(x)$ 가 존재하도록 하는 양수 α 의 값 중에서 가장 큰 값을 구하시오. [10점]

논술 모의고사 (자연계열 - 의예과)

[문항 3] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 다음과 같이 어떤 명제가 참임을 증명하는 방법을 ‘수학적 귀납법’이라 한다. 모든 $k = 0, 1, 2, \dots, N$ 에 대하여 명제 $p(k)$ 가 성립함을 증명할 때, 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) 명제 $p(0)$ 이 성립한다.

(ii) $k \leq N$ 에 대하여 명제 $p(k-1)$ 이 성립한다고 가정하면, 명제 $p(k)$ 가 성립한다.

(나) 수열 a_1, a_2, a_3, \dots 과 자연수 m 에 대하여 $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{i+m}$ 과 같이 연속된 m 개의 항을 ‘ m -토막’이라고 부르고, 이 m -토막의 항의 합을 기호

$$S(i, i+m] = a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_{i+m}$$

으로 나타내자. 이때, a_{i+j} 는 이 m -토막의 j 번째 항이다.

(※) 수열 $\{a_n\}$ 의 첫 $m^2 + m$ 개의 항 $a_1, a_2, \dots, a_{m^2+m-1}, a_{m^2+m}$ 이 다음 조건을 만족한다. (단, $m > 1$)

(i) 모든 $1 \leq i \leq m^2 + m$ 에 대하여 $a_i = 0$ 또는 1이다.

(ii) 모든 $0 \leq i \leq m^2 - m$ 에 대하여

$$a_{i+1} + \dots + a_{i+m} < a_{i+m+1} + \dots + a_{i+2m}, \text{ 즉 } S(i, i+m] < S(i+m, i+2m] \text{이다.}$$

(3-1) $0 \leq k \leq m$ 일 때, $S(km, (k+1)m] = k$ 임을 보이시오. [10점]

(3-2) 이제 수학적 귀납법을 이용하여 다음 명제를 증명하고자 한다.

[명제] $a_1, a_2, \dots, a_{m^2+m-1}, a_{m^2+m}$ 이 다음과 같은 $m+1$ 개의 m -토막으로 이루어져 있다.

$$\underbrace{0, \dots, 0}_{m \text{개}}, \underbrace{0, \dots, 0, 1}_{m \text{개}}, \underbrace{0, \dots, 0, 1, 1}_{m \text{개}}, \dots, \underbrace{0, 1, \dots, 1}_{m \text{개}}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{m \text{개}} \quad \text{----- (*)}$$

(*)에서와 같이 수열 $a_1, a_2, \dots, a_{m^2+m-1}, a_{m^2+m}$ 을 m -토막을 $m+1$ 개의 m -토막으로 나타내었을 때, 왼쪽부터 오른쪽까지 차례로 0번째, 1번째, \dots , m 번째 m -토막이라 부르자. 위 명제를 증명하려면 다음 명제 $p(k)$ 가 $0 \leq k \leq m$ 인 모든 k 에 대하여 성립함을 보이면 된다.

[명제 $p(k)$] k 번째 ($0 \leq k \leq m$) m -토막 $a_{km+1}, a_{km+2}, \dots, a_{(k+1)m}$ 이 다음과 같다.

$$\underbrace{0, \dots, 0}_{m-k}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_k$$

이것이 $k=0$ 일 때 성립함을 보인 후, $k-1$ 번째 m -토막에 대하여 성립한다고 가정하고, k 번째 m -토막에 대해 성립함을 보이면 된다.

(a) 명제 $p(k-1)$ 이 성립한다고 가정하고, k 번째 m -토막에서 처음 1이 나오는 것이 ℓ 번째 항이라 가정하자. $j = k, k+1, \dots, m$ 에 대하여 $S(\ell + (j-1)m, \ell + jm]$ 의 값을 구하시오. [10점]

(b) 명제 $p(k)$ 가 모든 $k = 0, 1, \dots, m$ 에 대하여 성립함을 보이시오. [15점]

(단, 이 명제가 주어진 조건에 대한 충분조건임을 보일 필요는 없다.)

논술 모의고사 (자연계열)

<연 습 장>

논술 모의고사 (자연계열)

<연 습 장>

