수학 영역(A형)

1. 계산 능력 – 행렬과 그래프 정답 ④

$$2A-B=2\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 2 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $2A-B$의 모든 성분의 합은
$3+(-1)+2+0=4$이다.

2. 계산 능력 – 로그와 로그함수 정답 ①

$$\log_4 36-\log_2 24=\log_2 6-\log_2 24$$
$$=\log_2 \frac{6}{24}=\log_2 \frac{1}{4}$$
$$=\log_2 2^{-2}=-2$$

3. 계산 능력 – 함수의 극한과 연속 정답 ①

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x+1}=\frac{1+1}{1+1}=1$$

4. 이해 능력 – 행렬과 그래프 정답 ③

주어진 그래프의 꼭짓점의 개수는 5이므로 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타낸 행렬의 성분의 개수는 $5^2=25$

주어진 그래프의 변의 개수가 7이므로 행렬의 성분 중 1의 개수는 $2\times 7=14$ $\quad\therefore a=14$

행렬의 성분 중 0의 개수는

$25-14=11$ $\quad\therefore b=11$

$\therefore a-b=14-11=3$

5. 이해 능력 – 통계 정답 ②

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(5, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(X=3)={}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=10\times\frac{2^2}{3^5}$$
$$\mathrm{P}(X=2)={}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=10\times\frac{2^3}{3^5}$$
$$\therefore \frac{\mathrm{P}(X=3)}{\mathrm{P}(X=2)}=\frac{\frac{10\times 2^2}{3^5}}{\frac{10\times 2^3}{3^5}}=\frac{1}{2}$$

6. 이해 능력 – 지수와 지수함수 정답 ⑤

$a^5=8$에서 $a=\sqrt[5]{8}=\sqrt[5]{2^3}=2^{\frac{3}{5}}$

$b^3=32$에서 $b=\sqrt[3]{32}=\sqrt[3]{2^5}=2^{\frac{5}{3}}$

$$\therefore \frac{b}{a}=\frac{2^{\frac{5}{3}}}{2^{\frac{3}{5}}}=2^{\frac{5}{3}-\frac{3}{5}}=2^{\frac{25-9}{15}}=2^{\frac{16}{15}}$$

$\therefore k=\frac{16}{15}$

7. 이해 능력 – 통계 정답 ⑤

$\mathrm{E}(X)=5$, $\mathrm{E}(X^2)=30$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=30-25=5$

$\mathrm{E}(2X-1)=2\mathrm{E}(X)-1=2\times 5-1=9$

$\mathrm{V}(2X-1)=4\mathrm{V}(X)=4\times 5=20$

$\therefore \mathrm{E}(2X-1)+\mathrm{V}(2X-1)=9+20=29$

8. 이해 능력 – 수열 정답 ③

$$\sum_{k=1}^{8}(a_k+1)^2-\sum_{k=1}^{8}(a_k-1)^2$$
$$=\sum_{k=1}^{8}\{(a_k+1)^2-(a_k-1)^2\}$$
$$=\sum_{k=1}^{8}4a_k=4\sum_{k=1}^{8}a_k=4\sum_{k=1}^{8}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=4\{(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{9}-\sqrt{8})\}$$
$$=4(\sqrt{9}-1)=4\times 2=8$$

9. 이해 능력 – 함수의 극한과 연속 정답 ①

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+2x-3)^3}{(x^2-1)^m}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^3(x+3)^3}{(x-1)^m(x+1)^m}$$의 값이 존재하고, 0이 아니므로 $m=3$이다. 따라서

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^3(x+3)^3}{(x-1)^3(x+1)^3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+3)^3}{(x+1)^3}=\frac{4^3}{2^3}$$
$$=2^3=8$$

$\therefore n=8$

$\therefore m+n=3+8=11$

10. 수학 외적 문제 해결 능력 – 확률 정답 ④

A 독감예방 백신주사를 맞았을 때 그해 독감에 걸릴 확률은 $1-0.9=0.1$이다.

65세 이상의 노인 100명 중에서 임의로 선택한 한 사람이 그해 독감에 걸린 사람일 확률은

$\frac{1}{2}\times 0.1+\frac{1}{2}\times 0.8$이므로

$$p_1=\frac{\frac{1}{2}\times 0.8}{\frac{1}{2}\times 0.1+\frac{1}{2}\times 0.8}=\frac{8}{9}$$
$$p_2=\frac{\frac{1}{2}\times 0.1}{\frac{1}{2}\times 0.1+\frac{1}{2}\times 0.8}=\frac{1}{9}$$

$\therefore p_1-p_2=\frac{7}{9}$

11. 수학 외적 문제 해결 능력 – 로그와 로그함수 정답 ②

$L_1=2L_2$이므로

$$2\left(k\log\frac{a}{8}-1\right)\times 10^{-6}=4\left(k\log\frac{\sqrt{a}}{2}-1\right)\times 10^{-6}$$
$$k\log\frac{a}{8}-1=2k\log\frac{\sqrt{a}}{2}-2$$
$$k\log\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^2-k\log\frac{a}{8}=1$$
$$k\log\frac{a}{4}-k\log\frac{a}{8}=1,\ k\log\frac{\frac{a}{4}}{\frac{a}{8}}=1$$

$k\log 2=1$ $\quad\therefore k=\frac{1}{\log 2}$

12. 이해 능력 – 행렬과 그래프 정답 ③

$$A^2=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}a^2+bc & b(a+d)\\ c(a+d) & bc+d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

따라서 $a^2+bc=1$, $bc+d^2=1$ …… ㉠

$b(a+d)=0$, $c(a+d)=0$

(i) $a+d\neq 0$일 때

$b=0$, $c=0$이므로 $bc=0$

(ii) $a+d=0$일 때

$d=-a$이므로

㉠에서 $a^2+bc=1$

이때, $a^2\geq 0$이므로 $bc\leq 1$

(i), (ii)에서 bc의 최댓값은 1이다.

13. 수학 내적 문제 해결 능력 – 다항함수의 적분법 정답 ④

이차함수 $F(x)$가 $x=-2$일 때 최솟값 -1을 가지므로 그 그래프는 직선 $x=-2$에 대하여 대칭이다. 따라서

$F(x)=a(x+2)^2-1\ (a>0)$로 놓을 수 있다.

$F(x)=\int f(x)dx$에서

$f(x)=F'(x)=\{a(x+2)^2-1\}'=2a(x+2)$

$f(3)=2$에서 $2a(3+2)=2$, $10a=2$

따라서 $a=\frac{1}{5}$이므로 $f(x)=\frac{2}{5}(x+2)$이다.

$\therefore f(-7)=\frac{2}{5}\times(-7+2)=-2$

14. 이해 능력 – 수열의 극한 정답 ①

$F(x)=a(x+2)^2-1\ (a>0)$로 놓으면

$F(0)=-\frac{1}{3}$에서 $4a-1=-\frac{1}{3}$, $4a=\frac{2}{3}$

$\therefore a=\frac{1}{6}$

$\therefore F(x)=\frac{1}{6}(x+2)^2-1$

따라서

$$a_n=F(n+1)-F(n-1)$$
$$=\left\{\frac{1}{6}(n+3)^2-1\right\}-\left\{\frac{1}{6}(n+1)^2-1\right\}$$
$$=\frac{1}{6}\{(n+3)^2-(n+1)^2\}$$
$$=\frac{2}{3}(n+2)\ (n\geq 1)$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{2}{3}(n+2)\times\frac{2}{3}(n+3)}$$
$$=\frac{9}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}$$
$$=\frac{9}{4}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)$$
$$=\frac{9}{4}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$
$$=\frac{9}{4}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$=\frac{9}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{4}$$

15. 이해 능력 – 다항함수의 미분법 정답 ②

접점이 $(3, f(3))$, $(-2, f(-2))$이므로

$$f'(3)=\frac{f(3)}{3},\ f'(-2)=\frac{f(-2)}{-2}=\frac{4}{-2}=-2$$

두 접선이 서로 수직이므로

$f'(3)\times f'(-2)=f'(3)\times(-2)=-1$

따라서 $f'(3)=\frac{1}{2}$이고

$f(3)=3\times f'(3)=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$\therefore f(3)+f'(3)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$

16. 수학 내적 문제 해결 능력 – 지수와 지수함수 정답 ②

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2}\leq 2^{t(1-2x)}$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{t(2x-1)}$ …… ㉠

모든 실수 x에 대하여 부등식 ㉠이 성립하려면

모든 실수 x에 대하여 $x^2+2\geq t(2x-1)$

즉 $x^2-2tx+t+2\geq 0$이 성립하여야 한다.

따라서 이차방정식 $x^2-2tx+t+2=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=t^2-t-2\leq 0$이어야 하므로

$(t+1)(t-2)\leq 0$, $-1\leq t\leq 2$

$\therefore A=\{t\mid -1\leq t\leq 2\}$

$-1\leq t\leq 2$에서 $f(t)=3^{t+a}$은 $t=-1$일 때, 최솟값을 가지므로

$f(-1)=3^{-1+a}=3$

따라서 $-1+a=1$이므로 $a=2$

17. 연역적 추론 능력(증명) - 수열 정답 ④

(*)의 양변에 $n+2$를 각각 곱하면

$(n+2)a_{n+1}-(n+2)=(n+1)a_n-1$

위 등식을 정리하면

$(n+2)a_{n+1}=(n+1)a_n+\boxed{n+1}$이다.

$b_n=(n+1)a_n$이라 하면 모든 자연수 n에 대하여

$b_{n+1}=b_n+\boxed{n+1}$이고

$b_1=2a_1=2\times2=4$이므로

$b_n=4+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$

$=4+\dfrac{n(n-1)}{2}+n-1$

$=3+\dfrac{n^2+n}{2}\ (n\ge2)$ …… ㉠

㉠은 $n=1$일 때도 성립하므로

$b_n=\boxed{3+\dfrac{n^2+n}{2}}\ (n\ge1)$

이다. 그러므로

$a_n=\dfrac{b_n}{n+1}=\dfrac{\boxed{3+\dfrac{n^2+n}{2}}}{n+1}=\dfrac{3}{n+1}+\dfrac{n}{2}$

$\therefore f(n)=n+1,\ g(n)=3+\dfrac{n^2+n}{2}$

$\therefore f(9)+g(9)=10+48=58$

18. 이해 능력 - 수열의 극한 정답 ②

$a_n=\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+1}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+1}$

$=\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}=\dfrac{\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2+1}=\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+1)}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{2+\dfrac{2}{n^2}}=\dfrac{1}{2}$

$b_n=\dfrac{1}{n^2+n}+\dfrac{2}{n^2+n}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}$

$=\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}=\dfrac{\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2+n}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}b_n=\dfrac{1}{2}$

$a_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+1},\ b_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+n},\ c_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+k}$

에서 두 자연수 n, k에 대하여 $1\le k\le n$이므로

$\dfrac{k}{n^2+n}\le\dfrac{k}{n^2+k}\le\dfrac{k}{n^2+1}$이다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $b_n\le c_n\le a_n$이므로

$\dfrac{1}{2}=\lim_{n\to\infty}b_n\le\lim_{n\to\infty}c_n\le\lim_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{2}$에서

$\lim_{n\to\infty}c_n=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n+c_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n+\lim_{n\to\infty}c_n$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

19. 이해 능력 - 확률 정답 ④

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^k(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$의 전개식에서 일반항은

${}_kC_r x^r\left(\dfrac{1}{x}\right)^{k-r}(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k)$

즉, ${}_kC_r x^{2r-k}$이므로

x^3항은 $2r-k=3$에서 $(k,\ r)=(5,\ 4),\ (3,\ 3)$일 때이다. 따라서

$\sum_{k=0}^{6}{}_6C_k\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^k$의 전개식에서 x^3항의 계수는

(i) $k=5$, $r=4$일 때, ${}_6C_k\times{}_kC_r={}_6C_5\times{}_5C_4=30$

(ii) $k=3$, $r=3$일 때, ${}_6C_k\times{}_kC_r={}_6C_3\times{}_3C_3=20$

(i), (ii)에서 x^3항의 계수는 $30+20=50$이다.

20. 발견적 추론 능력(추측) - 수열의 극한 정답 ⑤

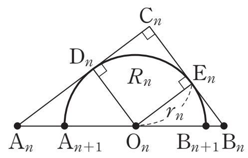
반원 R_n의 반지름의 길이를 r_n이라 하자.

직각삼각형 $A_1B_1C_1$과 반원 R_1에 대하여

$(4-r_1):r_1=4:3,\ 4r_1=12-3r_1,\ r_1=\dfrac{12}{7}$

$\therefore l_1=\pi r_1=\dfrac{12}{7}\pi$

직각삼각형 $A_nB_nC_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$에서 반원 R_n의 중심을 O_n, 반원 R_n이 두 선분 A_nC_n, B_nC_n과 접하는 점을 각각 D_n, E_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 삼각형 $A_1B_1C_1$과 삼각형 $A_nB_nC_n$은 서로 닮은 도형이므로



$\overline{A_nB_n}:\overline{A_nC_n}:\overline{B_nC_n}=5:4:3$

사각형 $O_nE_nC_nD_n$은 정사각형이므로

$\overline{C_nD_n}=r_n$이고 삼각형 $A_nO_nD_n$과 삼각형 $A_nB_nC_n$이 서로 닮은 도형이므로

$\overline{A_nO_n}:\overline{A_nD_n}:\overline{O_nD_n}=5:4:3$이다.

$\therefore \overline{A_nD_n}=\dfrac{4}{3}\overline{O_nD_n}=\dfrac{4}{3}r_n,\ \overline{A_nC_n}=\dfrac{7}{3}r_n$

따라서 $\overline{A_nB_n}=\dfrac{5}{4}\overline{A_nC_n}=\dfrac{5}{4}\times\dfrac{7}{3}r_n=\dfrac{35}{12}r_n$

$\overline{A_{n+1}B_{n+1}}=2r_n$이므로

$\overline{A_{n+1}B_{n+1}}:\overline{A_nB_n}=2r_n:\dfrac{35}{12}r_n=1:\dfrac{35}{24}$이다.

따라서 반원 R_n과 반원 R_{n+1}의 닮음비가 $35:24$이므로

$r_{n+1}=\dfrac{24}{35}r_n$

따라서 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{12}{7}\pi$이고, 공비가 $\dfrac{24}{35}$인 등비수열이다.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}l_n=\dfrac{\dfrac{12}{7}\pi}{1-\dfrac{24}{35}}=\dfrac{60}{11}\pi$

21. 이해 능력 - 다항함수의 미분법 정답 ②

$f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-2x+5$에서

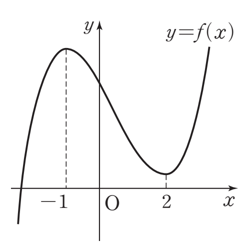
$f'(x)=x^2-x-2=(x-2)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\dfrac{37}{6}$	↘	$\dfrac{5}{3}$	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



그러므로 함수

$k(x)=\begin{cases}g(x) & (x\ge0)\\ h(x) & (x<0)\end{cases}$

의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 $x=0$에서 미분가능하려면 $k'(0)=0$이 되어야 한다.

$k(x)=g(x)(x\ge0)$이므로 $k'(x)=g'(x)(x\ge0)$

$g'(x)=f'(x-m)=(x-m)^2-(x-m)-2$이므로

$k'(0)=(0-m)^2-(0-m)-2$

$=m^2+m-2=(m+2)(m-1)=0$

$\therefore m=1$ 또는 $m=-2$

따라서 구하는 모든 상수 m의 값의 합은 -1이다.

22. 계산 능력 - 다항함수의 적분법 정답 4

$\int_1^2(3x^2-2x)dx=\Big[x^3-x^2\Big]_1^2$

$=(8-4)-(1-1)=4$

23. 이해 능력 - 수열의 극한 정답 8

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_n}{2}-4\right)$가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{2}-4\right)=0$

이때

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}2\left\{\left(\dfrac{a_n}{2}-4\right)+4\right\}$

$=2\left\{\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{2}-4\right)+4\right\}$

$=8$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\dfrac{na_n-4}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n-\dfrac{4}{n}}{1+\dfrac{3}{n}}=\dfrac{8-0}{1+0}=8$

24. 이해 능력 - 통계 정답 22

확률분포표에서 $a+b+c=1$

$E(X)=a^2+b^2+c^2=\dfrac{7}{18}$

$E(Y)=ac+ba+cb$

$=\dfrac{1}{2}\{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{7}{18}\right)=\dfrac{11}{36}$

$\therefore E(72Y)=72E(Y)=72\times\dfrac{11}{36}=22$

25. 수학 내적 문제 해결 능력 - 행렬과 그래프 정답 16

$\begin{pmatrix}a & b-10\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x\\ y\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}a & b-10\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

$\left\{\begin{pmatrix}a & b-10\\ -2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a+2 & b-10\\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ …… ㉠

x, y에 대한 연립일차방정식 ㉠이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지려면

행렬 $\begin{pmatrix}a+2 & b-10\\ -2 & 2\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

따라서 $2(a+2)-(-2)(b-10)=0$에서

$2a+4+2b-20=0,\ a+b=8$

$b=8-a$이므로

$ab=a(8-a)=-a^2+8a=-(a-4)^2+16$

따라서 ab의 최댓값은 16이다.

26. 수학 내적 문제 해결 능력 - 다항함수의 적분법 정답 32

함수 $f(x)$는 구간 $(a,\ b)$에서 증가하고 구간 $(b,\ c)$에서 감소한다.

즉, $a<x<b$일 때, $f'(x)>0$이고

$b<x<c$일 때, $f'(x)<0$이다.

$\int_a^c|f'(x)|dx=\int_a^b|f'(x)|dx+\int_b^c|f'(x)|dx$

$=\int_a^b f'(x)dx+\int_b^c\{-f'(x)\}dx$

$=\Big[f(x)\Big]_a^b-\Big[f(x)\Big]_b^c$

$=\{f(b)-f(a)\}-\{f(c)-f(b)\}$

$=2f(b)-\{f(a)+f(c)\}$

$=24-(-8)=32$

27. 이해 능력 – 함수의 극한과 연속 정답 250

$f(1)=1,\ \lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=2$이므로

$g(1)=|1+k||1-k|=|1-k^2|$

$\lim\limits_{x\to 1-0} g(x)=|1+k||1-k|=|1-k^2|$

$\lim\limits_{x\to 1+0} g(x)=|2+k||2-k|=|4-k^2|$

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$g(1)=\lim\limits_{x\to 1-0} g(x)=\lim\limits_{x\to 1+0} g(x)$

따라서 $|1-k^2|=|4-k^2|$

(i) $k^2\le 1$ 또는 $k^2\ge 4$일 때,
$1-k^2=4-k^2$을 만족시키는 실수 k는 존재하지 않는다.

(ii) $1<k^2<4$일 때,
$-(1-k^2)=4-k^2$에서 $2k^2=5$

$\therefore k^2=\frac{5}{2}$

(i), (ii)에서 $100k^2=100\times\frac{5}{2}=250$

28. 이해 능력 – 수열 정답 12

$a_m=2015+(m-1)d$

$b_n=2015+(n-1)(d+6)$

모든 자연수 n에 대하여 $b_n=a_m$을 만족시키는 자연수 m이 존재하므로

$(m-1)d=(n-1)(d+6)$

$md-d=nd+6n-d-6$

$m=\frac{nd+6n-6}{d}$

$\quad=n+\frac{6n-6}{d}=n+\frac{6(n-1)}{d}$

이때, m이 자연수이어야 하므로 d는 6의 양의 약수 중 하나이어야 한다.

$\therefore d=1,\ 2,\ 3,\ 6$

따라서 구하는 합은 $1+2+3+6=12$이다.

29. 이해 능력 – 확률 정답 11

주사위를 한 번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

세 점 B, C, E에서 이동할 때, 화살표가 나타내는 방향이 같은 변 중에서 하나를 선택할 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이다.

(i) 말이 A → B → D → E로 이동하는 경우의 확률은

$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{1}{54}$

(ii) 말이 A → B → C → E로 이동하는 경우의 확률은

$\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{27}$

(iii) 말이 A → C → B → E로 이동하는 경우의 확률은

$\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{54}$

(iv) 말이 A → C → F → E로 이동하는 경우의 확률은

$\frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{4}{27}$

(i), (ii), (iii), (iv)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{54}+\frac{1}{27}+\frac{1}{54}+\frac{4}{27}=\frac{12}{54}=\frac{2}{9}$이다.

$\therefore p=9,\ q=2,\ p+q=11$

30. 수학 내적 문제 해결 능력 – 다항함수의 미분법 정답 17

곡선 $y=g(x)$의 꼭짓점의 좌표를 $(p,\ q)$라 하면 $g(x)=-a(x-p)^2+q$이다.

$f(t)=g(t)$에서 $at^2=-a(t-p)^2+q$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $2at=-2a(t-p)$ …… ㉡

㉡에서 $t=-t+p$, $t=\frac{p}{2}$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $\frac{ap^2}{4}=-\frac{ap^2}{4}+q$, $q=\frac{ap^2}{2}$

따라서 $h(x)=\frac{ax^2}{2}$이다.

$f'(x)=2ax$, $h'(x)=ax$이므로

$f'(20)=40a$, $h'(10)=10a$

$\therefore \frac{h'(10)}{f'(20)}=\frac{10a}{40a}=\frac{1}{4}$ (∵ $a\neq 0$)

$\therefore m^2+n^2=4^2+1^2=17$

수학 영역(B형)

1. A형 1번과 동일 정답 ④

2. 계산 능력 – 함수의 극한과 연속 정답 ⑤

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x(x-2)}$

$\quad=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x}$

$\quad=\frac{4+4+4}{2}=6$

3. 이해 능력 – 통계 정답 ①

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=10\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{20}{9}$

$\mathrm{V}(3X-2)=9\mathrm{V}(X)=9\times\frac{20}{9}=20$

4. 이해 능력 – 삼각함수 정답 ①

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$이므로 $\tan\frac{\theta}{2}>0$

$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)}=2$

$\therefore \tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{2}$

5. 이해 능력 – 확률 정답 ④

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\quad=\frac{1}{4}+\frac{9}{16}-\frac{1}{16}=\frac{3}{4}$

6. 이해 능력 – 방정식과 부등식 정답 ①

무리방정식 $2f(x)=\sqrt{f(x)}+1$에서 $f(x)=t$로 놓으면 $2t-1=\sqrt{t}$ …… ㉠

㉠의 양변을 제곱하여 정리하면

$4t^2-5t+1=0$, $(4t-1)(t-1)=0$

$\therefore t=\frac{1}{4}$ 또는 $t=1$

(i) $t=\frac{1}{4}$일 때,
㉠에서 (좌변)≠(우변)이므로 $t=\frac{1}{4}$은 주어진 무리방정식을 만족시키지 않는다.

(ii) $t=1$일 때,
㉠에서 (좌변)=(우변)이므로 $t=1$은 주어진 무리방정식을 만족시킨다.

따라서 $f(x)=1$에서 $2x^2+x=1$

$2x^2+x-1=0$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

주어진 무리방정식의 실근의 합은 $-\frac{1}{2}$이다.

7. 이해 능력 – 적분법 정답 ⑤

$f(x)=\pi e^x\int_a^x\cos(\pi t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\pi e^x\int_a^x\cos(\pi t)dt+\pi e^x\cos\pi x$

$\quad=f(x)+\pi e^x\cos\pi x$

$f(0)=\frac{1}{2}$이므로 양변에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)=f(0)+\pi=\pi+\frac{1}{2}$

8. 수학 내적 문제 해결 능력 – 수열의 극한 정답 ②

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2+3n$이므로

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$\quad=(n^2+3n)-\{(n-1)^2+3(n-1)\}$

$\quad=2n+2=2(n+1)\ (n\ge 2)$

$a_1=S_1=4$이므로

$a_n=2(n+1)\ (n\ge 1)$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}$

$\quad=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$\quad=\frac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$\quad=\frac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$

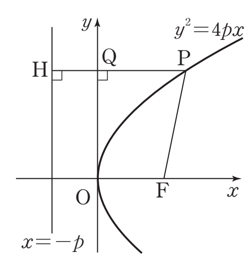
$\quad=\frac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$\quad=\frac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

9. A형 11번과 동일 정답 ②

10. 이해 능력 – 이차곡선 정답 ①

점 P의 좌표를 $(a,\ b)(a>0,\ b>0)$라 하고, 점 P에서 포물선의 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{\mathrm{PQ}}=a$이므로

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}=a+p$

$\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{PQ}}=5:4$에서

$(a+p):a=5:4$

$5a=4a+4p$

$\therefore a=4p$

점 $\mathrm{P}(4p,\ b)$는 포물선 $y^2=4px$ 위의 점이므로 $b^2=16p^2$

$\therefore b=4p$ (∵ $b>0$)

따라서 점 P의 좌표가 $(4p,\ 4p)$이므로 직선 OP의 기울기는 1이다.

11. 이해 능력 – 일차변환과 행렬 정답 ③

$a=1$이면 $\mathrm{A}(1,\ 2)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$이고

주어진 원의 방정식은 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$이므로

$x=0$을 대입하면 $(y-2)^2=3$

$\therefore y=2-\sqrt{3}$ 또는 $y=2+\sqrt{3}$

따라서 두 점 C, D의 좌표는 $\mathrm{C}(0,\ 2+\sqrt{3})$, $\mathrm{D}(0,\ 2-\sqrt{3})$이다.

일차변환 f를 나타내는 행렬을 $M=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$라 하면

$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2+\sqrt{3} \end{pmatrix}$에서

$p+2q=0$ …… ㉠

$r+2s=2+\sqrt{3}$ ⋯⋯ ㉡

$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$에서 $p=0$, $r=2-\sqrt{3}$

따라서 ㉠에서 $q=0$

㉡에서 $2s=2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$, $s=\sqrt{3}$이므로

$M=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2-\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

따라서 행렬 M의 모든 성분의 합은

$0+0+(2-\sqrt{3})+\sqrt{3}=2$이다.

12. 이해 능력 – 함수의 극한과 연속 정답 ③

$(x-a)^2+(y-2)^2=4$에 $x=0$을 대입하면

$a^2+y^2-4y=0$

$\therefore y=2+\sqrt{4-a^2}$ 또는 $y=2-\sqrt{4-a^2}$

이때, 점 D의 y좌표가 점 C의 y좌표보다 작으므로 $\mathrm{D}(0,\ 2-\sqrt{4-a^2})$이다. 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}(a,\ 0)$이므로 직선 DB의 기울기 $f(a)$는

$f(a)=\dfrac{0-(2-\sqrt{4-a^2})}{a-0}=\dfrac{\sqrt{4-a^2}-2}{a}$

$$\therefore \lim_{a\to+0}\frac{f(a)}{a}=\lim_{a\to+0}\frac{\sqrt{4-a^2}-2}{a^2}$$
$$=\lim_{a\to+0}\frac{(4-a^2)-4}{a^2(\sqrt{4-a^2}+2)}$$
$$=\lim_{a\to+0}\frac{-1}{\sqrt{4-a^2}+2}$$
$$=\frac{-1}{\sqrt{4-0}+2}=-\frac{1}{4}$$

13. A형 17번과 동일 정답 ④

14. 수학 외적 문제 해결 능력 – 통계 정답 ②

이 공장에서 만든 110000개의 펜 중에서 불량품의 개수를 X라 하면 확률변수 X는

이항분포 $\mathrm{B}\left(110000,\ \dfrac{1}{100}\right)$을 따른다.

$\mathrm{E}(X)=110000\times\dfrac{1}{100}=1100$

$\mathrm{V}(X)=110000\times\dfrac{1}{100}\times\dfrac{99}{100}=99\times11=33^2$

110000은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(1100,\ 33^2)$을 따른다.

이 공장에서 만든 110000개의 펜 중에서 n개 이하의 불량품이 포함될 확률이 0.117 이하가 되어야 하므로 $\mathrm{P}(X\le n)\le0.117$

$Z=\dfrac{X-1100}{33}$이라 하면 확률변수 Z는

표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{n-1100}{33}\right)\le0.117$

표준정규분포표에서

$\mathrm{P}(Z\le-1.19)=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le1.19)=0.1170$

$\dfrac{n-1100}{33}\le-1.19$

$n\le1100-33\times1.19=1060.73$

따라서 구하는 자연수 n의 최댓값은 1060이다.

15. 수학 내적 문제 해결 능력 – 미분법 정답 ③

$\dfrac{dx}{dt}=2te^{-t}-t^2e^{-t}=t(2-t)e^{-t}$

$\dfrac{dy}{dt}=2e^{-t}-(2t+n)e^{-t}=-(2t+n-2)e^{-t}$

$t\ne0$, $t\ne2$일 때,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{-(2t+n-2)e^{-t}}{t(2-t)e^{-t}}=\frac{2t+n-2}{t(t-2)}$$

$t=n$에서 $\dfrac{dy}{dx}>0$이 성립하려면

$\dfrac{2n+n-2}{n(n-2)}=\dfrac{3n-2}{n(n-2)}>0$

$n(n-2)(3n-2)>0$, $n\ne0$, $n\ne2$

$\therefore 0<n<\dfrac{2}{3}$ 또는 $n>2$

따라서 $\dfrac{dy}{dx}>0$이 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은 3이다.

16. 이해 능력 – 이차곡선 정답 ⑤

$\overline{\mathrm{FF'}}=2\sqrt{18-6}=4\sqrt{3}$

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 장축이 선분 FF′이므로

$2a=4\sqrt{3}$, $a=2\sqrt{3}$

$\therefore a^2=12$

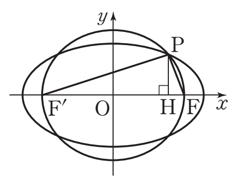
점 P가 타원 $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{6}=1$ 위의 점이므로 타원의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=6\sqrt{2}$ ⋯⋯ ㉠

$\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{PF'}}=1:2$이므로 $\overline{\mathrm{PF'}}=2\overline{\mathrm{PF}}$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\overline{\mathrm{PF}}+2\overline{\mathrm{PF}}=3\overline{\mathrm{PF}}=6\sqrt{2}$

$\therefore \overline{\mathrm{PF}}=2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{PF'}}=4\sqrt{2}$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면



직각삼각형 PF′H에서

$\overline{\mathrm{PH}}^2=\overline{\mathrm{PF'}}^2-\overline{\mathrm{HF'}}^2$

$=\overline{\mathrm{PF'}}^2-(\overline{\mathrm{FF'}}-\overline{\mathrm{HF}})^2$

$=(4\sqrt{2})^2-(4\sqrt{3}-\overline{\mathrm{HF}})^2$ ⋯⋯ ㉢

직각삼각형 PHF에서

$\overline{\mathrm{PH}}^2=\overline{\mathrm{PF}}^2-\overline{\mathrm{HF}}^2$

$=(2\sqrt{2})^2-\overline{\mathrm{HF}}^2$ ⋯⋯ ㉣

따라서 ㉢=㉣에서 $8\sqrt{3}\times\overline{\mathrm{HF}}=24$이므로

$\overline{\mathrm{HF}}=\sqrt{3}$

㉣에 대입하면 $\overline{\mathrm{PH}}^2=8-3=5$

$\therefore \overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{5}$

이때, $\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OF}}-\overline{\mathrm{HF}}=2\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}$이므로

점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(\sqrt{3},\ \sqrt{5})$이다. 점 P가 타원

$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$\dfrac{3}{12}+\dfrac{5}{b^2}=1$, $\dfrac{5}{b^2}=1-\dfrac{3}{12}=\dfrac{3}{4}$

$\therefore b^2=\dfrac{20}{3}$

$\therefore a^2b^2=12\times\dfrac{20}{3}=80$

17. 수학 내적 문제 해결 능력 – 적분법 정답 ③

두 곡선이 한 점 P에서 만나므로 점 P의 x좌표를

t라 하면 $e^{a-t}=\dfrac{1}{t}$ ⋯⋯ ㉠

한편, $y=e^{a-x}$에서 $y'=-e^{a-x}$

$y=\dfrac{1}{x}$에서 $y'=-\dfrac{1}{x^2}$

두 곡선 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 서로 같으므로

$-e^{a-t}=-\dfrac{1}{t^2}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{t^2}$ $\quad\therefore t=1$

따라서 $e^{a-1}=1$이므로 $a-1=0$, $a=1$

이때, $f(x)=xe^{1-x}$이라 하면

$f'(x)=e^{1-x}-xe^{1-x}=(1-x)e^{1-x}$

$x>1$일 때 $f'(x)<0$이고, $f(1)=1$이므로

$x>1$일 때 $f(x)<1$, 즉 $xe^{1-x}<1$이다.

그러므로 $x>1$일 때, $e^{1-x}<\dfrac{1}{x}$이다.

따라서 두 곡선과 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_1^3\left(\frac{1}{x}-e^{1-x}\right)dx=\Big[\ln x+e^{1-x}\Big]_1^3$$
$$=\ln3+e^{-2}-1$$

18. A형 20번과 동일 정답 ⑤

19. 이해 능력 – 방정식과 부등식 정답 ②

$\dfrac{5}{f(x)+1}+\dfrac{4}{f(x)-2}\ge3$에서

$f(x)=t$로 놓으면

$\dfrac{5}{t+1}+\dfrac{4}{t-2}\ge3$, $\dfrac{5(t-2)+4(t+1)}{(t+1)(t-2)}-3\ge0$

$\dfrac{3t^2-12t}{(t+1)(t-2)}\le0$, $\dfrac{t(t-4)}{(t+1)(t-2)}\le0$

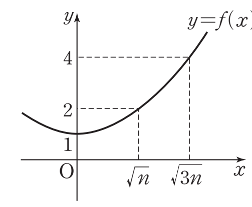
$t(t-4)(t+1)(t-2)\le0$, $t\ne-1$, $t\ne2$

$\therefore -1<t\le0$ 또는 $2<t\le4$

즉, $-1<f(x)\le0$ 또는 $2<f(x)\le4$

$f(x)=\dfrac{x^2}{n}+1$은 항상 1 이상의 값을 가지므로

$-1<f(x)\le0$을 만족시키는 $f(x)$는 존재하지 않는다.



$f(x)=\dfrac{x^2}{n}+1=2$에서

$x=\sqrt{n}$ ($\because x>0$)

$f(x)=\dfrac{x^2}{n}+1=4$에서

$x=\sqrt{3n}$ ($\because x>0$)

이므로 주어진 부등식을 만족시키는 x의 값의 범위는 $\sqrt{n}<x\le\sqrt{3n}$ ⋯⋯ ㉠

따라서 ㉠을 만족시키는 자연수 x의 집합이 $\{4,\ 5,\ 6\}$이 되려면 $3\le\sqrt{n}<4$, $6\le\sqrt{3n}<7$이어야 한다.

즉, $9\le n<16$, $12\le n<\dfrac{49}{3}$

$\therefore 12\le n<16$

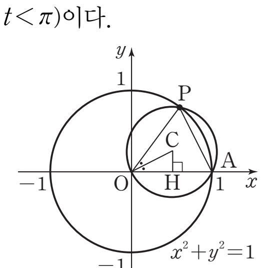
따라서 구하는 자연수 n은

12, 13, 14, 15의 4개이다.

20. 이해 능력 – 미분법 정답 ②

시각 t일 때 원 $x^2+y^2=1$에서 호 AP의 길이가 t이므로 $\angle\mathrm{POA}=t\,(0<t<\pi)$이다.

삼각형 OAP의 외접원의 중심을 C라 하고 점 C에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하자.



점 H는 선분 OA의 중점이므로 $\overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{2}$

$\angle\mathrm{COH}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{POA}=\dfrac{t}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{OH}}\times\tan\dfrac{t}{2}=\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{t}{2}$

직각삼각형 COH에서

$\overline{\mathrm{OC}}^2=\overline{\mathrm{OH}}^2+\overline{\mathrm{CH}}^2$

$=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{t}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}\left(1+\tan^2\dfrac{t}{2}\right)$

$=\dfrac{1}{4}\sec^2\dfrac{t}{2}$

$\therefore S=\pi\,\overline{\mathrm{OC}}^2=\dfrac{\pi}{4}\sec^2\dfrac{t}{2}$

$\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{\pi}{4}\left(2\sec\dfrac{t}{2}\right)\left(\sec\dfrac{t}{2}\tan\dfrac{t}{2}\right)\times\dfrac{1}{2}$

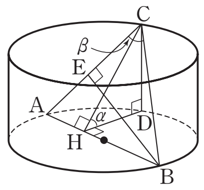
$=\dfrac{\pi}{4}\sec^2\dfrac{t}{2}\tan\dfrac{t}{2}$

$\angle\mathrm{POA}=\dfrac{\pi}{2}$ 즉, $t=\dfrac{\pi}{2}$가 되는 순간, 넓이 S의 변화율은

$\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{\pi}{4}\sec^2\dfrac{\pi}{4}\tan\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}\times2\times1=\dfrac{\pi}{2}$

21. 이해 능력 - 공간도형과 공간좌표 정답 ⑤

점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하고 점 C에서 두 점 A, B가 포함된 밑면에 내린 수선의 발을 D라 하자.

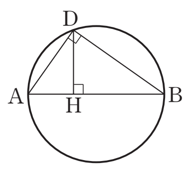


$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{66}}{11}$이므로

$\overline{HC}=\dfrac{\overline{CD}}{\sin\alpha}=\dfrac{\sqrt{6}}{\dfrac{\sqrt{66}}{11}}=\sqrt{11}$

$\overline{HD}=\sqrt{\overline{HC}^2-\overline{CD}^2}=\sqrt{11-6}=\sqrt{5}$

$\overline{AH}=t\,(0\le t\le 3)$로 놓으면



$\overline{HD}^2=\overline{AH}\times\overline{HB}$에서

$5=t(6-t)$, $t^2-6t+5=0$

$\therefore t=1\,(\because 0\le t\le 3)$

$\overline{AH}=1$, $\overline{HB}=5$이므로

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{HC}^2}=\sqrt{1+11}=2\sqrt{3}$

$\overline{BC}=\sqrt{\overline{HB}^2+\overline{HC}^2}=\sqrt{25+11}=6$

따라서 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{BC}=6$인 이등변삼각형이므로 꼭짓점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 E라 하면

$\cos\beta=\dfrac{\overline{EC}}{\overline{BC}}=\dfrac{\dfrac{\overline{AC}}{2}}{\overline{BC}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

22. 이해 능력 - 벡터 정답 3

평면 $2x-3y-6z=0$과 점 $(3,\,-1,\,5)$ 사이의 거리는 $\dfrac{|6+3-30|}{\sqrt{4+9+36}}=\dfrac{21}{7}=3$

23. 이해 능력 - 순열과 조합 정답 270

$\left(3x-\dfrac{1}{x}\right)^5$의 전개식에서 일반항은

${}_5\mathrm{C}_r(3x)^{5-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r={}_5\mathrm{C}_r3^{5-r}(-1)^rx^{5-2r}$

x항은 $5-2r=1$에서 $r=2$일 때이다.

따라서 x의 계수는

${}_5\mathrm{C}_23^3(-1)^2=\dfrac{5\times4}{2\times1}\times27\times1=270$

24. 이해 능력 - 행렬과 그래프 정답 4

주어진 연립일차방정식이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지려면 행렬 $\begin{pmatrix}a-2 & 4\\ 3 & a+2\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

따라서 $(a-2)(a+2)-12=0$, $a^2-16=0$

$\therefore a=4\ (\because a$는 양수$)$

25. 이해 능력 - 벡터 정답 40

두 평면 $x+ky-z=0$, $2x-z=0$의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$로 놓으면

$\overrightarrow{n_1}=(1,\,k,\,-1)$, $\overrightarrow{n_2}=(2,\,0,\,-1)$

두 법선벡터 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$가 이루는 예각의 크기가 $\dfrac{\pi}{6}$이므로

$\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{|2+0+1|}{\sqrt{1^2+k^2+(-1)^2}\times\sqrt{2^2+0^2+(-1)^2}}$

$=\dfrac{3}{\sqrt{5(k^2+2)}}$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{\sqrt{5(k^2+2)}}$, $15(k^2+2)=36$, $k^2+2=\dfrac{12}{5}$

$\therefore k^2=\dfrac{2}{5}$, $\quad 100k^2=100\times\dfrac{2}{5}=40$

26. 이해 능력 - 수열 정답 90

등차수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 -5이고 공차가 d이므로

$a_n=-5+(n-1)d$

$10\le f(d)\le 11$에서 $f(d)$는 자연수이므로

$f(d)=10$ 또는 $f(d)=11$

(i) $f(d)=10$일 때, $a_9\le0$, $a_{10}>0$

$a_9=-5+8d\le0$에서 $d\le\dfrac{5}{8}$

$a_{10}=-5+9d>0$에서 $d>\dfrac{5}{9}$

$\therefore \dfrac{5}{9}<d\le\dfrac{5}{8}$

(ii) $f(d)=11$일 때, $a_{10}\le0$, $a_{11}>0$

$a_{10}=-5+9d\le0$에서 $d\le\dfrac{5}{9}$

$a_{11}=-5+10d>0$에서 $d>\dfrac{1}{2}$

$\therefore \dfrac{1}{2}<d\le\dfrac{5}{9}$

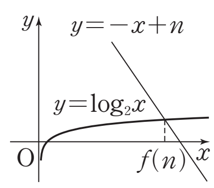
(i), (ii)에서 $\dfrac{1}{2}<d\le\dfrac{5}{8}$

$\therefore \alpha=\dfrac{1}{2}$, $\beta=\dfrac{5}{8}$

$\therefore 80(\alpha+\beta)=80\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{8}\right)=80\times\dfrac{9}{8}=90$

27. 수학 내적 문제 해결 능력 - 로그와 로그함수 정답 70

직선 $y=-x+n$이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점의 x좌표를 $f(n)$이라 하면



$\log_2 f(n)=-f(n)+n$

$\log_2 f(n)+f(n)=n$ $\cdots\cdots$ ㉠

주어진 조건에서 $f(n)$이 정수이므로 $\log_2 f(n)$은 정수이다.

따라서 $f(n)=2^k$ (k는 음이 아닌 정수)꼴 이어야 한다. 이때, $\log_2 f(n)=k$이므로 ㉠에서 $n=k+2^k$ (k는 음이 아닌 정수)이다.

$1\le n\le100$에서 $1\le k+2^k\le100$이고

$2^6=64$, $2^7=128$이므로 위 부등식을 만족시키는 k의 최댓값은 6이다.

따라서 구하는 n의 최댓값은 $6+64=70$

28. 수학 내적 문제 해결 능력 - 적분법 정답 25

$f(x)=a\sin x+b\cos x$에서

$\{f(x)\}^2=a^2\sin^2x+2ab\sin x\cos x+b^2\cos^2x$

$=a^2(1-\cos^2x)+ab\sin2x+b^2\cos^2x$

$=a^2+(b^2-a^2)\cos^2x+ab\sin2x$

이므로

$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2dx$

$=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\{a^2+(b^2-a^2)\cos^2x+ab\sin2x\}dx$

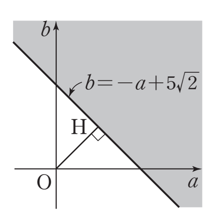
$=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left\{a^2+(b^2-a^2)\frac{1+\cos2x}{2}+ab\sin2x\right\}dx$

$=\left[a^2x+\dfrac{b^2-a^2}{2}\left(x+\dfrac{1}{2}\sin2x\right)-\dfrac{ab}{2}\cos2x\right]_{-\pi}^{\pi}$

$=\left(a^2\pi+\dfrac{b^2-a^2}{2}\pi-\dfrac{ab}{2}\right)-\left(-a^2\pi-\dfrac{b^2-a^2}{2}\pi-\dfrac{ab}{2}\right)$

$=2a^2\pi+(b^2-a^2)\pi=(a^2+b^2)\pi$

조건에서 $a+b\ge5\sqrt{2}$이므로 $b\ge-a+5\sqrt{2}$이고 이 부등식의 영역을 나타내면 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



이때, a^2+b^2의 값은 원점과 위의 부등식을 만족하는 영역에 속한 점 사이의 거리의 제곱과 같으므로 원점에서 직선 $b=-a+5\sqrt{2}$에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{OH}^2$이 a^2+b^2의 최솟값이다.

$\overline{OH}=\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{1+1}}=5$이므로

a^2+b^2의 최솟값은 25이다.

따라서 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2dx$의 최솟값은 25π이다.

$\therefore k=25$

29. 수학 내적 문제 해결 능력 - 확률 정답 223

주어진 행렬 A_k는 원점을 중심으로 $\dfrac{\pi}{k}$ 만큼 회전하는 회전변환을 나타낸다. 따라서 행렬 $A_aA_bA_cA_d$는 원점을 중심으로

$\dfrac{\pi}{a}+\dfrac{\pi}{b}+\dfrac{\pi}{c}+\dfrac{\pi}{d}$ 만큼 회전하는 회전변환을 나타낸다.

$\dfrac{2\pi}{3}\le\dfrac{\pi}{a}+\dfrac{\pi}{b}+\dfrac{\pi}{c}+\dfrac{\pi}{d}\le4\pi$이므로

주어진 등식이 성립하려면

$\dfrac{\pi}{a}+\dfrac{\pi}{b}+\dfrac{\pi}{c}+\dfrac{\pi}{d}=2\pi$ 또는

$\dfrac{\pi}{a}+\dfrac{\pi}{b}+\dfrac{\pi}{c}+\dfrac{\pi}{d}=4\pi$가 되어야 한다.

(i) $\dfrac{\pi}{a}+\dfrac{\pi}{b}+\dfrac{\pi}{c}+\dfrac{\pi}{d}=2\pi$ 즉,

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}=2$일 때

1) 1의 눈이 한 번도 나오지 않는 경우 $a=b=c=d=2$의 한 가지이다.

2) 1의 눈이 한 번 나온 경우 나머지 세 개의 눈은 2, 3, 6 또는 2, 4, 4 또는 3, 3, 3이 나와야 한다.

따라서 $4!+\dfrac{4!}{2!}+\dfrac{4!}{3!}=40$(가지)이다.

(ii) $\dfrac{\pi}{a}+\dfrac{\pi}{b}+\dfrac{\pi}{c}+\dfrac{\pi}{d}=4\pi$ 즉,

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}=4$일 때

$a=b=c=d=1$의 한 가지이다.

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\dfrac{1+40+1}{6^4}=\dfrac{7}{216}$

$\therefore p+q=216+7=223$

30. 수학 내적 문제 해결 능력 - 벡터 정답 12

$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{BP}\cdot(\overrightarrow{BQ}-\overrightarrow{BA})$

$=\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}-\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BA}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$에서 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{AB}$이므로

$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BA}=|\overrightarrow{BA}|^2=(4\sqrt{2})^2=32$

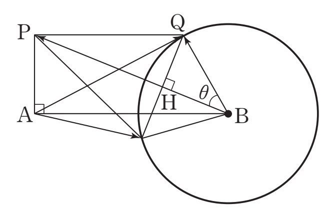
$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AQ}=-26$이므로 ㉠에서

$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}=-26+32=6$

직각삼각형 PAB에서

$\overline{BP}=\sqrt{\overline{PA}^2+\overline{AB}^2}=\sqrt{2^2+(4\sqrt{2})^2}=6$

두 벡터 $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{BQ}$가 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0\le\theta\le\pi)$라 하면



$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}=|\overrightarrow{BP}||\overrightarrow{BQ}|\cos\theta$

$=6\times2\times\cos\theta=12\cos\theta$

$12\cos\theta=6$에서 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$이므로 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

점 Q에서 직선 BP에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{QH}=\overline{BQ}\sin\theta=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

즉, 점 Q가 나타내는 도형은 중심이 H이고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 원이므로 그 길이는 $2\sqrt{3}\pi$

$\therefore a=2\sqrt{3}$, $\quad a^2=12$