

수학 영역 (가형)

시간 : 100분

점수 : 100점



5지선다형

1. 좌표평면 위의 두 점 $A(-3, 2)$, $B(1, 5)$ 에 대하여 $|\overrightarrow{AB}|$ 의 값은?
[2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
- ④ 4 ⑤ 5

2. $\cos \frac{5}{3}\pi$ 의 값은?
[2점]

- ① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$
- ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. ${}^3C_2 + {}^3H_2$ 의 값은?
[2점]

- ① 6 ② 7 ③ 8
- ④ 9 ⑤ 10

4. 부등식 $\log_{\frac{1}{2}} x \geq -2$ 를 만족시키는 모든 정수 x 의 값의 합은? [3점]

- ① 6 ② 7 ③ 8
- ④ 9 ⑤ 10

5. 두 사건 A 와 B 는 서로 독립이고

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}, P(A|B) = \frac{5}{6}$$

일 때, $P(A \cup B)$ 의 값은?

[3점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{7}{15}$ ③ $\frac{3}{5}$
 ④ $\frac{11}{15}$ ⑤ $\frac{13}{15}$

6. $\int_1^e \frac{1-\ln x}{x} dx$ 의 값은?

[3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
 ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

7. $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 방정식 $2\cos^2 x = 3\sin x$ 의 두 근을 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라

할 때, $\frac{\beta}{\alpha}$ 의 값은?

[3점]

- ① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

8. 세 벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 에 대하여 $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ 이고 $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 5$ 일 때, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 의 값은? [3점]

- ① -6 ② -4 ③ -2
 ④ 0 ⑤ 2

9. 자연수 8의 분할 중에서 1과 2를 모두 한 개 이상씩 포함한 자연수로 분할하는 방법의 수는? [3점]

- ① 7 ② 8 ③ 9
 ④ 10 ⑤ 11

10. 좌표공간에 xy 평면과 접하는 구가 있다. 이 구의 중심에서 xy 평면까지의 거리는 4, yz 평면까지의 거리는 2, zx 평면까지의 거리는 1일 때, 구의 방정식은

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

이다. 네 상수 a, b, c, d 에 대하여 $a + b + c + d$ 의 값은? (단, 구의 중심의 x 좌표, y 좌표, z 좌표는 모두 양수이다.) [3점]

- ① -10 ② -9 ③ -8
 ④ -7 ⑤ -6

11. 어느 자동차 타이어 회사에서 생산하는 타이어의 수명은 평균이 36개월, 표준편차가 4개월인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산한 타이어 중 임의로 1개를 선택할 때, 타이어의 수명이 30개월 이상 38개월 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

[3점]

- ① 0.3830 ② 0.5328 ③ 0.6247
 ④ 0.7745 ⑤ 0.8185

12. 함수 $f(x) = (x^2 + x - 1)e^x$ 에 대하여 방정식 $f'(x) = 0$ 의 두 근을 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 할 때, $f(\alpha)$ 의 값은? [3점]

- ① -1 ② $-\frac{1}{e}$ ③ $\frac{1}{e^2}$
 ④ $\frac{5}{e^3}$ ⑤ $\frac{11}{e^4}$

13. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-2}{x-2} = 4$ 를 만족시킬 때, 함수 $f(2x^2)$ 의 $x=1$ 에서의 미분계수는? [3점]

- ① 4 ② 8 ③ 12
 ④ 16 ⑤ 20

14. 서로 다른 두 개의 주사위 A, B를 던져서 나온 눈의 수를 각각 a, b 라 하자. $a+b+ab$ 가 홀수일 때, ab 가 3 또는 6일 확률은? [4점]

- ① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$
 ④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

15. $\int_0^{\frac{\pi}{k}} x \cos kx dx = -\frac{1}{8}$ 을 만족시키는 양수 k 의 값은? [4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

16. 매개변수 t 로 나타낸 곡선

$$x = \frac{1}{3}t^3 - t, y = t^2 - 2t - 1$$

에서 $t=3$ 일 때의 접선을 l 이라 할 때, 원점과 직선 l 사이의 거리는? [4점]

- ① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$
 ④ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\sqrt{5}$

17. 숫자 2, 2, 3, 4가 각각 하나씩 적힌 공 4개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 공을 한 개 꺼내어 그 공에 적힌 수를 종이에 적고, 꺼낸 공을 주머니에 다시 넣는 시행을 반복할 때, 종이에 적힌 모든 수의 합이 처음으로 9 이상이 될 때까지 주머니에서 공을 꺼낸 횟수를 확률변수 X 라 하자. 다음은 $E(X)$ 의 값을 구하는 과정이다.

주머니에서 임의로 꺼낸 공에 적힌 수가 2, 3, 4일 확률은 각각 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ 이고, 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 3, 4, 5이다.

(i) $X=5$ 인 사건은
공을 4번 꺼낼 때까지 종이에 적힌 수의 합이 8인 경우뿐이므로 $P(X=5) = \square$ (가)

(ii) $X=4$ 인 사건은
공을 3번 꺼낼 때까지 종이에 적힌 수의 합이 6이고 네 번째 꺼낸 공에 적힌 수가 3 이상인 경우,
공을 3번 꺼낼 때까지 종이에 적힌 수의 합이 7인 경우,
공을 3번 꺼낼 때까지 종이에 적힌 수의 합이 8인 경우로 나눌 수 있다. 그러므로

$$P(X=4) = {}_3C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \square$$

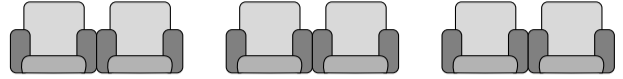
$$+ \left\{ {}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^1 + {}_3C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \right\}$$

(i), (ii)에서 $P(X=3) = 1 - P(X=5) - P(X=4)$ 이므로 $E(X) = \square$ (다)

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c 라 할 때, $a+b+c$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{109}{32}$ ② $\frac{113}{32}$ ③ $\frac{117}{32}$
 ④ $\frac{121}{32}$ ⑤ $\frac{125}{32}$

18. 남학생 3명과 여학생 3명이 그림과 같은 6개의 좌석에 각각 1명씩 앉으려고 한다.



붙어 있는 좌석에 남학생과 여학생이 1명씩 앉고 난 후 각 학생에게 같은 종류의 공책 3권과 같은 종류의 연필 3자루 중 어느 하나를 반드시 나누어 주는 경우의 수는? [4점]

- ① 4032 ② 4608 ③ 5184
 ④ 5760 ⑤ 6236

19. 한 평면 위에서 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점 O, A, B 에 대하여 점 O 를 지나고 직선 OA 와 수직인 직선 위의 한 점을 P , 점 O 를 지나고 직선 OB 와 수직인 직선 위의 한 점을 Q 라 하자. 벡터 $\vec{OP} + \vec{OQ}$ 와 벡터 \vec{AB} 가 서로 수직일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\vec{OA} \cdot \vec{OB} \neq 0$) [4점]

<보기>

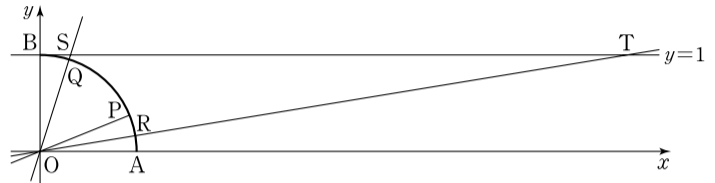
ㄱ. $\vec{OP} \cdot \vec{OB} = \vec{OQ} \cdot \vec{OA}$
 ㄴ. 두 벡터 \vec{OA}, \vec{OB} 가 이루는 각의 크기가 $\theta (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ 일 때, 두 벡터 \vec{OP}, \vec{OQ} 가 이루는 각의 크기는 $\pi - \theta$ 이다.
 ㄷ. $\frac{|\vec{OP}|}{|\vec{OA}|} = \frac{|\vec{OQ}|}{|\vec{OB}|}$

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 그림과 같이 좌표평면의 제1사분면 위에 중심이 원점 O 이고 반지름의 길이가 1인 사분원 OAB 가 있다. 제1사분면의 호 AB 위에 있는 세 점 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), R$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $y_2 = 6y_1$
 (나) $\angle AOP = 3\angle AOR$

직선 OQ 와 직선 $y=1$ 이 만나는 점을 S , 직선 OR 와 직선 $y=1$ 이 만나는 점을 T 라 하자. $\angle AOP = \theta$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{BS}{BT}$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{18}$ ③ $\frac{1}{20}$
 ④ $\frac{1}{24}$ ⑤ $\frac{1}{30}$

21. 닫힌 구간 $[1, e]$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ 의 그래프 위의 점 $P(a, f(a))$ 와 그 역함수 $y=g(x)$ 의 그래프 위의 점 $Q(f(a), a)$ 에 대하여 선분 PQ의 중점을 M이라 하자. $a=1$ 일 때의 중점 M을 A라 하고, $a=x(1 \leq x \leq e)$ 일 때의 중점 M을 B라 할 때, $h(x) = \overline{AB}$ 라 하자. $\frac{h(2)}{h'(2)}$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{7-2\ln 2}{9}$ ② $\frac{7-\ln 2}{9}$ ③ $\frac{7-2\ln 2}{7}$
 ④ $\frac{7-\ln 2}{7}$ ⑤ $\frac{7-2\ln 2}{5}$

단답형

22. 함수 $f(x) = 2^{x-2} + 3$ 의 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프에서 점근선의 방정식이 $x=a$ 일 때, a 의 값을 구하시오. [3점]

23. 세 학생 A, B, C를 포함한 7명의 학생을 일렬로 세운다고 하자. A와 B는 서로 이웃하고, C는 A, B 어느 누구와도 이웃하지 않도록 세울 확률이 $\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [3점]

24. 좌표공간에서 두 점 $A(2, 3, 1)$, $B(-1, 1, 2)$ 를 지나는 직선이 xy 평면과 만나는 점을 $(a, b, 0)$ 이라 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오.
[3점]

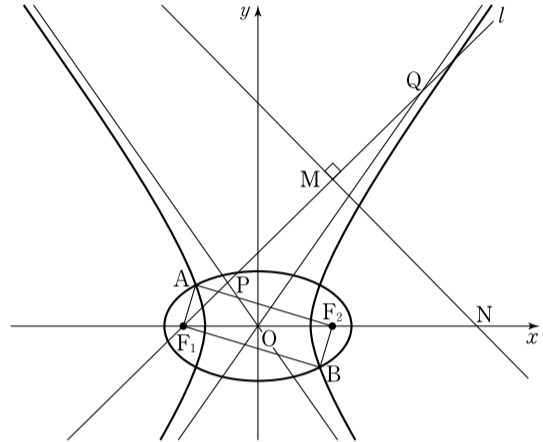
25. 포물선 $y^2 = 4px$ 의 초점 F 를 중심으로 하고 준선과 접하는 원이 포물선과 제1사분면에서 만나는 점을 P 라 하자. 점 P 에서 준선에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, 삼각형 PHF 의 넓이가 20이다. p^2 의 값을 구하시오. (단, p 는 양의 상수이다.)
[3점]

26. 함수 $f(x) = e^{-x}$ 에 대하여 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점 $P(1, e^{-1})$ 에서의 접선과 직선 $x = 1$ 및 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 , 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 두 직선 $x = 1$, $x = t (t > 1)$ 및 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하자. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_2}{S_1}$ 의 값을 구하시오.
[4점]

27. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d, e 의 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수를 구하시오. [4점]

- (㉠) $\log_2 a + \log_2 b = 2$
- (㉡) $a + b + c + d + e = 8$

28. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$ 과 쌍곡선의 두 초점이 F_1, F_2 로 일치하고, 이 타원과 쌍곡선이 만나는 제2사분면과 제4사분면 위의 점을 각각 A, B 라 하자. 또, 점 F_1 을 지나고 기울기가 $m(0 < m < 1)$ 인 직선 l 이 쌍곡선의 두 점근선과 만나는 점을 각각 P, Q 라 하고 선분 PQ 의 중점 M 을 지나고 직선 l 과 수직인 직선이 x 축과 만나는 점을 N 이라 하자. 사각형 AF_1BF_2 가 직사각형이고 $\overline{F_1F_2} = \overline{F_2N}$ 일 때, $m^2 = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, 점 F_1 의 x 좌표는 음수이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



29. 좌표공간의 네 점 $O(0, 0, 0)$, $A(0, 3, -1)$, $B(\sqrt{5}, 2, 1)$, $C\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{7}{3}, 2\right)$ 를 꼭짓점으로 하는 정사면체 $OABC$ 와 평면 $y+3z=t(0 < t < 5)$ 가 만나서 생기는 도형의 xy 평면 위로의 정사영의 넓이가 $\frac{9\sqrt{5}}{8}$ 일 때 $t = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 열린 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 함수 $f(x) = \tan x$ 의 역함수를 $y = g(x)$ 라 하자. 함수 $h(x)$ 를

$$h(x) = \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\sqrt{2}}{4} \{g(\sqrt{2}x + 1) + g(\sqrt{2}x - 1)\}$$

이라 할 때, $h'(x) = \frac{b}{x^4 + a}$ 이다.

- $\int_0^{\frac{a+b}{2}} g'(x^2) dx = \frac{\sqrt{2}}{8} \{\ln(c + 2\sqrt{2}) + d\pi\}$ 일 때, $10(ab + cd)$ 의 값을 구하시오. (단, a, b, c, d 는 자연수이다.) [4점]

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.