139 행렬의 연산

A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$,B= $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ 일 때,

(1) A+B= $\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$

(2) $kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$ (k는 실수)

(3) 행렬의 모든 성분이 모두 0인 행렬을 O라 할 때

$A+O=A,\ A+(-A)=O$

140 행렬의 곱셈

A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$,B= $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ 일 때,

(1) AB= $\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$

(2) 곱셈의 연산법칙

① AB≠BA

② AB=AC $\not\Rightarrow$ B=C

③ AB=0 $\not\Rightarrow$ A=0 또는 B=0

④ $A^2=0$ $\not\Rightarrow$ A=0

⑤ $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$

⑥ (A+B)(A−B)≠ A^2-B^2

⑦ (AB)C=A(BC) (결합법칙)

⑧ A(B+C)=AB + AC

(A+B)C = AC + BC (분배법칙)

⑨ (kA)B = A(kB) = k(AB) (k는 실수)

⑩ AO=OA=O

(3) 단위행렬

① AE=EA=A를 성립시키는 행렬 E를 단위행렬이라 한다.

② E의 성질

$E^2=E,\ E^3=E,\ \cdots E^n=E$

141 케일리 해밀턴의 정리

반드시 단위행렬의 꼴이 아닐 때 성립

A= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,일 때

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=0$

※ 행렬이 주어지고 차수가 높은 행렬을 물을 때 사용하면 편리합니다.

142 역행렬

n차의 두 정사각행렬 A, B의 역행렬이 존재할 때

(1) AB=E가 성립할 때 A, B는 서로의 역행렬 관계가 된다.

(2) $AA^{-1}=A^{-1}A=E$

(3) 역행렬이 존재할 조건

행렬 A= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에서 $D=ad-bc$라고 할 때

$D\neq0$이면 $A^{-1}=\frac{1}{D}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$D=0$이면 역행렬이 존재하지않는다

(4) 성질

① $(A^{-1})^{-1}=A,\ (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

② $(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$

③ $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$

④ $AX=B \Leftrightarrow X=A^{-1}B$

⑤ XA=B ⇔ X= BA^{-1}

143 연립일차방정식과 행렬

(1) 연립일차방정식의 행렬 표시

$\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

(2)연립일차방정식의 해

연립방정식 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$의 해는

① $D=ad-bc\neq0$일때,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

② $D=ad-bc=0$일때, 부정 또는 불능

144 등차수열

어떤 수에 차례로 일정한 수를 더하여 얻어지는 수열을 등차수열이라 하고, 그 일정한 수를 공차라고 한다.

① 첫재항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항 a_n은

$$a_n=a+(n-1)d$$

② 등차중항

$a,\ x,\ b$가 등차수열 ⇔ $x=\frac{a+b}{2}$

145 등차수열의 합

(1) 첫째항이 a, 공차가 d, 제 n항이 l 인 등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n은

$$s_n=\frac{n(a+l)}{2}=\frac{n(2a+(n-1)d)}{2}$$

(2) a_n과 S_n의 관계

수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라하면합 s_n이 주어지고 일반항 a_n을 구할 때는

$a_1=s_1,\ a_n=s_n-s_{n-1}\ (n\geq2)$

146 등비수열

어떤 수에 차례로 일정한 수를 곱하여 얻어지는수열을 등비수열이라 하고, 그 일정한 수를 공비라고 한다.

① 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 일반항 a_n은

$a_n=ar^{n-1}$

② 등비중항

$a,\ x,\ b$ 가 등비수열 $x^2=ab$(x: 등비중항)

③ 등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫재항부터 제 n항까지의 합 S_n은

㉠ $r\neq1$ $s_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$

㉡ $r=1$ $S_n=na$

147 ∑의주요공식

① $\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

② $\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

③ $\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+\cdots+n^3=(\frac{n(n+1)}{2})^2$

148 여러 가지 수열

(1) 계차수열 ; 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $b_n=a_{n+1}-a_n$으로 정해지는 수열$\{b_n\}$을 $\{a_n\}$의 계차수열이라 한다. 이 때, 일반항 a_n 은

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$

(2) 군수열 : 수열$\{a_n\}$에서 일정한 규칙성을 찾아 몇 항씩 묶어서 나눈 수열

149 수학적귀납법

명제 $p(n)$이 임의의 자연수에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 세 조건이 성립함으 증명하면 된다.

① $n=1$일 때 성립함을 보이고

② $n=2$일 때 성립함을 가정하고

③ $n=k+1$때 성립함을 증명

150 점화식

① $a_{n+1}=a_n+f(n)$ $\Rightarrow a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$

② $a_{n+1}=a_n\cdot f(n)$ $\Rightarrow a_n=a_1 f(1)\cdot f(2)\cdots f(n-1)$

③ $a_{n+1}=pa_n+q$ $\Rightarrow$ $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$로변형

④ $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$ (단, $p+q+r=0,\ pqr\neq0$)

$\Rightarrow$ $p(a_{n+2}-a_{n+1})=r(a_{n+1}-a_n)$

※ 이외에도 많은 유형이 있지만 그때 그때마다 고칠수도 없고 하니 모든 점화식은 n대신에 1부터 자연수를 대입하여 항을 직접조사하여 계차수열로 풀면 됩니다.

151 수열의 극한

(1) 무한수열 $\{a_n\}$에서 $\lim_{n\to\infty}=\alpha$ (α 는 일정한 값)일 때 수열 $\{a_n\}$은 α 에 수렴한다고 하고, α 를 극한값이라고 한다.

(2) 무한수열 $\{a_n\}$이 수렴하지 않을 때, 수열 $\{a_n\}$은 발산한다고 한다.

152 극한값의 기본성질

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에서 $\operatorname{Lim}_{n\to\infty}a_n=\alpha$,

$\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$일 때

(1) $\lim_{n\to\infty}ka_n=kn\lim_{\to\infty}a_n=k\alpha$ (단 k는 상수)

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\pm\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha\pm\beta$

(3) $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha\beta$

(4) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim_{n\to\infty}a_n}{\lim_{n\to\infty}b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$

153 무한등비수열

무한등비수열$\{r^n\}$에 대하여

① $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$(발산)

② $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=1$(수렴)

③ $|r|<1$일 때. $\lim_{n\to\infty}r^n=0$(수렴)

④ $r\le-1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n$은 진동(발산)

154 무한급수

① 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n=a_1}+a_2\cdots+a_n+\cdots$에서첫째항부터 제 n항까지의 부분합 S_n이

$\lim_{n\to\infty}S_n=S$이면 이 무한급수는 S에 수렴한다고 하고 극한값 S를 무한급수의 합이라 한다.

② 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴 $\Rightarrow$ $\operatorname{Lim}_{n\to\infty}a_n=0$

155 무한등비급수

$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$ $(a\neq0)$

① $|r|<1$일 때, 수렴하고 그 합은 $S=\dfrac{a}{1-r}$

② $|r|\ge1$일 때는 발산하고 합이 없다.

156 함수의 극한

(1) 함수의 극한

함수 $f(x)$에서 $x\neq a$인 x가 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 a에 한없이 가까워지면 $f(x)$는 α에 수렴한다고 하고 α를 $f(x)$의 극한(값)이라고 한다. 즉,

$\lim_{x\to a}f(x)=a$

(2) 좌극한 (값)과 우극한 (값)

좌극한값과 우극한값이 같을 때를 극한값이라한다.

즉 $\operatorname{Lim}_{x\to a-0}f(x)=\operatorname{Lim}_{x\to a+0}f(x)=\alpha$

$\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$ (α는상수)

157 극한값의 기본 성질

$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ (α,β는상수)일때

(1) $\lim_{x\to a}kf(x)=k\lim_{x\to a}f(x)=k\alpha$ (k는 상수)

(2) $\lim_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$

(3) $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)=\alpha\cdot\beta$

(40 $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$

(단, $g(x)\neq0,\beta\neq0$)

(5) $f(x)<g(x)$이면 $\lim_{x\to a}f(x)\le\lim_{x\to a}g(x)$ 즉 $\alpha\le\beta$

158 함수의 연속

함수 $f(x)$가

(1) $x=a$에서 정의되고

(2) $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재하며

(30 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라 한다.

159 중간값 정리

함수 $f(x)$가 [a, b]에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k 에 대하여 $f(c)=k$인 c가 개구간 (a, b)안에 적어도 하나 존재한다.

160 평균변화율과 미분계수

(1) 함수 $y=f(x)$의 구간[a,b]에서 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

(2) 미분계수(순간변화율)

위의 평균변화율에서 $\Delta x\to0$일 때의 극한값, 즉

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=f'(a)$$

161 미분가능과 연속

(1) 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$가 존재할 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$ 에서 미분가능하다고 한다.

(2) 함수 $f(x)$가 $x=a$ 에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

※ 미분가능하면 연속이지만 연속이라고 해서 반드시 미분가능한 것은 아니다.

162 도함수

함수 $y=f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

163 미분법의 공식

(1) $y=k$(k는 상수) $\Rightarrow y'=0$

(2) $y=kf(x)$ (k는 상수) $\Rightarrow y'=kf'(x)$

(3) $y=x^n$ (n은 자연수) $\Rightarrow y'=nx^{n-1}$

(4) $y=f(x)\pm g(x)$ $\Rightarrow y'=f'(x)\pm g'(x)$

(5) $y=f(x)g(x)$

$\Rightarrow y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(6) $y=(f(x))^n \Rightarrow y'=n(f(x))^{n-1}f'(x)$

164 접선의 방정식

곡선 $y=f(x)$위의 점 $(a, f(a))$에서의

(1) 접선의 방정식

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

(2) 법선의 방정식

$y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$(단, $f'(a)\neq 0$)

165 함수의 증가, 감소

(1) 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두실수 x_1, x_2에 대하여

① $x_1<x_2$일 때 $f(x_1)<f(x_2)$이면 $f(x)$는 증가

② $x_1<x_2$일 때 $f(x_1)>f(x_2)$이면 $f(x)$는 감소

(2) 함수 $f(x)$가 어떤 구간 안의 모든 점에서 미분가능할 때

① $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$는 증가

$f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$는 감소

② $f(x)$가 증가함수 $\Rightarrow f'(x)\geq 0$

$f(x)$가 감소함수 $\Rightarrow f'(x)\leq 0$

166 함수의 극대, 극소

연속함수 $y=f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌, 우에서 $f'(x)$의 부호가

(1) 양(+)에서 음(-)으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고 $f(a)$는 극대값을 가진다.

(2) 음(-)에서 양(+)으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고 $f(a)$는 극소값을 가진다.

167 삼차함수의 극값의 존재

삼차함수 $f(x)$에서 방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라고 하면

(1) 극값을 가질 조건 $\Leftrightarrow D>0$

(2) 극값을 갖지 않을 조건 $\Leftrightarrow D\leq 0$

168 함수의 최대, 최소

함수 $f(x)$가 폐구간 [a, b]에서 연속일 때, $f(x)$의 극대값, 극소값, $f(a)$, $f(b)$중에서 최대인 것이 최대값이고 최소인 것이 최소값이다.

169 방정식과 부등식에의 응용

(1) 방정식의 실근의 개수

① 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

② 방정식 $f(x)=g(x)$의실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

(2) 삼차방정식의 실근의 개수

삼차방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극값을 가질 때

① 서로 다른 세 실근 $\Leftrightarrow$ $f(\alpha)f(\beta)<0$

② 중근과 다른 한 실근 $\Leftrightarrow$ $f(\alpha)f(\beta)=0$

③ 한 실근과 두 허근 $\Leftrightarrow$ $f(\alpha)f(\beta)>0$

(3) 부등식의 증명

구간 (a, ∞) 에서 $f(x)>0$ 의 증명

① $x>a$에서 $f(x)$ 의 (최소값)>0

② $x>a$에서 $f'(x)>0$, $f(a)\geq 0$

170 속도와 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표가 $x=f(t)$ 로 주어질 때

(1) 속도 ; $v=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$

(2) 가속도 ; $a=\lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{dv}{dt}=v'$

171 부정적분

(1) 부정적분과 도함수

① $\dfrac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)=f(x)$

② $\int\left(\dfrac{d}{dx}f(x)\right)dx=f(x)+c$

(2) 부정적분의 계산

① $\int k\,dx=kx+C$ (k는 상수)

② $\int x^n\,dx=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ $(n\neq -1)$

③ $\int(ax+b)^n\,dx=\dfrac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}+C$

(3) 부정적분의 성질

① $\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$ (k는 상수)

② $\int\{f(x)\pm g(x)\}\,dx$

$=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx$

172 정적분

(1)정적분의 정의

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)=\int_a^b f(x)\,dx$$

(2) 정적분의 기본 정리

$\int f(x)\,dx=F(x)+C$ 일 때

$\int_A^B f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

(3) 정적분의 계산

① $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$

② $\int_a^b kf(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$

③ $\int_a^b\{f(x)\pm g(x)\}\,dx$

$=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$

④ $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$

(4) 정적분의 성질

① $f(x)$ 가 우함수이면

$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$

② $f(x)$ 가 기함수이면 $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=0$

173 정적분으로 정의된 함수의 미분

① $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$

② $\dfrac{d}{dx}\int_x^{x+a} f(t)\,dt=f(x+a)-f(x)$

174 정적분으로 정의된 함수의 극한값

① $\lim_{x\to a}\dfrac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt=f(a)$

② $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\int_a^{x+a} f(t)\,dt=f(a)$

175 무한급수의 정적분 표시

① $\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)\dfrac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\,dx$

② $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{a}{n}k\right)\dfrac{a}{n}=\int_a^x f(x)\,dx$

③ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\dfrac{b-a}{n}k\right)\dfrac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\,dx$

176 넓 이

(1) x 축과 곡선 사이의 넓이

곡선 $y=f(x)$와 x축, $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$S=\int_a^b |f(x)|\,dx$

(2) y축과 곡선 사이의 넓이

곡선 $x=g(y)$와 y축, $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$S=\int_c^d |g(y)|\,dy$

(3) 두 곡선 사이의 넓이

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 두 직선 $x=a$, $x=b(a<b)$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$

177 일반 입체의 부피

입체를 구간 [a, b]의 임의의 점에서 x축에 수직인 평면으로 잘랐을 때, 잘린 단면의 넓이가 $S(x)$ 이면 $x=a$에서 $x=b$사이의 입체의 부피 V는

$V=\int_a^b S(x)\,dx$

178 회천체의 부피

(1) x축 둘레로 회전시킨 입체의 부피

구간 [A, B] 에서 $y=f(x)$ 를 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피 V_x는

$V_x=\pi\int_a^b y^2\,dx=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$

(2) y축 둘레로 회전시킨 입체의 부피

구간[a, b]에서 $x=g(y)$를 y축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피 V_y 는

$V_y=\pi\int_a^b x^2\,dy=\pi\int_a^b (g(y))^2\,dy$

(3) 두 곡선으로 둘러싸인 부분을 회전시킨 입체의 부피

두함수 $f(x)$, $g(x)$가 구간 [a, b] 에서 연속이고 $0\le g(x)\le f(x)$ 일 때, 두곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 도형을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피 V_x 는

$V_x=\pi\int_a^b [(f(x))^2-(g(x))^2]\,dx$

179 속도와 거리

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 속도가 $v(t)$일 때

(1) 시각 $t=t_0$ 에서의 위치가 x_0이면 시각 t 에서의 위치 $s(t)$ 는

$s(t)=x_0+\int_{t_0}^t v(t)\,dt$

(2) $t=a$ 에서 $t=b$ $(a\le b)$ 까지를 $v(t)$ 의 속도로 움직이는 점 P세 대하여

① 위치의 변화량 : $\int_a^b v(t)\,dt$

② 이동 거리(운동 거리) : $\int_a^b |v(t)|\,dt$

182 이항정리

(1) n이 자연수일 때

$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+\cdots+{}_nC_nb^n$

$=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_ra^{n-r}b^r$

(2) 이항계수의 성질

① ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$

② ${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0$

③ ${}_nC_1+2\,{}_nC_2+\cdots+n\,{}_nC_n=n2^{n-1}$

180 순열

(1) 순 열 : 서로 다른 n 개에서 중복을 허락하지 않고 r $(n\ge r)$ 개를 택하여 순서있게 일려로 배열하는 순열의 수는

${}_nP_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$

(2) 중복순열 : 서로 다른 개에서 중복을 허락하여 r 개를 뽑는 중복순열의 수는

${}_n\Pi_r=n^r$

(3) 원순열 : 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$(n-1)!$

(4) 같은 것이 n개 있는 순열 : n개 중에 같은 것이 각각 p개, q개,⋯ r개 있을 대, 이들 개를 모두 사용하여 일렬로 배열하는 순열의 수는

$\dfrac{n!}{p!\,q!\,r!\cdots}$(단, $p+q+r+\cdots=n$)

181 조 합

(1) 조 합 ; 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 조합의 수는 ${}_nC_r$

(2) ${}_nC_r=\dfrac{{}_nP_r}{r!}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$(단, $0\le r\le n$)

(3) ${}_nC_0=1$, ${}_nC_n=1$

(4) ${}_nC_{n-r}={}_nC_r$ $(n\ge r)$

(5) ${}_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$ $(1\le r\le n-1)$

(6) 중복조합 : 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 조합의 수는

${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$

183 다항정리

$(a+b+c)^n$의 전개식에서 $a^pb^qc^r$ 의 계수는

${}_nC_r\cdot{}_{n-r}C_q=\dfrac{n!}{p!\,q!\,r!}$

186 독립사건

사건 A와 B가 독립

$\Leftrightarrow P(B\mid A)=P(B\mid A^c)=P(B)$

$\Leftrightarrow$ A^c와B가 독립

$\Leftrightarrow$ $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

184 확률의 기본성질

(1) 수학적 확률 : 임의의 사건 A에 대하여

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(B)}=\frac{\text{사건}A\text{가일어나는경우의수}}{\text{일어날수있는모든경우의수}}$$

(2) $0\le P(A)\le 1,\ P(U)=1,\ P(\Phi)=0$

(3) 확률의 덧셈정리 : 두 사건 A, B에 대하여

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

(4) 사건 A의 여사건을 A^c 이라 하면

$P(A^c)=1-P(A)$

185 조건부확률과 곱셈정리

(1) 조건부확률

사건 A가 일어났다는 가정 아래 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이라 하고, $P(B|A)$또는 $P_A(B)$로 나타낸다.

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\ (\text{단}, P(A)\ne 0)$$

(2) 곱셈정리

두 사건 A, B 에 대하여

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B|A)=P(B)\cdot P(A|B)$

특히, A,B가 독립이면

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

187 독립시행의 확률

1회의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 P인 독립시행에서 이 시행을 n회 반복할 대 사건 A가 r회 일어날 확률을 P_r라 하면

$P_r={}_nC_r p^r q^r$ (단, $q=1-p,\ r=0,1,2,\cdots n$)

189 연속확률변수

함수 $f(x)$가 구간 [α, β] 를 정의역으로 하고, 변수 X를 연속확률변수, $f(x)$를 확률밀도함수라고 할 때 다음을 만족한다.

① $f(x)\ge 0\ (\alpha\le x\le\beta)$

② $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=1$

③ $P(a\le X\le b)=\int_a^b f(x)\,dx$ (단, $\alpha\le a\le x\le b\le\beta$)

④ 평균 : $E(X)=\int_\alpha^\beta xf(x)\,dx$

⑤ 분산 : $V(X)=\int_\alpha^\beta (x-m)^2 f(x)\,dx$

$$=\int_\alpha^\beta x^2 f(x)\,dx-m^2=E(X^2)-(E(X))^2$$

188 이산확률변수

$P(X=x_i)=p_i\ (i=1,2,\cdots n)$ 일 때

(1) 기대값(평균) : $E(X)=m=\sum_{i=1}^n x_i p_i$

(2) 분산 :

$$V(X)=\sum_{i=1}^n (x_i-m)^2 p_i=E(X^2)-(E(X))^2$$

(3) 표준편차 : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

(4) $E(aX+b)=aE(x)+b$,

$V(aX+b)=a^2V(X)$

(5) 이항분포

확률변수 X 에 대하여

$P(X=r)={}_nC_r p^r q^{n-r}$ (단, $q=1-p$)인 확률분포를 이항분포라 하고 $B(n,\ p)$로 나타낸다.

$E(X)=np,\ \ V(X)=npq$

190 정규분포

(1) 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ 일 때, X의 분포를 정규분포라 하고 $N(m,\ \sigma^2)$으로 나타낸다.

$Z=\frac{X-m}{\sigma}$ 으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,1^2)$ 을 따른다.

(2) 이항분포 $B(n,p)$에서 n이 충분히 크면 정규분포 $N(np,\ npq)$를 따른다.

192 모평균의 추정

모평균 m, 분산 σ^2인 모집단에서 크기 n인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균 $\overline{X}$라 할 때

(1) 95% 신뢰도

$\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(2) 99% 신뢰도

$\overline{X}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

※ $|m-\overline{X}|\le 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 일 때, 이 때 $|m-\overline{X}|$를 모평균과 표본평균 차라고 한다.

191 추 정

평균이 m이고 표준편차가 σ인 모집단에서 nro의 표본을 뽑아 그 표본평균 $\overline{X}$의 평균 표준편차는

$E(\overline{X})=m,\ \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$