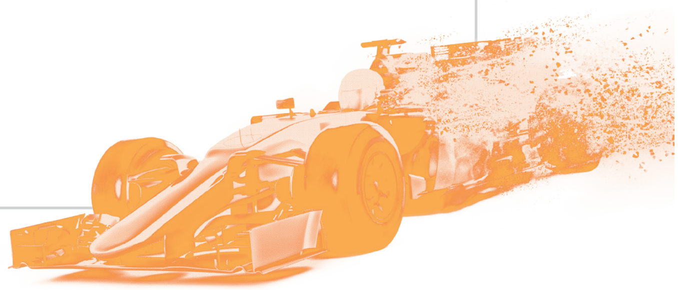
531 Project Speedy



미적분

정답과 풀이

Speed Check

빠른 정답 체크

I 수열의 극한

01 | 수열의 수렴과 발산

| 내신 & 수능 빈출 유형 |

본문 9~12쪽

유형 01 ①	01-1 ⑤	
유형 02 ②	02-1 ③	02-2 ②
유형 03 3	03-1 ②	03-2 4
유형 04 ②	04-1 ②	
유형 05 ②	05-1 ⑤	05-2 ④
유형 06 ②	06-1 ③	
유형 07 ②	07-1 20	
유형 08 ③	08-1 80	

| 빈출 유형 마무리 |

본문 13~14쪽

01 4	02 1	03 ①	04 ⑤	05 ⑤	06 ⑤
07 ①	08 ①	09 ④	10 ②	11 40	12 5
13 ③	14 ③	15 4			

02 | 급수

| 내신 & 수능 빈출 유형 |

본문 16~19쪽

유형 01 ②	01-1 2	
유형 02 15	02-1 ①	02-2 ③
유형 03 1	03-1 ①	
유형 04 19	04-1 4	04-2 ③
유형 05 54	05-1 1	
유형 06 ②	06-1 3	06-2 ③
유형 07 ⑤	07-1 ①	07-2 36

| 빈출 유형 마무리 |

본문 20~22쪽

01 ⑤	02 5	03 1	04 3	05 ④	06 ⑤
07 3	08 ①	09 ②	10 92	11 ④	12 ③
13 ④	14 5	15 ②	16 288	17 829	18 ①
19 ①	20 ②				

II 미분법

01 | 지수함수와 로그함수의 미분

| 내신 & 수능 빈출 유형 | 본문 25~27쪽

유형 01 ③	01-1 ①	01-2 ③
유형 02 3	02-1 ④	
유형 03 ②	03-1 ④	03-2 ③
유형 04 9	04-1 2	
유형 05 ⑤	05-1 $6+\frac{11}{3\ln 3}$	05-2 ⑤
유형 06 ②	06-1 ①	

| 빈출 유형 마무리 | 본문 28~29쪽

01 ③	02 ①	03 ②	04 ④	05 ②	06 ②
07 21	08 ③	09 ④	10 3	11 ③	12 ④
13 8	14 ③	15 ④			

02 | 삼각함수의 미분

| 내신 & 수능 빈출 유형 | 본문 31~33쪽

유형 01 ⑤	01-1 ④	
유형 02 ③	02-1 ③	02-2 ①
유형 03 ⑤	03-1 1	03-2 ①
유형 04 4	04-1 1	
유형 05 ①	05-1 ②	05-2 1
유형 06 ②	06-1 2	

| 빈출 유형 마무리 | 본문 34~35쪽

01 ①	02 ⑤	03 14	04 7	05 7	06 4
07 ③	08 4	09 ②	10 54	11 ③	12 ①
13 ②	14 6	15 ④	16 ①		

03 | 여러 가지 미분법

| 내신 & 수능 빈출 유형 | 본문 37~40쪽

유형 01 ⑤	01-1 ④	01-2 ②
유형 02 ⑤	02-1 ①	
유형 03 ①	03-1 ③	03-2 ①
유형 04 ③	04-1 ①	
유형 05 ②	05-1 ③	05-2 17
유형 06 ②	06-1 ③	
유형 07 ①	07-1 ①	07-2 ①
유형 08 ③	08-1 ③	

| 빈출 유형 마무리 | 본문 41~42쪽

01 ②	02 4	03 4	04 ①	05 ⑤	06 ②
07 ②	08 ④	09 ③	10 ④	11 ②	12 20
13 ①	14 3	15 10	16 16		

Speed Check 빠른 정답 체크

04 | 도함수의 활용 (1)

| 내신 & 수능 빈출 유형 | 본문 44~46쪽

유형 01 ⑤	01-1 ④	01-2 ④
유형 02 ①	02-1 ⑤	
유형 03 2	03-1 ③	03-2 ③
유형 04 ①	04-1 ②	
유형 05 ①	05-1 ②	05-2 ②
유형 06 12	06-1 ③	

| 빈출 유형 마무리 | 본문 47~48쪽

01 ②	02 ④	03 10	04 ③	05 ④	06 2
07 ⑤	08 ③	09 212	10 ①	11 ④	12 ②
13 ①	14 ②	15 50	16 ④		

05 | 도함수의 활용 (2)

| 내신 & 수능 빈출 유형 | 본문 50~54쪽

유형 01 4	01-1 ③	01-2 ⑤
유형 02 ⑤	02-1 ③	
유형 03 ③	03-1 ③	
유형 04 ③	04-1 ③	
유형 05 ③	05-1 ④	05-2 5
유형 06 $\frac{2}{e}$	06-1 ③	
유형 07 ②	07-1 $k>1$	07-2 ②
유형 08 풀이 참조	08-1 $\frac{e}{2}$	08-2 $\frac{2}{e^3}$
유형 09 ③	09-1 $3\sqrt{82}$	
유형 10 ④	10-1 $6\sqrt{5}$	10-2 ⑤

| 빈출 유형 마무리 | 본문 55~56쪽

01 ③	02 ①	03 ④	04 ①	05 7	06 ④
07 ⑤	08 6	09 ①	10 ②	11 ①	12 ③
13 ③	14 ②	15 96	16 ③		

III 적분법

01 | 부정적분

| 내신 & 수능 빈출 유형 | 본문 59~61쪽

유형 01 ④	01-1 ⑤	
유형 02 ②	02-1 ⑤	02-2 ②
유형 03 ③	03-1 ④	
유형 04 53	04-1 ①	04-2 ②
유형 05 ③	05-1 ①	
유형 06 ⑤	06-1 ①	06-2 ③

| 빈출 유형 마무리 | 본문 62~63쪽

01 ①	02 ⑤	03 3	04 2	05 ②	06 ④
07 ③	08 10	09 41	10 1	11 ④	12 ①
13 ③	14 1	15 $\frac{5}{2}\pi$	16 ②		

02 | 정적분

| 내신 & 수능 빈출 유형 | 본문 65~68쪽

유형 01 ②	01-1 3	01-2 ①
유형 02 ②	02-1 ③	
유형 03 ②	03-1 ④	03-2 3
유형 04 ①	04-1 2	
유형 05 ②	05-1 ①	05-2 ③
	05-3 ②	
유형 06 2	06-1 ②	
유형 07 ④	07-1 ④	07-2 ⑤
유형 08 15	08-1 ③	

| 빈출 유형 마무리 | 본문 69~70쪽

01 ②	02 ④	03 32	04 6	05 ④	06 ③
07 ②	08 ③	09 ④	10 ③	11 ②	12 ⑤
13 ②	14 ④	15 ②	16 ④		

03 | 정적분의 활용

| 내신 & 수능 빈출 유형 | 본문 72~76쪽

유형 01 ③	01-1 ④	01-2 ④
유형 02 ③	02-1 ③	02-2 ⑤
	02-3 ④	
유형 03 ③	03-1 ②	03-2 ④
유형 04 ②	04-1 ③	
유형 05 ⑤	05-1 ②	
유형 06 ③	06-1 ②	
유형 07 ②	07-1 ②	07-2 ⑤
유형 08 $18+\frac{1}{2}\ln 3$	08-1 ④	

| 빈출 유형 마무리 | 본문 77~78쪽

01 ④	02 ①	03 2	04 ①	05 1	06 ①
07 ①	08 ④	09 ③	10 ②	11 ②	12 52
13 ⑤	14 ③	15 ③			

01 | 수열의 수렴과 발산

내신&수능 빈출 유형

본문 9~12쪽

유형 01
두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모두 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$로 놓으면

$\lim_{n\to\infty}(3a_n+b_n)=3\alpha+\beta=7$ …… ㉠

$\lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)=2\alpha-\beta=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=2$, $\beta=1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(4a_n+3b_n)=4\alpha+3\beta=11$

• 다른 풀이 •

$4a_n+3b_n=2(3a_n+b_n)-(2a_n-b_n)$이므로

$\lim_{n\to\infty}(4a_n+3b_n)=\lim_{n\to\infty}\{2(3a_n+b_n)-(2a_n-b_n)\}$

$=2\times7-3=11$

답 ①

01-1
두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모두 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$로 놓으면

$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha-\beta=4$, $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\alpha\beta=2$

이때, $\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta$

$=4^2+2\times2=20$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n^2+b_n^2)=\lim_{n\to\infty}a_n^2+\lim_{n\to\infty}b_n^2$

$=\alpha^2+\beta^2=20$

답 ⑤

유형 02
$a\neq0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+2}{3n+\sqrt{3n+1}}=\infty$ (또는 $-\infty$)이므로

$a=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+2}{3n+\sqrt{3n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{bn+2}{3n+\sqrt{3n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{2}{n}}{3+\sqrt{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}}=\frac{b}{3}=8$$

따라서 $b=24$이므로 $a+b=0+24=24$

답 ②

02-1
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{an+2}}{(n+1)(\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n-1})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{an+2}\,(\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n-1})}{(n+1)(\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n-1})(\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n-1})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3an^2+(6+a)n+2}+\sqrt{3an^2+(6-a)n-2}}{2(n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3a+\frac{6+a}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{3a+\frac{6-a}{n}-\frac{2}{n^2}}}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$=\sqrt{3a}=6$

따라서 $3a=36$이므로 $a=12$

답 ③

02-2
$a_n-b_n=c_n$이라 하면 $b_n=a_n-c_n$이고 $\lim_{n\to\infty}c_n=2$이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n^2}{b_n}-\frac{b_n^2}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^3-b_n^3}{a_nb_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n-b_n)(a_n^2+a_nb_n+b_n^2)}{a_nb_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n\{a_n^2+a_n(a_n-c_n)+(a_n-c_n)^2\}}{a_n(a_n-c_n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n(3a_n^2-3a_nc_n+c_n^2)}{a_n^2-a_nc_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n\left(3-\frac{3c_n}{a_n}+\frac{c_n^2}{a_n^2}\right)}{1-\frac{c_n}{a_n}}$$

$=\lim_{n\to\infty}3c_n=3\times2=6$

답 ②

유형 03
$\sqrt{12n}<(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})a_n<\sqrt{12(n+6)}$에서

$$\frac{\sqrt{12n}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}<a_n<\frac{\sqrt{12(n+6)}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}$$

이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{12n}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1}}=\sqrt{3}$이고,

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{12(n+6)}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{12\left(1+\frac{6}{n}\right)}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1}}=\sqrt{3}$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{3}$

따라서 $\alpha=\sqrt{3}$이므로 $\alpha^2=(\sqrt{3})^2=3$

답 3

03-1
$4n+2<a_n<4n+6$에서

$$\sum_{k=1}^{n}(4k+2)<\sum_{k=1}^{n}a_k<\sum_{k=1}^{n}(4k+6)$$

$$4\times\frac{n(n+1)}{2}+2n<\sum_{k=1}^{n}a_k<4\times\frac{n(n+1)}{2}+6n$$

$2n^2+4n<\sum_{k=1}^{n} a_k<2n^2+8n$

$\frac{2n^2+4n}{n^2+2}<\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n^2+2}<\frac{2n^2+8n}{n^2+2}$

이때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+4n}{n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{4}{n}}{1+\frac{2}{n^2}}=2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+8n}{n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{8}{n}}{1+\frac{2}{n^2}}=2$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n^2+2}=2$$

답 ②

03-2

$n^2+1<a_n<n^2+n+2$에서

$(2n+1)^2+1<a_{2n+1}<(2n+1)^2+(2n+1)+2$

$4n^2+4n+2<a_{2n+1}<4n^2+6n+4$

또한 $\frac{1}{n^2+n+2}<\frac{1}{a_n}<\frac{1}{n^2+1}$이므로

$\frac{4n^2+4n+2}{n^2+n+2}<\frac{a_{2n+1}}{a_n}<\frac{4n^2+6n+4}{n^2+1}$

이때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+4n+2}{n^2+n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}=4$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+6n+4}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{6}{n}+\frac{4}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=4$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}}{a_n}=4$$

답 4

유형 04

ㄱ. (거짓) [반례] $a_n=(-1)^n$이면 $a_n^2=(-1)^{2n}=1$이므로 수열 $\{a_n^2\}$은 수렴하지만 수열 $\{a_n\}$은 발산(진동)한다.

ㄴ. (참) $\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)=\beta$라 하면

$a_n=\frac{1}{5}\{(a_n+2b_n)+2(2a_n-b_n)\}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}\{(a_n+2b_n)+2(2a_n-b_n)\}$$
$$=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)+\frac{2}{5}\lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)$$
$$=\frac{1}{5}\alpha+\frac{2}{5}\beta$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

ㄷ. (거짓) [반례] $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=n$이면 수열 $\{a_n\}$은 0에 수렴하고, 수열 $\{a_nb_n\}$은 1에 수렴하지만 수열 $\{b_n\}$은 발산한다.

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

04-1

ㄱ. (거짓) [반례] $a_n=(-1)^n$이면 수열 $\{a_n\}$은 발산하지만 $|a_n|=1$이므로 수열 $\{|a_n|\}$은 수렴한다.

ㄴ. (참) $a_n+b_n=c_n$이라 하면 $\lim_{n\to\infty}c_n=0$이고,

$b_n=-a_n+c_n$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{-a_n+c_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{-1+\frac{c_n}{a_n}}=-1$$

ㄷ. (거짓) [반례] $\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, 1, $\cdots$

$\{b_n\}$: 0, 1, 0, 1, 0, $\cdots$

이면 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=0$이지만 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$, $\lim_{n\to\infty}b_n\neq0$이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

유형 05

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{a\times3^n-3^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{a-\frac{1}{3}}=\frac{9}{3a-1}$$

이때, $\frac{9}{3a-1}=5$이므로

$15a-5=9$ $\quad\therefore a=\frac{14}{15}$

따라서 $0<a<1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5a^n+3}{2a^n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\times\left(\frac{14}{15}\right)^n+3}{2\times\left(\frac{14}{15}\right)^n+4}=\frac{3}{4}$$

답 ②

05-1

(i) $a>1$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+3a+2}{a^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+\frac{3}{a^{n-1}}+\frac{2}{a^n}}{1+\frac{1}{a^n}}=a$$

$\therefore a=4$

(ii) $0<a<1$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+3a+2}{a^n+1}=3a+2$$

즉, $3a+2=4$ $\quad\therefore a=\frac{2}{3}$

(iii) $a=1$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+3a+2}{a^n+1}=\frac{1+3\times1+2}{1+1}=3\neq4$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 모든 양수 a의 값의 합은 $4+\frac{2}{3}=\frac{14}{3}$이므로

$p=3$, $q=14$ $\quad\therefore p+q=3+14=17$

답 ⑤

05-2

$4^{n+1}-2^n<(2^{n+1}+4^n)a_n<3^n+4^{n+1}$에서

$\frac{4^{n+1}-2^n}{2^{n+1}+4^n}<a_n<\frac{3^n+4^{n+1}}{2^{n+1}+4^n}$

이때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-2^n}{2^{n+1}+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}=4$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+4^{n+1}}{2^{n+1}+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n+4}{2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}=4$$

이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=4$ 답 ④

유형 06

첫째항이 $x+2$이고 공비가 $\frac{x-3}{4}$이므로 주어진 수열이 수렴하려면 $x+2=0$ 또는 $-1<\frac{x-3}{4}\le1$이어야 한다.

(i) $x+2=0$에서 $x=-2$

(ii) $-1<\frac{x-3}{4}\le1$에서 $-4<x-3\le4$이므로

$-1<x\le7$

(i), (ii)에서 $x=-2$ 또는 $-1<x\le7$

따라서 모든 정수 x의 값의 합은

$(-2)+0+1+2+\cdots+7=26$ 답 ②

06-1

첫째항과 공비가 모두 $\log_2 x-2$인 등비수열이므로 주어진 수열이 수렴하려면 $-1<\log_2 x-2\le1$이어야 한다.

즉, $1<\log_2 x\le3$이므로 $2<x\le8$

따라서 모든 정수 x의 값의 합은

$3+4+5+6+7+8=33$ 답 ③

유형 07

(i) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+3}+3x+a}{x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^3+\frac{3}{x^{2n-1}}+\frac{a}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=x^3$$

(ii) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+3}+3x+a}{x^{2n}+1}=3x+a$$

(iii) $x=1$일 때, $f(1)=\frac{4+a}{2}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$이어야 하므로

$1=3+a=\frac{4+a}{2}$ $\quad\therefore a=-2$

따라서 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+3}+3x-2}{x^{2n}+1}$이므로

$f(-1)=-3$ 답 ②

07-1

(i) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}+ax+b}{x^{2n-1}+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^3+\frac{a}{x^{2n-2}}+\frac{b}{x^{2n-1}}}{1+\frac{2}{x^{2n-1}}}=x^3$$

(ii) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}+ax+b}{x^{2n-1}+2}=\frac{ax+b}{2}$$

(iii) $x=1$일 때, $f(1)=\frac{1+a+b}{3}$

(iv) $x=-1$일 때, $f(-1)=1-a+b$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$, $x=-1$에서 연속이어야 한다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$이어야 하므로

$1=\frac{a+b}{2}=\frac{1+a+b}{3}$

$\therefore a+b=2$ …… ㉠

또한 $x=-1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)=f(-1)$이어야 하므로

$\frac{-a+b}{2}=-1=1-a+b$

$\therefore -a+b=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=0$

$\therefore 10a+b=10\times2+0=20$ 답 20

유형 08

$$a_n=\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{2n+3}{n+2}-\frac{2}{n+2}\right)^2+\left(\frac{2n-1}{n+1}-\frac{n+3}{n+1}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^2+\left(\frac{n-4}{n+1}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{4n^2+4n+1}{n^2+4n+4}+\frac{n^2-8n+16}{n^2+2n+1}}$$

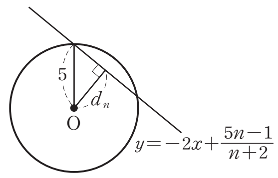
이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{4n^2+4n+1}{n^2+4n+4}+\frac{n^2-8n+16}{n^2+2n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}}+\frac{1-\frac{8}{n}+\frac{16}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}}$$

$=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$ 답 ③

08-1



오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O$(0,\ 0)$에서 직선 $y=-2x+\frac{5n-1}{n+2}$, 즉 $2x+y-\frac{5n-1}{n+2}=0$까지의 거리를 d_n이라 하면

$$d_n=\frac{\left|-\frac{5n-1}{n+2}\right|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{\frac{5n-1}{n+2}}{\sqrt{5}}=\frac{5n-1}{\sqrt{5}(n+2)}$$

또한 원의 반지름의 길이가 5이므로

$a_n=2\sqrt{5^2-d_n^2}$ $\quad\therefore a_n^2=4(5^2-d_n^2)$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n^2=\lim_{n\to\infty}4\left\{25-\frac{(5n-1)^2}{5(n+2)^2}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}4\left(25-\frac{25n^2-10n+1}{5n^2+20n+20}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}4\left(25-\frac{25-\frac{10}{n}+\frac{1}{n^2}}{5+\frac{20}{n}+\frac{20}{n^2}}\right)$$

$=4(25-5)=80$ 답 80

빈출 유형 마무리

본문 13~14쪽

01 4	02 1	03 ①	04 ⑤	05 ⑤	06 ⑤
07 ①	08 ①	09 ④	10 ②	11 40	12 5
13 ③	14 ③	15 4			

01

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모두 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$로 놓으면

$\lim_{n\to\infty}(a_n-3b_n)=\alpha-3\beta=5$ ······ ㉠

$\lim_{n\to\infty}(2a_n+b_n)=2\alpha+\beta=3$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=2$, $\beta=-1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+2b_n}{a_nb_n+3}=\frac{3\times2+2\times(-1)}{2\times(-1)+3}=4$$

답 4

02

$(n+1)^2<n^2+2n+3<(n+2)^2$이므로

$n+1<\sqrt{n^2+2n+3}<n+2$

$\therefore [\sqrt{n^2+2n+3}]=n+1$

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n+3}-[\sqrt{n^2+2n+3}])$$

$$=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2+3n+3}-(n+1)\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{n^2+3n+3}-(n+1)\}\{\sqrt{n^2+3n+3}+(n+1)\}}{\sqrt{n^2+3n+3}+(n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{\sqrt{n^2+3n+3}+n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}}+1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$$

따라서 $\alpha=\frac{1}{2}$이므로

$2\alpha=2\times\frac{1}{2}=1$ 답 1

03

$a_1=S_1=3\times1^2-4\times1=-1$

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(3n^2-4n)-\{3(n-1)^2-4(n-1)\}$

$=(3n^2-4n)-(3n^2-10n+7)$

$=6n-7\ (n\ge2)$ ······ ㉠

㉠에 $n=1$을 대입하면 $a_1=-1$

$\therefore a_n=6n-7\ (n\ge1)$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{(2n-1)a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-4n}{(2n-1)(6n-7)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-4n}{12n^2-20n+7}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{4}{n}}{12-\frac{20}{n}+\frac{7}{n^2}}$$

$=\frac{1}{4}$ 답 ①

04

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n=3\times2^{n-1}$

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 4, 공비가 6인 등비수열이므로

$b_n=4\times6^{n-1}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\log_{a_n}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\log b_n}{\log a_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\log 4\times6^{n-1}}{\log 3\times2^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\log 4+(n-1)\log 6}{\log 3+(n-1)\log 2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\log 4+n\log 6-\log 6}{\log 3+n\log 2-\log 2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\log 4}{n}+\log 6-\frac{\log 6}{n}}{\frac{\log 3}{n}+\log 2-\frac{\log 2}{n}}$$

$$=\frac{\log 6}{\log 2}$$

$=\log_2 6$
$=1+\log_2 3$ 답 ⑤

05

조건 ㈎에서 $\dfrac{a_n}{3n-1}=c_n$이라 하면

$a_n=(3n-1)c_n$이고 $\lim_{n\to\infty} c_n=-2$이다.

조건 ㈏에서

$4n+1<2a_n+(n+1)b_n<4n+6$

$4n+1<(6n-2)c_n+(n+1)b_n<4n+6$

$4n+1-(6n-2)c_n<(n+1)b_n<4n+6-(6n-2)c_n$

$\dfrac{4n+1-(6n-2)c_n}{n+1}<b_n<\dfrac{4n+6-(6n-2)c_n}{n+1}$

이때,

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{4n+1-(6n-2)c_n}{n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{4+\frac{1}{n}-\left(6-\frac{2}{n}\right)c_n}{1+\frac{1}{n}}$

$=4-6\times(-2)=16$

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{4n+6-(6n-2)c_n}{n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{4+\frac{6}{n}-\left(6-\frac{2}{n}\right)c_n}{1+\frac{1}{n}}$

$=4-6\times(-2)=16$

이므로

$\lim_{n\to\infty} b_n=16$ 답 ⑤

06

ㄱ. (거짓) $0<a_n<c_n$에서 $\lim_{n\to\infty} c_n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n=0$

이때, $\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha$라 하면

$\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n=0\times\alpha=0$

ㄴ. (참) $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$라 하면

$0<a_n<c_n<b_n$이므로 $\alpha\ge0$, $\beta\ge0$

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta=0$에서 $\alpha=0$, $\beta=0$이므로

$\lim_{n\to\infty} c_n=0$

ㄷ. (참) $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$라 하면

$0<a_n<c_n<b_n$이므로 $\alpha\ge0$, $\beta\ge0$

$\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\alpha\beta>0$에서 $\alpha>0$, $\beta>0$이므로 $\lim_{n\to\infty} c_n>0$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

07

ㄱ. (참) $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$라 하면

$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\{(b_n-a_n)+a_n\}$

$=-\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)+\lim_{n\to\infty} a_n$

$=0+\alpha=\alpha$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 수렴한다.

ㄴ. (거짓) [반례] $a_n=1-\dfrac{1}{n}$, $b_n=1+\dfrac{1}{n}$이면 모든 자연수 n에 대하여 $1-\dfrac{1}{n}<1+\dfrac{1}{n}$이므로 $a_n<b_n$이지만

$\lim_{n\to\infty} a_n=1$, $\lim_{n\to\infty} b_n=1$이므로 극한값은 같다.

ㄷ. (거짓) [반례] $a_n=n-\dfrac{2}{n}$, $b_n=n+\dfrac{2}{n}$이면

$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}\left(-\dfrac{4}{n}\right)=0$이지만

$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty} c_n=\infty$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

08

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\le\dfrac{3}{4}$에 $n=1, 2, 3, \cdots, n-1$을 차례대로 대입하면

$\dfrac{a_2}{a_1}\le\dfrac{3}{4}$

$\dfrac{a_3}{a_2}\le\dfrac{3}{4}$

$\dfrac{a_4}{a_3}\le\dfrac{3}{4}$

$\vdots$

$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\le\dfrac{3}{4}$

변끼리 곱하면

$\dfrac{a_2}{a_1}\times\dfrac{a_3}{a_2}\times\dfrac{a_4}{a_3}\times\cdots\times\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\le\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$

$\dfrac{a_n}{a_1}\le\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$ $\quad\therefore a_n\le a_1\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$

이때, $a_n>0$이므로 $0<a_n\le a_1\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$

그런데 $\lim_{n\to\infty} a_1\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}=0$이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\dfrac{2^{2n-1}-4-2a_n}{4a_n-4^n+2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-2a_n\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}{4a_n\times\left(\frac{1}{4}\right)^n-1+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}$

$=-\dfrac{1}{2}$ 답 ①

09

등비수열 $\{9^nr^{2n}\}=\{(9r^2)^n\}$에서 공비가 $9r^2$이므로 수렴하려면 $-1<9r^2\le1$이어야 한다.

(i) $-1<9r^2$에서 $9r^2+1>0$이므로 모든 실수 r에 대하여 성립한다.

(ii) $9r^2\le1$에서 $9r^2-1\le0$

$(3r+1)(3r-1)\le0$

$\therefore -\dfrac{1}{3}\le r\le\dfrac{1}{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 등비수열 $\{9^n r^{2n}\}$이 수렴하는 r의 값의 범위는

$-\frac{1}{3}\le r\le\frac{1}{3}$

ㄱ. 등비수열의 공비가 $\frac{r-1}{2}$이므로

$-\frac{1}{3}\le r\le\frac{1}{3}$, $-\frac{4}{3}\le r-1\le-\frac{2}{3}$

$\therefore -\frac{2}{3}\le\frac{r-1}{2}\le-\frac{1}{3}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{r-1}{2}\right)^n=0$ (수렴)

ㄴ. 등비수열의 공비가 $\frac{r+2}{r+1}=1+\frac{1}{r+1}$이므로

$-\frac{1}{3}\le r\le\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}\le r+1\le\frac{4}{3}$

$\frac{3}{4}\le\frac{1}{r+1}\le\frac{3}{2}$ $\qquad\therefore \frac{7}{4}\le1+\frac{1}{r+1}\le\frac{5}{2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{r+2}{r+1}\right)^n=\infty$ (발산)

ㄷ. 등비수열의 공비가 $\left(\frac{2r+1}{2}\right)^2$이므로

$-\frac{1}{3}\le r\le\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}\le 2r+1\le\frac{5}{3}$

$\frac{1}{6}\le\frac{2r+1}{2}\le\frac{5}{6}$ $\qquad\therefore \frac{1}{36}\le\left(\frac{2r+1}{2}\right)^2\le\frac{25}{36}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{2r+1}{2}\right)^2\right\}^n=0$ (수렴)

따라서 항상 수렴하는 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

10

(ⅰ) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx+2}{x^{2n+2}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^3}+\frac{a}{x^{2n}}+\frac{b}{x^{2n+1}}+\frac{2}{x^{2n+2}}}{1+\frac{1}{x^{2n+2}}}=\frac{1}{x^3}$$

(ⅱ) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx+2}{x^{2n+2}+1}=ax^2+bx+2$$

(ⅲ) $x=1$일 때, $f(1)=\frac{1+a+b+2}{2}=\frac{3+a+b}{2}$

(ⅳ) $x=-1$일 때, $f(-1)=\frac{-1+a-b+2}{2}=\frac{1+a-b}{2}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$, $x=-1$에서도 연속이다.

$x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$에서

$1=a+b+2=\frac{3+a+b}{2}$

$\therefore a+b=-1$ ⋯⋯ ㉠

또한 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)=f(-1)$에서

$a-b+2=-1=\frac{1+a-b}{2}$

$\therefore a-b=-3$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=1$

$\therefore ab=-2\times1=-2$ 답 ②

11

(ⅰ) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}}=0$이므로

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}-1}{x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{1}{x}$$

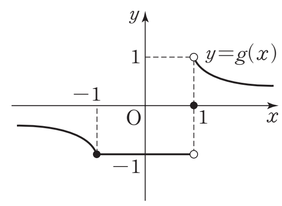
(ⅱ) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}-1}{x^{2n}+1}=-1$$

(ⅲ) $x=1$일 때, $g(1)=0$

(ⅳ) $x=-1$일 때, $g(-1)=-1$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

$\lim_{x\to1-}h(x)=\lim_{x\to1-}f(x)g(x)$

$=\lim_{x\to1-}f(x)\lim_{x\to1-}g(x)$

$=(2+a)\times(-1)=-2-a$

$\lim_{x\to1+}h(x)=\lim_{x\to1+}f(x)g(x)$

$=\lim_{x\to1+}f(x)\lim_{x\to1+}g(x)$

$=(2+a)\times1=2+a$

$h(1)=f(1)g(1)=(2+a)\times0=0$

이므로 $a=-2$

따라서 $f(x)=2x^2-2x$이므로

$f(5)=40$ 답 40

12

원 $x^2+y^2=n^2$은 y축과 두 점 $(0,\ n)$, $(0,\ -n)$에서 만나므로

$a_n=n$

또한 원 $x^2+y^2=n^2$과 직선 $y=nx$가 제1사분면에서 만나는 점의 y좌표가 b_n이므로

$x^2+n^2x^2=n^2$에서 $(n^2+1)x^2=n^2$

$x^2=\frac{n^2}{n^2+1}$ $\qquad\therefore x=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ $(\because n>0)$

즉, $b_n=\frac{n^2}{\sqrt{n^2+1}}$이므로

$$\lim_{n\to\infty} 10n(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty} 10n\left(n-\frac{n^2}{\sqrt{n^2+1}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{10n^2(\sqrt{n^2+1}-n)}{\sqrt{n^2+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{10n^2}{\sqrt{n^2+1}(\sqrt{n^2+1}+n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{10n^2}{n^2+1+n\sqrt{n^2+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{10}{1+\frac{1}{n^2}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$
$$=\frac{10}{2}=5$$

답 5

13

두 점 P_n, P_{n+1}의 좌표는

$P_n(2^n, \sqrt{2^n})$, $P_{n+1}(2^{n+1}, \sqrt{2^{n+1}})$이므로

$L_n=\overline{P_nP_{n+1}}$에서

$$L_n{}^2=\overline{P_nP_{n+1}}^2$$
$$=(2^{n+1}-2^n)^2+(\sqrt{2^{n+1}}-\sqrt{2^n})^2$$
$$=(2^n)^2+(2^{n+1}-2\times\sqrt{2^{2n+1}}-2^n)$$
$$=4^n+2^n-2^{n+1}\times\sqrt{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{L_{n+1}{}^2}{L_n{}^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}+2^{n+1}-2^{n+2}\times\sqrt{2}}{4^n+2^n-2^{n+1}\times\sqrt{2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{2^{n+1}}{4^n}-\frac{2^{n+2}\times\sqrt{2}}{4^n}}{1+\frac{2^n}{4^n}-\frac{2^{n+1}\times\sqrt{2}}{4^n}}$$
$$=4$$

답 ③

14

첫째항이 3이고 공비가 3이므로 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=3\times3^{n-1}=3^n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-7}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-7}{3^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{7}{3^n}}{1}=3$$

답 ③

15

자연수 n에 대하여 점 $(3n, 4n)$을 중심으로 하고 y축에 접하는 원 O_n의 방정식은

$(x-3n)^2+(y-4n)^2=(3n)^2$

점 $(3n, 4n)$과 점 $(0, -1)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(3n)^2+(4n+1)^2}=\sqrt{25n^2+8n+1}$이므로

$a_n=\sqrt{25n^2+8n+1}+3n$

$b_n=\sqrt{25n^2+8n+1}-3n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{25n^2+8n+1}+3n}{\sqrt{25n^2+8n+1}-3n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{25+\frac{8}{n}+\frac{1}{n^2}}+3}{\sqrt{25+\frac{8}{n}+\frac{1}{n^2}}-3}$$
$$=\frac{8}{2}=4$$

답 4

I. 수열의 극한

02 급수

내신&수능 빈출 유형

본문 16~19쪽

유형 01

주어진 급수의 부분합 S_n은

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\lim_{n\to\infty}S_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times(1-0)=\frac{1}{2}$$

답 ②

01-1

주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}$$

$$\therefore 1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}$$

주어진 급수의 부분합 S_n은

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}$$
$$=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}S_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=2\times(1-0)=2$$

답 2

유형 02

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+2})$의 부분합 S_n은

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+2})$$
$$=(a_1-a_3)+(a_2-a_4)+(a_3-a_5)+\cdots+(a_{n-1}-a_{n+1})+(a_n-a_{n+2})$$
$$=a_1+a_2-a_{n+1}-a_{n+2}$$
$$=10+7-a_{n+1}-a_{n+2}$$
$$=17-a_{n+1}-a_{n+2}$$

$\lim_{n\to\infty}a_n=1$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_{n+2}=1$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+2})=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(17-a_{n+1}-a_{n+2})$$
$$=17-1-1=15$$

답 15

02-1

$d=a_{n+1}-a_n$이므로

$$\frac{d}{a_na_{n+1}}=\frac{a_{n+1}-a_n}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{a_na_{n+1}}$의 부분합 S_n은

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{d}{a_ka_{k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}$$
$$=1-\frac{1}{a_{n+1}}$$

이때, $d>0$이므로 등차수열 $\{a_n\}$은 항의 값이 점점 커진다.

즉, $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{a_na_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=1$$

답 ①

02-2

$a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geq 2)$이므로

$$\frac{a_n}{S_{n-1}S_n}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_{n-1}S_n}=\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}$$

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{S_{k-1}S_k}=\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{S_{k-1}}-\frac{1}{S_k}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}\right)$$
$$=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_n}=3-\frac{1}{S_n}$$

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{S_{n-1}S_n}=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{S_n}\right)=3-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_n}=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_n}=2 \qquad \therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$

답 ③

유형 03

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2n)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n-2n)=0$

$a_n-2n=b_n$이라 하면 $a_n=b_n+2n$이고 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+4n-1}{3a_n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n+6n-1}{3b_n+6n-2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6n-1}{6n-2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6-\frac{1}{n}}{6-\frac{2}{n}}$$
$$=\frac{6}{6}=1$$

답 1

03-1

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 12로 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+n^2-n-3}{6a_n+4n^2-n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n-3}{4n^2-n+2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}{4-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}$$
$$=\frac{1}{4}$$

답 ①

유형 04

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)=2\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$
$$=2\alpha+\beta=11 \quad \cdots\cdots ㉠$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-3\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$
$$=\alpha-3\beta=-12 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\alpha=3$, $\beta=5$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+2b_n)=3\sum_{n=1}^{\infty}a_n+2\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$
$$=3\alpha+2\beta$$
$$=3\times3+2\times5=19$$

답 19

04-1

$$\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-b_n)=3\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$
$$=3\times4-\sum_{n=1}^{\infty}b_n=18$$

에서 $12-\sum_{n=1}^{\infty}b_n=18$ $\quad\therefore \sum_{n=1}^{\infty}b_n=-6$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2}-\frac{b_n}{3}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$
$$=\frac{1}{2}\times4-\frac{1}{3}\times(-6)=4$$

답 4

04-2

ㄱ. (참) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=3$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2b_n-3a_n)=2\sum_{n=1}^{\infty}b_n-3\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$
$$=2\times3-3\times2=0$$

ㄴ. (참) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\{(a_n+b_n)-b_n\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)-\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$
$$=\alpha-\beta$$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$도 수렴한다.

ㄷ. (거짓) [반례] $a_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$, $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=4$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=2$이지만 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\infty$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

유형 05

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 수열 $\{a_na_{n+1}\}$의 각 항은

a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4, $\cdots$

즉, a_1a_2, $a_1r\times a_2r$, $a_1r^2\times a_2r^2$, $\cdots$

이므로 수열 $\{a_na_{n+1}\}$은 첫째항이 a_1a_2이고 공비가 r^2인 등비수열이다.

$a_1=3$, $a_2=2$에서 $r=\frac{a_2}{a_1}=\frac{2}{3}$이므로

$a_1a_2=6$, $r^2=\frac{4}{9}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_na_{n+1}=\frac{6}{1-\frac{4}{9}}=\frac{54}{5}$$
$$\therefore 5\sum_{n=1}^{\infty}a_na_{n+1}=5\times\frac{54}{5}=54$$

답 54

05-1

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 $n\geq2$인 n에 대하여 수열 $\{a_{n-1}a_na_{n+1}\}$의 각 항은 $a_1a_2a_3$, $a_2a_3a_4$, $a_3a_4a_5$, $\cdots$

이때, $a_1=1$이므로 $n\geq2$인 n에 대하여 수열 $\{a_{n-1}a_na_{n+1}\}$의 각 항은 $1\times r\times r^2$, $r\times r^2\times r^3$, $r^2\times r^3\times r^4$, $\cdots$

즉, 수열 $\{a_{n-1}a_na_{n+1}\}$은 첫째항이 r^3이고 공비도 r^3인 등비수열이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{1-r}=2$에서 $r=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore r^3=\frac{1}{8}$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}a_na_{n+1}=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{1}{7}$$
$$\therefore 7\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}a_na_{n+1}=7\times\frac{1}{7}=1$$

답 1

유형 06

첫째항이 $x-1$이고 공비가 $3-x$인 등비급수

$\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)(3-x)^{n-1}$이 수렴하려면

$x-1=0$ 또는 $-1<3-x<1$이어야 한다.

(ⅰ) $x-1=0$에서 $x=1$

(ⅱ) $-1<3-x<1$에서 $-4<-x<-2$

$\therefore 2<x<4$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$x=1$ 또는 $2<x<4$

따라서 구하는 정수 x는 1, 3의 2개이다. 답 ②

06-1

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r+1}{2}\right)^n$이 수렴하려면 $-1<\frac{r+1}{2}<1$이어야 한다.

$\therefore -3<r<1$ …… ㉠

등비수열 $\left\{\left(\frac{r}{3}+1\right)^n\right\}$이 수렴하려면 $-1<\frac{r}{3}+1\le1$이어야 한다.

$\therefore -6<r\le0$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 등비급수와 등비수열이 모두 수렴하기 위한 r의 값의 범위는 $-3<r\le0$이다.

따라서 구하는 정수 r는 -2, -1, 0의 3개이다. 답 3

06-2

첫째항이 $\log_2 x$이고 공비가 $\sqrt[3]{2^x}-3$인 등비급수

$\sum_{n=1}^{\infty}\log_2 x(\sqrt[3]{2^x}-3)^{n-1}$이 수렴하려면 $\log_2 x=0$ 또는

$-1<\sqrt[3]{2^x}-3<1$이어야 한다.

(ⅰ) $\log_2 x=0$에서 $x=1$

(ⅱ) $-1<\sqrt[3]{2^x}-3<1$에서 $2<\sqrt[3]{2^x}<4$, $2<2^{\frac{x}{3}}<2^2$이므로

$1<\frac{x}{3}<2$, $3<x<6$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $x=1$ 또는 $3<x<6$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 정수 x는 1, 4, 5이므로 그 합은

$1+4+5=10$ 답 ③

유형 07

$\triangle OPP_1$, $\triangle PP_1P_2$, $\triangle P_1P_2P_3$, …이 모두 직각이등변삼각형이므로

$\overline{PP_1}=\overline{OP}\sin 45^\circ=2\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$\overline{P_1P_2}=\overline{PP_1}\sin 45^\circ=\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=1$

$\overline{P_2P_3}=\overline{P_1P_2}\sin 45^\circ=1\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

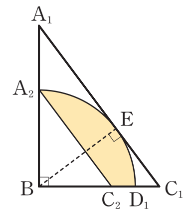
$\overline{P_3P_4}=\overline{P_2P_3}\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$

⋮

$$\begin{aligned}\therefore \overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_3P_4}+\cdots&=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\cdots\\&=\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\\&=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\\&=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)\\&=2+\sqrt{2}\end{aligned}$$

답 ⑤

07-1



$\overline{A_1B}=4$, $\overline{BC_1}=3$, $\angle B=90^\circ$인 삼각형 A_1BC_1에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{A_1C_1}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

그림과 같이 호 A_2D_1과 선분 A_1C_1이 만나는 점을 E라 하면 삼각형 A_1BC_1과 삼각형 BEC_1이 닮음이므로

$\overline{A_1B}:\overline{A_1C_1}=\overline{BE}:\overline{BC_1}$

$4:5=\overline{BE}:3$ $\quad\therefore \overline{BE}=\frac{12}{5}$

즉, 부채꼴의 반지름의 길이가 $\frac{12}{5}$이므로 $\overline{A_2B}=\frac{12}{5}$이다.

이때, 삼각형 A_1BC_1과 삼각형 A_2BC_2가 닮음이고 닮음비가

$4:\frac{12}{5}=1:\frac{3}{5}$이므로 $\overline{BC_2}=\frac{3}{5}\times3=\frac{9}{5}$이고, 넓이의 비는

$1:\frac{9}{25}$이다.

$$\begin{aligned}\therefore S_1&=\pi\times\left(\frac{12}{5}\right)^2\times\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{12}{5}\times\frac{9}{5}\\&=\frac{36}{25}\pi-\frac{54}{25}\end{aligned}$$

따라서 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_n은

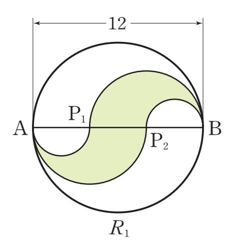
$S_n=S_1+\frac{9}{25}S_1+\left(\frac{9}{25}\right)^2S_1+\cdots+\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}S_1$

즉, $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{9}{25}\right)^{k-1}S_1=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{36}{25}\pi-\frac{54}{25}\right)\times\left(\frac{9}{25}\right)^{k-1}$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}S_n&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{36}{25}\pi-\frac{54}{25}\right)\times\left(\frac{9}{25}\right)^{k-1}\\&=\frac{\frac{36}{25}\pi-\frac{54}{25}}{1-\frac{9}{25}}\\&=\frac{\frac{36}{25}\pi-\frac{54}{25}}{\frac{16}{25}}=\frac{9(2\pi-3)}{8}\end{aligned}$$

답 ①

07-2

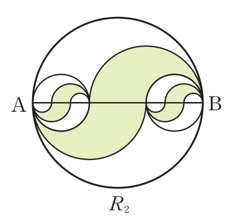


오른쪽 그림과 같이 l_1은 R_1에서의  모양의 도형의 둘레의 길이이고 이것은

$\overline{AP_2}=\frac{2}{3}\times12=8$을 지름으로 하는 원의 둘레의 길이와

$\overline{AP_1}=\frac{1}{3}\times12=4$를 지름으로 하는 원의 둘레의 길이의 합과 같으므로

$l_1=2\pi\times4+2\pi\times2=12\pi$



이때, R_2 안에 있는 작은 원의 지름의 길이는 R_1의 원의 지름의 길이의 $\frac{1}{3}$이므로

닮음비는 $1:\frac{1}{3}$이다.

여기서 l_2는 l_1에 $\frac{1}{3}l_1$을 2번 더한 값이므로

$l_2=l_1+\frac{2}{3}l_1$

마찬가지 방법으로

$l_3=l_1+\frac{2}{3}l_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2 l_1$

$l_4=l_1+\frac{2}{3}l_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2 l_1+\left(\frac{2}{3}\right)^3 l_1$

$\vdots$

$l_n=l_1+\frac{2}{3}l_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2 l_1+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} l_1$

즉, $l_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}l_1=\sum_{k=1}^{n}12\pi\times\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$

$\therefore \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty} l_n=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}12\pi\times\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$

$=\frac{1}{\pi}\times\frac{12\pi}{1-\frac{2}{3}}=36$

답 36

빈출 유형 마무리

본문 20~22쪽

01 ⑤	02 5	03 1	04 3	05 ④	06 ⑤
07 3	08 ①	09 ②	10 92	11 ④	12 ③
13 ④	14 5	15 ②	16 288	17 829	18 ①
19 ①	20 ②				

01

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2-1}-n}{\sqrt{n(n+1)}}$의 부분합 S_n은

$S_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{\sqrt{k^2-1}-k}{\sqrt{k(k+1)}}$

$=\sum_{k=2}^{n}\left(\sqrt{\frac{k-1}{k}}-\sqrt{\frac{k}{k+1}}\right)$

$=\left(\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{\frac{3}{4}}\right)+\cdots+\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}-\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)$

$=\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{n}{n+1}}$

$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2-1}-n}{\sqrt{n(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}S_n$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}\right)$

$=\sqrt{\frac{1}{2}}-1$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}-1$

답 ⑤

02

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n a_{n+1}}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$

$=\frac{1}{a_1}-1$

$=2$

따라서 $a_1=\frac{1}{3}$이므로

$15a_1=15\times\frac{1}{3}=5$

답 5

03

$n\geq2$일 때, a_n은 일차식이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

$S_n=a_1+\sum_{k=2}^{n}a_k$

$=0+\frac{(n-1)(a_2+a_n)}{2}$

$=\frac{(n-1)\{0+(2n-4)\}}{2}$ ($\because a_2=0$)

$=(n-2)(n-1)$

$\therefore \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{S_n}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)(n-1)}$

$=\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{k-2}-\frac{1}{k-1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n-1}\right)$

$=1$

답 1

04

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=3$

$\alpha_n\beta_n=n^2+n$

$\therefore \frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}=\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}=\frac{3}{n^2+n}$

$=\frac{3}{n(n+1)}=3\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$의 부분합 S_n은

$S_n=\sum_{k=1}^{n}3\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=3\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=3\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)=\lim_{n\to\infty}S_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}3\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=3$$

답 3

05

$\sum_{n=1}^{\infty}\log_3 a_n$의 부분합 S_n은

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\log_3 a_k$$
$$=\log_3 a_1+\log_3 a_2+\log_3 a_3+\cdots+\log_3 a_n$$
$$=\log_3(a_1a_2a_3\cdots a_n)$$
$$=\log_3\frac{9n}{n+9}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\log_3 a_n=\lim_{n\to\infty}S_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log_3\frac{9n}{n+9}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log_3\frac{9}{1+\frac{9}{n}}$$
$$=\log_3 9$$
$$=2$$

답 ④

06

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-a_n}{n+1}$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-a_n}{n+1}=0$$

이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-a_n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{a_n}{n}}{1+\frac{1}{n}}=3-\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=3$$

답 ⑤

07

급수 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{pn^2+4}{n^2-1}$가 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{pn^2+4}{n^2-1}=0$

이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{pn^2+4}{n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{p+\frac{4}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}}=p$

$\therefore p=0$

$\frac{4}{n^2-1}=\frac{4}{(n-1)(n+1)}=2\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$이므로

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4}{n^2-1}$$
$$=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=2\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=2\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=2\times\frac{3}{2}=3$$

$\therefore q=3$

$\therefore p+q=0+3=3$

답 3

08

ㄱ. (참) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$이다.

즉, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다.

ㄴ. (거짓) [반례] $\{a_n\}$: 0, 1, 0, 1, $\cdots$,
$\{b_n\}$: 1, 0, 1, 0, $\cdots$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=0$이고 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$이지만 $\lim_{n\to\infty}b_n\neq0$이다.

ㄷ. (거짓) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$이면 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

09

자연수 n을 2로 나누었을 때의 나머지가 a_n이므로

$a_1=1$, $a_2=0$, $a_3=1$, $a_4=0$, $\cdots$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{4^n}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^5}+\cdots$$
$$=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{16}}$$
$$=\frac{4}{15}$$

답 ②

10

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 각각 r_1, r_2라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{1-r_1}=2$에서 $r_1=\frac{1}{2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{1}{1-r_2}=3$에서 $r_2=\frac{2}{3}$

$$\therefore 15\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$$
$$=15\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+\sum_{n=1}^{\infty}2a_nb_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2\right)$$
$$=15\left\{\frac{1^2}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}+2\times\frac{1\times1}{1-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}}+\frac{1^2}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right\}$$
$$=15\left(\frac{4}{3}+3+\frac{9}{5}\right)$$
$$=92$$

답 92

11

주어진 급수는 첫째항이 x, 공비가 $\frac{x-2}{2}$인 등비급수이다.

이 급수가 수렴하려면 $x=0$ 또는 $-1<\dfrac{x-2}{2}<1$이어야 한다.

$-1<\dfrac{x-2}{2}<1$에서 $0<x<4$

$\therefore\ 0\le x<4$

따라서 주어진 조건을 만족하는 정수 x는 0, 1, 2, 3의 4개이다.

답 ④

12

등비급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n$이 수렴하려면 $-1<\dfrac{1}{1+x^2}<1$이어야 한다.

따라서 x의 값은 $x\ne0$인 모든 실수이다. …… ㉠

등비수열 $\left\{(x+4)\left(\dfrac{x+1}{3}\right)^{n-1}\right\}$이 수렴하려면 $x+4=0$ 또는

$-1<\dfrac{x+1}{3}\le1$이어야 한다.

(ⅰ) $x+4=0$에서 $x=-4$

(ⅱ) $-1<\dfrac{x+1}{3}\le1$에서 $-4<x\le2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $-4\le x\le2$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 등비급수와 등비수열이 모두 수렴하기 위한 x의 값의 범위는 $-4\le x\le2$, $x\ne0$이다.

따라서 구하는 정수 x는 -4, -3, -2, -1, 1, 2의 6개이다.

답 ③

13

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면 $a_n=ar^{n-1}$

ㄱ. (거짓) [반례] $r=1$일 때, 수열 $\{a_n\}$은 수렴하지만 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다.

ㄴ. (참) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 발산하면 $|r|\ge1$이다.
이때, $a_{2n}=ar^{2n-1}$의 공비는 r^2이므로 $r^2\ge1$이다.
즉, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$은 발산한다.

ㄷ. (참) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $|r|<1$이다.
이때, $a_na_{n+1}=ar^{n-1}\times ar^n=a^2r^{2n-1}$의 공비는 r^2이므로 $0<r^2<1$이다.
즉, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_na_{n+1}$은 수렴한다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

14

$x\ne0$일 때, $0<\dfrac{1}{x^4+1}<1$이므로

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^m}{(x^4+1)^{k-1}}=\frac{x^m}{1-\dfrac{1}{x^4+1}}=x^{m-4}(x^4+1)$$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이 되려면 $x=0$에서도 연속이어야 한다. 즉, $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$

$\displaystyle\lim_{x\to0}x^{m-4}(x^4+1)=0$

따라서 $m>4$이어야 하므로 구하는 자연수 m의 최솟값은 5이다.

답 5

15

$\overline{\mathrm{OA_0}}=1$이므로

$\overline{\mathrm{A_0A_1}}=\overline{\mathrm{OA_0}}\sin30^\circ=\dfrac{1}{2}$

$\overline{\mathrm{A_1A_2}}=\overline{\mathrm{OA_1}}\sin30^\circ=(\overline{\mathrm{OA_0}}\cos30^\circ)\sin30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$\overline{\mathrm{A_2A_3}}=\overline{\mathrm{OA_2}}\sin30^\circ=(\overline{\mathrm{OA_1}}\cos30^\circ)\sin30^\circ=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{8}$

⋮

$\overline{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n}=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{A_0A_1}}+\overline{\mathrm{A_1A_2}}+\overline{\mathrm{A_2A_3}}+\cdots$

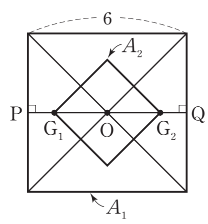
$$=\frac{\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

$$=2+\sqrt{3}$$

답 ②

16



오른쪽 그림과 같이 A_1에서 대각선의 교점을 O, 삼각형의 무게중심을 $\mathrm{G_1}$, $\mathrm{G_2}$라 하면 5개의 점 P, $\mathrm{G_1}$, O, $\mathrm{G_2}$, Q는 일직선 위에 있고, $\overline{\mathrm{PQ}}=6$이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{G_1G_2}}=\dfrac{2}{3}\overline{\mathrm{PQ}}=\dfrac{2}{3}\times6=4$

정사각형 A_1의 한 변의 길이는 6,

정사각형 A_2의 한 변의 길이는 $2\sqrt{2}$이므로

정사각형 A_1과 A_2의 닮음비는 $6:2\sqrt{2}$, 즉 $1:\dfrac{\sqrt{2}}{3}$이다.

수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 $4\times6=24$이고 공비가 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}7l_n=7\times\frac{24}{1-\dfrac{\sqrt{2}}{3}}=7\times\frac{72}{3-\sqrt{2}}$$

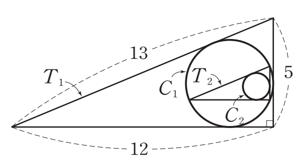
$$=72(3+\sqrt{2})=216+72\sqrt{2}$$

따라서 $a=216$, $b=72$이므로

$a+b=288$

답 288

17



오른쪽 그림에서 삼각형 T_1의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times12\times5=30$

원 C_1이 삼각형 T_1에 내접하므로

원 C_1의 반지름의 길이를 r_1이라 하면

$\frac{1}{2}\times r_1\times(5+12+13)=30$

$15r_1=30 \qquad \therefore r_1=2$

$\therefore S_1=\pi\times 2^2=4\pi$

이때, 삼각형 T_2의 빗변의 길이는 $2r_1=2\times 2=4$이고, 삼각형 T_1과 T_2의 닮음비는 $13:4$, 즉 $1:\frac{4}{13}$이므로 넓이의 비는

$1^2:\left(\frac{4}{13}\right)^2=1:\frac{16}{169}$이다.

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 4π이고 공비가 $\frac{16}{169}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{4\pi}{1-\frac{16}{169}}=\frac{676}{153}\pi$$

따라서 $p=153$, $q=676$이므로

$p+q=829$

답 829

18

$a_n=(n+1)(n+2)$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 ①

19

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(na_n-\frac{n^2+1}{2n+1}\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(na_n-\frac{n^2+1}{2n+1}\right)=0$

$b_n=na_n-\frac{n^2+1}{2n+1}$이라 하면 $a_n=\frac{b_n}{n}+\frac{n^2+1}{2n^2+n}$이고

$\lim_{n\to\infty}b_n=0$이다.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{n}+\frac{n^2+1}{2n^2+n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2+n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n}}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n^2+2a_n+2)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\frac{1}{2}+2=\frac{13}{4}$

답 ①

20

그림 R_1에서 $\overline{C_1D_1}=\overline{B_2C_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\angle A_2C_1B_2=30^\circ$이므로

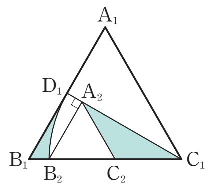
직각삼각형 $A_2B_2C_1$에서

$\overline{A_2B_2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

조건에서 $\overline{B_2C_2}=\overline{C_1C_2}$이므로

$\overline{A_2B_2}=\overline{B_2C_2}=\overline{C_1C_2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

R_1



R_2

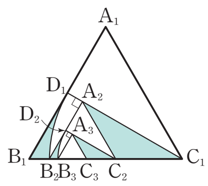


그림 R_1의 색칠된 부분의 넓이는 삼각형 $B_1C_1D_1$에서 부채꼴 $B_2C_1D_1$을 제외한 부분의 넓이와 삼각형 $C_1A_2C_2$의 넓이의 합과 같고 삼각형 $C_1A_2C_2$와 삼각형 $A_2B_2C_2$의 넓이가 같으므로

$$\begin{aligned}S_1&=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2-\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\frac{1}{12}+\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2\\&=\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{16}+\frac{3\sqrt{3}}{64}\\&=\frac{11\sqrt{3}-4\pi}{64}\end{aligned}$$

한편, 그림 R_1에서 색칠된 도형과 그림 R_2에서 새로 색칠된 도형의 닮음비는 $\overline{A_1B_1}:\overline{A_2B_2}$, 즉 $1:\frac{\sqrt{3}}{4}$이므로

넓이의 비는 $1:\frac{3}{16}$이다.

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}S_n&=\frac{\frac{11\sqrt{3}-4\pi}{64}}{1-\frac{3}{16}}\\&=\frac{11\sqrt{3}-4\pi}{64-12}\\&=\frac{11\sqrt{3}-4\pi}{52}\end{aligned}$$

답 ②

01 지수함수와 로그함수의 미분

내신&수능 빈출 유형

본문 25~27쪽

유형 01

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)(1+3x)(1+5x)}{e^{2x}-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\ln(1+2x)+\ln(1+3x)+\ln(1+5x)}{x}}{\dfrac{e^{2x}-1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\ln(1+2x)}{2x}\times 2+\dfrac{\ln(1+3x)}{3x}\times 3+\dfrac{\ln(1+5x)}{5x}\times 5}{\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\times 2}$$

$$=\frac{1\times 2+1\times 3+1\times 5}{1\times 2}$$

$=5$ 답 ③

01-1

$1-2x=t$로 놓으면 $2x=1-t$이고 $x\to\frac{1}{2}$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}(2x)^{\frac{1}{1-2x}}=\lim_{t\to 0}(1-t)^{\frac{1}{t}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\{(1-t)^{-\frac{1}{t}}\}^{-1}$$

$$=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

답 ①

01-2

$g(x)=f(x)\ln(1+2x)$로 놓으면

$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=6$이고 $f(x)=\dfrac{g(x)}{\ln(1+2x)}$이므로

$$\lim_{x\to 0}f(x)(e^{3x}-1)=\lim_{x\to 0}\left\{g(x)\times\frac{e^{3x}-1}{\ln(1+2x)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{g(x)\times\frac{\dfrac{e^{3x}-1}{3x}\times 3}{\dfrac{\ln(1+2x)}{2x}\times 2}\right\}$$

$$=6\times\frac{1\times 3}{1\times 2}=9$$

답 ③

유형 02

$x\to 0$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0}(e^{ax}+b)=0$에서

$e^0+b=0$ $\quad\therefore b=-1$

$b=-1$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{e^{ax}-1}{ax}\times\frac{x}{\ln(1+x)}\times a\right\}$$

$$=1\times 1\times a=4$$

$\therefore a=4$

$\therefore a+b=4+(-1)=3$ 답 3

02-1

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-(2a+3)^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(a^x-1)-\{(2a+3)^x-1\}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{(2a+3)^x-1}{x}$$

$$=\ln a-\ln(2a+3)$$

$$=\ln\frac{a}{2a+3}$$

$$=\ln\frac{1}{3}$$

따라서 $\dfrac{a}{2a+3}=\dfrac{1}{3}$이므로

$3a=2a+3$ $\quad\therefore a=3$ 답 ④

유형 03

함수 $f(x)$가 구간 $(-1, \infty)$에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이면 되므로

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{e^x-1}=k$

이때, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{\ln(1+x)}{x}\times\dfrac{x}{e^x-1}\right\}=1$이므로

$k=1$ 답 ②

03-1

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이면 되므로

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\times 4^x+b}{x}=5\ln 2$ …… ㉠

이때, ㉠에서 $x\to 0$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0}(a\times 4^x+b)=0$에서 $a+b=0$

$\therefore b=-a$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{a\times 4^x-a}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a(4^x-1)}{x}$$

$$=a\times\lim_{x\to 0}\frac{4^x-1}{x}=a\ln 4$$

$$=2a\ln 2$$

즉, $2a\ln 2=5\ln 2$, $2a=5$

$\therefore a=\dfrac{5}{2}$

$a=\dfrac{5}{2}$를 ㉡에 대입하면 $b=-\dfrac{5}{2}$

$\therefore a^2+b^2=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{50}{4}=\dfrac{25}{2}$ 답 ④

03-2

$x\neq 1$일 때, $e^{1-x}-1\neq 0$이므로

$f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{2(e^{1-x}-1)}\ (x\neq 1)$

$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{2(e^{1-x}-1)}=\lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+3)}{2(e^{1-x}-1)}$

$1-x=t$로 놓으면 $x\to 1$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{2(e^{1-x}-1)}=\lim_{t\to 0}\frac{t(t-4)}{2(e^t-1)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{t-4}{2}\times\lim_{t\to 0}\frac{t}{e^t-1}$$
$$=-2\times 1=-2$$

이때, 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

$\therefore f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)=-2$ 답 ③

유형 04

점 P의 좌표를 $(t,\ a^t-1)$이라 하면 점 Q의 좌표는 $(t,\ 0)$이므로

$S(t)=\dfrac{1}{2}t(a^t-1)$

$$\therefore \lim_{t\to 0+}\frac{S(t)}{t^2}=\lim_{t\to 0+}\frac{t(a^t-1)}{2t^2}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{a^t-1}{2t}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0+}\frac{a^t-1}{t}=\frac{1}{2}\ln a$$

따라서 $\dfrac{1}{2}\ln a=\ln 3$에서 $\ln a=2\ln 3=\ln 9$

$\therefore a=9$ 답 9

04-1

점 $\mathrm{P}(t,\ \ln(1+2t))$와 원점 O를 이은 직선 OP의 기울기 $f(t)$는

$f(t)=\dfrac{\ln(1+2t)-0}{t-0}=\dfrac{\ln(1+2t)}{t}$

$$\therefore \lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+2t)}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{\ln(1+2t)}{2t}\times 2\right\}$$
$$=1\times 2=2$$

답 2

유형 05

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1-3h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(1+2h)-f(1)\}-\{f(1-3h)-f(1)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times 2\right\}+\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(1-3h)-f(1)}{-3h}\times 3\right\}$$
$$=2f'(1)+3f'(1)=5f'(1)$$

이때, $f(x)=e^x+x$에서 $f'(x)=e^x+1$이므로

$f'(1)=e+1$

$\therefore 5f'(1)=5(e+1)$ 답 ⑤

05-1

$$f'(x)=(x^2+2)'\log_3 x+(x^2+2)(\log_3 x)'$$
$$=2x\log_3 x+(x^2+2)\frac{1}{x\ln 3}$$

$$\therefore f'(3)=6\log_3 3+\frac{11}{3\ln 3}$$
$$=6+\frac{11}{3\ln 3}$$

답 $6+\dfrac{11}{3\ln 3}$

05-2

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$=f'(0)=5$$

이때, $f(x)=(2x+a)e^x$에서

$$f'(x)=(2x+a)'e^x+(2x+a)(e^x)'$$
$$=2e^x+(2x+a)e^x$$
$$=(2x+a+2)e^x$$

따라서 $f'(0)=a+2$이므로 $a+2=5$

$\therefore a=3$ 답 ⑤

유형 06

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하려면 $x=-1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to -1+}(2x^2+a)=\lim_{x\to -1-}(be^{x+1}+3)=f(-1)$

$2+a=b+3$

$\therefore a=1+b$ …… ㉠

또한 $f'(-1)$이 존재해야 하므로

$$\lim_{x\to -1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1+}\frac{(2x^2+a)-(2+a)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1+}\frac{2(x^2-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1+}2(x-1)$$
$$=-4$$

$$\lim_{x\to -1-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$
$$=\lim_{x\to -1-}\frac{(be^{x+1}+3)-(2+a)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1-}\frac{(be^{x+1}+3)-(2+1+b)}{x+1}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{x\to -1-}\frac{b(e^{x+1}-1)}{x+1}=b$$

$\therefore b=-4$

$b=-4$를 ㉠에 대입하면 $a=-3$

$\therefore a+b=-3+(-4)=-7$ 답 ②

06-1

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 1+}(\ln x+3x)=\lim_{x\to 1-}(ax+b)=f(1)$

$3=a+b$

$\therefore b=3-a$ …… ㉠

또한 $f'(1)$이 존재해야 하므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(\ln x+3x)-3}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\left(\frac{\ln x}{x-1}+3\right) \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$
$x-1=t$로 놓으면 $x\to1+$일 때 $t\to0+$이므로 ㉡에서
$$\lim_{t\to0+}\frac{\ln(t+1)}{t}+3$$
$=1+3=4$
$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(ax+b)-3}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{ax+(3-a)-3}{x-1} \ (\because \text{㉠})$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{a(x-1)}{x-1}=a$$
$\therefore a=4$
$a=4$를 ㉠에 대입하면 $b=-1$
$\therefore ab=-4$

답 ①

빈출 유형 마무리 본문 28~29쪽

01 ③	02 ①	03 ②	04 ④	05 ②	06 ②
07 21	08 ③	09 ④	10 3	11 ③	12 ④
13 8	14 ③	15 ④			

01

$$\lim_{x\to\infty}x\{\ln(3x+4)-\ln 3x\}=\lim_{x\to\infty}\left(x\ln\frac{3x+4}{3x}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}x\left\{\ln\left(1+\frac{4}{3x}\right)\right\}$$
$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to0$이므로
$$\lim_{x\to\infty}\left\{x\ln\left(1+\frac{4}{3x}\right)\right\}=\lim_{t\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{4}{3}t\right)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\left\{\frac{\ln\left(1+\frac{4}{3}t\right)}{\frac{4}{3}t}\times\frac{4}{3}\right\}$$
$$=1\times\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$$

답 ③

02

$$\lim_{h\to0}\frac{e^{(h-1)^2}-e^{h^2+1}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{e^{h^2-2h+1}-e^{h^2+1}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{e^{h^2+1}(e^{-2h}-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{-2e^{h^2+1}(e^{-2h}-1)}{-2h}$$
$$=\lim_{h\to0}(-2e^{h^2+1})\times\lim_{h\to0}\frac{e^{-2h}-1}{-2h}$$
$$=-2e\times1=-2e$$

답 ①

03

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\ln(1-2x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(x)}{\ln(1+x)}\times\frac{\ln(1+x)}{\ln(1-2x)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\ln(1+x)}\times\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}\times\lim_{x\to0}\frac{-2x}{\ln(1-2x)}\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=3\times1\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$$

답 ②

04

$\lim_{x\to-1}\frac{\ln(x+a)}{\sqrt{x+2}-1}=b$에서 $x\to-1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to-1}\ln(x+a)=0$이므로 $\ln(-1+a)=0$
$-1+a=1 \qquad \therefore a=2$
$a=2$를 주어진 식에 대입하면
$$b=\lim_{x\to-1}\frac{\ln(x+2)}{\sqrt{x+2}-1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{\ln(x+2)(\sqrt{x+2}+1)}{(\sqrt{x+2}-1)(\sqrt{x+2}+1)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(\sqrt{x+2}+1)\ln(x+2)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}(\sqrt{x+2}+1)\times\lim_{x\to-1}\frac{\ln(x+2)}{x+1}$$
$$=2\lim_{x\to-1}\frac{\ln(x+2)}{x+1} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$
$x+1=t$로 놓으면 $x\to-1$일 때 $t\to0$이므로 ㉠에서
$$2\lim_{t\to0}\frac{\ln(t+1)}{t}=2\times1=2 \qquad \therefore b=2$$
$\therefore a+b=2+2=4$

답 ④

05

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{a}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{a}{x}\right)^x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}\times a}}{\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-\frac{x}{a}\times(-a)}}$$
$$=\frac{e^a}{e^{-a}}=e^{2a}$$
따라서 $e^{2a}=e$이므로 $2a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$
$$\therefore \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a^2}{x-a^2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{a^2}{x}\right)^{\frac{x}{a^2}\times a^2}}{\left(1-\frac{a^2}{x}\right)^{-\frac{x}{a^2}\times(-a^2)}}$$
$$=\frac{e^{a^2}}{e^{-a^2}}=e^{2a^2}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

답 ②

06

$x\neq0$일 때, $\ln(1+x^2)\neq0$이므로

$f(x)=\dfrac{12x^2}{\ln(1+x^2)}\ (x\neq0)$

이때, 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

$\therefore f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\dfrac{12x^2}{\ln(1+x^2)}$

$x^2=t$로 놓으면 $x\to0$일 때 $t\to0$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{12x^2}{\ln(1+x^2)}&=\lim_{t\to0}\frac{12t}{\ln(1+t)}\\&=\lim_{t\to0}\left\{\frac{12t}{t}\times\frac{t}{\ln(1+t)}\right\}\\&=12\times1=12\end{aligned}$$

$\therefore f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=12$ 답 ②

07

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이 되려면

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$이어야 한다.

$\therefore \lim_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-a}{x^2}=b$ …… ㉠

$x\to0$일 때, (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}(e^x+e^{-x}-a)=0$이므로

$2-a=0\qquad\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}&=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}+1-2e^x}{x^2e^x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{e^x}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{e^x}\times\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2\\&=1\times1^2=1\end{aligned}$$

$\therefore b=1$

$\therefore 10a+b=10\times2+1=21$ 답 21

08

$\log_5(4+|x|)=t$로 놓으면

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{6+t^n}{2+t^n}$

(i) $|x|<1$일 때, $\log_5 4\le t<1$이므로 $\lim_{n\to\infty}t^n=0$

$f(x)=\dfrac{6+0}{2+0}=3$

(ii) $|x|=1$일 때, $t=1$이므로

$f(x)=\dfrac{6+1}{2+1}=\dfrac{7}{3}$

(iii) $|x|>1$일 때, $t>1$이므로 $\lim_{n\to\infty}t^n=\infty$

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{6}{t^n}+1}{\frac{2}{t^n}+1}=1$

(i)~(iii)에서 함수 $f(x)$는 $|x|=1$일 때 불연속이므로

$a=-1$ 또는 $a=1$

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은 $-1\times1=-1$ 답 ③

09

점 P의 좌표를 $(t,\ e^{2t})$이라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{t^2+(e^{2t}-1)^2},\ \overline{\mathrm{PR}}=e^{2t}-1$

이때, 점 P가 점 A에 한없이 가까워지면 t의 값이 0에 한없이 가까워지므로

$$\begin{aligned}\lim_{\mathrm{P}\to\mathrm{A}}\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{PR}}}&=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{t^2+(e^{2t}-1)^2}}{e^{2t}-1}\\&=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{1+\left(\frac{e^{2t}-1}{t}\right)^2}}{\frac{e^{2t}-1}{t}}\\&=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{1+\left(\frac{e^{2t}-1}{2t}\times2\right)^2}}{\frac{e^{2t}-1}{2t}\times2}\\&=\frac{\sqrt{1+2^2}}{1\times2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

답 ④

10

$$\begin{aligned}f'(x)&=(x+a)'\ln x+(x+a)(\ln x)'\\&=\ln x+(x+a)\times\frac{1}{x}\end{aligned}$$

$\therefore f'(1)=\ln 1+(1+a)\times1=1+a$

따라서 $1+a=4$이므로

$a=3$ 답 3

11

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}&=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}\\&=\frac{1}{2}f'(1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(x)&=(2^x)'(3x+1)+2^x(3x+1)'\\&=(2^x\ln2)(3x+1)+3\times2^x\end{aligned}$$

$\therefore f'(1)=(2\ln2)\times4+6=8\ln2+6$

$\therefore \dfrac{1}{2}f'(1)=\dfrac{1}{2}(8\ln2+6)=4\ln2+3$ 답 ③

12

$f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to1+}(3^x+1)=\lim_{x\to1-}(ax+b)=f(1)$

$4=a+b\qquad\therefore b=4-a$ …… ㉠

또한 $f'(1)$이 존재해야 하므로

$\lim_{x\to1+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\dfrac{(3^x+1)-4}{x-1}=\lim_{x\to1+}\dfrac{3^x-3}{x-1}$

$x-1=t$로 놓으면 $x=t+1$이고, $x\to1+$일 때 $t\to0+$이므로

$\lim_{x\to1+}\dfrac{3^x-3}{x-1}=\lim_{t\to0+}\dfrac{3^{t+1}-3}{t}=3\lim_{t\to0+}\dfrac{3^t-1}{t}=3\ln3$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{(ax+b)-4}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}\frac{ax+(4-a)-4}{x-1}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{x\to 1-}\frac{a(x-1)}{x-1}$$
$$=a$$

$\therefore a=3\ln 3$

$a=3\ln 3$을 ㉠에 대입하면 $b=-3\ln 3+4$

$\therefore a-b=3\ln 3-(-3\ln 3+4)=6\ln 3-4$ 답 ④

13

$f(x+y)=f(x)+f(y)-e^x-e^y+e^{x+y}$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면 $f(0)=f(0)+f(0)-1-1+1$

$\therefore f(0)=1$

이때, $f'(0)=7$이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=7$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)-e^x-e^h+e^{x+h}-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-e^x-e^h+e^{x+h}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1-e^x-e^h+e^{x+h}+1}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)-(e^h-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}+\lim_{h\to 0}\left\{(e^x-1)\times\frac{e^h-1}{h}\right\}$$
$$=7+e^x-1\left(\because \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1\right)$$
$$=6+e^x$$

$\therefore f'(\ln 2)=6+e^{\ln 2}=6+2=8$ 답 8

14

(i) $x>0$일 때

$$\frac{\ln(1+x)}{x}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{e^{2x}-1}{2x}$$

$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$이고 $\lim_{x\to 0+}\frac{e^{2x}-1}{2x}=1$이므로

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x}=1$$

(ii) $-1<x<0$일 때

$$\frac{e^{2x}-1}{2x}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{\ln(1+x)}{x}$$

$\lim_{x\to 0-}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$이고 $\lim_{x\to 0-}\frac{e^{2x}-1}{2x}=1$이므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)}{x}=1$$

(i), (ii)에서 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$

따라서 $3x=t$로 놓으면 $x\to 0$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(3x)}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{\frac{1}{3}t}=3\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=3\times 1=3$$ 답 ③

15

$f(x)=3^x$, $g(x)=a^{x-1}=\frac{a^x}{a}$이라 하면

$f'(x)=3^x\ln 3$, $g'(x)=\frac{a^x\ln a}{a}$

$f'(k)$는 직선 PA의 기울기, $g'(k)$는 직선 PB의 기울기이므로

$$3^k\ln 3=\frac{\overline{PH}}{\overline{AH}}=\frac{3^k}{\overline{AH}},\ \frac{a^k\ln a}{a}=\frac{\overline{PH}}{\overline{BH}}=\frac{a^{k-1}}{\overline{BH}}$$

$\therefore \overline{AH}=\frac{1}{\ln 3}$, $\overline{BH}=\frac{1}{\ln a}$

$\overline{AH}=2\overline{BH}$이므로 $\frac{1}{\ln 3}=\frac{2}{\ln a}$

$\ln a=2\ln 3=\ln 9$

$\therefore a=9$ 답 ④

Ⅱ. 미분법

02 삼각함수의 미분

내신&수능 빈출 유형

본문 31~33쪽

유형 01

$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

$=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$

$=\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta$

$=(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\beta)-\sin^2\alpha\sin^2\beta$

$=\left(1-\frac{3}{4}\right)\left(1-\frac{3}{16}\right)-\frac{3}{4}\times\frac{3}{16}=\frac{1}{16}$ 답 ⑤

01-1

$g\left(\frac{5}{13}\right)=\alpha$, $g\left(\frac{4}{5}\right)=\beta$이므로 $f(\alpha)=\frac{5}{13}$, $f(\beta)=\frac{4}{5}$

즉, $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\sin\beta=\frac{4}{5}$이고,

$0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\beta\le\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\alpha\ge0$, $\cos\beta\ge0$이므로

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{12}{13}$, $\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\frac{3}{5}$

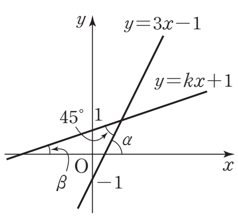
$\therefore f(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\beta)$

$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{5}{13}\times\frac{3}{5}+\frac{12}{13}\times\frac{4}{5}=\frac{63}{65}$ 답 ④

유형 02

오른쪽 그림과 같이 두 직선 $y=3x-1$, $y=kx+1$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면



$\tan\alpha=3$, $\tan\beta=k$

두 직선이 이루는 예각의 크기가 45°이므로

$\tan45°=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

$=\left|\frac{3-k}{1+3k}\right|=1$

$|3-k|=|1+3k|$이므로 양변을 제곱하면

$k^2-6k+9=9k^2+6k+1$, $8k^2+12k-8=0$

$2k^2+3k-2=0$, $(2k-1)(k+2)=0$

$\therefore k=\frac{1}{2}$ ($\because k>0$) 답 ③

02-1

두 직선 $y=kx+2$, $y=(k-5)x+1$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=k$, $\tan\beta=k-5$

두 직선이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$\tan\frac{\pi}{4}=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

$=\left|\frac{k-(k-5)}{1+k(k-5)}\right|$

$=\left|\frac{5}{k^2-5k+1}\right|$

$=1$

(i) $\frac{5}{k^2-5k+1}=1$일 때

$k^2-5k+1=5$, $k^2-5k-4=0$

$\therefore k=\frac{5\pm\sqrt{41}}{2}$

이때, 정수 k는 존재하지 않는다.

(ii) $\frac{5}{k^2-5k+1}=-1$일 때

$k^2-5k+1=-5$, $k^2-5k+6=0$

$(k-2)(k-3)=0$

$\therefore k=2$ 또는 $k=3$

(i), (ii)에서 모든 정수 k의 값의 합은

$2+3=5$ 답 ③

02-2

$\angle ABC=\alpha$, $\angle MBC=\beta$라 하면

$\tan\alpha=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, $\tan\beta=\frac{\overline{CM}}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\theta=\alpha-\beta$이므로

$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$

$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}}$

$=\frac{3}{11}$

따라서 $p=11$, $q=3$이므로

$p+q=11+3=14$ 답 ①

유형 03

$\lim_{x\to0}\frac{a+b\cos\pi x}{x\sin\pi x}=\pi$에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to0}(a+b\cos\pi x)=a+b=0$ $\therefore b=-a$

$b=-a$를 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to0}\frac{a-a\cos\pi x}{x\sin\pi x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{a(1-\cos\pi x)}{x\sin\pi x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{a(1-\cos\pi x)(1+\cos\pi x)}{x\sin\pi x(1+\cos\pi x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{a(1-\cos^2\pi x)}{x\sin\pi x(1+\cos\pi x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\sin^2\pi x}{x\sin\pi x(1+\cos\pi x)}$ $(\because 1-\cos^2\pi x=\sin^2\pi x)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\sin\pi x}{x(1+\cos\pi x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(a\times\dfrac{\sin\pi x}{\pi x}\times\dfrac{\pi}{1+\cos\pi x}\right)$

$=\dfrac{1}{2}a\pi=\pi$

$\therefore a=2$

따라서 $b=-2$이므로

$a-b=2-(-2)=4$ 답 ⑤

03-1

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\tan(ax+b)}=2$에서 $x\to 0$일 때 (분자)$\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to 0$이어야 한다. 즉,

$\lim\limits_{x\to 0}\tan(ax+b)=\tan b=0$

$\therefore b=0$ $\left(\because 0\le b<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$b=0$을 주어진 식에 대입하면

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\tan ax}=\lim\limits_{x\to 0}\left(2\times\dfrac{\sin 2x}{2x}\times\dfrac{ax}{\tan ax}\times\dfrac{1}{a}\right)$

$=\dfrac{2}{a}=2$

$\therefore a=1$

$\therefore a+b=1+0=1$ 답 1

03-2

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\ne 0$)으로 놓으면

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{f(x)}=\dfrac{1}{3}$에서 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{ax+b}=\dfrac{1}{3}$ …… ㉠

㉠에서 $x\to\dfrac{\pi}{2}$일 때 (분자)$\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to 0$이어야 한다. 즉,

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(ax+b)=\dfrac{\pi}{2}a+b=0$

$\therefore b=-\dfrac{\pi}{2}a$

$b=-\dfrac{\pi}{2}a$를 ㉠에 대입하고, $x-\dfrac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x\to\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t\to 0$이므로

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{ax-\frac{\pi}{2}a}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{a\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}{at}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{-\sin t}{at}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\left(-\dfrac{1}{a}\times\dfrac{\sin t}{t}\right)$

$=-\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore a=-3$

따라서 $b=\dfrac{3}{2}\pi$이므로

$f(x)=-3x+\dfrac{3}{2}\pi$

$\therefore f(\pi)=-3\pi+\dfrac{3}{2}\pi=-\dfrac{3}{2}\pi$ 답 ①

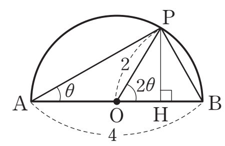
유형 04

점 P는 반원 위의 점이므로 $\angle APB=\dfrac{\pi}{2}$이다.

$\angle PAB=\theta$이므로 원주각과 중심각의 성질에 의하여

$\angle POB=2\theta$

오른쪽 그림과 같이 삼각형 POB의 점 P에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{PH}=\overline{OP}\sin 2\theta=2\sin 2\theta$

따라서 삼각형 POB의 넓이 $S(\theta)$는

$S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{PH}$

$=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\sin 2\theta$

$=2\sin 2\theta$

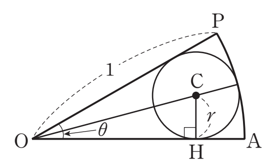
$\therefore \lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{S(\theta)}{\theta}=\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{2\sin 2\theta}{\theta}$

$=\lim\limits_{\theta\to 0+}4\times\dfrac{\sin 2\theta}{2\theta}$

$=4\times 1=4$ 답 4

04-1

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C, 점 C에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H, 원의 반지름의 길이를 r라 하면



$\overline{CH}=r$, $\overline{OC}=1-r$이므로

$\overline{OC}\sin\dfrac{\theta}{2}=\overline{CH}$, $(1-r)\sin\dfrac{\theta}{2}=r$

$\therefore r=\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}+1}$

따라서 $l(\theta)=\dfrac{2\pi\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}+1}$이므로

$\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{l(\theta)}{\pi\theta}=\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{2\pi\sin\frac{\theta}{2}}{\pi\theta\left(\sin\frac{\theta}{2}+1\right)}$

$=\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\theta\left(\sin\frac{\theta}{2}+1\right)}$

$=\lim\limits_{\theta\to 0+}\left(2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\times\dfrac{1}{\sin\frac{\theta}{2}+1}\right)$

$=2\times\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{0+1}=1$ 답 1

유형 05

$\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi-h)}{h}$
$=\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)+f(\pi)-f(\pi-h)}{h}$
$=\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(\pi-h)-f(\pi)}{-h}$
$=f'(\pi)+f'(\pi)$
$=2f'(\pi)$
이때, $f(x)=x^2\cos x$에서
$f'(x)=2x\cos x-x^2\sin x$이므로
$2f'(\pi)=2(2\pi\cos\pi-\pi^2\sin\pi)$
$=2(-2\pi-0)$
$=-4\pi$ 답 ①

05-1

$f(x)=e^x(\cos x+\sin x)$에서
$f'(x)=e^x(\cos x+\sin x)+e^x(-\sin x+\cos x)$
$=2e^x\cos x$
$\therefore f'(0)=2e^0\cos0=2$ 답 ②

05-2

$f(x)=\lim_{h\to0}\frac{\cos x\cos(x+h)-\cos^2x}{h}$
$=\lim_{h\to0}\frac{\cos x\{\cos(x+h)-\cos x\}}{h}$
$=\cos x\lim_{h\to0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$
$=\cos x(\cos x)'$
$=-\cos x\sin x$
$\therefore f'(x)=-\{(-\sin x)\sin x+\cos x\cos x\}$
$=\sin^2x-\cos^2x$
$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin^2\frac{\pi}{2}-\cos^2\frac{\pi}{2}=1^2-0=1$ 답 1

유형 06

함수 $f(x)$가 $x=\frac{\pi}{2}$에서 미분가능하므로 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 연속이다.
즉, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$이므로
$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}(ax+b)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\cos x=\cos\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}a+b=0$
$\therefore b=-\frac{\pi}{2}a$ …… ㉠
또한 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$가 존재하므로

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}\frac{ax-\frac{\pi}{2}a}{x-\frac{\pi}{2}}$ ($\because$ ㉠)
$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}\frac{a\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=a$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

$x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{t\to0-}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}{t}$
$=\lim_{t\to0-}\frac{-\sin t}{t}=-1$

$\therefore a=-1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $b=\frac{\pi}{2}$이므로

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & \left(x\le\frac{\pi}{2}\right)\\ -x+\frac{\pi}{2} & \left(x>\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

$\therefore f(\pi)=-\pi+\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$ 답 ②

06-1

$f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로
$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$
$\lim_{x\to0+}(ax+b)=\lim_{x\to0-}(\sin x+\cos x)=1$
$\therefore b=1$
또한 $f'(0)$이 존재해야 하므로
$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{(ax+1)-1}{x}$
$=\lim_{x\to0+}\frac{ax}{x}=a$
$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{(\sin x+\cos x)-1}{x}$
$=\lim_{x\to0-}\left(\frac{\sin x}{x}+\frac{\cos x-1}{x}\right)=1$
$\therefore a=1$
$\therefore a+b=1+1=2$

• 보충 설명 •

$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}$
$=\lim_{x\to0}\frac{\cos^2x-1}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin^2x}{x(\cos x+1)}$
$=\lim_{x\to0}\left\{(-\sin x)\times\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x+1}\right\}$
$=0\times1\times\frac{1}{2}=0$ 답 2

빈출 유형 마무리

본문 34~35쪽

01 ①	02 ⑤	03 14	04 7	05 7	06 4
07 ③	08 4	09 ②	10 54	11 ③	12 ①
13 ②	14 6	15 ④	16 ①		

01

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$에서 $\cos\alpha>0$, $\sin\beta<0$이므로

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-\frac{1}{9}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{5}}{3}\times\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

$=\frac{2+2\sqrt{10}}{9}$

답 ①

02

$\overline{PA}=\sqrt{3}a\ (a>0)$로 놓으면 $\overline{PB}=2a$이고 $\angle APB=90°$이므로 직각삼각형 PAB에서

$(\sqrt{3}a)^2+(2a)^2=(\sqrt{7})^2 \qquad \therefore a=1\ (\because a>0)$

즉, $\sin A=\frac{\overline{PB}}{\overline{AB}}=\frac{2}{\sqrt{7}}$,

$\cos A=\frac{\overline{PA}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$이고

$\sin B=\frac{\overline{PA}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$,

$\cos B=\frac{\overline{PB}}{\overline{AB}}=\frac{2}{\sqrt{7}}$이므로

$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$

$=\frac{2}{\sqrt{7}}\times\frac{2}{\sqrt{7}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

$=\frac{1}{7}$

답 ⑤

03

삼각형 ABC에서 $A=\pi-(B+C)$이므로

$\tan A=\tan\{\pi-(B+C)\}$

$=-\tan(B+C)$

$=-\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}$

$=-\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}\times2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\therefore \tan^2 A=\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

따라서 $p=9$, $q=5$이므로

$p+q=9+5=14$

답 14

04

두 점 $(-2, 1)$, $(2, 3)$을 지나는 직선과 직선 $y=2x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=\frac{3-1}{2-(-2)}=\frac{1}{2}$, $\tan\beta=2$이므로

$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

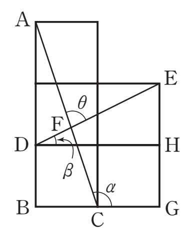
$=\left|\frac{\frac{1}{2}-2}{1+\frac{1}{2}\times2}\right|=\frac{3}{4}$

$\therefore \tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{\frac{3}{4}+1}{1-\frac{3}{4}\times1}=7$

답 7

05



오른쪽 그림과 같이

$\angle ACG=\alpha$, $\angle EDH=\beta$라 하면

$\tan(\pi-\alpha)=3$이므로 $\tan\alpha=-3$이고

$\tan\beta=\frac{1}{2}$

$\theta=\alpha-\beta$이므로

$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$

$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{-3-\frac{1}{2}}{1+(-3)\times\frac{1}{2}}=7$

답 7

06

$\lim_{x\to2}\frac{\sin(x-2)}{\sqrt{ax}-2}=b$에서 $x\to2$일 때 (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}(\sqrt{ax}-2)=\sqrt{2a}-2=0$

$\therefore a=2$

$a=2$를 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to2}\frac{\sin(x-2)}{\sqrt{2x}-2}=\lim_{x\to2}\frac{\sin(x-2)}{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{2x}+2)}\times(\sqrt{2x}+2)$

$=\lim_{x\to2}\frac{\sin(x-2)}{2(x-2)}\times\lim_{x\to2}(\sqrt{2x}+2)$

$=2\lim_{x\to2}\frac{\sin(x-2)}{x-2}$

이때, $x-2=t$로 놓으면 $x\to2$일 때 $t\to0$이므로

$2\lim_{x\to2}\frac{\sin(x-2)}{x-2}=2\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=2$

따라서 $b=2$이므로 $a+b=4$

답 4

07

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)으로 놓으면

$\lim_{x\to\pi}\frac{x\sin x}{f(x)}=\frac{\pi}{2}$에서 $\lim_{x\to\pi}\frac{x\sin x}{ax+b}=\frac{\pi}{2}$ …… ㉠

㉠에서 $x\to\pi$일 때 (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to\pi}(ax+b)=a\pi+b=0$

$\therefore\ b=-a\pi$

$b=-a\pi$를 ㉠에 대입하고, $x-\pi=t$로 놓으면 $x\to\pi$일 때 $t\to0$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi}\frac{x\sin x}{ax-a\pi}&=\lim_{x\to\pi}\frac{x\sin x}{a(x-\pi)}\\&=\lim_{t\to0}\frac{(t+\pi)\sin(t+\pi)}{at}\\&=\lim_{t\to0}\frac{-(t+\pi)\sin t}{at}\\&=-\frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$\therefore\ a=-2$

따라서 $b=2\pi$이므로

$f(x)=-2x+2\pi$

$\therefore\ f(\pi)=-2\pi+2\pi=0$ 답 ③

08

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}f(x)(1-\cos2x)\\&=\lim_{x\to0}\frac{f(x)(1-\cos2x)(1+\cos2x)}{1+\cos2x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{f(x)(1-\cos^2 2x)}{1+\cos2x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{f(x)\sin^2 2x}{1+\cos2x}\\&=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin^2 2x}{(2x)^2}\times\frac{4}{1+\cos2x}\times x^2f(x)\right\}\\&=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin2x}{2x}\right)^2\times\lim_{x\to0}\frac{4}{1+\cos2x}\times\lim_{x\to0}x^2f(x)\\&=1^2\times\frac{4}{1+1}\times\lim_{x\to0}x^2f(x)\\&=2\lim_{x\to0}x^2f(x)=8\end{aligned}$$

$\therefore\ \lim_{x\to0}x^2f(x)=4$ 답 4

09

$\lim_{x\to a}\frac{3^x-1}{2\sin(x-a)}=b\ln3$에서 $x\to a$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to a}(3^x-1)=3^a-1=0$

$\therefore\ a=0$

$a=0$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{2\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{3^x-1}{x}}{2\times\frac{\sin x}{x}}=\frac{\ln3}{2\times1}$$

$$=\frac{1}{2}\ln3$$

따라서 $a=0$, $b=\frac{1}{2}$이므로

$a+b=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ 답 ②

10

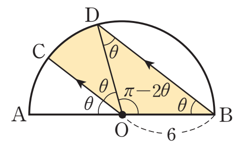
$\overline{OC}\,/\!/\,\overline{BD}$이므로 $\angle OBD=\angle AOC=\theta$ (동위각)이고

$\overline{OD}=\overline{OB}$이므로 $\angle ODB=\angle OBD=\theta$

즉, $\angle COD=\theta$이고

$\angle BOD=\pi-2\theta$

오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이 $S(\theta)$는



$S(\theta)$=(부채꼴 COD의 넓이)
+(삼각형 DOB의 넓이)

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\times6^2\times\theta+\frac{1}{2}\times6^2\times\sin(\pi-2\theta)\\&=18(\theta+\sin2\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}&=\lim_{\theta\to0+}\frac{18(\theta+\sin2\theta)}{\theta}\\&=18\lim_{\theta\to0+}\left(1+\frac{\sin2\theta}{2\theta}\times2\right)\\&=18(1+2)=54\end{aligned}$$

답 54

11

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

$\therefore\ \lim_{x\to0}\frac{3^x-a\sin x+b}{x}=0$ …… ㉠

㉠에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to0}(3^x-a\sin x+b)=1+b=0$

$\therefore\ b=-1$

$b=-1$을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{3^x-a\sin x-1}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{(3^x-1)-a\sin x}{x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{a\sin x}{x}\\&=\ln3-a\times1=0\end{aligned}$$

$\therefore\ a=\ln3$

$\therefore\ a+b=\ln3-1$ 답 ③

12

$f(x)=\sin^2x+2\sin x$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=\cos x\sin x+\sin x\cos x+2\cos x\\&=2\cos x(\sin x+1)\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=0$ 또는 $\sin x=-1$

이때, $0\le x\le2\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

따라서 모든 x의 값의 합은

$\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi=2\pi$ 답 ①

13

$\lim_{x\to0}\frac{f(\pi+\sin 3x)-f(\pi)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(\pi+\sin 3x)-f(\pi)}{(\pi+\sin 3x)-\pi}\times\frac{\sin 3x}{3x}\times3\right\}$

$=3\lim_{x\to0}\frac{f(\pi+\sin 3x)-f(\pi)}{(\pi+\sin 3x)-\pi}$ …… ㉠

$\pi+\sin 3x=t$로 놓으면 $x\to0$일 때 $t\to\pi$이므로 ㉠은

$3\lim_{t\to\pi}\frac{f(t)-f(\pi)}{t-\pi}=3f'(\pi)$

$f(x)=\sin x-2\cos x$에서

$f'(x)=\cos x+2\sin x$

$\therefore 3f'(\pi)=3(\cos\pi+2\sin\pi)$

$=3(-1+0)=-3$ 답 ②

14

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$

$\lim_{x\to0+}(a\sin x+a)=\lim_{x\to0-}(2x^2+3x+b)=a$

$\therefore a=b$ …… ㉠

또한 $f'(0)$이 존재해야 하므로

$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{(a\sin x+a)-a}{x}$

$=\lim_{x\to0+}\frac{a\sin x}{x}=a$

$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{(2x^2+3x+a)-a}{x}$

$=\lim_{x\to0-}\frac{x(2x+3)}{x}$

$=\lim_{x\to0-}(2x+3)=3$

$\therefore a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $b=3$

$\therefore a+b=3+3=6$ 답 6

15

점 P의 좌표를 (a, b)라 하면

$b=1-a^2$ …… ㉠

$\tan\theta_1=\frac{1-b}{a}=\frac{1}{2}$

$a=2(1-b)$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{4}$ ($\because 0<a<1$)

$\tan\theta_2=\frac{b}{a}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$

$\therefore\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}$

$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}}$

$=\frac{2}{1-\frac{3}{4}}=8$ 답 ④

16

삼각형 POH에서 $\overline{PO}=1$이므로 $\overline{OH}=\cos\theta$

$\therefore\overline{HA}=1-\cos\theta$

삼각형 OAB는 직각이등변삼각형이므로 $\angle BAO=\frac{\pi}{4}$

따라서 삼각형 AQH도 직각이등변삼각형이므로

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{HA}\times\overline{QH}=\frac{1}{2}\times(1-\cos\theta)^2$

$\therefore\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^4}=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)^2}{2\theta^4}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)^2(1+\cos\theta)^2}{2\theta^4(1+\cos\theta)^2}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos^2\theta)^2}{2\theta^4(1+\cos\theta)^2}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(\sin^2\theta)^2}{2\theta^4(1+\cos\theta)^2}$

$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\sin^4\theta}{\theta^4}\times\frac{1}{2(1+\cos\theta)^2}\right\}$

$=\frac{1}{8}$ 답 ①

Ⅱ. 미분법

03 여러 가지 미분법

내신&수능 빈출 유형

본문 37~40쪽

유형 01

$f'(x)=\frac{(x+k)'(x-1)-(x+k)(x-1)'}{(x-1)^2}$

$=\frac{1\times(x-1)-(x+k)\times1}{(x-1)^2}$

$=\frac{-1-k}{(x-1)^2}$

이때, $f'(0)=\frac{-1-k}{(0-1)^2}=-4$이므로

$-1-k=-4$

$\therefore k=3$

답 ⑤

01-1

$\lim_{h\to0}\frac{f(2\pi+h)-f(2\pi)}{h}=f'(2\pi)$

이때,

$f'(x)=\frac{(\tan x)'(1+\sec x)-\tan x(1+\sec x)'}{(1+\sec x)^2}$

$=\frac{\sec^2 x(1+\sec x)-\tan x\times\sec x\tan x}{(1+\sec x)^2}$

$=\frac{\sec^2 x(1+\sec x)-\sec x(\sec^2 x-1)}{(1+\sec x)^2}$

$(\because \tan^2 x=\sec^2 x-1)$

$=\frac{\sec x(1+\sec x)}{(1+\sec x)^2}=\frac{\sec x}{1+\sec x}$

이므로

$f'(2\pi)=\frac{\sec 2\pi}{1+\sec 2\pi}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

답 ④

01-2

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}$

$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x+2)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim_{x\to2}\frac{1}{x+2}$

$=\frac{1}{4}f'(2)$

이때,

$f'(x)=-\frac{(2x-3)'}{(2x-3)^2}=\frac{-2}{(2x-3)^2}$

이므로 $f'(2)=\frac{-2}{(2\times2-3)^2}=-2$

$\therefore \frac{1}{4}f'(2)=\frac{1}{4}\times(-2)=-\frac{1}{2}$

답 ②

유형 02

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-1}{x+1}=2$에서 $x\to-1$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다. 즉,

$\lim_{x\to-1}\{f(x)-1\}=0 \qquad \therefore \lim_{x\to-1}f(x)=1$

그런데 함수 $f(x)$가 연속함수이므로

$f(-1)=\lim_{x\to-1}f(x)=1$

$\therefore \lim_{x\to-1}\frac{f(x)-1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)=2$

또한 $\lim_{x\to1}\frac{g(x)-1}{x-1}=7$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to1}\{g(x)-1\}=0 \qquad \therefore \lim_{x\to1}g(x)=1$

그런데 함수 $g(x)$가 연속함수이므로 $g(1)=\lim_{x\to1}g(x)=1$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{g(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=7$

이때, $h'(x)=g'(f(x))f'(x)$이므로

$h'(-1)=g'(f(-1))f'(-1)$

$=g'(1)\times2=7\times2=14$

답 ⑤

02-1

$f'(x)=\frac{(x^2+1)-(x-2)\times2x}{(x^2+1)^2}$이므로

$f'(2)=\frac{1}{5}$

이때, $h'(x)=g'(f(x))f'(x)$이므로

$h'(2)=g'(f(2))f'(2)=g'(0)\times\frac{1}{5}=6$

$\therefore g'(0)=30$

답 ①

유형 03

$f'(x)=\frac{1}{\ln 3}\times\frac{\cos x}{\sin x}$이므로

$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}=f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\ln 3}\times\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\ln 3}$

답 ①

03-1

$\lim_{x\to3}\frac{\ln f(x)}{x-3}=2$에서 $x\to3$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to3}\ln f(x)=0$

그런데 함수 $\ln f(x)$가 연속함수이므로

$\ln f(3)=\lim_{x\to3}\ln f(x)=0 \qquad \therefore f(3)=1$

$\therefore \lim_{x\to3}\frac{\ln f(x)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{\ln f(x)-\ln f(3)}{x-3}=\frac{f'(3)}{f(3)}=2$

$\therefore f'(3)=2f(3)=2\times1=2$

$\therefore f(3)+f'(3)=1+2=3$

답 ③

03-2

$f(x)=\ln\sqrt[3]{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\ln\left(\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)^{\frac{1}{3}}$에서

$f(x)=\dfrac{1}{3}\{\ln(1-\cos x)-\ln(1+\cos x)\}$이므로

$$f'(x)=\frac{1}{3}\left\{\frac{(1-\cos x)'}{1-\cos x}-\frac{(1+\cos x)'}{1+\cos x}\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$$
$$=\frac{\sin x(1+\cos x)+\sin x(1-\cos x)}{3(1-\cos x)(1+\cos x)}$$
$$=\frac{2\sin x}{3\sin^2 x}$$
$$=\frac{2}{3\sin x}$$

$\therefore f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{3\sin\dfrac{\pi}{2}}=\dfrac{2}{3}$ 답 ①

유형 04

$f(x)=\dfrac{(x+1)^3}{x(x-2)^2}$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|f(x)|=\ln\left|\frac{(x+1)^3}{x(x-2)^2}\right|$$
$$=3\ln|x+1|-\ln|x|-2\ln|x-2|$$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x-2}$

이므로 양변에 $x=1$을 대입하면

$\dfrac{f'(1)}{f(1)}=\dfrac{3}{2}-1+2=\dfrac{5}{2}$

이때, $f(1)=\dfrac{(1+1)^3}{1\times(1-2)^2}=8$

$\therefore f'(1)=\dfrac{5}{2}f(1)=\dfrac{5}{2}\times 8=20$ 답 ③

04-1

$f(x)=x^{\sin x}\ (x>0)$의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=\ln x^{\sin x}=\sin x\ln x$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\cos x\ln x+\sin x\times\dfrac{1}{x}$

이므로 양변에 $x=\dfrac{\pi}{2}$를 대입하면

$$\frac{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\cos\frac{\pi}{2}\ln\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}\times\frac{2}{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

이때, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{\sin\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{\pi}f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{\pi}\times\dfrac{\pi}{2}=1$ 답 ①

유형 05

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2(1+t)-2t}{(1+t)^2}=\dfrac{2}{(1+t)^2}$,

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2t(1+t)-t^2}{(1+t)^2}=\dfrac{t^2+2t}{(1+t)^2}$

이므로 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\frac{t^2+2t}{(1+t)^2}}{\frac{2}{(1+t)^2}}=\dfrac{t^2+2t}{2}$

$\therefore \lim\limits_{t\to1}\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{t\to1}\dfrac{t^2+2t}{2}=\dfrac{3}{2}$ 답 ②

05-1

$\dfrac{dx}{dt}=2\cos t\times(-\sin t)=-2\sin t\cos t$,

$\dfrac{dy}{dt}=2a\sin t\cos t$

이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{2a\sin t\cos t}{-2\sin t\cos t}=-a$ (단, $\sin t\cos t\neq0$)

$\dfrac{dy}{dx}=-1$이므로 $-a=-1$ $\therefore a=1$ 답 ③

05-2

$\dfrac{dx}{dt}=2t$, $\dfrac{dy}{dt}=3t^2+4t$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{3t^2+4t}{2t}=\dfrac{3t+4}{2}$ (단, $t\neq0$)

점 (a, b)에서의 접선의 기울기가 $\dfrac{1}{2}$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3t+4}{2}=\dfrac{1}{2}$

$3t+4=1$ $\therefore t=-1$

$t=-1$을 $a=t^2$, $b=t^3+2t^2+3$에 대입하면

$a=(-1)^2=1$, $b=(-1)^3+2\times(-1)^2+3=4$

$\therefore a^2+b^2=1^2+4^2=17$ 답 17

유형 06

$x^2+y^2+ay+b=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+2y\dfrac{dy}{dx}+a\dfrac{dy}{dx}=0$, $(2y+a)\dfrac{dy}{dx}=-2x$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x}{2y+a}$ (단, $2y+a\neq0$)

$x=1$, $y=3$에서의 $\dfrac{dy}{dx}$의 값이 -1이므로

$-\dfrac{2}{6+a}=-1$ $\therefore a=-4$

또한 곡선 $x^2+y^2+ay+b=0$이 점 $(1,\ 3)$을 지나므로
$1^2+3^2+(-4)\times3+b=0$
$10-12+b=0 \qquad \therefore b=2$
$\therefore a+b=-4+2=-2$ 답 ②

06-1
$y=\sqrt{4-x^2}$의 양변을 제곱하면
$y^2=4-x^2 \qquad \therefore x^2+y^2=4$ …… ㉠
㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면
$2x+2y\dfrac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ (단, $y\neq0$)
위의 식에 $x=1,\ y=\sqrt{3}$을 대입하면
$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 답 ③

유형 07
$f'(x)=3x^2-2$이므로 $f'(3)=25$
$g(4)=a$라 하면 $f(a)=4$이므로
$f(a)=a^3-2a=4,\ (a-2)(a^2+2a+2)=0$
$\therefore a=2$
$g'(4)=\dfrac{1}{f'(g(4))}=\dfrac{1}{f'(2)}=\dfrac{1}{3\times2^2-2}=\dfrac{1}{10}$
$\therefore f'(3)g'(4)=25\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{5}{2}$ 답 ①

07-1
$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{x^2-1}=3$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다. 즉,
$\lim\limits_{x\to1}\{f(x)-2\}=0 \qquad \therefore \lim\limits_{x\to1}f(x)=2$
그런데 함수 $f(x)$는 연속함수이므로
$f(1)=\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$
$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x^2-1}&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x+1)(x-1)}\\&=\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{x+1}\times\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right\}\\&=\frac{f'(1)}{2}=3\end{aligned}$$
$\therefore f'(1)=6$
이때, $f(1)=2$에서 $g(2)=1$이므로
$g'(2)=\dfrac{1}{f'(g(2))}=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{6}$ 답 ①

07-2
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ 3)$에서의 접선의 기울기가 7이므로
$f(-1)=3,\ f'(-1)=7$에서
$f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $g(3)=-1$
$\therefore g'(3)=\dfrac{1}{f'(g(3))}=\dfrac{1}{f'(-1)}=\dfrac{1}{7}$ 답 ①

유형 08
$f'(x)=2xe^{x^2-1}$이므로 $f'(1)=2$
$$\begin{aligned}\therefore \lim_{h\to0}\frac{f'(1+h)-2}{h}&=\lim_{h\to0}\frac{f'(1+h)-f'(1)}{h}\\&=f''(1)\end{aligned}$$
이때, $f''(x)=2e^{x^2-1}+2x\times2xe^{x^2-1}=e^{x^2-1}(4x^2+2)$
이므로 $f''(1)=1\times(4\times1+2)=6$ 답 ③

08-1
$f'(x)=\ln(ax+b)+x\times\dfrac{a}{ax+b}$
$f''(x)=\dfrac{a}{ax+b}+\dfrac{a(ax+b)-ax\times a}{(ax+b)^2}$
$f'(0)=1$에서 $\ln b=1 \qquad \therefore b=e$
$f''(0)=4$에서 $\dfrac{2a}{b}=4,\ a=2b \qquad \therefore a=2e$
$\therefore a+b=2e+e=3e$ 답 ③

빈출 유형 마무리 본문 41~42쪽

01 ②	02 4	03 4	04 ①	05 ⑤	06 ②
07 ②	08 ④	09 ③	10 ④	11 ②	12 20
13 ①	14 3	15 10	16 16		

01
$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(-h)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)-\{f(-h)-f(0)\}}{h}\\&=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)-f(0)}{h}-\frac{f(-h)-f(0)}{h}\right\}\\&=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)-f(0)}{h}+\frac{f(-h)-f(0)}{-h}\right\}\\&=f'(0)+f'(0)=2f'(0)\end{aligned}$$
이때, $f'(x)=-\dfrac{2}{(x+1)^2}$이므로
$f'(0)=-\dfrac{2}{(0+1)^2}=-2$
$\therefore 2f'(0)=2\times(-2)=-4$ 답 ②

02
$f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$에서
$f'(x)=\dfrac{1\times(x-1)-(x+1)\times1}{(x-1)^2}=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$
이때, $h'(x)=g'(f(x))f'(x)$이므로
위의 식에 $x=2$를 대입하면

$h'(2)=g'(f(2))f'(2)=g'(3)f'(2)$ ($\because f(2)=3$)
이때, $h'(2)=-8$, $f'(2)=-2$이므로
$-8=g'(3)\times(-2)$
$\therefore g'(3)=4$ 답 4

03
곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나므로 $f(0)=0$
원점에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'(0)=2$
$F(x)=f(f(x))$에서 $F'(x)=f'(f(x))f'(x)$
$\therefore F'(0)=f'(f(0))f'(0)=2\times2=4$ 답 4

04
$f(x^3+3)=x^6-3x^5+2x^3$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$3x^2\times f'(x^3+3)=6x^5-15x^4+6x^2$
$x=-1$을 대입하면
$3f'(2)=-6-15+6=-15$
$\therefore f'(2)=-5$ 답 ①

05
$f(x)=\ln\dfrac{e^x+e^{2x}+e^{3x}+e^{4x}}{4}$이라 하면

$f(0)=\ln\dfrac{4}{4}=0$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}+e^{4x}}{4}&=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}f(x)\\&=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\\&=f'(0)\end{aligned}$$

이때,

$$f'(x)=\frac{\dfrac{e^x+2e^{2x}+3e^{3x}+4e^{4x}}{4}}{\dfrac{e^x+e^{2x}+e^{3x}+e^{4x}}{4}}=\frac{e^x+2e^{2x}+3e^{3x}+4e^{4x}}{e^x+e^{2x}+e^{3x}+e^{4x}}$$

이므로

$f'(0)=\dfrac{1+2+3+4}{4}=\dfrac{5}{2}$ 답 ⑤

06
$f(x)=x^{\ln x}$에서 $f(e)=e^{\ln e}=e$이므로

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(e+h)-e}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(e+h)-f(e)}{h}=f'(e)$

$f(x)=x^{\ln x}$의 양변에 자연로그를 취하면
$\ln f(x)=\ln x\ln x=(\ln x)^2$
양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{2\ln x}{x}$

$f'(x)=f(x)\times\dfrac{2\ln x}{x}=\dfrac{2x^{\ln x}\ln x}{x}$

$\therefore f'(e)=\dfrac{2e^{\ln e}\ln e}{e}=\dfrac{2e}{e}=2$ 답 ②

07
$\dfrac{dx}{d\theta}=4\cos\theta\times(-\sin\theta)=-4\cos\theta\sin\theta$,

$\dfrac{dy}{d\theta}=3\sin^2\theta\times\cos\theta=3\sin^2\theta\cos\theta$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\dfrac{3\sin^2\theta\cos\theta}{-4\cos\theta\sin\theta}=-\dfrac{3}{4}\sin\theta$ (단, $\sin\theta\cos\theta\neq0$)

따라서 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$일 때,

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3}{4}\sin\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$ 답 ②

08
점 $(a,\ 1)$이 곡선 $xy^2-y^3=0$ 위에 있으므로
$a-1=0$ $\therefore a=1$
$xy^2-y^3=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$y^2+2xy\dfrac{dy}{dx}-3y^2\dfrac{dy}{dx}=0$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y^2}{2xy-3y^2}=-\dfrac{y}{2x-3y}$ (단, $y\neq0$, $2x-3y\neq0$)

따라서 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{2-3}=-\dfrac{1}{-1}=1$ 답 ④

09
$f(x)=x^3-4x^2+6x+1$에서 $f(0)=1$, $f(1)=4$
$f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $g(1)=0$
이때, $f(1)g(1)=4\times0=0$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1}\\&=\{f(1)g(1)\}'\\&=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)\end{aligned}$$ …… ㉠

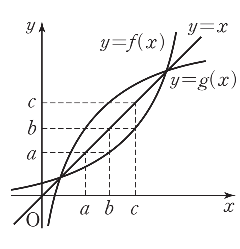
이때, $f'(x)=3x^2-8x+6$이므로 $f'(0)=6$, $f'(1)=1$

따라서 $g'(1)=\dfrac{1}{f'(g(1))}=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{6}$이므로 ㉠에서

$$\begin{aligned}f'(1)g(1)+f(1)g'(1)&=1\times0+4\times\frac{1}{6}\\&=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$ 답 ③

10
오른쪽 그림에서 $f(b)=a$이므로
$g(a)=b$

$\therefore g'(a)=\dfrac{1}{f'(g(a))}=\dfrac{1}{f'(b)}$ 답 ④



11

$f(x)=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$에서 $f'(x)=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$

$g(2)=a$라 하면 $f(a)=2$

즉, $f(a)=\frac{1}{2}(e^{a}-e^{-a})=2$이므로

$e^{2a}-4e^{a}-1=0$

$\therefore e^{a}=2+\sqrt{5}$ ($\because e^{a}>0$)

$\therefore a=\ln(2+\sqrt{5})$

$$\therefore g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}=\frac{1}{f'(a)}=\frac{1}{f'(\ln(2+\sqrt{5}))}$$
$$=\frac{1}{\frac{1}{2}\{e^{\ln(2+\sqrt{5})}+e^{-\ln(2+\sqrt{5})}\}}$$
$$=\frac{2}{(2+\sqrt{5})+\frac{1}{2+\sqrt{5}}}$$
$$=\frac{2}{(2+\sqrt{5})-(2-\sqrt{5})}$$
$$=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

답 ②

12

조건 (나)에서 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to2}\{f'(f(x))-2\}=0$ $\quad\therefore \lim_{x\to2}f'(f(x))=2$

그런데 함수 $f'(f(x))$는 연속함수이므로

$f'(f(2))=\lim_{x\to2}f'(f(x))=2$

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f'(f(x))-2}{x^2-4}$$
$$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f'(f(x))-f'(f(2))}{f(x)-f(2)}\times\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}\right\}$$
$$=f''(f(2))\times f'(2)\times\frac{1}{4}$$
$$=f''(3)\times1\times\frac{1}{4}\ (\because \text{조건 (가)})$$
$$=\frac{1}{4}f''(3)=5$$

$\therefore f''(3)=20$

답 20

13

$f'(x)=e^{x}(\sin x+\cos x)$

$f''(x)=e^{x}(\sin x+\cos x)+e^{x}(\cos x-\sin x)$

$=2e^{x}\cos x$

이때, $f(x)-f'(x)+af''(x)=0$에서

$e^{x}\sin x-e^{x}(\sin x+\cos x)+2ae^{x}\cos x=0$

$e^{x}(2a-1)\cos x=0$ ...... ㉠

임의의 실수 x에 대하여 ㉠이 항상 성립하므로

$2a-1=0$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

답 ①

14

$f'(x)=(2x-2)e^{x}+(x^2-2x+a)e^{x}$

$=(x^2+a-2)e^{x}$

$f''(x)=2xe^{x}+(x^2+a-2)e^{x}$

$=(x^2+2x+a-2)e^{x}$

이때, $e^{x}>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)\ge0$이려면

$x^2+2x+a-2\ge0$이어야 한다.

이차방정식 $x^2+2x+a-2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-(a-2)\le0$ $\quad\therefore a\ge3$

따라서 실수 a의 최솟값은 3이다.

답 3

15

$f(x)=(x+1)^{\frac{3}{2}}$에서 $f'(x)=\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}$

이때, $h'(x)=g'(f(x))f'(x)$이므로

$h'(0)=g'(f(0))f'(0)$

이때, $h'(0)=15$, $f(0)=1$, $f'(0)=\frac{3}{2}$이므로

$15=g'(1)\times\frac{3}{2}$

$\therefore g'(1)=10$

답 10

16

$f(x)=\ln(\tan x)$에서 $f'(x)=\frac{\sec^2 x}{\tan x}$

이때, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\ln\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)=0$이므로

$g(0)=\frac{\pi}{4}$ ($\because g(x)=f^{-1}(x)$)

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{4g(8h)-\pi}{h}=\lim_{h\to0}\frac{4\left\{g(8h)-\frac{\pi}{4}\right\}}{h}$$
$$=32\lim_{h\to0}\frac{g(8h)-g(0)}{8h}$$
$$=32g'(0)$$

따라서 $g'(0)=\frac{1}{f'(g(0))}=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}$이므로

$32g'(0)=32\times\frac{1}{2}=16$

답 16

04 도함수의 활용 (1)

내신&수능 빈출 유형

본문 44~46쪽

유형 01

$\lim_{x\to e}\frac{f(x)-1}{x^2-e^2}=\frac{1}{e^2}$에서 $x\to e$일 때 (분모)$\to 0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to e}\{f(x)-1\}=0 \qquad \therefore \lim_{x\to e}f(x)=1$

그런데 $f(x)$는 연속함수이므로

$f(e)=\lim_{x\to e}f(x)=1$

$$\therefore \lim_{x\to e}\frac{f(x)-1}{x^2-e^2}=\lim_{x\to e}\frac{f(x)-f(e)}{x^2-e^2}=\lim_{x\to e}\left\{\frac{f(x)-f(e)}{x-e}\times\frac{1}{x+e}\right\}=\frac{f'(e)}{2e}$$

이때, $\lim_{x\to e}\frac{f(x)-1}{x^2-e^2}=\frac{1}{e^2}$이므로

$\frac{f'(e)}{2e}=\frac{1}{e^2} \qquad \therefore f'(e)=\frac{2}{e}$

$g(x)=f(x)\ln x$라 하면

$g'(x)=f'(x)\ln x+\frac{f(x)}{x}$

$\therefore g(e)=1,\ g'(e)=\frac{3}{e}$

즉, 구하는 접선의 방정식은

$y-1=\frac{3}{e}(x-e)$

$\therefore y=\frac{3}{e}x-2$

따라서 $a=\frac{3}{e}$, $b=-2$이므로

$ab=\frac{3}{e}\times(-2)=-\frac{6}{e}$ 답 ⑤

01-1

$f(x)=x\ln x$로 놓으면

$f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$이므로

$f'(e)=\ln e+1=2$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(e,\ e)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-e=-\frac{1}{2}(x-e)$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}e$ 답 ④

01-2

$\frac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=\sin\theta$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$ (단, $\cos\theta\neq1$)

$\theta=\frac{3}{2}\pi$일 때, $x=\frac{3}{2}\pi+1$, $y=1$, $\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{1-0}=-1$이므로 접선의 방정식은

$y-1=-\left\{x-\left(\frac{3}{2}\pi+1\right)\right\} \qquad \therefore y=-x+\frac{3}{2}\pi+2$

따라서 $a=-1$, $b=\frac{3}{2}\pi+2$이므로

$a+b=-1+\frac{3}{2}\pi+2=1+\frac{3}{2}\pi$ 답 ④

유형 02

$f(x)=\ln(2x-1)$로 놓으면

$f'(x)=\frac{2}{2x-1}$

구하는 직선이 직선 $2x-y+3=0$에 평행하므로 구하는 직선의 기울기는 2이다.

이때, 접점의 좌표를 $(t,\ \ln(2t-1))$이라 하면

$f'(t)=\frac{2}{2t-1}=2$

$2t-1=1 \qquad \therefore t=1$

즉, 접점의 좌표는 $(1,\ 0)$이므로 접선의 방정식은

$y-0=2(x-1)$

$\therefore y=2x-2$

따라서 구하는 직선의 y절편은 -2이다. 답 ①

02-1

$f(x)=\cos 2x\ \left(-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}\right)$로 놓으면

$f'(x)=-2\sin 2x$

구하는 직선의 기울기는 $\tan\frac{2}{3}\pi=-\sqrt{3}$이므로 접점의 좌표를 $(t,\ \cos 2t)$라 하면

$f'(t)=-2\sin 2t=-\sqrt{3}$

$\sin 2t=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $2t=\frac{\pi}{3}\ \left(\because -\frac{\pi}{2}\le 2t\le\frac{\pi}{2}\right) \qquad \therefore t=\frac{\pi}{6}$

즉, 접점의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{1}{2}\right)$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{2}=-\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore y=-\sqrt{3}x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$

따라서 구하는 직선의 y절편은 $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$이다. 답 ⑤

유형 03

$f(x)=x\ln x-x$로 놓으면

$f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}-1=\ln x$

접점의 좌표를 $(t,\ t\ln t-t)$라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=\ln t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t\ln t-t)=\ln t(x-t)$

$\therefore\ y=(\ln t)x-t$

이 직선이 점 $(0,\ -e^2)$을 지나므로

$-e^2=-t\qquad\therefore\ t=e^2$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=2x-e^2\qquad\therefore\ a=2$ 답 2

03-1

$f(x)=e^{x+3}$으로 놓으면

$f'(x)=e^{x+3}$

직선 $y=m(x+5)$는 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-5,\ 0)$을 지나므로 점 $(-5,\ 0)$에서 곡선 $y=e^{x+3}$에 그은 접선과 같다.

이 곡선의 접점의 좌표를 $(t,\ e^{t+3})$이라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=e^{t+3}$이므로 접선의 방정식은

$y-e^{t+3}=e^{t+3}(x-t)$

이 직선이 점 $(-5,\ 0)$을 지나므로

$-e^{t+3}=e^{t+3}(-5-t)$

$-1=-5-t\ (\because\ e^{t+3}\neq0)\qquad\therefore\ t=-4$

$\therefore\ m=e^{-4+3}=\frac{1}{e}$ 답 ③

03-2

$f(x)=\frac{2x}{x-1}$로 놓으면

$f'(x)=\frac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2}=-\frac{2}{(x-1)^2}$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{2t}{t-1}\right)$라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=-\frac{2}{(t-1)^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{2t}{t-1}=-\frac{2}{(t-1)^2}(x-t)$

이 직선이 점 $(4,\ 0)$을 지나므로

$-\frac{2t}{t-1}=-\frac{2}{(t-1)^2}(4-t)$

$t(t-1)=4-t,\ t^2=4$

$\therefore\ t=-2$ 또는 $t=2$

$t=-2$인 점에서의 접선의 기울기는

$f'(-2)=-\frac{2}{(-2-1)^2}=-\frac{2}{9}$

$t=2$인 점에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=-\frac{2}{(2-1)^2}=-2$

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$(-2)\times\left(-\frac{2}{9}\right)=\frac{4}{9}$ 답 ③

유형 04

$f(x)=x^2\ln x$는 $x>0$이고

$f'(x)=2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}=x(2\ln x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x(2\ln x+1)=0$

$2\ln x+1=0\ (\because\ x>0),\ \ln x=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ x=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

이때, 함수 $f(x)$는 구간 $\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$에서 감소하고, 구간 $\left[\frac{1}{\sqrt{e}},\ \infty\right)$에서 증가한다.

따라서 $0<\frac{1}{\sqrt{e}}<1$이므로 $f(x)$가 감소하는 구간 $\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$에 속하는 정수 x는 0개이다. 답 ①

04-1

$f(x)=ax+\ln(x^2+4)$에서

$f'(x)=a+\frac{2x}{x^2+4}=\frac{ax^2+2x+4a}{x^2+4}$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$이어야 하므로

$ax^2+2x+4a\geq0\ (\because\ x^2+4>0)$

즉, $a>0$이어야 하고, 이차방정식 $ax^2+2x+4a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-4a^2\leq0,\ 4a^2-1\geq0$

$(2a+1)(2a-1)\geq0\qquad\therefore\ a\leq-\frac{1}{2}$ 또는 $a\geq\frac{1}{2}$

$\therefore\ a\geq\frac{1}{2}\ (\because\ a>0)$

따라서 상수 a의 최솟값은 $\frac{1}{2}$이다. 답 ②

유형 05

$f(x)=x^2+ax+b$에서 $f'(x)=2x+a$

$g(x)=e^{-x}f(x)$에서 $g'(x)=e^{-x}\{-f(x)+f'(x)\}$

미분가능한 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극솟값 1을 가지므로

$g(0)=f(0)=b=1$

$g'(0)=-f(0)+f'(0)=-b+a=0$

$\therefore\ a=1,\ b=1$

즉, $f(x)=x^2+x+1$이고

$g'(x)=e^{-x}(-x^2+x)=-x(x-1)e^{-x}$이므로

$g'(x)=0$에서 $-x(x-1)e^{-x}=0$

$x(x-1)=0\ (\because\ e^{-x}>0)$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 $g(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $g(1)=e^{-1}f(1)=\frac{3}{e}$을 갖는다.

답 ①

05-1

$f(x)=\frac{kx}{x^2+k}$에서

$f'(x)=\frac{k(x^2+k)-kx\times 2x}{(x^2+k)^2}=\frac{k(-x^2+k)}{(x^2+k)^2}$

$x^2+k\neq 0$인 모든 실수 x에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극값을 가지므로

$f'(2)=0$

$k(-4+k)=0$ $\quad\therefore k=4$ $(\because k\neq 0)$

$\therefore f(x)=\frac{4x}{x^2+4}$, $f'(x)=\frac{4(-x^2+4)}{(x^2+4)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 $f(x)$는 $x=-2$에서 극솟값 $f(-2)=\frac{-8}{4+4}=-1$을 갖는다.

답 ②

05-2

$f(x)=2x\sin 2x+\cos 2x$에서

$f'(x)=2\sin 2x+4x\cos 2x-2\sin 2x=4x\cos 2x$

$f'(x)=0$에서 $4x\cos 2x=0$

$\cos 2x=0$ $(\because 0<x<\pi)$

$\therefore x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$에서 극댓값을 갖고, $x=\frac{3}{4}\pi$에서 극솟값을 가지므로 $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $\beta=\frac{3}{4}\pi$

$\therefore \alpha-\beta=\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}\pi=-\frac{\pi}{2}$

답 ②

유형 06

$f(x)=\ln(3x^2+a)+\frac{1}{2}x$에서

$f'(x)=\frac{6x}{3x^2+a}+\frac{1}{2}=\frac{3x^2+12x+a}{2(3x^2+a)}$

$f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $3x^2+12x+a=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=36-3a\le 0$ $\quad\therefore a\ge 12$

따라서 a의 최솟값은 12이다.

답 12

06-1

$f(x)=2x-\frac{k}{x}-2k\ln x$는 $x>0$에서 정의되고

$f'(x)=2+\frac{k}{x^2}-\frac{2k}{x}=\frac{2x^2-2kx+k}{x^2}$ $(x>0)$

$f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 갖기 위해서는 이차방정식 $2x^2-2kx+k=0$이 $x>0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

즉, 서로 다른 두 양의 실근을 가지면 되므로 이차방정식 $2x^2-2kx+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-2k>0$, $k(k-2)>0$

$\therefore k<0$ 또는 $k>2$ …… ㉠

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=k>0$, (두 근의 곱)$=\frac{k}{2}>0$

$\therefore k>0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 k의 값의 범위는 $k>2$

답 ③

빈출 유형 마무리 본문 47~48쪽

01 ②	02 ④	03 10	04 ③	05 ④	06 2
07 ⑤	08 ③	09 212	10 ①	11 ④	12 ②
13 ①	14 ②	15 50	16 ④		

01

$f(x)=\frac{1}{x^2+2}$로 놓으면

$f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+2)^2}$이므로 $f'(1)=-\frac{2}{9}$

이때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(1, \frac{1}{3}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y=-\frac{2}{9}(x-1)+\frac{1}{3}$

$\therefore y=-\frac{2}{9}x+\frac{5}{9}$

따라서 접선의 x절편과 y절편은 각각 $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{9}$이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{5}{9}=\frac{25}{36}$

답 ②

02

$g(x)=xe^{-x}$으로 놓으면

$g'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ te^{-t})$에서의 접선의 기울기는

$g'(t)=e^{-t}(1-t)$이므로 접선의 방정식은

$y-te^{-t}=e^{-t}(1-t)(x-t)$

이 직선이 점 $(f(t),\ 0)$을 지나므로

$-te^{-t}=e^{-t}(1-t)\{f(t)-t\}$

$-t=(1-t)\{f(t)-t\}$ $(\because e^{-t}>0)$

$\therefore f(t)=\dfrac{t^2}{t-1}$

$\therefore \displaystyle\lim_{t\to0+}\frac{f(t)}{t^2}=\lim_{t\to0+}\frac{1}{t-1}=-1$ 답 ④

03

$t=1$일 때, $x=4$, $y=1$이므로 접점의 좌표는 $(4,\ 1)$이다.

$\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{2}{t^2}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}$, $\dfrac{dy}{dt}=2+\dfrac{1}{t^2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2+\frac{1}{t^2}}{-\frac{2}{t^2}+\frac{1}{\sqrt{t}}}$$

위의 식에 $t=1$을 대입하면

$\dfrac{dy}{dx}=-3$

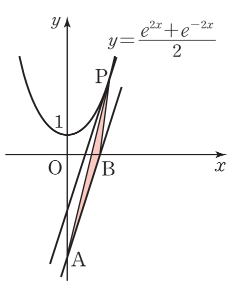
이때, 접선의 방정식은

$y-1=-3(x-4)$, 즉 $y=-3x+13$

따라서 $a=-3$, $b=13$이므로 $a+b=10$ 답 10

04

두 점 $\mathrm{A}(0,\ -8)$, $\mathrm{B}(3,\ 0)$을 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{8}{3}$이므로 삼각형 PAB의 넓이가 최소가 되도록 하는 곡선 위의 점 P는 기울기가 $\dfrac{8}{3}$인 접선의 접점이다.



$f(x)=\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}$으로 놓으면

$f'(x)=e^{2x}-e^{-2x}$

이때, 점 P의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 하면

$f'(t)=e^{2t}-e^{-2t}=\dfrac{8}{3}$

$e^{2t}=u$ $(u>0)$으로 치환하면

$u-\dfrac{1}{u}=\dfrac{8}{3}$, $3u^2-8u-3=0$, $(3u+1)(u-3)=0$

$\therefore u=3$ $(\because u>0)$

즉, $u=e^{2t}=3$이므로 $2t=\ln 3$

$\therefore t=\dfrac{1}{2}\ln 3$ 답 ③

05

$f(x)=x\ln x$로 놓으면

$f'(x)=\ln x+x\times\dfrac{1}{x}=\ln x+1$

이때, 점 P의 좌표를 $(t,\ t\ln t)$라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=\ln t+1$

이므로 접선의 방정식은

$y-t\ln t=(\ln t+1)(x-t)$

이 접선이 점 $(0,\ -e)$를 지나므로

$-e-t\ln t=(\ln t+1)(0-t)$

$-e-t\ln t=-t\ln t-t$

$\therefore t=e$

즉, 점 P의 좌표는 $(e,\ e)$이고 접선의 기울기는 2이다.

이때, 점 P를 지나고 접선에 수직인 직선의 기울기가 $-\dfrac{1}{2}$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-e=-\dfrac{1}{2}(x-e)$

$\therefore y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}e$ 답 ④

06

$f(x)=(x+2k)e^{-2x}$으로 놓으면

$f'(x)=e^{-2x}+(x+2k)\times(-2e^{-2x})$

$\quad=e^{-2x}(1-2x-4k)$

접점의 좌표를 $(t,\ (t+2k)e^{-2t})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=e^{-2t}(1-2t-4k)$

이므로 접선의 방정식은

$y-(t+2k)e^{-2t}=e^{-2t}(1-2t-4k)(x-t)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-(t+2k)e^{-2t}=e^{-2t}(1-2t-4k)\times(-t)$

$e^{-2t}(2t^2+4kt+2k)=0$

$\therefore t^2+2kt+k=0$ $(\because e^{-2t}>0)$ …… ㉠

원점에서 곡선 $y=(x+2k)e^{-2x}$에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=k^2-k>0$, $k(k-1)>0$

$\therefore k<0$ 또는 $k>1$

따라서 구하는 자연수 k의 최솟값은 2이다. 답 2

07

$f(x)=2\sin^2 x$로 놓으면 $f'(x)=4\sin x\cos x$

$g(x)=k-2\sqrt{3}\cos x$로 놓으면 $g'(x)=2\sqrt{3}\sin x$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$

$2\sin^2 t=k-2\sqrt{3}\cos t$ …… ㉠

또한 이 교점에서의 두 곡선의 접선이 일치하므로
$f'(t)=g'(t)$
$4\sin t\cos t=2\sqrt{3}\sin t$ ⋯⋯ ㉡
$0<t<\pi$에서 $\sin t>0$이므로 ㉡에서
$\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\therefore t=\frac{\pi}{6}$
$t=\frac{\pi}{6}$를 ㉠에 대입하면
$2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=k-2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\therefore k=\frac{7}{2}$ 답 ⑤

08

$f(x)=\ln(2x+3)$으로 놓으면 $f'(x)=\frac{2}{2x+3}$
$g(x)=a-\ln x$로 놓으면 $g'(x)=-\frac{1}{x}$
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표를 t라 하면
$f(t)=g(t)$
즉, $\ln(2t+3)=a-\ln t$ ⋯⋯ ㉠
또한 이 교점에서의 두 곡선의 접선이 서로 수직이므로
$f'(t)g'(t)=\frac{2}{2t+3}\times\left(-\frac{1}{t}\right)=-1$
$2t^2+3t-2=0$, $(t+2)(2t-1)=0$
$\therefore t=\frac{1}{2}$ ($\because t>0$) ⋯⋯ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$\ln 4=a-\ln\frac{1}{2}$
$\therefore a=\ln 2$ 답 ③

09

$f(x)=\ln kx$로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{x}$
원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t, \ln kt)$라 하면 접선의 방정식은
$y-\ln kt=\frac{1}{t}(x-t)$ ⋯⋯ ㉠
이 직선이 원점을 지나므로
$-\ln kt=-1$, $kt=e$ $\quad\therefore t=\frac{e}{k}$
$t=\frac{e}{k}$를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은
$y=\frac{k}{e}x$ ⋯⋯ ㉡
한편, $g(x)=a_ke^x$으로 놓으면 $g'(x)=a_ke^x$
원점에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 (s, a_ke^s)이라 하면 접선의 방정식은
$y-a_ke^s=a_ke^s(x-s)$ ⋯⋯ ㉢
이 직선이 원점을 지나므로
$-a_ke^s=-sa_ke^s$ $\quad\therefore s=1$
$s=1$을 ㉢에 대입하면 접선의 방정식은
$y=a_kex$ ⋯⋯ ㉣
㉡, ㉣이 서로 일치하므로
$\frac{k}{e}=a_ke$ $\quad\therefore a_k=\frac{k}{e^2}$
$\therefore \sum_{k=1}^{20}a_k=\sum_{k=1}^{20}\frac{k}{e^2}$
$=\frac{1}{e^2}\times\frac{20\times21}{2}=\frac{210}{e^2}$
따라서 $p=210$, $q=2$이므로
$p+q=210+2=212$ 답 212

10

함수 $f(x)=\frac{e^{x^2}}{x}$은 $x\neq0$인 모든 실수 x에서 정의되고
$f'(x)=\frac{2xe^{x^2}\times x-e^{x^2}\times1}{x^2}=\frac{e^{x^2}(2x^2-1)}{x^2}$
$f'(x)=0$에서 $e^{x^2}(2x^2-1)=0$
$2x^2-1=0$ ($\because e^{x^2}>0$)
$x^2=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

x	⋯	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	⋯	(0)	⋯	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	⋯
$f'(x)$	+	0	−		−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$에서 증가하고, 구간 $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$에서 감소하므로 함수 $f(x)$가 증가하는 구간에 속하는 수는 ① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 답 ①

11

$f(x)=e^{-x}\cos x$에서
$f'(x)=e^{-x}(-\cos x-\sin x)$
$f'(x)=0$에서 $-\cos x-\sin x=0$ ($\because e^{-x}>0$)
$-\cos x=\sin x$, $-1=\frac{\sin x}{\cos x}$ ($\because \cos x\neq0$)
$\tan x=-1$ $\quad\therefore x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

x	0	⋯	$\frac{3}{4}\pi$	⋯	$\frac{7}{4}\pi$	⋯	2π
$f'(x)$	(−)	−	0	+	0	−	(−)
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{3}{4}\pi$에서 극솟값을 가지므로 $a=\frac{3}{4}\pi$
$\therefore \sin a=\sin\frac{3}{4}\pi=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 ④

12

$f(x)=e^x(-1+4x-x^2)$에서

$f'(x)=e^x(-x^2+2x+3)=-e^x(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\dfrac{6}{e}$	↗	$2e^3$	↘

따라서 $f(x)$는 $x=3$에서 극댓값 $f(3)=2e^3$을 갖고, $x=-1$에서 극솟값 $f(-1)=-\dfrac{6}{e}$을 갖는다.

$\therefore\ \alpha=2e^3,\ \beta=-\dfrac{6}{e}$

$\therefore\ \dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{2e^3}{-\dfrac{6}{e}}=-\dfrac{e^4}{3}$ 답 ②

13

$f(x)=(1+\sin x)\cos x+kx$에서

$f'(x)=\cos^2 x-(1+\sin x)\sin x+k$

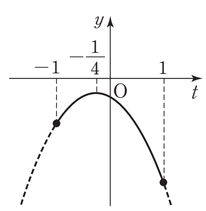
$\quad=-2\sin^2 x-\sin x+1+k$

$\quad=-2\left(\sin x+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{9}{8}+k$

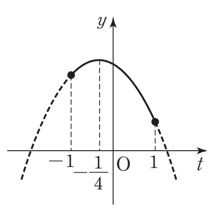
$f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 $f'(x_0)=0$이면서 $x=x_0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌는 x_0의 값이 존재하지 않아야 한다.

즉, $\sin x=t$, $g(t)=-2\left(t+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{9}{8}+k\ (-1\le t\le 1)$로 놓을 때, $g(t)$의 부호가 $-1\le t\le 1$에서 바뀌지 않으면 되므로 다음 두 가지 경우를 생각할 수 있다.

(i)



(ii)



(i) $g\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{9}{8}+k\le 0$인 경우

$\quad k\le -\dfrac{9}{8}$

(ii) $g(1)=-2+k\ge 0$인 경우

$\quad k\ge 2$

(i), (ii)에서 $f(x)$가 극값을 갖지 않도록 하는 실수 k의 값의 범위는

$k\le -\dfrac{9}{8}$ 또는 $k\ge 2$

따라서 $\alpha=-\dfrac{9}{8}$, $\beta=2$이므로

$\alpha\beta=\left(-\dfrac{9}{8}\right)\times 2=-\dfrac{9}{4}$ 답 ①

14

$f(x)=\ln x+\dfrac{k}{x}-x$는 $x>0$에서 정의되고

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{k}{x^2}-1=\dfrac{-x^2+x-k}{x^2}\ (x>0)$

$f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 갖기 위해서는 이차방정식 $-x^2+x-k=0$이 $x>0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

즉, 서로 다른 두 양의 실근을 가지면 되므로

이차방정식 $-x^2+x-k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1-4k>0,\ 4k<1$

$\therefore\ k<\dfrac{1}{4}$ …… ㉠

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=-\dfrac{1}{-1}=1>0$

(두 근의 곱)$=k>0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $0<k<\dfrac{1}{4}$

따라서 $\alpha=0$, $\beta=\dfrac{1}{4}$이므로

$\beta-\alpha=\dfrac{1}{4}-0=\dfrac{1}{4}$ 답 ②

15

곡선 $y=f(x)$가 점 $(e,\ -e)$를 지나므로

$f(e)=-e$ …… ㉠

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(e,\ -e)$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(e, -4e)$에서의 접선이 서로 수직이므로

$f'(e)g'(e)=-1$ …… ㉡

$x>0$에서

$g(x)=f(x)\ln x^4=4f(x)\ln x$

$g'(x)=4f'(x)\ln x+\dfrac{4f(x)}{x}\ (x>0)$

$\therefore\ g'(e)=4f'(e)\ln e+\dfrac{4f(e)}{e}$

$\qquad=4f'(e)-4\ (\because$ ㉠$)$

$g'(e)=4f'(e)-4$를 ㉡에 대입하면

$f'(e)\{4f'(e)-4\}=-1$

$4\{f'(e)\}^2-4f'(e)+1=0$

$\{2f'(e)-1\}^2=0$

$\therefore\ f'(e)=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ 100f'(e)=100\times\dfrac{1}{2}=50$ 답 50

16

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-a\ln x\ (a>0)$는 $x>0$에서 정의되고

$f'(x)=x-\dfrac{a}{x}\ (x>0)$

$f'(x)=0$에서 $x-\dfrac{a}{x}=0,\ x^2=a$

$\therefore\ x=\sqrt{a}\ (\because\ x>0)$

x	(0)	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{a}$에서 극솟값 $f(\sqrt{a})$를 갖는다.

그런데 극솟값이 0이므로 $f(\sqrt{a})=\frac{1}{2}a-a\ln\sqrt{a}=0$

$\frac{1}{2}a(1-\ln a)=0$, $\ln a=1$ ($\because a>0$)

$\therefore a=e$ 답 ④

05 도함수의 활용 (2)

내신&수능 빈출 유형

본문 50~54쪽

유형 01

$f(x)=(2x^2+a)e^x$으로 놓으면

$f'(x)=4xe^x+(2x^2+a)e^x=(2x^2+4x+a)e^x$

$f''(x)=(4x+4)e^x+(2x^2+4x+a)e^x$

$=(2x^2+8x+a+4)e^x$

곡선 $y=f(x)$가 실수 전체의 집합에서 아래로 볼록하여야 하므로 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)\ge 0$이어야 한다. 즉,

$2x^2+8x+a+4\ge 0$ ($\because e^x>0$)

방정식 $2x^2+8x+a+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4^2-2(a+4)\le 0$

$-2a+8\le 0$ $\therefore a\ge 4$

따라서 실수 a의 최솟값은 4이다. 답 4

01-1

구간 $(-\infty, \infty)$에서 $f''(x)$의 부호를 조사하면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	0	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

어떤 구간에서 $f''(x)<0$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그 구간에서 위로 볼록하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 위로 볼록한 구간은 ③ (b, c)이다. 답 ③

01-2

정의역에 속하는 임의의 서로 다른 두 실수 a, b에 대하여

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)>\frac{f(a)+f(b)}{2}$를 만족시키려면 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록하여야 하므로 $f''(x)<0$이어야 한다.

① $f(x)=\cos x$ $\left(\frac{\pi}{2}<x<\pi\right)$에서

$f'(x)=-\sin x$, $f''(x)=-\cos x$

그러므로 $\frac{\pi}{2}<x<\pi$에서 $f''(x)>0$이다.

② $f(x)=x^2$에서 $f'(x)=2x$, $f''(x)=2$

그러므로 구간 $(-\infty, \infty)$에서 $f''(x)>0$이다.

③ $f(x)=xe^x$ $(x>-2)$에서

$f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$

$f''(x)=e^x+(1+x)e^x=(2+x)e^x$

이때, $e^x>0$이므로 $x>-2$에서

$f''(x)>0$이다.

④ $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ $(x>1)$에서 $f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

$f''(x)=\frac{-2(x^2+1)^2+2x\times 2(x^2+1)\times 2x}{(x^2+1)^4}$

$=\dfrac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}=\dfrac{2(\sqrt{3}x-1)(\sqrt{3}x+1)}{(x^2+1)^3}$

그러므로 $x>1$에서 $f''(x)>0$이다.

⑤ $f(x)=-x\ln x\ (x>0)$에서

$f'(x)=-\ln x+(-x)\times\dfrac{1}{x}=-\ln x-1$

$f''(x)=-\dfrac{1}{x}$

그러므로 $x>0$에서 $f''(x)<0$이다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ⑤이다. 답 ⑤

유형 02

$f(x)=2x+\cos x$에서

$f'(x)=2-\sin x$, $f''(x)=-\cos x$

$f''(x)=0$에서 $\cos x=0$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $\dfrac{3}{2}\pi<x<2\pi$일 때, $f''(x)<0$

$\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3}{2}\pi$일 때, $f''(x)>0$

즉, $x=\dfrac{\pi}{2}$, $x=\dfrac{3}{2}\pi$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로

변곡점의 좌표는 $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\left(\dfrac{3}{2}\pi, 3\pi\right)$이다.

따라서 두 변곡점 사이의 거리는

$\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)^2+(3\pi-\pi)^2}=\sqrt{\pi^2+4\pi^2}=\sqrt{5}\pi$ 답 ⑤

02-1

구간 $[a, h]$에서 $f''(x)$의 부호를 조사하면 다음과 같다.

x	a	…	b	…	0	…	c	…	d	…	e	…	f	…	g	…	h
$f''(x)$	−	−	−	−	−	−	0	−	0	+	+	+	0	−	0	+	+

$x=d$, $x=f$, $x=g$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 개수는 3이다. 답 ③

유형 03

$f(x)=e^{-x^2}$에서 $f'(x)=-2xe^{-x^2}$

$f''(x)=-2e^{-x^2}-2x\times(-2x)e^{-x^2}=(4x^2-2)e^{-x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because e^{-x^2}>0$)

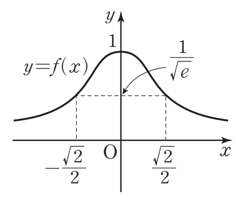
$f''(x)=0$에서 $4x^2-2=0$

$\therefore x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

x	…	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	…	0	…	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	…
$f'(x)$	+	+	+	0	−	−	−
$f''(x)$	+	0	−	−	−	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↘

이때, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=e^{-(-x)^2}=e^{-x^2}=f(x)$

이므로 곡선 $y=f(x)$는 y축에 대하여 대칭이다. (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 $f(0)=1$을 갖는다. (거짓)

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 점 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$의 2개이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

03-1

$f(x)=2x+x\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=2+\ln x+x\times\dfrac{1}{x}=\ln x+3$

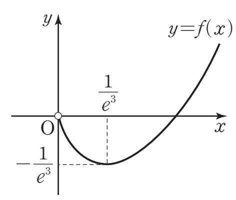
$f''(x)=\dfrac{1}{x}$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=-3$ $\quad\therefore x=\dfrac{1}{e^3}$

$x>0$에서 $f''(x)>0$이므로 변곡점은 없다.

x	(0)	…	$\frac{1}{e^3}$	…
$f'(x)$		−	0	+
$f''(x)$		+	+	+
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{e^3}$	↗

이때, $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $f(x)$의 치역은 $\left\{y \middle| y\geq-\dfrac{1}{e^3}\right\}$이다. (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{1}{e^3}$에서 극솟값 $-\dfrac{1}{e^3}$을 갖는다. (참)

ㄷ. $x>0$에서 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록하다. (거짓)

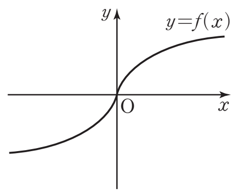
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

유형 04

주어진 함수 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 $f'(x)$, $f''(x)$의 부호를 조사하면 다음과 같다.

x	…	0	…
$f'(x)$	+	+	+
$f''(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	0	↗

또한 $f(0)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다. (참)

ㄴ. $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 점 $(0,\ 0)$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다. (참)

ㄷ. 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 $f''(x)>0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

04-1

함수 $h(x)$가 어떤 구간에서 $h''(x)>0$이면 곡선 $y=h(x)$는 아래로 볼록하고, $h''(x)<0$이면 위로 볼록하므로 주어진 함수를 이용하여 구간 $(a,\ g)$에서 $f''(x)$와 $g''(x)$의 부호를 조사하면 다음과 같다.

$a<x<d$에서 $f''(x)<0$, $d<x<g$에서 $f''(x)>0$

$a<x<0$에서 $g''(x)>0$, $0<x<g$에서 $g''(x)<0$

① 구간 $(a,\ b)$에서 $f''(x)<0$, $g''(x)>0$이므로 $f''(x)g''(x)<0$

② 구간 $(c,\ d)$에서 $f''(x)<0$, $g''(x)>0$이므로 $f''(x)g''(x)<0$

③ 구간 $(d,\ 0)$에서 $f''(x)>0$, $g''(x)>0$이므로 $f''(x)g''(x)>0$

④ 구간 $(e,\ f)$에서 $f''(x)>0$, $g''(x)<0$이므로 $f''(x)g''(x)<0$

⑤ 구간 $(f,\ g)$에서 $f''(x)>0$, $g''(x)<0$이므로 $f''(x)g''(x)<0$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 구간은 ③ $(d,\ 0)$이다. 답 ③

유형 05

$f(x)=x+\sqrt{1-x^2}\ (0\le x\le 1)$에서

$$f'(x)=1+\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}\ (\text{단, } 0<x<1)$$

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{1-x^2}-x=0$

$\sqrt{1-x^2}=x,\ 1-x^2=x^2 \qquad \therefore x=\frac{\sqrt{2}}{2}\ (\because 0<x<1)$

x	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$	$(+)$	$+$	0	$-$	$(-)$
$f(x)$	1	↗	$\sqrt{2}$	↘	1

따라서 구간 $[0,\ 1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$ 또는 $x=1$일 때, 최솟값 1을 갖는다. 답 ③

05-1

$f(x)=kx-\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=k-\frac{1}{x}\ (x>0)$

이때, $k<0$이면 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 $x>0$에서 감소한다. 즉, $f(x)$의 최솟값이 존재하지 않으므로

$k>0$

$k>0$일 때, $f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{k}$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{k}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$1+\ln k$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{k}$일 때 극소이며 최소이고, 이때의 최솟값이 2이므로

$f\left(\frac{1}{k}\right)=1+\ln k=2,\ \ln k=1$

$\therefore k=e$ 답 ④

05-2

$f(x)=2\sin^3 x+3\cos^2 x=2\sin^3 x+3(1-\sin^2 x)$

$\sin x=t$로 놓고 주어진 함수를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=2t^3-3t^2+3\ (-1\le t\le 1)$

$g'(t)=6t^2-6t=6t(t-1)$ (단, $-1<t<1$)

$g'(t)=0$에서 $t=0\ (\because -1<t<1)$

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(t)$	$(+)$	$+$	0	$-$	(0)
$g(t)$	-2	↗	3	↘	2

따라서 함수 $g(t)$의 최댓값은 $g(0)=3$이고, 최솟값은 $g(-1)=-2$이므로

$M=3,\ m=-2$

$\therefore M-m=3-(-2)=5$ 답 5

유형 06

$f(x)=\ln x$로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{x}$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ \ln a)$에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=\frac{1}{a}$

이므로 접선의 방정식은

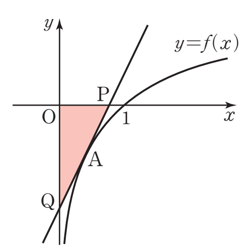
$y-\ln a=\frac{1}{a}(x-a)$

$\therefore y=\frac{1}{a}x+\ln a-1$

접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P, Q라 하면

$\mathrm{P}(a-a\ln a,\ 0),\ \mathrm{Q}(0,\ \ln a-1)$

오른쪽 그림과 같이 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(a)$라 하면



$S(a)=\frac{1}{2}(a-a\ln a)(1-\ln a)$

$=\frac{1}{2}a(1-\ln a)^2$

$S'(a)=\frac{1}{2}(1-\ln a)^2+\frac{1}{2}a\times 2(1-\ln a)\times\left(-\frac{1}{a}\right)$

$=-\frac{1}{2}(1-\ln a)(1+\ln a)$

$S'(a)=0$에서 $1+\ln a=0$ ($\because 0<a<e$)

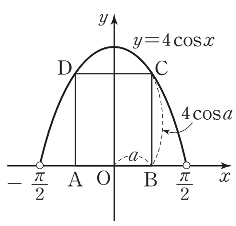
$\therefore a=\frac{1}{e}$

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	(e)
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	$\frac{2}{e}$	↘	

따라서 함수 $S(a)$는 $a=\frac{1}{e}$일 때 극대이며 최대이므로 구하는 넓이의 최댓값은 $S\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{2}{e}$이다.

답 $\frac{2}{e}$

06-1



$\overline{OB}=a$로 놓으면 $0<a<\frac{\pi}{2}$이고

$\overline{AB}=2a$, $\overline{BC}=4\cos a$

직사각형 ABCD의 둘레의 길이를

$f(a)$라 하면

$f(a)=2(2a+4\cos a)$

$=4(a+2\cos a)$

$f'(a)=4(1-2\sin a)$

$f'(a)=0$에서 $\sin a=\frac{1}{2}$ $\therefore a=\frac{\pi}{6}$ $\left(\because 0<a<\frac{\pi}{2}\right)$

a	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$		↗	$\frac{2}{3}\pi+4\sqrt{3}$	↘	

따라서 함수 $f(a)$는 $a=\frac{\pi}{6}$일 때 극대이며 최대이므로 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{3}\pi+4\sqrt{3}$이다.

답 ③

유형 07

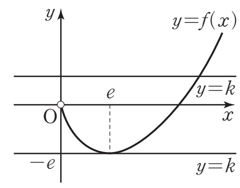
주어진 방정식이 오직 한 개의 실근을 가지려면 곡선 $y=x\ln x-2x$와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나야 한다.

$f(x)=x\ln x-2x$로 놓으면 $x>0$이고

$f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}-2=\ln x-1$

$f'(x)=0$에서 $\ln x-1=0$ $\therefore x=e$

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-e$	↗



이때, $\lim_{x\to 0+}f(x)=0$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 곡선 $y=x\ln x-2x$와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $k=-e$ 또는 $k\geq 0$이므로 주어진 값 중 실수 k의 값이 아닌 것은 ② -1이다.

답 ②

07-1

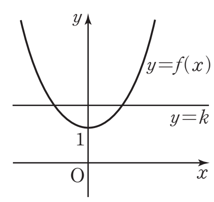
방정식 $e^{-x}=2k-e^x$에서 $\frac{e^x+e^{-x}}{2}=k$

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$과 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$으로 놓으면 $f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

$f'(x)=0$에서 $e^x=e^{-x}$, $e^{2x}=1$ $\therefore x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↗



이때, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 곡선 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$과 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $k>1$

답 $k>1$

07-2

방정식 $x^2-ke^x=0$에서 $\frac{x^2}{e^x}=k$

주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=\frac{x^2}{e^x}$과 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$f(x)=\frac{x^2}{e^x}$으로 놓으면

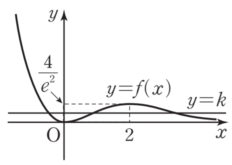
$f'(x)=\frac{2xe^x-x^2e^x}{e^{2x}}=\frac{x(2-x)}{e^x}$

$f'(x)=0$에서 $x(2-x)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘

이때, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=\dfrac{x^2}{e^x}$과 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는

$0<k<\dfrac{4}{e^2}$

$\therefore\ \alpha=0,\ \beta=\dfrac{4}{e^2}$

$\therefore\ \alpha+\beta=0+\dfrac{4}{e^2}=\dfrac{4}{e^2}$ 답 ②

유형 08

$f(x)=\tan x+2\sin x-3x$로 놓으면

$f'(x)=\sec^2 x+2\cos x-3$

$\quad=\dfrac{1+2\cos^3 x-3\cos^2 x}{\cos^2 x}$

$\cos x=t$로 놓고 주어진 함수를 t에 대한 함수 $g'(t)$로 나타내면

$g'(t)=\dfrac{2t^3-3t^2+1}{t^2}$

$\quad=\dfrac{(t-1)^2(2t+1)}{t^2}$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 $0<t<1$이므로 $g'(t)>0$

즉, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 $f'(x)>0$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$일 때 $f(x)$는 증가하고, $f(0)=0$이므로 $f(x)>0$

$\therefore\ \tan x+2\sin x-3x>0\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

따라서 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$일 때, 부등식 $\tan x+2\sin x>3x$가 성립한다.

답 풀이 참조

08-1

$f(x)=k\ln x-\sqrt{x}$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{k}{x}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{2k-\sqrt{x}}{2x}$

$f'(x)=0$에서 $2k-\sqrt{x}=0\qquad\therefore\ x=4k^2$

x	(0)	$\cdots$	$4k^2$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$k\ln 4k^2-2k$	$\searrow$

즉, 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(4k^2)=k\ln 4k^2-2k$이므로

$f(x)\le 0$이 성립하려면

$k\ln 4k^2-2k\le 0$

$\ln 4k^2-2\le 0\ (\because\ k>0)$, $\ln 4k^2\le 2$

$4k^2\le e^2\qquad\therefore\ k\le\dfrac{e}{2}$

따라서 양수 k의 최댓값은 $\dfrac{e}{2}$이다. 답 $\dfrac{e}{2}$

08-2

$x>0$이므로 주어진 부등식 $ax\le\ln x\le bx$는

$a\le\dfrac{\ln x}{x}\le b$

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $1-\ln x=0\qquad\therefore\ x=e$

x	e	$\cdots$	e^2
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	$\dfrac{2}{e^2}$

$e<x<e^2$에서 $f'(x)<0$, 즉 함수 $f(x)$는 감소하므로 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(e)=\dfrac{1}{e}$, 최솟값은 $f(e^2)=\dfrac{2}{e^2}$

$\therefore\ \dfrac{2}{e^2}\le f(x)\le\dfrac{1}{e}$

따라서 $a\le\dfrac{\ln x}{x}\le b$가 성립하도록 하는 실수 a, b의 값의 범위는

$a\le\dfrac{2}{e^2}$, $b\ge\dfrac{1}{e}$이므로

$M=\dfrac{2}{e^2}$, $m=\dfrac{1}{e}$

$\therefore\ Mm=\dfrac{2}{e^2}\times\dfrac{1}{e}=\dfrac{2}{e^3}$ 답 $\dfrac{2}{e^3}$

유형 09

$\dfrac{dx}{dt}=3t^2-5$, $\dfrac{dy}{dt}=\sqrt{15}$

이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$(3t^2-5,\ \sqrt{15})$

점 P의 속력이 8이므로

$\sqrt{(3t^2-5)^2+(\sqrt{15})^2}=8$

$(3t^2-5)^2=49$에서 $3t^2-5=\pm7$

$t^2=4\qquad\therefore\ t=2\ (\because\ t>0)$ 답 ③

09-1

$t=0$일 때, $x=0$, $y=0$이므로 점 P의 출발 지점은 원점이다.

즉, 점 P가 출발 후 처음으로 다시 출발 지점인 원점으로 되돌아왔을 때의 시각을 $t=a\ (a>0)$이라 하면

$a^2-3a=0$에서 $a(a-3)=0$ ······ ㉠

$a^3+3a^2-18a=0$에서 $a(a-3)(a+6)=0$ ······ ㉡

㉠에서 $a=0$ 또는 $a=3$

㉡에서 $a=-6$ 또는 $a=0$ 또는 $a=3$

$\therefore\ a=3\ (\because\ a>0)$

한편, $\dfrac{dx}{dt}=2t-3$, $\dfrac{dy}{dt}=3t^2+6t-18$

이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$(2t-3,\ 3t^2+6t-18)$

따라서 점 P의 $t=3$에서의 속도는 $(3,\ 27)$이므로 구하는 속력은
$\sqrt{3^2+27^2}=3\sqrt{82}$ 답 $3\sqrt{82}$

유형 10

$\frac{dx}{dt}=2kt+k\sin t,\ \frac{dy}{dt}=k\cos t$에서
$\frac{d^2x}{dt^2}=2k+k\cos t,\ \frac{d^2y}{dt^2}=-k\sin t$
이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는
$(2k+k\cos t,\ -k\sin t)$
따라서 점 P의 $t=\frac{\pi}{2}$에서의 가속도는 $(2k,\ -k)$이므로 가속도의 크기는
$\sqrt{(2k)^2+(-k)^2}=\sqrt{5}k\ (\because k>0)$
이때, 가속도의 크기가 5이므로
$\sqrt{5}k=5 \quad \therefore k=\sqrt{5}$ 답 ④

10-1

$\frac{dx}{dt}=3t^2-1,\ \frac{dy}{dt}=6t^2+1$
이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는
$(3t^2-1,\ 6t^2+1)$
점 P의 속력이 $\sqrt{53}$이므로
$\sqrt{(3t^2-1)^2+(6t^2+1)^2}=\sqrt{53}$
$\sqrt{45t^4+6t^2+2}=\sqrt{53},\ 15t^4+2t^2-17=0$
$(t^2-1)(15t^2+17)=0 \quad \therefore t=1\ (\because t>0)$
한편, $\frac{d^2x}{dt^2}=6t,\ \frac{d^2y}{dt^2}=12t$이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는
$(6t,\ 12t)$
따라서 점 P의 $t=1$에서의 가속도는 $(6,\ 12)$이므로 구하는 가속도의 크기는
$\sqrt{6^2+12^2}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$ 답 $6\sqrt{5}$

10-2

$\frac{dx}{dt}=t^2-3t+\frac{1}{4},\ \frac{dy}{dt}=\sqrt{7}t-\frac{\sqrt{5}}{3}$에서
$\frac{d^2x}{dt^2}=2t-3,\ \frac{d^2y}{dt^2}=\sqrt{7}$
이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도는
$(2t-3,\ \sqrt{7})$
따라서 점 P의 가속도의 크기는

$$\begin{aligned}\sqrt{(2t-3)^2+(\sqrt{7})^2}&=\sqrt{4t^2-12t+9+7}\\&=\sqrt{4(t^2-3t+4)}\\&=\sqrt{4\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+7}\end{aligned}$$

이므로 점 P의 가속도의 크기의 최솟값은 $t=\frac{3}{2}$일 때 $\sqrt{7}$이다.
답 ⑤

빈출 유형 마무리 본문 55~56쪽

01 ③	02 ①	03 ④	04 ①	05 7	06 ④
07 ⑤	08 6	09 ①	10 ②	11 ①	12 ③
13 ③	14 ②	15 96	16 ③		

01

$f(x)=\ln(x^2+4)$로 놓으면
$f'(x)=\frac{2x}{x^2+4}$
$f''(x)=\frac{2(x^2+4)-2x\times 2x}{(x^2+4)^2}=\frac{-2x^2+8}{(x^2+4)^2}$
곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록하려면 $f''(x)>0$이어야 하므로
$-2x^2+8>0\ (\because (x^2+4)^2>0)$
$2(x+2)(x-2)<0 \quad \therefore -2<x<2$
따라서 주어진 구간 중 곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록한 구간은 ③ $(-2,\ 2)$이다. 답 ③

02

$f(x)=(a+\cos x)e^x$으로 놓으면
$f'(x)=-\sin x\times e^x+(a+\cos x)e^x=(\cos x-\sin x+a)e^x$
$f''(x)=(-\sin x-\cos x)e^x+(\cos x-\sin x+a)e^x$
$\quad=(-2\sin x+a)e^x$
곡선 $y=f(x)$가 실수 전체의 집합에서 위로 볼록하려면
$f''(x)\le 0$이어야 하므로
$-2\sin x+a\le 0\ (\because e^x>0)$
$-2\le -2\sin x\le 2$이므로 $-2+a\le -2\sin x+a\le 2+a$
이때, $2+a\le 0$이어야 하므로 $a\le -2$
따라서 상수 a의 최댓값은 -2이다. 답 ①

03

정의역에 속하는 임의의 서로 다른 두 실수 $a,\ b$에 대하여
$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{f(a)+f(b)}{2}$를 만족시키는 함수 $f(x)$는 아래로 볼록해야 하므로 $f''(x)>0$이어야 한다.
ㄱ. $f(x)=\ln x$에서 $x>0$이고
$f'(x)=\frac{1}{x},\ f''(x)=-\frac{1}{x^2}$
그러므로 구간 $(0,\ \infty)$에서 $f''(x)<0$
ㄴ. $f(x)=2x^2+e^{-x}$에서
$f'(x)=4x-e^{-x},\ f''(x)=4+e^{-x}$
그러므로 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 $f''(x)>0$
ㄷ. $f(x)=\frac{1}{x+1}$에서
$f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2},\ f''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}$
그러므로 구간 $(-1,\ \infty)$에서 $f''(x)>0$
따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

04

$f(x)=\ln x+x^2$으로 놓으면 $x>0$이고

$f'(x)=\frac{1}{x}+2x$

$f''(x)=-\frac{1}{x^2}+2=\frac{-1+2x^2}{x^2}$

$=\frac{(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)}{x^2}$

$f''(x)=0$에서 $(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)=0$

$\therefore x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $(\because x>0)$

$0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, $f''(x)<0$

$x>\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, $f''(x)>0$

즉, $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2\right)$이고 변곡점에서의 접선의 기울기는

$f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

이때, 변곡점에서의 접선의 방정식은

$y-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2\right)=2\sqrt{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\therefore y=2\sqrt{2}x-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$

따라서 구하는 접선의 y절편은 $-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$이다. 답 ①

05

$f'(x)$의 부호가 바뀌는 점에서 $f(x)$는 극값을 가지므로 $f(x)$가 극값을 가지는 점은 x좌표가 0, b, f인 점 3개이다.

$\therefore m=3$

$y=f'(x)$의 그래프에서 증가와 감소가 바뀌는 점이 $f(x)$의 변곡점이므로 $f(x)$의 변곡점은 x좌표가 a, c, d, e인 점 4개이다.

$\therefore n=4$

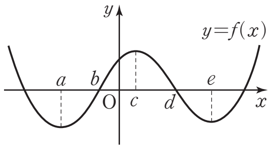
$\therefore m+n=7$ 답 7

06

주어진 함수 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 $f'(x)$, $f''(x)$의 부호를 조사하면 다음과 같다.

x	…	a	…	b	…	c	…	d	…	e	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	0	↗	극대	↘	0	↘	극소	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



① 구간 $(a,\ b)$에서 $f(x)<0$, $f'(x)>0$, $f''(x)>0$이므로
$f(x)<0$, $f'(x)f''(x)>0$

② 구간 $(a,\ c)$는 구간 $(a,\ b)$를 포함하므로 ①에 의하여 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

③ 구간 $(b,\ c)$에서 $f(x)>0$, $f'(x)>0$, $f''(x)<0$이므로
$f(x)>0$, $f'(x)f''(x)<0$

④ 구간 $(c,\ d)$에서 $f(x)>0$, $f'(x)<0$, $f''(x)<0$이므로
$f(x)>0$, $f'(x)f''(x)>0$

⑤ 구간 $(d,\ e)$에서 $f(x)<0$, $f'(x)<0$, $f''(x)>0$이므로
$f(x)<0$, $f'(x)f''(x)<0$

따라서 주어진 조건을 모두 만족시키는 구간은 ④ $(c,\ d)$이다.

답 ④

07

$f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$에서

$f'(x)=\frac{3(x^2+1)-3x\times 2x}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{3-3x^2}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{3(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2}$

$f''(x)=\frac{-6x(x^2+1)^2-(3-3x^2)\times 2(x^2+1)\times 2x}{(x^2+1)^4}$

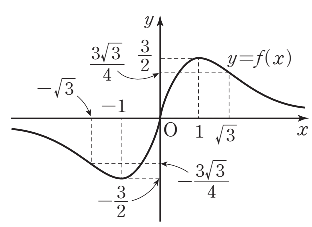
$=\frac{6x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}=\frac{6x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$f''(x)=0$에서 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$

x	…	$-\sqrt{3}$	…	-1	…	0	…	1	…	$\sqrt{3}$	…
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	0	↗	$\frac{3}{2}$	↘	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘

이때, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. 모든 실수 x에 대하여
$f(-x)=\frac{-3x}{(-x)^2+1}=-\frac{3x}{x^2+1}=-f(x)$
이므로 곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다. (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 $-\frac{3}{2}$, $x=1$에서 극댓값 $\frac{3}{2}$을 가지므로 극댓값과 극솟값의 합은 0이다. (참)

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표는 각각 $\left(-\sqrt{3},\ -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0,\ 0)$, $\left(\sqrt{3},\ \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$이고 이 세 점은 한 직선 $y=\frac{3}{4}x$ 위에 있다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

08

$f(x)=ax\sqrt{1-x^2}+b$에서 $1-x^2\geq 0$이므로 $-1\leq x\leq 1$

$f'(x)=a\sqrt{1-x^2}-\frac{ax^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{a(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x)=0$에서 $1-2x^2=0$ ($\because a>0$)

$\therefore x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때, $a>0$이므로

x	-1	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$	$(-)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$(-)$
$f(x)$	b	↘	$-\frac{1}{2}a+b$	↗	$\frac{1}{2}a+b$	↘	b

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}a+b$, 최솟값은 $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{1}{2}a+b$이므로

$\frac{1}{2}a+b=5$, $-\frac{1}{2}a+b=3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=4$

$\therefore a+b=2+4=6$ 답 6

09

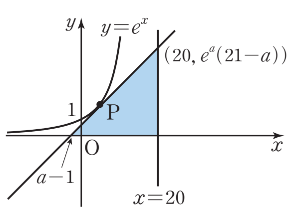
$f(x)=e^x$으로 놓으면 $f'(x)=e^x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ e^a)$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=e^a$이므로 접선의 방정식은

$y-e^a=e^a(x-a)$

$\therefore y=e^ax+(1-a)e^a$ ······ ㉠

오른쪽 그림과 같이 접선 ㉠이 x축과 만나는 점의 좌표는 $(a-1,\ 0)$이고, 직선 $x=20$과 접선 ㉠의 교점의 좌표는 $(20,\ e^a(21-a))$이므로 구하는 삼각형의 넓이를 $S(a)$라 하면



$S(a)=\frac{1}{2}e^a(21-a)^2$

$S'(a)=\frac{1}{2}e^a(21-a)^2+\frac{1}{2}e^a\times 2(21-a)\times(-1)$

$=\frac{1}{2}e^a(21-a)(19-a)$

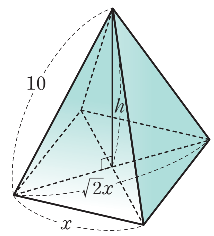
$S'(a)=0$에서 $(21-a)(19-a)=0$ ($\because e^a>0$)

$\therefore a=19$ ($\because a<20$)

a	$\cdots$	19	$\cdots$	(20)
$S'(a)$	$+$	0	$-$	
$S(a)$	↗	$2e^{19}$	↘	

따라서 함수 $S(a)$는 $a=19$에서 최댓값 $S(19)=2e^{19}$을 가지므로 구하는 삼각형의 넓이의 최댓값은 $2e^{19}$이다. 답 ①

10



오른쪽 그림과 같이 정사각뿔의 밑면의 한 변의 길이를 x, 높이를 h라 하면 밑면의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}x$이므로

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2+h^2=100$

$\therefore h=\sqrt{100-\frac{1}{2}x^2}$ $(0<x<10\sqrt{2})$

정사각뿔의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\frac{1}{3}x^2h$

$=\frac{1}{3}x^2\sqrt{100-\frac{1}{2}x^2}$

$V'(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{100-\frac{1}{2}x^2}-\frac{1}{6}\times\frac{x^3}{\sqrt{100-\frac{1}{2}x^2}}$

$=\frac{1}{6}x\left(4\sqrt{100-\frac{1}{2}x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{100-\frac{1}{2}x^2}}\right)$

$=\frac{1}{6}x\left(\frac{400-3x^2}{\sqrt{100-\frac{1}{2}x^2}}\right)$

$V'(x)=0$에서 $400-3x^2=0$

$\therefore x=\frac{20\sqrt{3}}{3}$ ($\because 0<x<10\sqrt{2}$)

x	(0)	$\cdots$	$\frac{20\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$(10\sqrt{2})$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $V(x)$는 $x=\frac{20\sqrt{3}}{3}$일 때 극대이며 최대이므로 부피가 최대가 되도록 하는 밑면의 한 변의 길이는 $\frac{20\sqrt{3}}{3}$이다. 답 ②

11

방정식 $2\sin x=x+k$에서 $2\sin x-x=k$

따라서 $0\leq x\leq 2\pi$에서 주어진 방정식이 오직 한 개의 실근을 가지려면 $0\leq x\leq 2\pi$에서 곡선 $y=2\sin x-x$와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나야 한다.

$f(x)=2\sin x-x$로 놓으면

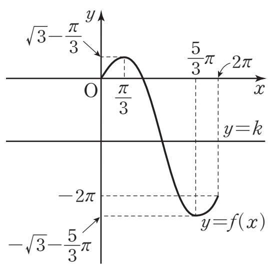
$f'(x)=2\cos x-1$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$	$(+)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$(+)$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$	$\searrow$	$-\sqrt{3}-\frac{5}{3}\pi$	$\nearrow$	-2π

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=2\sin x-x$와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는



$k=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ 또는 $k=-\sqrt{3}-\frac{5}{3}\pi$

또는 $-2\pi<k<0$

따라서 실수 k의 최댓값은 $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

이고, 최솟값은 $-\sqrt{3}-\frac{5}{3}\pi$이므로 구하는 합은

$\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}+\left(-\sqrt{3}-\frac{5}{3}\pi\right)=-2\pi$ 답 ①

12

방정식 $\frac{1}{16}x^4=ke^{x-4}$에서 $\frac{1}{16}x^4e^{-x+4}=k$

주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=\frac{1}{16}x^4e^{-x+4}$과 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$f(x)=\frac{1}{16}x^4e^{-x+4}$으로 놓으면

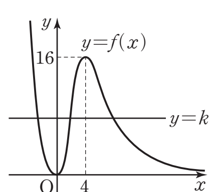
$$f'(x)=\frac{1}{4}x^3e^{-x+4}-\frac{1}{16}x^4e^{-x+4}$$
$$=\frac{1}{16}x^3e^{-x+4}(4-x)$$

$f'(x)=0$에서 $x^3(4-x)=0$ ($\because e^{-x+4}>0$)

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	16	$\searrow$

이때, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=\frac{1}{16}x^4e^{-x+4}$과 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위는

$0<k<16$ 답 ③

13

$f(x)=\sin x+\frac{1}{2}x^2-k$로 놓으면

$f'(x)=\cos x+x$, $f''(x)=-\sin x+1$

이때, $x\ge 0$에서 $f''(x)\ge 0$이므로 함수 $f'(x)$는 증가하고,

$f'(0)=1$이므로 $x\ge 0$에서 $f'(x)>0$이다.

즉, $x\ge 0$에서 함수 $f(x)$는 증가하므로 $f(x)$의 최솟값은

$f(0)=-k$

$x\ge 0$일 때, $f(x)\ge 0$이어야 하므로

$f(0)=-k\ge 0$ $\quad\therefore k\le 0$

따라서 실수 k의 최댓값은 0이다. 답 ③

14

점 P의 x좌표가 매초 1씩 증가하므로 t초 후의 점 P의 x좌표는 $t+1$

점 P가 곡선 $xy=4$ 위를 움직이므로 t초 후의 점 P의 y좌표는 $\frac{4}{t+1}$

즉, 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)는

$x=t+1$, $y=\frac{4}{t+1}$

$\frac{dx}{dt}=1$, $\frac{dy}{dt}=-\frac{4}{(t+1)^2}$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도는

$\left(1, -\frac{4}{(t+1)^2}\right)$

한편, 점 P가 점 (4, 1)을 지나는 순간의 시각은 $t=3$이므로 점 P의 $t=3$에서의 속도는

$\left(1, -\frac{1}{4}\right)$

따라서 구하는 점 P의 속력은

$\sqrt{1^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{4}$ 답 ②

15

$f(x)=\frac{2}{x^2+b}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{-4x}{(x^2+b)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-4(x^2+b)^2+4x\times 2\times 2x(x^2+b)}{(x^2+b)^4}$$
$$=\frac{-4(x^2+b)+16x^2}{(x^2+b)^3}=\frac{12x^2-4b}{(x^2+b)^3}$$

이때, 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 x좌표가 2이므로

$f''(2)=0$에서

$48-4b=0$ $\quad\therefore b=12$

한편, 곡선 $y=f(x)$가 점 $(2, a)$를 지나므로

$x=2$를 대입하면

$a=f(2)=\frac{2}{4+b}$ $\quad\therefore a=\frac{1}{8}$

$\therefore \frac{b}{a}=12\times 8=96$ 답 96

16

ㄱ. $f'(x)=(nx^{n-1}-x^n)e^{-x}=(n-x)x^{n-1}e^{-x}$

$\therefore f'\left(\frac{n}{2}\right)=\left(n-\frac{n}{2}\right)\times\left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}e^{-\frac{n}{2}}=\left(\frac{n}{2}\right)^n\times e^{-\frac{n}{2}}=f\left(\frac{n}{2}\right)$

$\therefore f\left(\frac{n}{2}\right)=f'\left(\frac{n}{2}\right)$ (참)

ㄴ. $f'(x)=(n-x)x^{n-1}e^{-x}$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=n$

(i) $0<x<n$에서

$n-x>0$, $x^{n-1}>0$, $e^{-x}>0$이므로

$f'(x)>0$

(ii) $x>n$에서

$n-x<0$, $x^{n-1}>0$, $e^{-x}>0$이므로

$f'(x)<0$

그러므로 함수 $f(x)$는 $x=n$에서 극댓값을 갖는다. (참)

ㄷ. $f''(x)=(x^2-2nx+n^2-n)x^{n-2}e^{-x}$

$n=4$일 때,

$f''(x)=x^2e^{-x}(x^2-8x+12)=x^2e^{-x}(x-2)(x-6)$이므로

$f''(0)=0$이지만 $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않는다.

그러므로 점 $(0, 0)$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 아니다.

(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

01 | 부정적분

내신&수능 빈출 유형

본문 59~61쪽

유형 01

$$\int \frac{3x^2-2\sqrt{x}}{x}dx=\int (3x-2x^{-\frac{1}{2}})dx$$
$$=\frac{3}{2}x^2-4x^{\frac{1}{2}}+C$$
$$=\frac{3}{2}x^2-4\sqrt{x}+C$$

답 ④

01-1

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$이므로

$f'(x)=\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}$에서

$$f(x)=\int\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right)dx=\int\left(x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+\ln|x|+C$$
$$=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+\ln x+C\ (\because x>0)$$

$f(1)=\frac{3}{4}$이므로 $\frac{3}{4}+C=\frac{3}{4}$ $\quad\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+\ln x$이므로

$$f(8)=\frac{3}{4}\times 8^{\frac{4}{3}}+\ln 8=\frac{3}{4}\times 2^4+\ln 2^3$$
$$=12+3\ln 2$$

답 ⑤

유형 02

$$f(x)=\int\frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx=\int\frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x+1}dx$$
$$=\int(e^x-1)dx=e^x-x+C$$

$f(0)=1$이므로 $1+C=1$ $\quad\therefore C=0$

따라서 $f(x)=e^x-x$이므로

$f(\ln 2)=e^{\ln 2}-\ln 2=2-\ln 2$

답 ②

02-1

$$f(x)=\int\frac{8^x-1}{2^x-1}dx$$
$$=\int\frac{(2^x-1)(2^{2x}+2^x+1)}{2^x-1}dx$$
$$=\int(4^x+2^x+1)dx$$
$$=\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{2^x}{\ln 2}+x+C$$

$f(0)=\frac{1}{\ln 2}$이므로

$\frac{1}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 2}+C=\frac{1}{\ln 2}$ $\quad\therefore C=-\frac{1}{2\ln 2}$

따라서 $f(x)=\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{2^x}{\ln 2}+x-\frac{1}{2\ln 2}$이므로

$$f(\log_2 3)=\frac{4^{\log_2 3}}{\ln 4}+\frac{2^{\log_2 3}}{\ln 2}+\log_2 3-\frac{1}{2\ln 2}$$
$$=\frac{9}{2\ln 2}+\frac{3}{\ln 2}+\frac{\ln 3}{\ln 2}-\frac{1}{2\ln 2}$$
$$=\frac{7+\ln 3}{\ln 2}$$

답 ⑤

• 보충 설명 •

① $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

② $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$, $a^{\log_a c}=c$ (단, $a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$, $c>0$)

02-2

$$f(x)=\ln 2\int 2^x dx=\ln 2\times\frac{2^x}{\ln 2}+C=2^x+C$$

$f(0)=1$이므로 $2^0+C=1$ $\quad\therefore C=0$

즉, $f(x)=2^x$이므로 $\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{2^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

답 ②

유형 03

$$f(x)=\int\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}dx$$
$$=\int\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{1-\cos x}dx$$
$$=\int(1+\cos x)dx$$
$$=x+\sin x+C$$

$f(0)=\frac{1}{2}$이므로 $C=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=x+\sin x+\frac{1}{2}$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}+1$$

답 ③

• 보충 설명 •

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$
$\tan^2 x+1=\sec^2 x$
$\cot^2 x+1=\csc^2 x$

03-1

조건 ㈎에서 $F(x)=xf(x)-(x\sin x+\cos x)$의 양변을 미분하면

$F'(x)=f(x)+xf'(x)-(\sin x+x\cos x-\sin x)$
$F'(x)=f(x)$이므로
$f(x)=f(x)+xf'(x)-x\cos x$
$\therefore f'(x)=\cos x$

즉, $f(x)=\int f'(x)dx=\int \cos x\,dx$이므로

$f(x)=\sin x+C$

조건 (나)에서 $f(\pi)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=\sin x+1$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+1=2$ 답 ④

유형 04

$e^x+1=t$로 놓으면 $e^x=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=3\int e^x\sqrt{e^x+1}\,dx=3\int\sqrt{t}\,dt$

$=2t^{\frac{3}{2}}+C=2(e^x+1)^{\frac{3}{2}}+C$

$f(\ln 3)=15$이므로 $2(e^{\ln 3}+1)^{\frac{3}{2}}+C=15$

$16+C=15$ $\quad\therefore C=-1$

따라서 $f(x)=2(e^x+1)^{\frac{3}{2}}-1$이므로

$f(\ln 8)=2(8+1)^{\frac{3}{2}}-1$

$=54-1=53$ 답 53

04-1

$f(x)=\int\sin^3 x\,dx=\int\sin x(1-\cos^2 x)dx$

$\cos x=t$로 놓으면 $-\sin x=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int\sin x(1-\cos^2 x)dx$

$=\int(t^2-1)dt=\frac{1}{3}t^3-t+C$

$=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$

$f(\pi)=1$이므로 $-\frac{1}{3}+1+C=1$ $\quad\therefore C=\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+\frac{1}{3}$이므로

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{8}$ 답 ①

04-2

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx=\int\sqrt{t}\,dt$

$=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}+C$

$f(e)=1$이므로 $\frac{2}{3}+C=1$ $\quad\therefore C=\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}$이므로

$f(e^4)=\frac{2}{3}\times 4^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\times 8+\frac{1}{3}$

$=\frac{17}{3}$ 답 ②

유형 05

$(e^x+e^{-x})'=e^x-e^{-x}$이므로

$f(x)=\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx=\int\frac{(e^x+e^{-x})'}{e^x+e^{-x}}dx$

$=\ln|e^x+e^{-x}|+C$

$e^x+e^{-x}>0$이므로 $f(x)=\ln(e^x+e^{-x})+C$

$f(0)=\ln 2$이므로 $\ln 2+C=\ln 2$ $\quad\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\ln(e^x+e^{-x})$이므로

$f(\ln 3)=\ln(e^{\ln 3}+e^{-\ln 3})$

$=\ln\left(3+\frac{1}{3}\right)=\ln\frac{10}{3}$ 답 ③

05-1

$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$

이므로

$f(x)=\int\frac{1}{x^2+3x+2}dx=\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

$=\ln|x+1|-\ln|x+2|+C$

$f(0)=\ln 2$이므로 $-\ln 2+C=\ln 2$ $\quad\therefore C=2\ln 2$

따라서 $f(x)=\ln|x+1|-\ln|x+2|+2\ln 2$이므로

$f(2)=\ln 3-\ln 4+2\ln 2$

$=\ln 3-2\ln 2+2\ln 2=\ln 3$ 답 ①

유형 06

$f'(x)=xe^{-x}$이므로 $f(x)=\int xe^{-x}dx$

$g(x)=x,\ h'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$g'(x)=1,\ h(x)=-e^{-x}$

$\therefore\int xe^{-x}dx=-xe^{-x}-\int(-e^{-x})dx$

$=-xe^{-x}-e^{-x}+C$

이 곡선이 원점을 지나므로

$f(0)=-1+C=0$에서 $C=1$

따라서 $f(x)=-(x+1)e^{-x}+1$이므로

$f(-2)=e^2+1$ 답 ⑤

06-1

$f'(t)=t\ln t$이므로 $f(x)=\int x\ln x\,dx$

$g(x)=\ln x,\ h'(x)=x$로 놓으면

$g'(x)=\frac{1}{x},\ h(x)=\frac{1}{2}x^2$

$\therefore\int x\ln x\,dx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int\frac{1}{2}x\,dx$

$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$

이 곡선이 점 $(\sqrt{e},\ e)$를 지나므로

$\frac{1}{2}e\ln\sqrt{e}-\frac{1}{4}e+C=e,\ \frac{1}{4}e-\frac{1}{4}e+C=e$ $\quad\therefore C=e$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+e$

$f'(x)=0$에서 $x\ln x=0$ $\quad\therefore x=1\ (\because x>0)$

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$e-\frac{1}{4}$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $f(1)=e-\frac{1}{4}$이다. 답 ①

06-2

$\int\frac{x}{\cos^2 x}dx=\int x\sec^2 x\,dx$에서

$f(x)=x$, $g'(x)=\sec^2 x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=\tan x$

$$\therefore \int x\sec^2 x\,dx=x\tan x-\int\tan x\,dx$$
$$=x\tan x-\int\frac{\sin x}{\cos x}dx$$
$$=x\tan x+\ln|\cos x|+C$$ 답 ③

빈출 유형 마무리 본문 62~63쪽

01 ①	**02** ⑤	**03** 3	**04** 2	**05** ②	**06** ④
07 ③	**08** 10	**09** 41	**10** 1	**11** ④	**12** ①
13 ③	**14** 1	**15** $\frac{5}{2}\pi$	**16** ②		

01

$$f(x)=\int\left(2x+\frac{1}{x}\right)^2dx=\int(4x^2+4+x^{-2})dx$$
$$=\frac{4}{3}x^3+4x-\frac{1}{x}+C$$

$f(1)=3$이므로 $\frac{4}{3}+4-1+C=3$ $\quad\therefore C=-\frac{4}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{4}{3}x^3+4x-\frac{1}{x}-\frac{4}{3}$이므로

$f(-3)=-36-12-1=-49$ 답 ①

02

조건 (나)에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-\frac{2}{x^3}$ $\quad\therefore f'(x)=\frac{2}{x^4}$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=2\int x^{-4}dx=-\frac{2}{3x^3}+C$$

조건 (가)에서 $f(1)=1$이므로 $-\frac{2}{3}+C=1$ $\quad\therefore C=\frac{5}{3}$

따라서 $f(x)=-\frac{2}{3x^3}+\frac{5}{3}$이므로

$f(2)=-\frac{1}{12}+\frac{5}{3}=\frac{19}{12}$ 답 ⑤

03

$$\int\frac{4\sin^3 x-4\sin x+\cos^3 x-2}{\cos^2 x}dx$$
$$=\int\frac{4\sin x(\sin^2 x-1)+\cos^3 x-2}{\cos^2 x}dx$$
$$=\int\frac{-4\sin x\cos^2 x+\cos^3 x-2}{\cos^2 x}dx$$
$$=\int(-4\sin x+\cos x-2\sec^2 x)dx$$
$$=4\cos x+\sin x-2\tan x+C$$

이므로 $p=4$, $q=1$, $r=-2$

$\therefore p+q+r=4+1+(-2)=3$ 답 3

04

$f'(x)=\cos x\tan x=\cos x\times\frac{\sin x}{\cos x}=\sin x$이므로

$f(x)=\int\sin x\,dx=-\cos x+C$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$f(0)=-1+C=0$ $\quad\therefore C=1$

따라서 $f(x)=-\cos x+1$이므로

$f(\pi)=1+1=2$ 답 2

05

조건 (나)에서 $x\to0$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$

따라서 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=3$이므로 $f'(0)=3$

또한 조건 (가)에서 $f'(0)=3^0+0+k=1+k$

$1+k=3$에서 $k=2$

$$\therefore f(x)=\int(3^x+x+2)dx$$
$$=\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{1}{2}x^2+2x+C$$

이때, $f(0)=\frac{1}{\ln 3}+C=0$이므로 $C=-\frac{1}{\ln 3}$

따라서 $f(x)=\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{\ln 3}$이므로

$f(1)=\frac{3}{\ln 3}+\frac{1}{2}+2-\frac{1}{\ln 3}=\frac{2}{\ln 3}+\frac{5}{2}$ 답 ②

06

$\frac{2x-4}{(x-1)(x-3)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-3}$ (a, b는 상수)로 놓으면

$\frac{2x-4}{(x-1)(x-3)}=\frac{(a+b)x-(3a+b)}{(x-1)(x-3)}$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

$a+b=2$, $3a+b=4$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=1$

$$\therefore \int\frac{2x-4}{(x-1)(x-3)}dx=\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}\right)dx$$
$$=\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{1}{x-3}dx$$
$$=\ln|x-1|+\ln|x-3|+C$$
$$=\ln|(x-1)(x-3)|+C$$

답 ④

07

$$f(x)=\int\frac{1}{\cos^2 x(1+\tan x)}dx$$
$$=\int\frac{\sec^2 x}{1+\tan x}dx$$

에서 $1+\tan x=t$로 놓으면 $\sec^2 x=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int\frac{1}{t}dt=\ln|t|+C$$
$$=\ln|1+\tan x|+C$$

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\ln 2$이므로 $\ln(1+1)+C=\ln 2$　　$\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\ln|1+\tan x|$이므로

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\ln(1+\sqrt{3})$

답 ③

08

$\ln x+5=t$로 놓으면 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int\frac{1}{x\sqrt{\ln x+5}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt=2t^{\frac{1}{2}}+C$$
$$=2\sqrt{t}+C=2\sqrt{\ln x+5}+C$$

$f\left(\dfrac{1}{e}\right)=8$이므로 $4+C=8$　　$\therefore C=4$

따라서 $f(x)=2\sqrt{\ln x+5}+4$이므로

$f(e^4)=2\sqrt{\ln e^4+5}+4=2\times3+4=10$

답 10

09

$e^x+2=t$로 놓으면 $e^x=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int e^x\sqrt{e^x+2}\,dx=\int\sqrt{t}\,dt=\int t^{\frac{1}{2}}\,dt$$
$$=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}(e^x+2)^{\frac{3}{2}}+C$$

한편, $f(x)=\displaystyle\int e^x\sqrt{e^x+2}\,dx$에서

$f'(x)=e^x\sqrt{e^x+2}$

$\ln 2\le x\le\ln 7$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\ln 7$에서 최댓값, $x=\ln 2$에서 최솟값을 가지므로

(최댓값)$-$(최솟값)$=f(\ln 7)-f(\ln 2)$

$$=\left\{\frac{2}{3}(7+2)^{\frac{3}{2}}+C\right\}-\left\{\frac{2}{3}(2+2)^{\frac{3}{2}}+C\right\}$$
$$=18-\frac{16}{3}=\frac{38}{3}$$

따라서 $p=3$, $q=38$이므로

$p+q=3+38=41$

답 41

10

(i) $x<0$일 때

$f'(x)=2\sin x(1-\cos x)$이므로

$f(x)=\displaystyle\int 2\sin x(1-\cos x)dx$

$1-\cos x=t$로 놓으면 $\sin x=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\displaystyle\int 2t\,dt=t^2+C_1=(1-\cos x)^2+C_1$

$f(-\pi)=2$이므로 $\{1-(-1)\}^2+C_1=2$　　$\therefore C_1=-2$

$\therefore f(x)=(1-\cos x)^2-2$ (단, $x<0$)

(ii) $x\ge0$일 때

$f'(x)=xe^{x^2}$이므로

$f(x)=\displaystyle\int xe^{x^2}dx$

$x^2=s$로 놓으면 $2x=\dfrac{ds}{dx}$이므로

$$f(x)=\int e^s\times\frac{1}{2}ds$$
$$=\frac{1}{2}e^s+C_2=\frac{1}{2}e^{x^2}+C_2$$

이때, $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\displaystyle\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0+}f(x)$에서

$-2=\dfrac{1}{2}+C_2$　　$\therefore C_2=-\dfrac{5}{2}$

$\therefore f(x)=\dfrac{1}{2}e^{x^2}-\dfrac{5}{2}$ (단, $x\ge0$)

(i), (ii)에서

$$f(x)=\begin{cases}(1-\cos x)^2-2 & (x<0)\\ \dfrac{1}{2}e^{x^2}-\dfrac{5}{2} & (x\ge0)\end{cases}$$

$\therefore f(\sqrt{\ln 7})=\dfrac{1}{2}e^{\ln 7}-\dfrac{5}{2}=1$

답 1

11

진수의 범위에서 $x+2>0$　　$\therefore x>-2$

$f(x)=\ln(x+2)$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{1}{x+2}$, $g(x)=x$

$$\therefore \int\ln(x+2)dx=x\ln(x+2)-\int\frac{x}{x+2}dx$$
$$=x\ln(x+2)-\int\left(1-\frac{2}{x+2}\right)dx$$
$$=x\ln(x+2)-x+2\ln(x+2)+C$$

$(\because x>-2)$

$$=(x+2)\ln(x+2)-x+C$$

답 ④

12

$g(x)=x^2$, $h'(x)=e^x$으로 놓으면

$g'(x)=2x$, $h(x)=e^x$

$\therefore \int x^2e^x\,dx = x^2e^x - \int 2xe^x\,dx$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\int 2xe^x\,dx$에서 $u(x)=2x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=2$, $v(x)=e^x$

$\therefore \int 2xe^x\,dx = 2xe^x - \int 2e^x dx$

$= 2xe^x - 2e^x + C_1$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - (2xe^x - 2e^x + C_1)$

$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

$= e^x(x^2-2x+2)+C$

따라서 $e^x(x^2-2x+2)+C=e^xf(x)+C$이므로

$f(x)=x^2-2x+2$

$\therefore f(1)=1-2+2=1$ 답 ①

13

$I_n=\int x^ne^{-x}\,dx$에서 $I_{n+1}=\int x^{n+1}e^{-x}\,dx$

$f(x)=x^{n+1}$, $g'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$f'(x)=(n+1)x^n$, $g(x)=-e^{-x}$

$\therefore I_{n+1}=-x^{n+1}e^{-x}+\int (n+1)x^ne^{-x}\,dx$

$=-x^{n+1}e^{-x}+(n+1)I_n$ 답 ③

14

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)+x(x-2)e^{-x}$

$\therefore f'(x)=(2-x)e^{-x}$

따라서 $f(x)=\int f'(x)dx=\int (2-x)e^{-x}\,dx$에서

$g(x)=2-x$, $h'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$g'(x)=-1$, $h(x)=-e^{-x}$

$\therefore f(x)=-(2-x)e^{-x}-\int e^{-x}\,dx$

$=-(2-x)e^{-x}+e^{-x}+C$

$=(x-1)e^{-x}+C$

$\therefore f(1)-f(0)=C-(-1+C)=1$ 답 1

15

$g(x)=\cos x$, $h'(x)=e^x$으로 놓으면

$g'(x)=-\sin x$, $h(x)=e^x$

$\therefore f(x)=\int e^x\cos x\,dx$

$=e^x\cos x-\int e^x(-\sin x)dx$

$=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\int e^x\sin x\,dx$에서 $u(x)=\sin x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=\cos x$, $v(x)=e^x$

$\therefore \int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$

$=e^x\cos x+e^x\sin x-f(x)+C_1$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+C$

이때, $f(0)=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{2}(1+0)+C=\frac{1}{2}$ $\therefore C=0$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)$

방정식 $f(x)=0$에서

$\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)=0$

$\cos x+\sin x=0$ ($\because e^x>0$)

$\sin x=-\cos x$, $\tan x=-1$

$\therefore x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$ ($\because 0\le x<2\pi$)

따라서 구하는 모든 근의 합은

$\frac{3}{4}\pi+\frac{7}{4}\pi=\frac{10}{4}\pi=\frac{5}{2}\pi$ 답 $\frac{5}{2}\pi$

16

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+3h)-f(x)\}-\{f(x-h)-f(x)\}}{h}$

$=3\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{3h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$

$=3f'(x)+f'(x)$

$=4f'(x)$

$4f'(x)=4x\sin x$이므로 $f'(x)=x\sin x$

$\therefore f(x)=\int x\sin x\,dx$

$u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x$

$\therefore \int x\sin x\,dx=-x\cos x-\int(-\cos x)dx$

$=-x\cos x+\sin x+C$

이때, $f(0)=0$이므로 $C=0$

$\therefore f(x)=-x\cos x+\sin x$

즉, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}=1$

이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ $\therefore y=\frac{\pi}{2}x+1-\frac{\pi^2}{4}$

따라서 구하는 y절편은 $1-\frac{\pi^2}{4}$이다. 답 ②

Ⅲ. 적분법

02 정적분

내신&수능 빈출 유형

본문 65~68쪽

유형 01

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-2)(x-3)}dx=\int_0^1\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)dx$$
$$=\Big[\ln|x-3|-\ln|x-2|\Big]_0^1$$
$$=\ln 2-(\ln 3-\ln 2)$$
$$=2\ln 2-\ln 3$$
$$=\ln\frac{4}{3}$$

답 ②

01-1

$\frac{x^2+2}{x+1}=x-1+\frac{3}{x+1}$이므로

$$\int_0^2 \frac{x^2+2}{x+1}dx=\int_0^2\left(x-1+\frac{3}{x+1}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2-x+3\ln|x+1|\right]_0^2$$
$$=\frac{1}{2}\times2^2-2+3\ln 3$$
$$=3\ln 3$$

따라서 $a=3$, $b=0$이므로

$a+b=3$

답 3

01-2

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x+\cos x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx$$
$$=\Big[\sin x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-1$$
$$=\sqrt{2}-1$$

답 ①

유형 02

$$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^0(3x^2-1)dx+\int_0^1\sin\pi x\,dx$$
$$=\Big[x^3-x\Big]_{-1}^0+\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1$$
$$=-\frac{1}{\pi}(-1-1)$$
$$=\frac{2}{\pi}$$

답 ②

02-1

$e^x-e=0$에서 $e^x=e$ $\quad\therefore x=1$

즉, $|e^x-e|=\begin{cases}e-e^x & (x<1)\\ e^x-e & (x\ge1)\end{cases}$이므로

$$\int_0^2|e^x-e|dx=\int_0^1(e-e^x)dx+\int_1^2(e^x-e)dx$$
$$=\Big[ex-e^x\Big]_0^1+\Big[e^x-ex\Big]_1^2$$
$$=-(-1)+(e^2-2e)$$
$$=e^2-2e+1$$

답 ③

유형 03

$\sin x$와 $\tan 5x$는 기함수, $\cos 3x$는 우함수이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos 3x+\tan 5x)dx$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 3x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 3x\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{3}$$

답 ②

03-1

x는 기함수, $\cos x$는 우함수이므로 $x\cos x$는 기함수이다.

또한 $\sin x$는 기함수, $2\cos x$는 우함수이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+2\cos x+x\cos x)dx$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos x\,dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$$
$$=4\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=4$$

답 ④

03-2

$f(-x)=-f(x)$에서 함수 $f(x)$가 기함수이므로

$$\int_{-2}^4 f(x)dx=\int_{-2}^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx$$
$$=\int_2^4 f(x)dx \qquad \cdots\cdots ㉠$$

한편, 조건 ㈎에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가하는 함수이고 $f(-x)=-f(x)$에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=0$이므로 $x>0$일 때 $f(x)>0$이다.

따라서 조건 ㈏에서

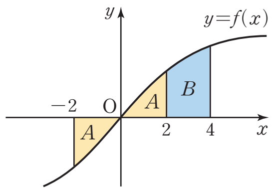
$$\int_2^4|f(x)|dx=\int_2^4 f(x)dx=3 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_{-2}^4 f(x)dx=\int_2^4 f(x)dx=3$$

• 다른 풀이 •

조건 ㈎에서 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가하는 함수이다. 또한 $f(-x)=-f(x)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭(기함수)이므로 다음 그림에서 -2에서 0까지의 넓이와 0에서 2까지의 넓이가 A로 같다.



조건 (나)에서 $\int_{2}^{4}|f(x)|dx=3$이므로

위의 그림에서 $B=3$

$$\therefore \int_{-2}^{4}f(x)dx=\int_{-2}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{4}f(x)dx$$
$$=-A+A+B=3$$

답 3

유형 04

$f(x)=\cos x$로 놓으면 $f(x)=f(x+2\pi)$이므로 $f(x)$는 주기함수이다.

$$\therefore \int_{a}^{a+2\pi}\cos x\,dx=\int_{0}^{2\pi}\cos x\,dx$$
$$=\Big[\sin x\Big]_{0}^{2\pi}$$
$$=0$$

답 ①

04-1

함수 $f(x)$가 주기가 2인 연속함수이므로

$$\int_{2}^{4}f(x)dx=\int_{0+2}^{2+2}f(x)dx=\int_{0}^{2}f(x)dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_{0}^{1}f(x)dx=1$, $\int_{-1}^{2}f(x)dx=3$에서

$$\int_{-1}^{2}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx$$
$$=\int_{1}^{2}f(x)dx+1+\int_{1}^{2}f(x)dx$$
$$=2\int_{1}^{2}f(x)dx+1=3$$

$$\therefore \int_{1}^{2}f(x)dx=1$$

따라서 ㉠에서

$$\int_{2}^{4}f(x)dx=\int_{0}^{2}f(x)dx$$
$$=\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx$$
$$=1+1=2$$

답 2

유형 05

$1+\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이고

$x=1$일 때 $t=1$, $x=e^2$일 때 $t=3$이므로

$$\int_{1}^{e^2}f(x)dx=\int_{1}^{e^2}\frac{1}{x(1+\ln x)^2}dx$$
$$=\int_{1}^{3}\frac{1}{t^2}dt=\int_{1}^{3}t^{-2}dt$$
$$=\left[-\frac{1}{t}\right]_{1}^{3}=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$$

답 ②

05-1

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x(1-\sin^2 x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^2 x\,dx$$

$\cos x=t$로 놓으면 $-\sin x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이므로

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^2 x\,dx=\int_{1}^{0}t^2\times(-1)dt$$
$$=\int_{0}^{1}t^2\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{1}{3}$$

답 ①

05-2

$\int_{-2}^{2}x\sqrt{x+3}\,dx$에서 $x+3=t$로 놓으면

$x=t-3$, $1=\frac{dt}{dx}$이고

$x=-2$일 때 $t=1$, $x=2$일 때 $t=5$이므로

$$\int_{-2}^{2}x\sqrt{x+3}\,dx=\int_{1}^{5}(t-3)\sqrt{t}\,dt$$
$$=\int_{1}^{5}(t^{\frac{3}{2}}-3t^{\frac{1}{2}})dt$$
$$=\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-2t^{\frac{3}{2}}\right]_{1}^{5}$$
$$=(10\sqrt{5}-10\sqrt{5})-\left(\frac{2}{5}-2\right)$$
$$=\frac{8}{5}$$

답 ③

05-3

$x=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta$이고

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\times\sec^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}1\,d\theta=\Big[\theta\Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

답 ②

유형 06

$\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x^2}dx$에서 $f(x)=\ln x$, $g'(x)=\frac{1}{x^2}$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=-\frac{1}{x}$

$$\therefore \int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x^2}dx=\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_{1}^{e}-\int_{1}^{e}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$=-\frac{1}{e}+\left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{e}=-\frac{2}{e}+1$$

$$\therefore \int_{0}^{1}(1+2e^{-x})dx-\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x^2}dx$$
$$=\Big[x-2e^{-x}\Big]_{0}^{1}-\left(-\frac{2}{e}+1\right)$$
$$=1-\frac{2}{e}+2+\frac{2}{e}-1=2$$

답 2

06-1

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2x\,dx$에서

$f(x)=x$, $g'(x)=\sin 2x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2x\,dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$

$=0+\frac{1}{4}\left[\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{1}{4}(1-0)=\frac{1}{4}$ 답 ②

유형 07

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(1-x^2)e^x=(1+x)(1-x)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

즉, $f(x)$는 $x=-1$일 때 극솟값을, $x=1$일 때 극댓값을 갖는다.

이때, $f(x)=\int_0^x (1-t^2)e^t\,dt$에서

$g(t)=1-t^2$, $h'(t)=e^t$으로 놓으면

$g'(t)=-2t$, $h(t)=e^t$

$\therefore f(x)=\int_0^x (1-t^2)e^t\,dt$

$=\left[(1-t^2)e^t\right]_0^x-\int_0^x(-2t)\times e^t\,dt$

$=(1-x^2)e^x-1+2\int_0^x te^t\,dt$ ...... ㉠

$\int_0^x te^t\,dt$에서 $u(t)=t$, $v'(t)=e^t$으로 놓으면

$u'(t)=1$, $v(t)=e^t$

$\therefore \int_0^x te^t\,dt=\left[te^t\right]_0^x-\int_0^x e^t\,dt=xe^x-\left[e^t\right]_0^x$

$=(x-1)e^x+1$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=(1-x^2)e^x-1+2\{(x-1)e^x+1\}$

$=-(x-1)^2e^x+1$

$\therefore f(1)=1$, $f(-1)=-4e^{-1}+1=1-\frac{4}{e}$

따라서 $f(x)$의 극댓값 $M=1$, 극솟값 $m=1-\frac{4}{e}$이므로

$M-m=1-\left(1-\frac{4}{e}\right)=\frac{4}{e}$ 답 ④

07-1

$f(x)=\int_0^x \sin t(2+\cos t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\sin x(2+\cos x)$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=0$ ($\because 2+\cos x>0$)

$\therefore x=\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

x	(0)	$\cdots$	π	$\cdots$	(2π)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

함수 $f(x)$는 $x=\pi$에서 극대이므로 극댓값은 $f(\pi)$이다.

$f(\pi)=\int_0^\pi \sin t(2+\cos t)dt$에서 $2+\cos t=s$로 놓으면

$-\sin t=\frac{ds}{dt}$이고 $t=0$일 때 $s=3$, $t=\pi$일 때 $s=1$이므로

$f(\pi)=\int_0^\pi \sin t(2+\cos t)dt=\int_3^1 s\times(-1)ds$

$=\int_1^3 s\,ds=\left[\frac{1}{2}s^2\right]_1^3$

$=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=4$

• 다른 풀이 •

극댓값 $f(\pi)$는 다음과 같이 구할 수도 있다.

$f(\pi)=\int_0^\pi \sin t(2+\cos t)dt$

$=\int_0^\pi 2\sin t\,dt+\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2t\,dt$

$=\left[-2\cos t\right]_0^\pi-\frac{1}{4}\left[\cos 2t\right]_0^\pi$

$=2+2-\frac{1}{4}(1-1)=4$ 답 ④

07-2

$f(x)=\int_x^{x+1}\left(t+\frac{2}{t}\right)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\left(x+1+\frac{2}{x+1}\right)-\left(x+\frac{2}{x}\right)=1+\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x}$

$=\frac{x^2+x-2}{x(x+1)}=\frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because x>0$)

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최솟값 $f(1)$을 갖는다.

$\therefore f(1)=\int_1^2\left(t+\frac{2}{t}\right)dt=\left[\frac{1}{2}t^2+2\ln t\right]_1^2$

$=(2+2\ln 2)-\left(\frac{1}{2}+0\right)$

$=\frac{3}{2}+2\ln 2$ 답 ⑤

유형 08

함수 $(2e^t+1)f'(t)$의 한 부정적분을 $G(t)$라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x(2e^t+1)f'(t)dt$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\Big[G(t)\Big]_0^x$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\{G(x)-G(0)\}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{G(x)-G(0)}{x-0}$$
$$=G'(0)$$
$$=(2e^0+1)f'(0)$$
$$=3\times5=15$$

답 15

08-1

함수 $f(t)f'(t)$의 한 부정적분을 $G(t)$라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)f'(t)dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\Big[G(t)\Big]_1^x$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{G(x)-G(1)}{x-1}$$
$$=G'(1)$$
$$=f(1)f'(1) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$f(x)=x^2e^x$에서 $f'(x)=2xe^x+x^2e^x$이므로

$f(1)=e,\ f'(1)=2e+e=3e$

따라서 ㉠에서

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)f'(t)dt=f(1)f'(1)$$
$$=e\times3e=3e^2$$

답 ③

빈출 유형 마무리 본문 69~70쪽

01 ②	02 ④	03 32	04 6	05 ④	06 ③
07 ②	08 ③	09 ④	10 ③	11 ②	12 ⑤
13 ②	14 ④	15 ②	16 ④		

01

$$\int_0^1(3^x+e^{-x})dx+\int_1^2(3^t+e^{-t})dt$$
$$=\int_0^2(3^x+e^{-x})dx$$
$$=\left[\frac{3^x}{\ln3}-e^{-x}\right]_0^2$$
$$=\frac{1}{\ln3}(9-1)-(e^{-2}-1)$$
$$=\frac{8}{\ln3}-\frac{1}{e^2}+1$$

답 ②

02

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x+\tan^2x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x+\sec^2x-1)dx$$
$$=\Big[x^2+\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{\pi^2}{16}-\frac{\pi}{4}+1$$

따라서 $a=\frac{1}{16},\ b=-\frac{1}{4},\ c=1$이므로

$$a+b+c=\frac{1}{16}+\left(-\frac{1}{4}\right)+1=\frac{13}{16}$$

답 ④

03

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(\tan x+4)f(x)dx$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}f(x)\tan x\,dx+4\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}f(x)dx$$

이때, $f(-x)=f(x)$, 즉 $f(x)$는 우함수이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}f(x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}f(x)dx=2\times4=8$$

한편, $g(x)=f(x)\tan x$라 하면

$$g(-x)=f(-x)\tan(-x)$$
$$=-f(x)\tan x=-g(x)$$

즉, $g(x)$는 기함수이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}f(x)\tan x\,dx=0$$
$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(\tan x+4)f(x)dx=4\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}f(x)dx$$
$$=4\times8=32$$

답 32

보충 설명

① (우함수)×(우함수)=(우함수)

② (우함수)×(기함수)=(기함수)

③ (기함수)×(기함수)=(우함수)

04

$2x-3=t$로 놓으면 $2=\frac{dt}{dx}$이고

$x=2$일 때 $t=1$, $x=3$일 때 $t=3$이므로

$$\int_2^3 f(2x-3)dx=\int_1^3 f(t)\times\frac{1}{2}dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_1^3 f(x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\times12=6$$

답 6

05

$\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+1}$ (a, b, c는 상수)로 놓으면

$$\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{(a+b)x^2+cx+a}{x(x^2+1)}$$

위의 등식은 x에 대한 항등식이므로

$a+b=0,\ c=0,\ a=1$

$\therefore\ a=1,\ b=-1,\ c=0$

따라서 $\dfrac{1}{x(x^2+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x^2+1}$이므로

$$\int_1^2 \frac{1}{x(x^2+1)}dx$$
$$=\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx$$
$$=\int_1^2\left\{\frac{1}{x}-\frac{2x}{2(x^2+1)}\right\}dx$$
$$=\left[\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_1^2\ (\because\ 1\le x\le 2)$$
$$=\left(\ln 2-\frac{1}{2}\ln 5\right)-\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right)$$
$$=\frac{3}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 5$$
$$=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$$

답 ④

06

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cos x\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$$

$\sin x=t$로 놓으면 $\cos x=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\cos x\,dx=\int_0^1(1-t^2)dt=\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1$$
$$=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

답 ③

07

$x=2\sin\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\dfrac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$이고

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$이므로

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\times 2\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2\sqrt{1-\sin^2\theta}}\times 2\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos\theta}{2\cos\theta}d\theta$$
$$=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}$$

따라서 $\dfrac{\pi}{6}=k\pi$이므로 $k=\dfrac{1}{6}$

답 ②

08

$f(x)=\begin{cases}1 & (0\le x\le 1)\\ x & (1<x\le 2)\end{cases}$이고 $f(x)$는 구간 $[0,\ 2]$에서 연속이므로

$$\int_0^2 e^x f(x)dx=\int_0^1 e^x\,dx+\int_1^2 xe^x\,dx$$

$\displaystyle\int_1^2 xe^x\,dx$에서 $g(x)=x$, $h'(x)=e^x$으로 놓으면

$g'(x)=1$, $h(x)=e^x$

$$\therefore\ \int_0^2 e^x f(x)dx=\int_0^1 e^x\,dx+\int_1^2 xe^x\,dx$$
$$=\Big[e^x\Big]_0^1+\Big[xe^x\Big]_1^2-\int_1^2 e^x\,dx$$
$$=e-1+2e^2-e-\Big[e^x\Big]_1^2$$
$$=2e^2-1-(e^2-e)$$
$$=e^2+e-1$$

답 ③

09

$f(x)=\sin 2x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=2\cos 2x$, $g(x)=e^x$

$$\therefore\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin 2x\,dx$$
$$=\Big[e^x\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos 2x\,dx$$
$$=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos 2x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos 2x\,dx$에서 $u(x)=\cos 2x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=-2\sin 2x$, $v(x)=e^x$

$$\therefore\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos 2x\,dx$$
$$=\Big[e^x\cos 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin 2x\,dx$$
$$=-e^{\frac{\pi}{2}}-1+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin 2x\,dx \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$5\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin 2x\,dx=2e^{\frac{\pi}{2}}+2$$
$$\therefore\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin 2x\,dx=\frac{2}{5}(e^{\frac{\pi}{2}}+1)$$

답 ④

10

$\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=e$일 때 $t=1$, $x=e^2$일 때 $t=2$이므로

$$\int_e^{e^2}\frac{\ln(\ln x)}{x}dx=\int_1^2\ln t\,dt$$

$\displaystyle\int_1^2\ln t\,dt$에서 $f(t)=\ln t$, $g'(t)=1$로 놓으면

$f'(t)=\dfrac{1}{t}$, $g(t)=t$

$$\therefore\ \int_1^2\ln t\,dt=\Big[t\ln t\Big]_1^2-\int_1^2 dt$$
$$=2\ln 2-\Big[t\Big]_1^2$$
$$=2\ln 2-1$$

답 ③

11

$f(x)=e^{2x}-2x-\int_0^x f'(t)e^t dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2e^{2x}-2-f'(x)e^x$

$f'(x)(1+e^x)=2(e^{2x}-1)$

$f'(x)(1+e^x)=2(e^x+1)(e^x-1)$

따라서 $f'(x)=2(e^x-1)$이므로

$f'(\ln 2)=2(e^{\ln 2}-1)=2(2-1)=2$ 답 ②

12

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t)\sin t\,dt=a$ (a는 상수)로 놓으면 $f(x)=\cos x+a$

$a=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos t+a)\sin t\,dt$에서

$\cos t=s$로 놓으면 $-\sin t=\frac{ds}{dt}$이고

$t=0$일 때 $s=1$, $t=\frac{\pi}{3}$일 때 $s=\frac{1}{2}$이므로

$$a=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos t+a)\sin t\,dt$$
$$=\int_1^{\frac{1}{2}}(s+a)\times(-1)ds$$
$$=\int_{\frac{1}{2}}^1(s+a)ds=\left[\frac{1}{2}s^2+as\right]_{\frac{1}{2}}^1$$
$$=\left(\frac{1}{2}+a\right)-\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}a\right)$$
$$=\frac{1}{2}a+\frac{3}{8}$$

즉, $a=\frac{1}{2}a+\frac{3}{8}$에서 $\frac{1}{2}a=\frac{3}{8}$ $\quad\therefore a=\frac{3}{4}$

따라서 $f(x)=\cos x+\frac{3}{4}$이므로

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}+\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$

• 다른 풀이 •

$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos t+a)\sin t\,dt$는 다음과 같이 구할 수도 있다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos t+a)\sin t\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin t\cos t+a\sin t)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}\sin 2t+a\sin t\right)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{4}\cos 2t-a\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2}a\right)-\left(-\frac{1}{4}-a\right)=\frac{1}{2}a+\frac{3}{8}$$

답 ⑤

13

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{1}{2}F'(1)=\frac{1}{2}f(1)$$
$$=\frac{1}{2}(3+0)=\frac{3}{2}$$

답 ②

14

함수 $x^2\sin x$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{\frac{\pi}{2}-h}^{\frac{\pi}{2}+h}x^2\sin x\,dx$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-F\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\left\{F\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}-\left\{F\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{F\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{F\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-h}$$
$$=2F'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\times\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\times\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{2}$$

답 ④

15

$x^2-1=t$로 놓으면 $x^2=t+1$, $2x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=1$일 때 $t=0$, $x=\sqrt{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_1^{\sqrt{2}}x^3\sqrt{x^2-1}\,dx=\int_1^{\sqrt{2}}(x^2\times\sqrt{x^2-1}\times x)dx$$
$$=\int_0^1\left\{(t+1)\times\sqrt{t}\times\frac{1}{2}\right\}dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1(t\sqrt{t}+\sqrt{t})dt$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{15}$$

답 ②

16

$\int_0^1 tf(t)dt=k$ (k는 상수)로 놓으면

$f(x)=e^{x^2}+k$이므로

$$\int_0^1 t(e^{t^2}+k)dt=\int_0^1(te^{t^2}+kt)dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}e^{t^2}+\frac{k}{2}t^2\right]_0^1$$
$$=\left(\frac{e}{2}+\frac{k}{2}\right)-\frac{1}{2}$$

즉, $k=\frac{k}{2}+\frac{e-1}{2}$에서

$\frac{k}{2}=\frac{e-1}{2}$ $\quad\therefore k=e-1$

$\therefore \int_0^1 xf(x)dx=e-1$ 답 ④

Ⅲ. 적분법

03 정적분의 활용

내신&수능 빈출 유형

본문 72~76쪽

유형 01

$f(x)=x^2$이라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 연속이다.

$\Delta x=\frac{2-0}{n}=\frac{2}{n}$로 놓으면

$x_k=0+k\Delta x=\frac{2k}{n}$, $f(x_k)=x_k{}^2=\left(\frac{2k}{n}\right)^2$

이므로

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^2dx&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^2\times\frac{2}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{8}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}\\&=\boxed{\frac{4}{3}}\times\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\boxed{\frac{8}{3}}\end{aligned}$$

$\therefore$ (가) : $\frac{4}{3}$, (나) : $\frac{8}{3}$ 답 ③

01-1

$h(x)=-x$라 하면 함수 $h(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 연속이다.

$\Delta x=\frac{3-0}{n}=\frac{3}{n}$으로 놓으면

$x_k=0+k\Delta x=\frac{3k}{n}$, $h(x_k)=-x_k=-\frac{3k}{n}$

이므로

$$\begin{aligned}\int_0^3(-x)dx&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}h(x_k)\Delta x\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{3k}{n}\right)\times\boxed{\frac{3}{n}}\\&=-9\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\\&=-9\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}\right\}\\&=-\frac{9}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\boxed{\frac{1}{n}}\right)=-\frac{9}{2}\end{aligned}$$

따라서 $f(n)=\frac{3}{n}$, $g(n)=\frac{1}{n}$이므로

$f(3)+g(3)=\frac{3}{3}+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ 답 ④

01-2

$f(x)=4x^3$이라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 연속이다.

$\Delta x=\frac{3-0}{n}=\frac{3}{n}$으로 놓으면

$x_k=0+k\Delta x=\frac{3k}{n}$, $f(x_k)=4x_k{}^3=4\times\left(\frac{3k}{n}\right)^3=\frac{108k^3}{n^3}$

이므로

$$\begin{aligned}\int_0^3 4x^3dx&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{108k^3}{n^3}\times\frac{3}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{324}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{324}{n^4}\times\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2\right]\\&=\frac{324}{4}\times\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\\&=81\end{aligned}$$

따라서 $a=108$, $b=81$이므로

$a+b=189$ 답 ④

유형 02

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2\times\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\times\frac{1}{n}$$

이때, $\Delta x=\frac{1-0}{n}$, $x_k=0+k\times\frac{1}{n}=\frac{k}{n}$라 하면 정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2\times\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\times\frac{1}{n}&=\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}dx\\&=\Big[\ln(1+x^2)\Big]_0^1\\&=\ln 2\end{aligned}$$

답 ③

02-1

분자와 분모에 각각 $\frac{1}{n}$을 곱하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4}{\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}}$$

이때, $\Delta x=\frac{1-0}{n}$, $x_k=0+k\times\frac{1}{n}=\frac{k}{n}$라 하면 정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4=\int_0^1x^4dx=\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1=\frac{1}{5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}=\int_0^1x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4}{\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}$$

답 ③

02-2

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{2k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+2\times\frac{k}{n}\right)\times\frac{1}{n}$

이때, $\Delta x=\frac{1-0}{n}$, $x_k=0+k\times\frac{1}{n}=\frac{k}{n}$라 하면 정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+2\times\frac{k}{n}\right)\times\frac{1}{n}=\int_0^1\ln(1+2x)dx$

$\int_0^1\ln(1+2x)dx$에서

$f(x)=\ln(1+2x)$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\frac{2}{1+2x}$, $g(x)=x$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^1\ln(1+2x)dx&=\Big[x\ln(1+2x)\Big]_0^1-\int_0^1 x\times\frac{2}{1+2x}dx\\&=\Big[x\ln(1+2x)\Big]_0^1-\int_0^1\left(1-\frac{1}{2x+1}\right)dx\\&=\ln 3-\Big[x-\frac{1}{2}\ln|2x+1|\Big]_0^1\\&=\ln 3-\left(1-\frac{1}{2}\ln 3\right)\\&=\frac{3}{2}\ln 3-1\end{aligned}$$

답 ⑤

02-3

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\sqrt{\frac{k}{n}}\times\frac{1}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)\times\frac{1}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}\times\frac{1}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{(2-1)k}{n}}\times\frac{1}{n}\\&=\int_1^2\sqrt{x}\,dx\end{aligned}$$

따라서 $a=1$, $b=2$이므로

$a+b=1+2=3$

답 ④

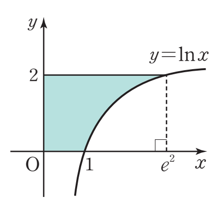
유형 03

구하는 넓이는

$$\begin{aligned}\int_0^2(2-x)e^x\,dx&=\Big[(2-x)e^x\Big]_0^2-\int_0^2(-e^x)dx\\&=\Big[(2-x)e^x\Big]_0^2+\Big[e^x\Big]_0^2\\&=-2+(e^2-1)=e^2-3\end{aligned}$$

답 ③

03-1



곡선 $y=\ln x$와 직선 $y=2$의 교점의 x좌표는 $\ln x=2$에서 $x=e^2$

따라서 구하는 넓이는 가로의 길이가 e^2이고 세로의 길이가 2인 직사각형의 넓이에서 곡선 $y=\ln x$와 x축 및 직선 $x=e^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$\begin{aligned}2e^2-\int_1^{e^2}\ln x\,dx&=2e^2-\Big[x\ln x-x\Big]_1^{e^2}\\&=2e^2-(2e^2-e^2+1)\\&=e^2-1\end{aligned}$$

답 ②

• 다른 풀이 •

$y=\ln x$에서 $x=e^y$이므로 구하는 넓이는

$\int_0^2 e^y\,dy=\Big[e^y\Big]_0^2=e^2-1$

03-2

$$\begin{aligned}\int_0^a(e^x+4e^{-x})dx&=\Big[e^x-4e^{-x}\Big]_0^a\\&=e^a-4e^{-a}-(1-4)\\&=e^a-\frac{4}{e^a}+3\end{aligned}$$

즉, $e^a-\frac{4}{e^a}+3=6$에서

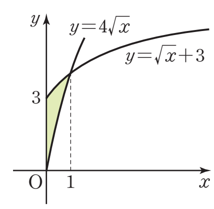
$(e^a)^2-3e^a-4=0$, $(e^a+1)(e^a-4)=0$

$e^a+1>0$이므로 $e^a=4$

$\therefore a=\ln 4$

답 ④

유형 04



두 곡선 $y=4\sqrt{x}$, $y=\sqrt{x}+3$의 교점의 x좌표는 $4\sqrt{x}=\sqrt{x}+3$에서

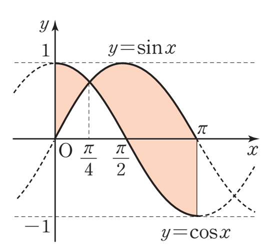
$\sqrt{x}=1$　　$\therefore x=1$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}&\int_0^1\{(\sqrt{x}+3)-4\sqrt{x}\}dx\\&=3\int_0^1(1-\sqrt{x})dx\\&=3\Big[x-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1\\&=3\times\frac{1}{3}=1\end{aligned}$$

답 ②

04-1



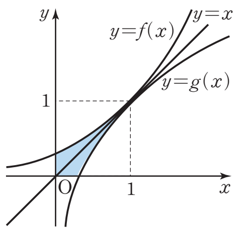
$0\le x\le\pi$에서 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{4}$이다.

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx\\&\qquad+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)dx\\&=\Big[\sin x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\\&=\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-1\right\}+\left\{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}\\&=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

답 ③

유형 05



오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.

즉, $e^{x-1}=x$에서 $x=1$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$ 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

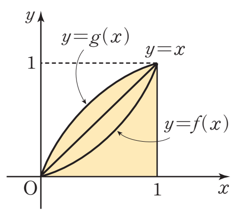
$$2\int_0^1 (e^{x-1}-x)dx=2\left[e^{x-1}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)-e^{-1}\right\}$$
$$=1-\frac{2}{e}$$

답 ⑤

05-1

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



$$\int_0^1\left(x-\tan\frac{\pi}{4}x\right)dx+\frac{1}{2}\times1\times1$$
$$=\int_0^1 x\,dx-\int_0^1\tan\frac{\pi}{4}x\,dx+\frac{1}{2}$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1-\int_0^1\frac{\sin\frac{\pi}{4}x}{\cos\frac{\pi}{4}x}dx+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}-\left[-\frac{4}{\pi}\ln\left|\cos\frac{\pi}{4}x\right|\right]_0^1+\frac{1}{2}$$
$$=1-\left(-\frac{4}{\pi}\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1-\frac{2}{\pi}\ln 2$$

답 ②

유형 06

단면인 정사각형의 한 변의 길이가 $\frac{1}{x}$이므로 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

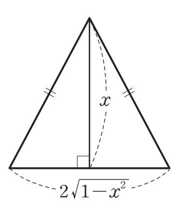
$$S(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^2$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_1^4\frac{1}{x^2}dx=\int_1^4 x^{-2}\,dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^4=-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$$

답 ③

06-1



오른쪽 그림과 같이 원점에서 x $(0\le x\le1)$만큼 떨어진 x축 위의 점에서 x축에 수직인 평면으로 자른 이등변삼각형의 밑변의 길이는 $x^2+y^2=1$에서 $2\sqrt{1-x^2}$이므로

단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\times2\sqrt{1-x^2}\times x=x\sqrt{1-x^2}$$

따라서 구하는 부피는

$$2\int_0^1 S(x)dx=2\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$1-x^2=t$로 놓으면 $-2x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=0$이므로

$$2\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx=-\int_1^0\sqrt{t}\,dt=\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}dt$$
$$=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

답 ②

유형 07

$$\frac{dx}{dt}=-\sin t+\cos t,\ \frac{dy}{dt}=-\sin t-\cos t$$

이므로 $t=0$에서 $t=\frac{\pi}{2}$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-\sin t+\cos t)^2+(-\sin t-\cos t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\,dt=\left[\sqrt{2}t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

답 ②

07-1

$$\frac{dx}{dt}=e^t,\ \frac{dy}{dt}=\frac{e^{2t}-1}{2}$$

이므로 $t=0$에서 $t=1$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^1\sqrt{(e^t)^2+\left(\frac{e^{2t}-1}{2}\right)^2}\,dt=\int_0^1\sqrt{e^{2t}+\frac{e^{4t}-2e^{2t}+1}{4}}\,dt$$
$$=\int_0^1\sqrt{\frac{e^{4t}+2e^{2t}+1}{4}}\,dt$$
$$=\int_0^1\sqrt{\left(\frac{e^{2t}+1}{2}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_0^1\frac{e^{2t}+1}{2}dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1(e^{2t}+1)dt$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2t}+t\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{4}(e^2+1)$$

답 ②

07-2

$$\frac{dx}{dt}=2\sqrt{t},\ \frac{dy}{dt}=t-1$$

이고 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리가 12이므로

$$\int_0^a\sqrt{(2\sqrt{t})^2+(t-1)^2}\,dt=12$$

$$\int_0^a\sqrt{(t+1)^2}\,dt=12,\ \int_0^a(t+1)dt=12$$

$\left[\frac{1}{2}t^2+t\right]_0^a=12$, $\frac{1}{2}a^2+a=12$

$a^2+2a-24=0$, $(a+6)(a-4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$) 답 ⑤

유형 08

$y=\frac{1}{4}(x^2-2\ln x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x$에서

$y'=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned}\int_3^9\sqrt{1+\left\{\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right\}^2}\,dx&=\int_3^9\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\,dx\\&=\int_3^9\sqrt{\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}\,dx\\&=\frac{1}{2}\int_3^9\left(x+\frac{1}{x}\right)dx\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2+\ln x\right]_3^9\\&=18+\frac{1}{2}\ln 3\end{aligned}$$

답 $18+\frac{1}{2}\ln 3$

08-1

$\frac{dx}{dt}=2t^2$, $\frac{dy}{dt}=2t$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{(2t^2)^2+(2t)^2}\,dt&=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4t^4+4t^2}\,dt\\&=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4t^2(t^2+1)}\,dt\\&=\int_0^{\sqrt{3}}2t\sqrt{t^2+1}\,dt\\&=\int_1^4\sqrt{x}\,dx\ (\because t^2+1=x\text{로 치환})\\&=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^4=\frac{14}{3}\end{aligned}$$

답 ④

빈출 유형 마무리

본문 77~78쪽

01 ④	02 ①	03 2	04 ①	05 1	06 ①
07 ①	08 ④	09 ③	10 ②	11 ②	12 52
13 ⑤	14 ③	15 ③			

01

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(e^{\frac{2}{n}}+2e^{\frac{4}{n}}+3e^{\frac{6}{n}}+\cdots+ne^{\frac{2n}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}ke^{\frac{2k}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}e^{\frac{2k}{n}}\times\frac{1}{n}$$

이때, $\Delta x=\frac{1-0}{n}$, $x_k=0+k\times\frac{1}{n}=\frac{k}{n}$라 하면 정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}e^{\frac{2k}{n}}\times\frac{1}{n}=\int_0^1 xe^{2x}\,dx$$

$f(x)=x$, $g'(x)=e^{2x}$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^1 xe^{2x}\,dx&=\left[\frac{1}{2}xe^{2x}\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}e^{2x}\,dx\\&=\frac{1}{2}e^2-\left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1\\&=\frac{1}{2}e^2-\left(\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

답 ④

02

$$\begin{aligned}S_n&=\int_n^{n+1}e^{-x+1}\,dx\\&=\left[-e^{-x+1}\right]_n^{n+1}\\&=e^{-n}(e-1)\end{aligned}$$

이때, 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{e-1}{e}$이고 공비가 $\frac{1}{e}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}(e-1)=\frac{\frac{e-1}{e}}{1-\frac{1}{e}}=1$$

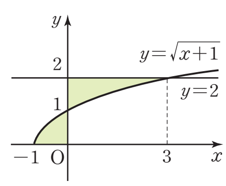
답 ①

03

$y=\sqrt{x+1}$에서 $y^2=x+1$

$\therefore x=y^2-1$

따라서 구하는 넓이는



$$\int_0^2|y^2-1|\,dy$$

$$=\int_0^1\{-(y^2-1)\}dy+\int_1^2(y^2-1)dy$$

$$=\left[-\frac{1}{3}y^3+y\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}y^3-y\right]_1^2$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$$

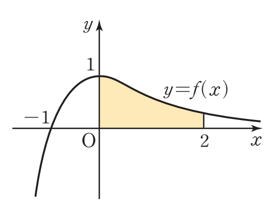
답 2

04

$0\le x\le 2$에서

$f(x)=(x+1)e^{-x}>0$

이므로 구하는 넓이는



$$\int_0^2(x+1)e^{-x}dx$$

$$=\left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^2-\int_0^2(-e^{-x})dx$$

$$=-\frac{3}{e^2}+1-\left[e^{-x}\right]_0^2$$

$$=-\frac{3}{e^2}+1-\left(\frac{1}{e^2}-1\right)=2-\frac{4}{e^2}$$

답 ①

05

$2x^2=t$로 놓으면 $4x=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=p$일 때 $t=2p^2$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^p xf(2x^2)dx&=\int_0^{2p^2}\frac{1}{4}f(t)dt\\&=\frac{1}{4}\int_0^{2p^2}f(t)dt\\&=\frac{1}{4}\left\{\int_0^p f(t)dt+\int_p^{2p^2}f(t)dt\right\}\\&=\frac{1}{4}(24-20)\\&=\frac{1}{4}\times4=1\end{aligned}$$

답 1

06

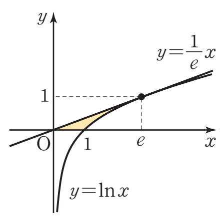
$f(x)=\ln x$라 하면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$에서 $f'(e)=\dfrac{1}{e}$이므로

점 $(e,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=\dfrac{1}{e}(x-e)\qquad \therefore\ y=\dfrac{1}{e}x$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는



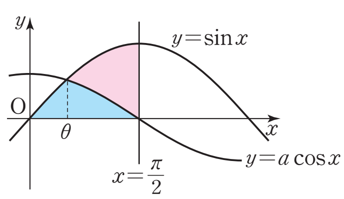
$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\times e\times1-\int_1^e \ln x\,dx\\&=\frac{e}{2}-\Big[x\ln x-x\Big]_1^e\\&=\frac{e}{2}-1\end{aligned}$$

답 ①

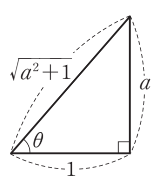
07

두 곡선 $y=\sin x$, $y=a\cos x$의 교점의 x좌표를

$\theta\left(0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하자.



$a\cos\theta=\sin\theta$에서 $\tan\theta=a$이므로



$\sin\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$, $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$ ...... ㉠

곡선 $y=\sin x$와 x축 및 직선 $x=\dfrac{\pi}{2}$로 둘러싸인 부분의 넓이를 곡선 $y=a\cos x$가 이등분하므로

$$\int_\theta^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-a\cos x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$$

$$\Big[-\cos x-a\sin x\Big]_\theta^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$-a+\cos\theta+a\sin\theta=\frac{1}{2}$$

이때, ㉠을 대입하면

$$-a+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{a^2}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{a^2+1}{\sqrt{a^2+1}}=a+\frac{1}{2},\ \sqrt{a^2+1}=a+\frac{1}{2}$$

양변을 제곱하면 $a^2+1=\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2$

$a^2+1=a^2+a+\dfrac{1}{4}\qquad \therefore\ a=\dfrac{3}{4}$

답 ①

08

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=t\ (t>0)$인 점에서 접한다고 하면

$\ln t=at^2$ ...... ㉠

또한 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g'(x)=2ax$이므로

$\dfrac{1}{t}=2at,\ t^2=\dfrac{1}{2a}$

$\therefore\ t=\dfrac{1}{\sqrt{2a}}\ (\because\ t>0)$ ...... ㉡

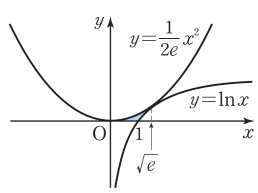
㉡을 ㉠에 대입하면

$$\ln\frac{1}{\sqrt{2a}}=a\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)^2$$

$$\ln\frac{1}{\sqrt{2a}}=\frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2a}}=\sqrt{e}$$

$\dfrac{1}{2a}=e\qquad \therefore\ a=\dfrac{1}{2e}$

$a=\dfrac{1}{2e}$을 ㉡에 대입하면 $t=\sqrt{e}$



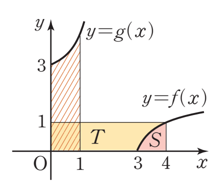
따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}&\int_0^{\sqrt{e}}\frac{1}{2e}x^2\,dx-\int_1^{\sqrt{e}}\ln x\,dx\\&=\left[\frac{1}{6e}x^3\right]_0^{\sqrt{e}}-\Big[x\ln x-x\Big]_1^{\sqrt{e}}\\&=\frac{1}{6e}\times e\sqrt{e}-\left\{\frac{1}{2}\sqrt{e}-\sqrt{e}-(-1)\right\}\\&=\frac{2}{3}\sqrt{e}-1\end{aligned}$$

답 ④

09

곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S, 곡선 $y=f(x)$와 x축, y축 및 직선 $y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 T라 하면 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로 $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx$의 값은 T와 같다. 즉,



$$\int_3^4 f(x)dx=S,\ \int_0^1 g(x)dx=T$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \int_3^4 f(x)dx+\int_0^1 g(x)dx&=S+T\\&=4\times1=4\end{aligned}$$

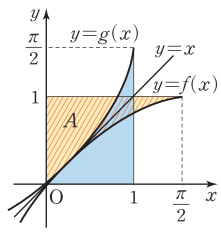
답 ③

10

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 $\sin x\le x$이므로 오른쪽 그림에서 곡선 $y=g(x)$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이, 즉

$\int_0^1 g(x)dx$의 값은 도형 A의 넓이와 같다.



$$\therefore \int_0^1 g(x)dx=\frac{\pi}{2}\times1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}-\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$$

답 ②

11

x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면 $S(x)=\cos x$이므로 구하는 부피는

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$$

$$=2\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2(1-0)=2$$

답 ②

12

좌표평면 위의 곡선 $y=f(x)$ 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치를 (x, y)라 하자.

시각 t에서의 점 Q의 위치는 $\left(\frac{2t^4\sqrt{t}}{9}, 0\right)$이므로

$x=\frac{2t^4\sqrt{t}}{9}$ $\quad\therefore \frac{dx}{dt}=t^{\frac{7}{2}}$

시각 t에서의 점 R의 속도는 $(0, t^2)$이므로

$\frac{dy}{dt}=t^2$

따라서 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^2\sqrt{(t^{\frac{7}{2}})^2+(t^2)^2}\,dt=\int_0^2\sqrt{t^7+t^4}\,dt$$

$$=\int_0^2 t^2\sqrt{t^3+1}\,dt=\frac{1}{3}\int_1^9\sqrt{x}\,dx\ (\because t^3+1=x\text{로 치환})$$

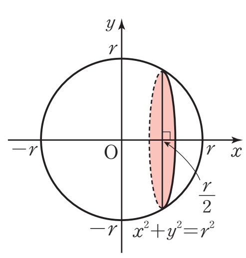
$$=\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^9=\frac{52}{9}$$

$\therefore 9s=9\times\frac{52}{9}=52$

답 52

13

주어진 구를 중심 O를 지나고 주어진 평면에 수직인 평면으로 자른 단면은 반지름의 길이가 r인 원이므로 좌표평면에 나타내면 오른쪽 그림과 같다. 이때, x좌표가 $x\ (0\le x\le r)$인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 반지름의 길이가 $\sqrt{r^2-x^2}$인 원이므로 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면



$S(x)=\pi(r^2-x^2)$

큰 부분의 부피를 V_1, 작은 부분의 부피를 V_2라 하면

$$V_2=\pi\int_{\frac{r}{2}}^{r}(r^2-x^2)dx=\pi\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{r}{2}}^{r}$$

$$=\pi\left\{\left(r^3-\frac{1}{3}r^3\right)-\left(\frac{1}{2}r^3-\frac{1}{24}r^3\right)\right\}=\frac{5}{24}\pi r^3$$

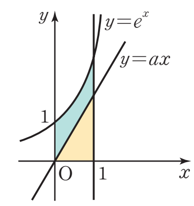
$$\therefore V_1=\frac{4}{3}\pi r^3-\frac{5}{24}\pi r^3=\frac{27}{24}\pi r^3$$

$$\therefore V_1 : V_2=\frac{27}{24}\pi r^3 : \frac{5}{24}\pi r^3=27 : 5$$

답 ⑤

14

오른쪽 그림에서 함수 $y=e^x$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$\int_0^1 e^x\,dx=\Big[e^x\Big]_0^1=e-1$$

이 넓이가 직선 $y=ax$에 의하여 이등분되므로

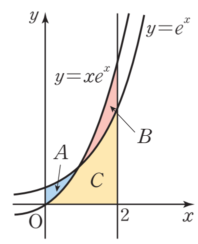
$$\frac{1}{2}\times1\times a=\frac{1}{2}(e-1)$$

$\therefore a=e-1$

답 ③

15

오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=e^x$, $y=xe^x$과 직선 $x=2$ 및 x축으로 둘러싸인 도형을 C라 하면 도형 A의 넓이와 도형 C 넓이의 합은 $\int_0^2 e^x\,dx$이고, 도형 B의 넓이와 도형 C의 넓이의 합은 $\int_0^2 xe^x\,dx$이므로



$$b-a=\int_0^2 xe^x\,dx-\int_0^2 e^x\,dx$$

$$=\int_0^2(xe^x-e^x)dx$$

$$=\int_0^2(x-1)e^x\,dx$$

$$=\Big[(x-1)e^x\Big]_0^2-\int_0^2 e^x\,dx$$

$$=e^2+1-\Big[e^x\Big]_0^2$$

$$=e^2+1-(e^2-1)=2$$

답 ③

Memo

Memo

Memo

Memo