

# 수 학

## A

1. 문제지 상단의 문제 유형을 표시하시오.

① A형

② B형

3. 곡면  $x+3y^2+z^4=5$  위의 점  $(1, 1, 1)$ 에서의 접평면을  $\alpha$ 라 하자. 점  $(-2, a, b)$ 가  $\alpha$  위에 있을 때,  $a^2+b^2$ 의 최솟값은? [3점]

①  $\frac{5}{4}$

②  $\frac{7}{4}$

③  $\frac{9}{4}$

④  $\frac{11}{4}$

⑤  $\frac{13}{4}$

2. <보기>에서 수렴하는 급수만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

< 보 기 >

ㄱ.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(2n^3)}{1+n^2}$

ㄴ.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \times n!}{n^n}$

ㄷ.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n}$

4. 함수  $f(x) = \frac{\sin x}{2+e^x}$ 의  $x=0$ 에서의 4차 테일러 다항식을  $p(x)$ 라 할 때,  $p(1)$ 의 값은? [4점]

①  $\frac{4}{27}$

②  $\frac{14}{81}$

③  $\frac{16}{81}$

④  $\frac{2}{9}$

⑤  $\frac{20}{81}$

① ㄱ

② ㄷ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5. 곡선  $y = \frac{3x}{1+x^3}$  와 세 직선  $y=0, x=1, x=5$  로

둘러싸인 부분을  $y$  축을 중심으로 회전하여 얻은 입체의 부피는? [4점]

- ①  $3\pi + \ln 21$       ②  $\pi + 3 \ln 21$       ③  $3\pi \ln 21$   
 ④  $2\pi + \ln 63$       ⑤  $2\pi \ln 63$

6. 영역

$$\{(r \cos \theta, r \sin \theta) \mid 1 + 2 \cos \theta \leq r \leq 4 \cos \theta\}$$

의 넓이는? [5점]

- ①  $\frac{8\pi - \sqrt{3}}{6}$       ②  $\frac{9\pi - 2\sqrt{3}}{6}$       ③  $\frac{10\pi - 3\sqrt{3}}{6}$   
 ④  $\frac{11\pi - 4\sqrt{3}}{6}$       ⑤  $\frac{12\pi - 5\sqrt{3}}{6}$

7.  $\int_0^2 \int_{2y}^4 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx dy$  의 값은? [4점]

- ①  $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$       ②  $\frac{\sqrt{5}-1}{3}$       ③  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$   
 ④  $\frac{\sqrt{17}-1}{3}$       ⑤  $\frac{\sqrt{17}-1}{2}$

8. 두 평면  $z=2y, z=0$  과 곡면  $y=2x-x^2$  에 둘러싸인

부분을  $S$  라 할 때,  $\iiint_S x dV$  의 값은? [5점]

- ①  $\frac{16}{15}$       ②  $\frac{15}{14}$       ③  $\frac{14}{13}$       ④  $\frac{13}{12}$       ⑤  $\frac{12}{11}$

9. 곡면  $\sigma: x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ 과 벡터장(vector field)

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x+y)\mathbf{i} + (3z^2+y)\mathbf{j} + (x+z)\mathbf{k}$$

에 대하여

$$\iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

의 값은? (단,  $\mathbf{n}$ 은  $\sigma$ 의 외향단위법선벡터장(outward unit normal vector field)이다.) [4점]

- ①  $12\pi$     ②  $18\pi$     ③  $24\pi$     ④  $30\pi$     ⑤  $36\pi$

10. 선형사상

$$T(x, y, z) = (x+2y+z, x+y+z, 2x+7y+az, 3x+5y+bz)$$

의 치역  $\text{Im}T$ 의 차원이 2이고, 핵  $\text{Ker}T$ 의 차원이  $c$ 일 때,  $a+b+c$ 의 값은? (단,  $a, b, c$ 는 상수이다.) [3점]

- ① 3    ② 4    ③ 5    ④ 6    ⑤ 7

11. 모든  $3 \times 3$  행렬들로 이루어진 벡터공간  $M_3(\mathbb{R})$ 에 대하여

$$\begin{cases} a_{1j} + a_{2j} + a_{3j} = 0 & (j=1, 2, 3) \\ a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} = 0 & (i=1, 2, 3) \\ a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0 \\ a_{13} + a_{22} + a_{31} = 0 \end{cases}$$

을 만족하는 모든 행렬  $(a_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$ 의 집합을  $U$ ,

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad (1 \leq i, j \leq 3)$$

을 만족하는 모든 행렬  $(a_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$ 의 집합을  $W$ 라 하자.

부분공간  $U+W = \{u+w \mid u \in U, w \in W\}$ 의 차원은? [5점]

- ① 3    ② 4    ③ 5    ④ 6    ⑤ 7

12. 선형사상

$$T(a, b, c, d, e) = (a+b, b+c, c+d, d+e, 3e)$$

에 대하여, 벡터  $v = (0, 1, 0, 0, 0)$ 을 포함하는 가장 작은  $T$ -불변부분공간( $T$ -invariant subspace)의 차원은? [4점]

- ① 1    ② 2    ③ 3    ④ 4    ⑤ 5

13. 두 행렬  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 의

특성다항식(characteristic polynomial)을 각각  $f_A(x)$ ,  $f_B(x)$ ,  
 최소다항식(minimal polynomial)을 각각  $m_A(x)$ ,  $m_B(x)$ 라  
 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점]

< 보 기 >

- ㄱ.  $f_A(x) = f_B(x)$
- ㄴ.  $m_A(x) = m_B(x)$
- ㄷ.  $A$ 와  $B$ 는 닮은 행렬(similar matrix)이다.
- ㄹ.  $f_A(x) = m_B(x)g(x)$ 인 실수 계수 다항식  $g(x)$ 가 존재한다.

- ① ㄱ                      ② ㄱ, ㄴ                      ③ ㄴ, ㄷ
- ④ ㄱ, ㄴ, ㄷ            ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

14. 행렬  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ 에 대하여  $\det A = 8$ 이고, 벡터공간  $\mathbb{R}^3$ 의

영벡터가 아닌 모든 벡터는 행렬  $A$ 의 고유벡터일 때,  
 $a+e+i$ 의 값은? (단,  $\det A$ 는  $A$ 의 행렬식이다.) [4점]

- ① 6                      ② 7                      ③ 8                      ④ 9                      ⑤ 10

15. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

- ㄱ.  $4 \times 4$  행렬  $A$ 가 가역행렬이고  $B = (\det A)A^{-1}$ 일 때,  
 $\det(A^3) = \det B$ 이다.
- ㄴ.  $5 \times 5$  행렬  $A = (a_{ij})$ 가  $a_{ij} = -a_{ji}$  ( $1 \leq i, j \leq 5$ )를  
 만족할 때,  $\det A = 0$ 이다.
- ㄷ.  $W_1, W_2, W_3$ 이 벡터공간  $V$ 의 부분공간일 때,  
 $(W_1 + W_2) \cap W_3 = (W_1 \cap W_3) + (W_2 \cap W_3)$ 이다.

- ① ㄱ                      ② ㄷ                      ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ                ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 미분방정식  $x'(t) + 3x(t) = 4$ 의 해  $x(t)$ 가  
 초기조건  $x(0) = 5$ 를 만족할 때,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ 의 값은? [3점]

- ①  $\frac{3}{4}$                       ②  $\frac{4}{5}$                       ③  $\frac{4}{3}$                       ④  $\frac{3}{2}$                       ⑤  $\frac{5}{3}$

17. 미분방정식  $x'(t) + 2x(t) = e^t \sqrt{x(t)}$  의 해  $x(t)$  가 초기조건  $x(0) = 4$  를 만족할 때,  $x(1)$  의 값은? [4점]

- ①  $\left(\frac{e}{4} + \frac{7}{4e}\right)^2$       ②  $\left(\frac{e}{4} - \frac{7}{4e}\right)^2$       ③  $\left(\frac{7e}{4} + \frac{1}{4e}\right)^2$   
 ④  $\left(\frac{e}{4} - \frac{9}{4e}\right)^2$       ⑤  $\left(\frac{e}{4} + \frac{9}{4e}\right)^2$

18. 미분방정식  $xx'' - (x')^2 - 2tx^2 = 0$  의 해  $x(t)$  가 조건  $x(0) = 2, x'(0) = 2$  를 만족할 때,  $x(3)$  의 값은? [5점]

- ①  $2e^{12}$       ②  $2e^{14}$       ③  $2e^{16}$       ④  $2e^{18}$       ⑤  $2e^{20}$

19. 어떤 수학자는 은하계 생명체의 개체수  $x(t)$  가 미분방정식

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 6x = 0 \\ x(0) = 5 \times 10^{21}, x'(0) = -8 \times 10^{21} \end{cases}$$

을 따라 감소한다고 예측하였다. 이 수학자의 예측에 따른  $t = 10$  일 때의 개체수  $x(10)$  의 값은? [3점]

- ①  $10^{21}(8e^{-20} - e^{-30})$       ②  $10^{21}(7e^{-20} - 2e^{-30})$   
 ③  $10^{21}(6e^{-20} - 3e^{-30})$       ④  $10^{21}(5e^{-20} - 4e^{-30})$   
 ⑤  $10^{21}(4e^{-20} - 5e^{-30})$

20. 함수  $f$  의 라플라스 변환  $F(s)$  가

$$F(s) = \frac{e^{-4s}}{s^2 + 3} + \frac{s - 1}{(s - 2)^2 + 3}$$

일 때,  $\ln f\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{9}\right)$  의 값은? [4점]

- ①  $\frac{\sqrt{3}\pi}{9}$       ②  $\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$       ③  $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$   
 ④  $\frac{4\sqrt{3}\pi}{9}$       ⑤  $\frac{5\sqrt{3}\pi}{9}$

21. 연립미분방정식

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) + 2e^{-t} \\ y'(t) = 4x(t) + y(t) + 4e^{-t} \end{cases}$$

의 해  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ 가 초기조건  $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ 을 만족할 때,  
 $2x(\ln 2) + y(\ln 2)$ 의 값은? [4점]

- ① 102      ② 105      ③ 108      ④ 111      ⑤ 114

※ 아래 주관식 문제 [22-26]의 정답 표기는 답안지의  
 「주관식 답란 표기방법」을 참조하십시오.

22. 곡면

$F(u, v) = (2u \cos v, 2u \sin v, u^2)$  ( $\sqrt{3} \leq u \leq 2\sqrt{2}, 0 \leq v \leq 3$ )  
 의 넓이를 구하십시오. [4점]

23. 실수  $x, y, z$ 가  $3x^2 + y^2 + z^2 = 20$ 을 만족할 때,  
 $xyz^3$ 의 최댓값을 구하십시오. [4점]

24. 벡터공간  $V$ 의 기저  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 에 대한 선형사상

$$T: V \rightarrow V \text{의 행렬표현이 } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{일 때,}$$

$V$ 의 기저  $\{v_1, T(v_1), T^2(v_1), v_4\}$ 에 대한  $T$ 의 행렬표현을  
 $A$ 라 하자. 행렬  $A$ 의 모든 성분들의 합을 구하십시오. [4점]

25. 행렬  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 의 복소수 범위의 서로 다른

네 고윳값을  $a, b, c, d$ 라 할 때, 네 수의 곱  $abcd$ 의 값을 구하시오. [4점]

26. 반지름의 비가 2:3인 구 모양의 두 개의 눈덩이로 큰 눈덩이 위에 작은 것을 올려놓아 눈사람을 만들었다. 두 눈덩이가 녹을 때 그 부피는 표면적에 정비례하는 비율로 감소하고, 비례 상수는 두 눈덩이에 대해 동일하며, 녹는 동안 두 눈덩이는 모두 구 모양으로 유지된다고 하자.

눈사람의 처음 부피를  $V_1$ , 눈사람의 키가 처음의  $\frac{1}{2}$ 이 되었을 때 눈사람의 부피를  $V_2$ 라 하자.

$\frac{V_2}{V_1} = \frac{q}{p}$ 일 때,  $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단,  $p, q$ 는 서로소인 자연수이다.) [5점]

수 고 하 셧 습 니 다.