2024학년도 모의논술고사

자연계열 예시답안 및 채점기준

표지를 제외한 페이지 수 : 4

[문항1]

[문제 1-1]

(1) (10점)

$10=5\times 2$, $15=5\times 3$이므로

- $x=2m+3n$(m,n은 음이 아닌 정수)가 $S(2,3)$의 원소라면 $5x=10m+15n$는 $S(10,15)$의 원소이다.
- $y=10m+15n$(m,n은 음이 아닌 정수)가 $S(10,15)$의 원소라면 $y=5(2m+3n)=5x$이므로 $x=2m+3n$는 $S(2,3)$의 원소이다.

위의 관찰에 의해 $S(10,15)=\{5x \mid x\text{는 } S(2,3)\text{의 원소}\}=\{0,10,15,20,25,30,35,\cdots\}$이므로 $S(10,15)\cap A=\{5k \mid k=0,1,\cdots,404\}-\{5\}$이다. 따라서 $\underline{n(A\cap S(10,15))=404}$ 이다.

[채점기준]

(A) $x\in S(2,3)$이면 $5x\in S(10,15)$임을 관찰 3점

(B) $y\in S(10,15)$이면 $y=5x$ $(x\in S(2,3))$임을 보임 4점

(C) $n(A\cap S(10,15))=404$를 구함 3점

(2) (10점)

3보다 작은 두 자연수 1과 2는 $S(3,4)$의 원소가 아니고, 3과 4는 당연히 $S(3,4)$의 원소이다. 5는 3의 배수도 아니고 4의 배수도 아니므로, 만약 5가 $S(3,4)$의 원소라면, 어떤 자연수 m,n에 대하여 $5=3m+4n$을 만족한다. 하지만 $3m+4n$은 7이상의 자연수이므로 모순이 생긴다. 따라서 5는 $S(3,4)$의 원소가 아니고 $a\le 5$이면 주어진 명제는 거짓이다.

이제 6이상의 자연수 중 $S(3,4)$에 포함되는 원소를 모두 찾아보자. $6=3\times 2+4\times 0$, $7=3\times 1+4\times 1$, $8=3\times 0+4\times 2$ 이므로 $6,7,8$은 세 개의 연속된 $S(3,4)$의 원소이고 $9=6+3$, $10=7+3$, $11=8+3$도 모두 $S(3,4)$의 원소이다. 이 과정을 계속하면 6이상의 모든 자연수가 $S(3,4)$의 원소임을 알 수 있다.

따라서 $S(3,4)=\{0,3,4,6,7,8,\cdots\}=U-\{1,2,5\}$이고 $\underline{a=6}$이 주어진 명제가 참이 되는 자연수 a의 최솟값이다.

[채점기준]

(A) $a\le 5$이면 주어진 명제는 거짓임 3점

(B) $6,7,8$은 $S(3,4)$의 원소임 3점

(C) 6이상의 자연수는 모두 $S(3,4)$의 원소임 4점

(3) (10점)

주어진 명제의 부정은 '모든 양의 7의 배수는 $S(2,b)$의 원소이다'이므로 모든 양의 7의 배수가 집합 $S(2,b)$에 포함되는 2보다 큰 자연수 b를 찾으면 된다. b가 짝수이면 $S(2,b)$의 모든 원소는 짝수이므로 b는 홀수이다.

- 제시문 (가)에 의하여 모든 양의 7의 배수가 $S(2,3)$에 포함된다.
- $2+5=7$이고 자연수 x에 대하여 $7x=2x+5x$이므로 모든 양의 7의 배수가 $S(2,5)$에 포함된다.
- 모든 양의 7의 배수가 $S(2,7)$에 포함된다.
- $b\ge 9$이면 $7\notin S(2,b)$

따라서 답은 $\underline{b=3,5,7}$이다.

[채점기준]

(A) 주어진 명제의 부정을 잘 기술하고 부정명제가 참이 되는 b를 찾으면 됨을 관찰함 4점

(B) b는 홀수이어야 함 3점

(C) $b=3,5,7$ 3점

[문제 1-2]

(1) (10점)

f의 치역에 속하는 한 원소를 b라 하면, 정의역의 어떤 원소 a에 대하여 $f(a)=b$이다. f는 <조건>을 만족하므로 $(f \circ f)(a)=f(a)$이고 $f(b)=b$가 된다. 따라서 f의 치역은 $\{x \in X_n | f(x)=x\}$의 부분집합이다. 한편, 집합 $\{x \in X_n | f(x)=x\}$가 f의 치역의 부분집합이 되는 것은 명백하므로 f의 치역은 $\{x \in X_n | f(x)=x\}$이다.

[채점기준]

(A) f의 치역의 원소는 $\{x \in X_n \mid f(x)=x\}$의 원소임 5점

(B) $\{x \in X_n \mid f(x)=x\}$의 원소는 치역에 들어감 3점

(C) f의 치역과 $\{x \in X_n \mid f(x)=x\}$가 서로 부분집합이므로 같음 2점

(2) (10점)

함수 $f: X_3 \to X_3$가 <조건>을 만족한다고 하자. (1)에 의하여 f의 치역은 $\{x \in X_n \mid f(x)=x\}$임을 알고 있으므로, 치역으로 가능한 X_3의 공집합이 아닌 부분집합을 모두 생각한다.

- 치역이 $\{1,2,3\}$이면 $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$ 이어야 하고 이 함수는 <조건>을 만족하므로 1개의 함수가 존재한다.
- 치역이 $\{1,2\}$이면 $f(1)=1$, $f(2)=2$ 이어야 하고 $f(3)$의 값은 1 또는 2일 때 모두 <조건>을 만족하므로 이 경우 2개의 함수가 <조건>을 만족한다. 치역이 $\{2,3\}$, $\{1,3\}$일 때도 같은 이유로 각각 2개의 함수가 <조건>을 만족한다.
- 치역의 원소의 개수가 하나이면 f는 상수함수이어야 하고 f는 <조건>을 만족한다. 따라서 치역의 원소의 개수가 하나이며 <조건>을 만족하는 함수는 3개이다.

따라서 모두 $1+(3\times2)+(3\times1)=10$개의 함수가 <조건>을 만족한다.

[채점기준]

(A) 치역에 따라 분류 3점

(B) 치역의 원소 x는 $f(x)=x$를 만족함 3점

(C) 총 10개의 함수가 <조건>을 만족함 4점

[문항2]

[문제 2-1]

(1) (10점)

홀수 번째 게임에서는 앞면이 나오므로, 이전 게임의 점수의 2배가 된다. 따라서 $x_{2n-1} = 2x_{2n-2}$이다. 짝수 번째 게임에서는 뒷면이 나오므로 이전 게임의 점수의 반이 되며 $x_{2n} = \frac{1}{2}x_{2n-1}$이 된다. 장투가 처음 가진 점수를 X라 하면,

$$x_1 = 2X,\ x_2 = \frac{1}{2}x_1 = X,\ x_3 = 2x_2 = 2X,\ x_4 = \frac{1}{2}x_3 = X,\ \cdots,\ x_{50} = X$$

$X = 100$이므로 $x_{50} = 100$이다.

[채점기준]

(A) x_{2n-1}의 귀납적 정의를 올바르게 구함 3점

(B) x_{2n}의 귀납적 정의를 올바르게 구함 3점

(C) 귀납적 정의를 이용하여 $x_k(k = 1, 2, \cdots, 50)$을 X로 표현 2점

(D) (C)의 식과 X를 이용하여 x_{50}을 계산 2점

(2) (10점)

섀넌은 $2n$ 번째 게임에서 가진 점수의 반인 $\frac{1}{2}y_{2n-1}$을 제시하고 제시한 금액의 반을 잃으므로

$$y_{2n} = \frac{1}{2}y_{2n-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}y_{2n-1}\right) = \frac{3}{4}y_{2n-1}$$

이다. 따라서

$$\frac{y_{2n}}{y_{2n-1}} = \frac{3}{4}$$

이다. $2n+1$ 번째 게임에서는 가진 점수의 반인 $\frac{1}{2}y_{2n}$을 제시하고 제시한 금액만큼 얻으므로

$$y_{2n+1} = \frac{1}{2}y_{2n} + 2\left(\frac{1}{2}y_{2n}\right) = \frac{3}{2}y_{2n}$$

이다. 따라서

$$\frac{y_{2n+1}}{y_{2n}} = \frac{3}{2} \qquad \text{이다.}$$

[채점기준]

(A) y_{2n}을 y_{2n-1}의 식으로 표현 3점

(B) y_{2n}과 y_{2n-1}의 비를 올바르게 구함 2점

(C) y_{2n+1}을 y_{2n}의 식으로 표현 3점

(D) y_{2n+1}과 y_{2n}의 비를 올바르게 구함 2점

(3) (10점)

섀넌이 처음에 가진 점수를 Y라 하면 (2)에 의해

$$y_1 = \frac{3}{2}Y,\ y_2 = \frac{3}{4}y_1 = \frac{9}{8}Y,\ y_3 = \frac{3}{2}y_2 = \frac{27}{16}Y,\ y_4 = \frac{3}{4}y_3 = \left(\frac{9}{8}\right)^2 Y,\ \cdots,\ y_{50} = \left(\frac{9}{8}\right)^{25} Y$$

이다. $Y = 100$이므로 $y_{50} = \left(\frac{9}{8}\right)^{25}100$이다.

[채점기준]

(A) (2)의 귀납적 정의를 이용하여 $y_k(k=1,2,\cdots,50)$을 Y로 표현 5점

(B) (A)의 식과 Y를 이용하여 y_{50}을 계산 5점

(4) (10점)

아주가 처음에 가진 점수를 Z라 하고, k번째 게임 후 아주가 가진 점수를 z_k라 하자. 각 게임에서 아주가 자신이 가진 점수의 $\alpha\,(0\le\alpha\le 1)$를 곱한 만큼 제시하면 홀수 번째 게임에서는

$$z_{2n-1}=(1-\alpha)z_{2n-2}+2\,(\alpha z_{2n-2})=(1+\alpha)z_{2n-2}$$

이고, 짝수 번째 게임에서는

$$z_{2n}=(1-\alpha)z_{2n-1}+\frac{1}{2}\,(\alpha z_{2n-1})=\left(1-\frac{1}{2}\,\alpha\right)z_{2n-1}$$

이다. [문제 2-1]의 (3)과 같은 방법으로 계산하면

$$z_{50}=(1+\alpha)^{25}\left(1-\frac{1}{2}\alpha\right)^{25}Z=\left\{(1+\alpha)\left(1-\frac{1}{2}\alpha\right)\right\}^{25}Z$$

이다. $f(\alpha)=(1+\alpha)\left(1-\frac{1}{2}\alpha\right)$라 하면, 함수 f는 $\alpha=\frac{1}{2}$에서 극댓값 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{8}$을 가지며 $f(0)=1, f(1)=1$이다. 따라서 50회의 게임 후 점수가 최대가 되는 α는 $\frac{1}{2}$이다.

[채점기준]

(A) z_{2n-1}의 귀납적 정의를 올바르게 구함 2점

(B) z_{2n}의 귀납적 정의를 올바르게 구함 2점

(C) z_{50}을 Z에 관한 식으로 표현 2점

(D) $f(\alpha)$을 극댓값 계산 2점

(E) 극댓값과 경계 조건을 이용하여 최대가 되는 α를 구함 2점

[문제 2-2] (10점)

제시문 (나)와 [문제 2-1]의 (3)에 의해

$$(1+r)^{50}=\frac{y_{50}}{Y}=\left(\frac{9}{8}\right)^{25}$$

이다. 양변에 상용로그를 취하고 계산하면

$$\log(1+r)=\frac{1}{2}(2\log 3-3\log 2)=\frac{1}{2}(0.9542-0.9030)=0.0256$$

이다. 상용로그표에 의해 $\log 1.06<0.0256<\log 1.07$이므로 $0.06<r<0.07$이다. 따라서 실제 게임당 평균 수익률 r은 약 0.06이다.

[채점기준]

(A) 제시문 (나)와 [문제 2-1]의 (3)을 이용하여 지수식 표현 3점

(B) 양 변에 상용로그를 취하고 $\log(1+r)$을 계산 3점

(C) 상용로그표를 이용하여 평균 수익률 계산 4점