단국대학교 2024학년도 수시모집 논술고사

자연계열 가이드답안 (오후)

문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 정적분을 구할 수 있는지를 평가

[논제 2] 함수의 그래프의 개형으로부터 함수의 특성을 이해할 수 있는지를 평가

[논제 3] 부분적분법과 치환적분법을 활용할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 류희찬 외(2020), 수학 II, 천재교과서, 112-117쪽
○ 이준열 외(2020), 수학 II, 천재교육, 91-95쪽
○ 황선욱 외(2020), 미적분, 미래엔, 143-147쪽 150-154쪽

□ 문항해설

[논제 1] 정적분의 개념을 이해하고 문제를 해결할 수 있는지를 측정하는 문제

[논제 2] 문제의 조건을 이용하여 그래프의 개형을 그리고, 함수의 극값을 구할 수 있는지를 측정하는 문제

[논제 3] 치환적분법과 부분적분법을 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 측정하는 문제

□ 채점기준

[논제 1 평가기준]

- $f(x) = \ln(x^2+3) - \ln 4$ 임을 제시 : 6점
- 정답을 제시 : 9점 (각 3점씩)

[논제 2 평가기준]

- $g'(x) = a - \dfrac{16x}{(x^2+3)^2}$ 를 제시 : 3점
- 두 개의 극값을 갖는 a의 범위를 제시 : 7점
- 정답을 제시 : 10점

[논제 3 평가기준]

- $h(0) = \frac{16}{9}$, $h(1) = -1$를 제시 : 5점
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x\, h(\cos x)}{(3+\cos^2 x)^2}\, dx = \int_0^1 \frac{2u\, h(u)}{(u^2+3)^2} du$임을 제시 : 5점
- 정답을 제시 : 10점

□ 예시 답안

[논제 1] 먼저 $f(x) = \int_1^x \frac{2t}{t^2+3} dt = \ln(x^2+3) - \ln 4 = \ln \frac{x^2+3}{4}$이다.

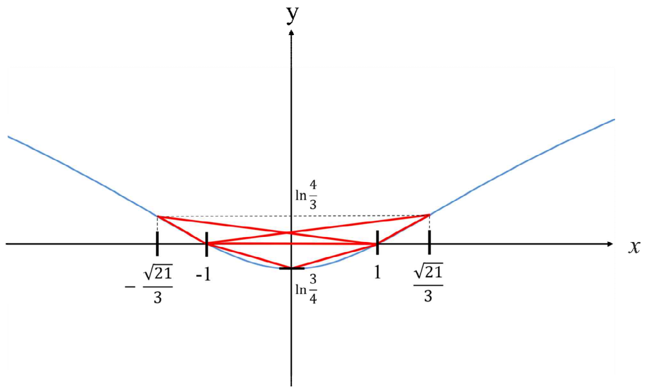
곡선 $y = f(x)$가 x축과 만나는 점의 x좌표는 $-1, 1$이므로 삼각형 밑변의 길이는 2이고 높이는 $\left| \ln \frac{t^2+3}{4} \right|$이다. 따라서

$$(\text{삼각형 넓이}) = \left| \ln \frac{t^2+3}{4} \right| = \ln \frac{4}{3}$$

에서

$$t = 0,\ \frac{\sqrt{21}}{3},\ -\frac{\sqrt{21}}{3}$$

이다.



[논제 2] 먼저 $g(x)$의 극값이 두 개이므로 $\alpha < \beta$ 일 때, “$g(\alpha) > g(\beta)$”은

“함수 $g(x)$가 $x = \alpha$에서 극댓값을 갖고, $x = \beta$에서 극솟값을 갖는다”

와 필요충분조건이다. 함수 $g'(x) = a - \frac{16x}{(x^2+3)^2}$의 그래프의 개형을 그리자.

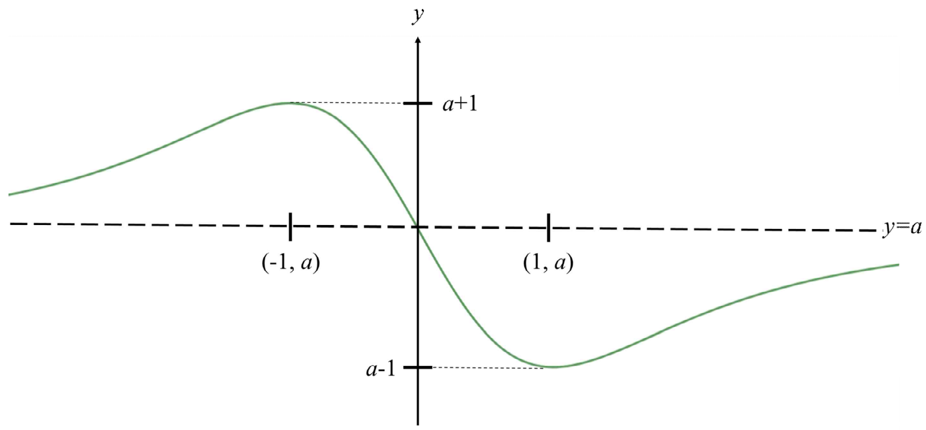
$$g''(x) = -\frac{16(x^2+3)^2 - 64x^2(x^2+3)}{(x^2+3)^4} = \frac{48(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$$

이므로 $g'(x)$는 $x = -1$에서 극댓값 $a+1$, $x = 1$에서 극솟값 $a-1$을 갖는다.

한편 $g'(0)=a$이고

$$\begin{cases} g'(x)<a \ (x>0) \\ g'(x)>a \ (x<0) \end{cases}, \ \lim_{x\to\pm\infty} g'(x)=a$$

이므로 함수 $g'(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



($y=g'(x)$의 그래프)

그러므로 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극대이고 $x=\beta$ $(\alpha<\beta)$ 에서 극소를 갖기 위해서는 제시문 (나)에 의해서 x축이 직선 $y=a-1$과 $y=a$ 사이에 놓여 있어야 한다. 따라서 $a-1<0<a$.
즉 $0<a<1$이다.

(별해) $g'(x)=\dfrac{a(x^2+3)^2-16x}{(x^2+3)^2}$가 $x=\alpha,\beta$에서 극값을 가질 필요충분조건은 $G(x)=a(x^2+3)^2-16x$가 $x=\alpha,\beta$에서 극값을 갖는 것이다. 따라서 $G(x)$가 극대, 극소가 되는 $x=\alpha,\beta$를 파악해도 된다.

[논제 3] $g'(x)=a-\dfrac{16x}{(x^2+3)^2}$이고 $g''(x)=-\dfrac{16}{(x^2+3)^2}+\dfrac{64x^2}{(x^2+3)^3}$ 이므로

$$f(-1)=0,\ g(1)=a+2,\ g'(-1)=a+1, g''(0)=-\frac{16}{9}$$

이다. 조건 (1)과 (2)에 의하여

$$h(0)=\frac{16}{9},\ h(1)=g'(-1)-g(1)=-1$$

이다. $\sin 2x=2\sin x\cos x$이므로 $\cos x=u$라 하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x\, h(\cos x)}{(3+\cos^2 x)^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos x\, h(\cos x)}{(3+\cos^2 x)^2}dx=\int_0^1\frac{2u\,h(u)}{(u^2+3)^2}du$$

이다. 여기서 $k(u)=\dfrac{1}{u^2+3}$이라고 하면 $k'(u)=-\dfrac{2u}{(u^2+3)^2}$이므로

부분적분법을 이용하면

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{2u\,h(u)}{(u^2+3)^2}du &= -\int_0^1 k'(u)h(u)du \\ &= -\Big[\ k(u)h(u)\ \Big]_0^1 + \int_0^1 k(u)h'(u)du \\ &= -k(1)h(1)+k(0)h(0)+\int_0^1 \frac{h'(u)}{u^2+3}du \\ &= -\frac{1}{4}h(1)+\frac{1}{3}h(0)+\int_0^1 \frac{h'(u)}{u^2+3}du = -\frac{17}{108}\end{aligned}$$

이다.

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 곡선의 변곡점을 이해하고 활용할 수 있는지를 평가

[논제 2] 함수의 극대 극소를 활용하여 그래프의 개형을 이해하는지를 평가

□ 자료출처

○ 이준열 외(2020), 미적분, 천재교육, 112-116쪽
○ 이준열 외(2020), 수학 II, 천재교육, 86-89쪽
○ 고성은 외(2020), 미적분, 신사고, 80-84쪽
○ 고성은 외(2020), 수학 II, 신사고, 83-86쪽

□ 문항해설

[논제 1] 함수의 그래프의 변곡점에 관한 성질을 활용하여 문제의 조건을 해석하고 함숫값을 구할 수 있는지를 측정하는 문제

[논제 2] 미분가능한 함수의 극대, 극소에 관한 정의와 성질을 이해하고 이를 활용하여 문제의 조건을 만족하는 삼차함수를 찾을 수 있는지를 측정하는 문제

[논제 1 평가기준]

- $f(x) = a(x^2 - 7)$임을 제시: 5점
- $-\dfrac{1}{2e} \le a$을 제시: 10점
- 정답을 제시 : 5점

[논제 2 평가기준]

- $k'(x) = h'(x)\{h(x) - 1\}e^{h(x)}$을 제시 : 3점
- $0 < r < 2$ 임을 제시 : 10점
- $h(x) = ax(x-2)^2 + 1$ 을 제시 : 5점
- $r = \dfrac{2}{3}$ 을 제시 : 5점
- 정답을 제시 : 2점

□ 예시 답안

[논제 1] $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a<0$)라 하면 $g''(x)=\{ax^2+(4a+b)x+2a+2b+c\}e^x$이다.
조건 (1)에서 $g''(1)=g''(-5)=0$이므로 근과 계수와의 관계로부터

$$\frac{4a+b}{a}=4,\quad \frac{2a+2b+c}{a}=-5$$

이므로, $b=0$이고 $c=-7a$이다. 따라서

$$f(x)=a(x^2-7),\ g(x)=a(x^2-7)e^x$$

또한 $x=-5, 1$의 좌우에서 $g''(x)$의 부호가 바뀌므로 조건 (1)을 만족시킨다.
조건 (2)에서 $x>0$일 때, $g'(x)\le 2$이므로

$$g'(x)=a(x^2+2x-7)e^x \le 2$$

이다. 따라서 $x>0$일 때,

$$(x^2+2x-7)e^x \ge \frac{2}{a}$$

이다. 한편 $m(x)=(x^2+2x-7)e^x$라 하자. $m'(x)=(x+5)(x-1)e^x$에서 방정식 $m'(x)=0$의 해는 $x=1$ 또는 $x=-5$이다. $x>0$일 때, 함수 $m(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$m'(x)$		$-$	0	$+$
$m(x)$		$\searrow$	$-4e$	$\nearrow$

위 표로부터 $x>0$일 때 $m(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $m(1)=-4e$을 가진다. 따라서 $\frac{2}{a}\le -4e$이고 a는 음수이므로

$$-\frac{1}{2e}\le a<0 \qquad \text{--------------------- ①}$$

$f(x)=a(x^2-7)$이므로

$$f(1)=-6a \qquad \text{--------------------- ②}$$

①과 ②에서

$$f(1)=-6a\le\frac{3}{e}$$

이다. 따라서 $f(1)$의 최댓값은 $a=-\frac{1}{2e}$일 때 $\frac{3}{e}$이다.

[논제 2] $k'(x)=h'(x)\{h(x)-1\}e^{h(x)}$이고 $k'(x)=0$에서

$$h'(x)=0 \text{ 이거나 } h(x)=1$$

이다. $h'(x)=0$이 중근을 갖거나 근을 갖지 않는 경우, $h(x)=1$은 하나의 근을 갖는다. 이것은 조건 (1)에 모순이다. 따라서 방정식 $h'(x)=0$은 서로 다른 두 근을 갖는다.
방정식 $h'(x)=0$의 두 근이

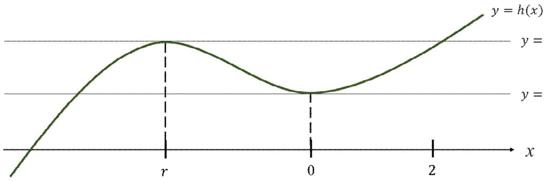
$0, 2$인 경우, $0, r$인 경우, $2, r$인 경우

로 나누어 생각하자.

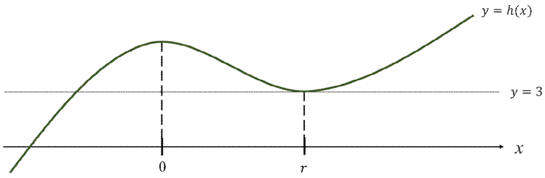
(i) 두 근이 $0, 2$인 경우: $h(r)=1$이므로 조건 (2)에 모순이다.

(ii) 두 근이 $0, r$인 경우: $r<0$인 경우와 $r>0$인 경우로 나누어 생각하자.

- $r<0$일 때, 조건 (1)에 의하여 $h(0)=1$이므로 조건 (3)에 모순이다.

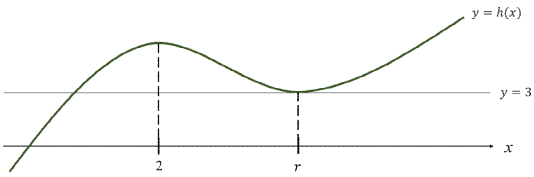


- $r>0$일 때, 조건 (3)에 모순이다.

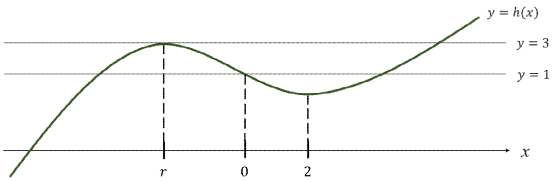


따라서 두 근은 2와 r이다.(이때 $h(0)=1$) 이 경우도 $0, r, 2$ 의 크기 비교를 위해, $r<0$인 경우와 $0<r<2$, $r>2$인 경우로 나누어 생각하자.

- $2<r$일 때, $1 \geq h(2) > h(r) = 3$이므로 모순이다.



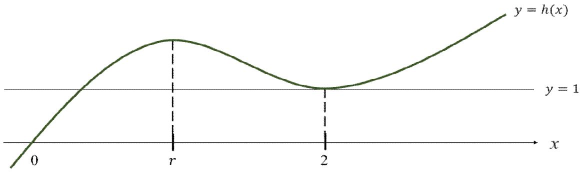
- $r<0$ 일 때, $h(0)=1$이고 $h(2)$는 극솟값이고 $h(x)=1$의 해가 3개이므로 조건 (1)에 모순이다.



그러므로

$$0<r<2$$

이고, $h(x)$의 그래프는 아래와 같다.



$h(x)-1=0$의 근은 $x=0$, 2(중근)이므로

$$h(x)-1=ax(x-2)^2 \qquad \text{--------------------- ③}$$

이다.

$$h'(x)=a(x-2)(3x-2)$$

이므로 $r=\dfrac{2}{3}$이다. $h\left(\dfrac{2}{3}\right)=3$이므로 ③으로부터 $a=\dfrac{27}{16}$이다.