2025학년도 논술우수자전형 모의논술
자연계열 [문제 2] 해설 및 모범답안

[문제 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 자연수 n에 대하여 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.
   (ⅰ) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.
   (ⅱ) $n=k$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

2. 함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여
   (ⅰ) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되고
   (ⅱ) 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재하며
   (ⅲ) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
   일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

3. 함수 $y=f(x)$에 대하여
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$
가 존재하면 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

[1] 모든 자연수 n에 대하여 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin nx}{\sin x} = n$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오. [8점]

[2] 곡선 $x^3 - y^3 = \sin xy + 1$ 위의 점 $(a, 0)$에서의 접선의 기울기가 b일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [6점]

[3] 모든 실수 x에서 정의된 함수 $g(x) = \sum_{k=0}^{2024} {}_{2024}\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{2024-k} e^{\frac{kx}{2}}$에 대하여 방정식 $\frac{g'(x)}{g(x)} = 253$의 해를 $x=a$라고 하자. 실수 a의 값과 함수 $g(x)$ 위의 점 $(a, g(a))$에서의 접선의 방정식을 구하시오. [8점]

[4] 모든 실수 x에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x>0) \\ 0 & (x=0) \\ \sqrt{-x^3} & (x<0) \end{cases}$$

(1) $x=0$에서 함수 $f(x)$의 미분가능성을 조사하시오. [8점]

(2) $x=0$에서의 함수 $f'(x)$의 연속성을 조사하시오. [12점]

(3) 정적분 $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{6}{\pi}} \frac{f(x)}{x^5}dx$를 구하시오. [8점]

■ 출제 의도

[1] 명제의 증명 방법 중 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있는 능력을 평가한다.
[2] 음함수의 미분법을 이해하고 합성함수의 미분법을 활용하여 미분을 계산할 수 있는지를 판단한다.
[3] 이항정리를 이용하여 정의된 함수를 이해하고 방정식과 미분을 활용할 수 있는 능력을 판단한다.
[4] 함수의 연속성과 미분가능성에 대한 개념을 이해하고 이를 활용하는 능력과 정적분의 계산력을 판단한다.

■ 문항 해설

[1] 자연수와 관련된 명제 증명을 위하여 수학적 귀납법의 정의를 이해하고 활용할 수 있는지를 묻는 문항이다.
[2] 음함수 미분법과 합성함수의 미분법을 활용하여 주어진 값을 구할 수 있는지를 묻는 문항이다.
[3] 이항정리를 활용하여 함수를 간결하게 표현하고, 함수와 관련된 방정식 문제 해결능력과 그 함수를 미분할 수 있는지를 묻는 문항이다.
[4] (1) 구간을 나누어 정의된 함수에 대해 미분가능성의 정의를 활용할 수 있는지를 묻는 문항이다.
(2) 구간을 나누어 도함수를 구하고 그 함수의 연속성의 정의를 활용할 수 있는지를 묻는 문항이다.
(3) 적분 구간에 맞는 함수를 선택하여 정적분을 계산하고 그 과정에서 부분적분법을 수행할 수 있는지를 묻는 문항이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1]	$n=1$일 때 성립함을 증명하면	2
	$n=k$일 때 성립한다고 가정한 식을 표현하면	3
	삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 $n=k+1$일 때 증명하면	3
[2]	$a=1$을 구하면	2
	미분하여 $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-y\cos xy}{3y^2+x\cos xy}$을 보이면	2
	점 $(1,0)$에서의 접선의 기울기 $b=3$와 $a+b=4$를 구하면	2
[3]	$g(x)=\left(\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}+\frac{3}{4}\right)^{2024}$와 $g'(x)=2024\left(\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}+\frac{3}{4}\right)^{2023}\frac{1}{8}e^{\frac{x}{2}}$를 보이면	4
	$a=0$와 접선의 방정식 $y=253x+1$을 구하면	4
[4](1)	$\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}h\sin\frac{1}{h}=0$임을 보이면	4
	$\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}(-\sqrt{-h})=0$임을 보이면	4
[4](2)	$x>0$일 때, $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$을 구하면	4
	$x<0$일 때, $f'(x)=\frac{d}{dx}(-x)^{\frac{3}{2}}=-\frac{3}{2}(-x)^{\frac{1}{2}}$을 구하면	4
	$\lim_{x\to 0+}f'(x)$이 존재하지 않음을 보이고, $x=0$에서 함수 $f'(x)$가 불연속임을 언급하면	4
[4](3)	$\frac{1}{x}=t$로 두고 $\int_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{6}{\pi}}\frac{f(x)}{x^5}dx=\int_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{6}{\pi}}\frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}t\sin t\,dt$임을 보이면	4
	$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}t\sin t\,dt=[-t\cos t]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}+[\sin t]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi\sqrt{3}+6}{12}$임을 보이면	4

■ 예시 답안

[1]

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin x}=1$, (우변)$=1$

(ii) $n=k$일 때, 주어진 식이 성립한다고 가정하면 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{\sin x}=k$

가정과 삼각함수의 덧셈정리를 이용하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(k+1)x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx\cos x+\cos kx\sin x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{\sin x}\times\lim_{x\to 0}\cos x+\lim_{x\to 0}\cos kx=k\cdot 1+1=k+1$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 식이 성립한다.

(i), (ii)로부터 주어진 식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

[2]

점 $(a,0)$이 곡선 $x^3-y^3=\sin xy+1$ 위의 점이므로

$a^3=1$, $(a-1)(a^2+a+1)=0$, a는 실수이므로

따라서 $a=1$

$x^3-y^3=\sin xy+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$3x^2-3y^2\frac{dy}{dx}=\cos xy\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)$$

따라서 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^2-y\cos xy}{3y^2+x\cos xy}$

점 $(1,0)$에서의 접선의 기울기는 $b=3$

따라서 $a+b=4$

[3]

$$g(x)=\sum_{k=0}^{2024}{}_{2024}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{2024-k}e^{\frac{kx}{2}}=\sum_{k=0}^{2024}{}_{2024}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{2024-k}=\left(\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}+\frac{3}{4}\right)^{2024}$$

$$g'(x)=2024\left(\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}+\frac{3}{4}\right)^{2023}\frac{1}{8}e^{\frac{x}{2}}$$

$\dfrac{g'(x)}{g(x)}=253\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}+\frac{3}{4}}=253$이므로 $e^{\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}+\dfrac{3}{4}$이고 $x=0$

따라서 $a=0$

접점은 $(a,g(a))=(0,1)$이고 접선의 기울기는 $g'(0)=253\cdot g(0)=253$

따라서 구하고자 하는 접선의 방정식은 $y=253x+1$

[4]

(1) (ⅰ) $\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0+}h\sin\frac{1}{h}$

$-1\le sin\frac{1}{h}\le 1$이고 $h>0$이면 $-h\le h\sin\frac{1}{h}\le h$이다.

이 부등식에 $h\to 0+$과 함수의 극한의 대소 관계를 적용하면 다음을 얻는다.

$\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}h\sin\frac{1}{h}=0$

(ⅱ) $\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{\sqrt{-h^3}-0}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{\sqrt{(-h)^3}}{-\sqrt{(-h)^2}}=\lim_{h\to 0-}(-\sqrt{-h})=0$

(ⅰ)과 (ⅱ)로부터 $f'(0)=0$

(2) $x>0$일 때, $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$

$x<0$일 때, $f'(x)=\frac{d}{dx}(-x)^{\frac{3}{2}}=-\frac{3}{2}(-x)^{\frac{1}{2}}$

$x=0$일 때, (1)의 결과로부터 $f'(0)=0$

따라서 다음을 얻는다.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & (x>0) \\ 0 & (x=0) \\ -\frac{3}{2}(-x)^{\frac{1}{2}} & (x<0) \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0+}f'(x)=\lim_{x\to 0+}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$에서

$\lim_{x\to 0+}\cos\frac{1}{\mathrm{x}}$의 값이 존재하지 않으므로 $\lim_{x\to 0+}f'(x)$과 $\lim_{x\to 0}f'(x)$은 존재하지 않는다.

따라서 $x=0$에서 함수 $f'(x)$는 불연속이다.

(3) $\int_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{6}{\pi}}\frac{f(x)}{x^5}dx=\int_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{6}{\pi}}\frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x}dx$

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $dx=-\frac{dt}{t^2}$이고

$x=\frac{2}{\pi}$일 때 $t=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{6}{\pi}$일 때 $t=\frac{\pi}{6}$이므로

$\int_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{6}{\pi}}\frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x}dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}t\sin t\,dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}t\sin t\,dt=[-t\cos t]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}+[\sin t]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi\sqrt{3}+6}{12}$