1번 문항 (반드시 해당문항과 일치하여야 함)

1-1 (1) 1단계: 홀수 빨 2단계: 2^2a+2 $(0\le a)$ 노 3단계: 2^3b+2^2 $(0\le b)$ 4단계: 2^4c+2^3 $(0\le c)$
..... 에서 $800=2^5\cdot 25=2^5(1+2\cdot 24)$ 5단계: $2^5d+2^4=2^4(2d+1)$ $(0\le d)$, ~~6단계: 2^6e+2^5~~
~~$2^5(1+2$~~ 6단계: $2^6e+2^5=2^5(2e+1)$ $(0\le e)$ ∴ 800은 6단계에서 $e=24$일때 칠해지고
제시문에 k가 짝수이면 노란색으로 칠한다 800은 6단계에서 노란색으로 칠해진다

(2) 1단계의 형태: $1+2a$ $(0\le a)$ a는 정수 1부터 2^N까지 가능한 1단계 형태의 개수는 $1\le 1+2a\le 2^N$ $0\le a\le 2^{N-1}-1$, $\underline{2^{N-1}}$
2단계: $2(1+2b)$ (b는 0이 아닌 정수) 2단계에서 칠해지는 공의 개수: $\le 2(1+2b)\le 2^N$ $\frac{1}{2}\le 1+2b\le 2^{N-1}$ $0\le b\le 2^{N-2}-\frac{1}{2}$
b는 정수 이므로 $0\le b\le 2^{N-2}-1$ 인 정수의 개수와 같다. $\underline{2^{N-2}}$개
3단계: $2^3c+2^2=2^2(1+2c)$ (c는 0이 아닌 정수) 마찬가지로 $0\le 2^2(1+2c)\le 2^N$ 에서 $0\le c\le 2^{N-3}-1$ 까지의 정수개수이다
$\underline{2^{N-3}}$개

⋮

N단계 에 칠해 지는 공의 개수 : 2^{N-N}개 , 단계별마다 나오는 수 중 공통되는 수는 없으므로
색칠된 공의 개수는 $2^{N-1}+2^{N-2}+2^{N-3}\cdots 2^{N-N}=2^N\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cdots\frac{1}{2^N}\right)=2^N\left(\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^N})}{1-\frac{1}{2}}\right)=2^N(1-\frac{1}{2^N})$
색칠되지 않은 공의개수는 2^N-(색칠된공의개수) $=2^N-2^N(1-\frac{1}{2^N})=1$

(3) (2) 풀이에서 k단계 $(1\le k\le N)$ 에 색칠된 공의 개수는 2^{N-k}개 이다. 그리고 제시문에서
홀수단계면 빨간 색으로 칠한다. $N=20$ 에서 빨간공의개수 : 1단계 + 3단계 ··· 19단계
∴ $2^{20-1}+2^{20-3}+\cdots\cdots+2^{20-19}=2^{20}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}\cdots+\frac{1}{2^{19}}\right)=2^{20}\cdot\left(\frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{4})^{10})}{(1-\frac{1}{4})}\right)=\frac{2}{3}\cdot(2^{20}-1)$
$N=21$ 일때 빨간색 : 1단계 + 3단계 + ··· 21단계 ∴ $2^{21-1}+2^{21-3}\cdots 2^{21-21}=\frac{2}{3}(2^{21}-\frac{1}{2})=\frac{2^{22}-1}{3}$

1-2
(1) 1단계의 형태 : $1+3k$ (k는 0이 아닌 정수), 1부터 3^N까지 1단계가 가능한 k의 개수를 구하자. $1\le 1+3k\le 3^N$ $0\le k\le 3^{N-1}-1$ 까지의
정수개수와 같다. 3^{N-1}개
2단계의 형태 : 3^2k+2, 3^2k+3 $1\le 3^2k+2\le 3^N$ $\underline{0\le k\le 3^{N-2}-\frac{2}{3^2}}$ 3^2k+2 형태에서 k가 가능한개수는
3^{N-2}, $1\le 3^2k+3\le 3^N$ $\underline{0\le k\le 3^{N-2}-\frac{1}{3}}$ 3^2k+3 에서 k가 가능한 정수의 개수는 3^{N-2}
∴ 2단계에서 칠해지는 개수는 $2\cdot 3^{N-2}$

3단계의 형태 ; ~~1단계와 마찬가지로 구해보~~ 1단계와 같은 방법으로 구하면 3^{N-3}개
4단계 : 2단계와 같은 방식으로 구하면 $2\cdot 3^{N-4}$

∴ 색칠된개수는 $Y=\begin{cases} N\text{이 홀수일때}: 3^N(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3}\cdots+\frac{1}{3^N})+2\cdot 3^N(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}\cdots+\frac{1}{3^{N-1}}) \\ N\text{이 짝수일때}: 3^N(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3}\cdots\frac{1}{3^{N-1}})+2\cdot 3^N(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}\cdots\frac{1}{3^N}) \end{cases}$

$=\frac{3}{8}(3^N-\frac{1}{3})+\frac{1}{8}(3^N-3)\times 2=\frac{5\cdot 3^N-7}{8}$

$=\frac{3}{8}(3^N-1)+\frac{1}{8}(3^N-1)\times 2=\frac{5\cdot 3^N-5}{8}$

(2) N이 짝수일때 $\lim_{N\to\infty}\frac{Y}{3^N}=\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{5}{8}$ N이 홀수일때 $\lim_{N\to\infty}\frac{Y}{3^N}=\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{5}{8}$

∴ $\lim_{N\to\infty}\frac{Y}{3^N}=\frac{5}{8}$

이 줄 아래는 답안 작성을 하지 말 것

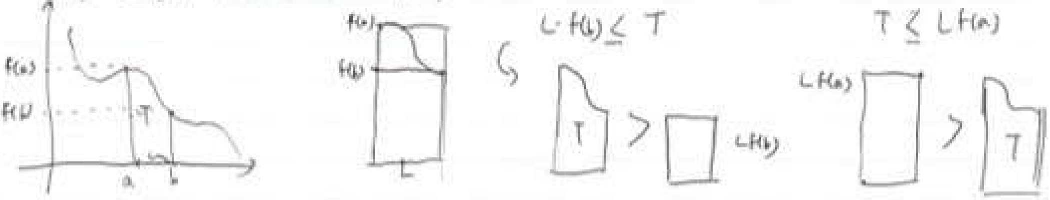
2-1 (1) 점 A: $(\cos\theta, \sin\theta)$ 점 B $(\frac{1}{\tan\theta}, 1)$ $S = \int_{\cos\theta}^{\frac{1}{\tan\theta}} f(x)\,dx = \int_{\cos\theta}^{\frac{1}{\tan\theta}} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\right]_{\cos\theta}^{\frac{1}{\tan\theta}}$

$= -\frac{1}{2}\left(\tan^2\theta - \frac{1}{\cos^2\theta}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2\theta - 1}{\cos^2\theta} = \frac{1}{2}$ ∴ θ에 상관없이 값을 갖는다.

(2) 점 A $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 점 B $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$ $S = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (1-x)e^{-x}\,dx$

$= \left[-(1-x)e^{-x}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} e^{-x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$

2-2 (1) 그림을 그리면 다음과 같다.



∴ $L f(b) \le T \le L f(a)$

(2) $f(x) = 2 + x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$ 에서 $f'(x) = 1 - x - \frac{1}{x+1} = \frac{(1+x)(1-x)-1}{x+1} = \frac{-x^2}{x+1}$ $0<x<1$ 일 때

$f'(x) < 0$ 이므로 $f(x)$는 구간 $(0,1)$에서 감소한다.

(3) * 에서 $L f(b) \le T \le L f(a)$, $f(b) \le \frac{T}{L} \le f(a)$, $f(\frac{1}{\tan\theta}) \le \frac{T}{L} \le f(\cos\theta)$

$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-} f(\frac{1}{\tan\theta}) \le \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-} \frac{T}{L} \le \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-} f(\cos\theta)$ $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-} f(\frac{1}{\tan\theta}) = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-} 2 + \frac{1}{\tan\theta} - \frac{1}{2\tan^2\theta} - \ln(1+\frac{1}{\tan\theta}) = 2$

∴ $2 \le \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-} \frac{T}{L} \le 2$. $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-} f(\cos\theta) = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-} 2 + \cos\theta - \frac{\cos^2\theta}{2} - \ln(1+\cos\theta) = 2$

$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-} \frac{T}{L} = 2$

2-3 제시문 (다)의 최대·최소 정리에 의해 ~~정리~~가 연속함수 $f(x)$에서 구간 $[a,b]$중, 최댓값 $f(\alpha)$, 최솟값 $f(\beta)$를 갖는다. $a \le \alpha \le b$, $a \le \beta \le b$

여기서 $L \cdot f(\beta) \le T \le L \cdot f(\alpha)$ 가 성립되고

$\cos\theta \le \alpha \le \frac{1}{\tan\theta}$ $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-} \cos\theta \le \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-} \alpha \le \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-} \frac{1}{\tan\theta}$ ∴ $0 \le \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-} \alpha \le 0$, $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-} \alpha = 0$ 마찬가지로 $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-} \beta = 0$

↳ $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-} f(\alpha) = 2$ (∵ $f(x)$는 연속함수) 〃 $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-} f(\beta) = 2$

$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-} f(\beta) \le \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-} \frac{T}{L} \le \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-} f(\alpha)$, ∴ $2 \le \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-} \frac{T}{L} \le 2$ $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-} \frac{T}{L} = 2$