[문제 1-2]

(1) 색칠되지 않은 칸에 적힌 수 A는 색칠된 칸에 적힌 수의 평균이므로

$$A=\frac{1}{n+1}\left\{1+\sum_{i=1}^{n}(4i^3+4i+10^4)\right\}=\frac{1}{n+1}\{1+n^2(n+1)^2+2n(n+1)+10^4n\}$$

$A\le 10^4$ 이어야 하므로,

$$\frac{1}{n+1}\{1+n^2(n+1)^2+2n(n+1)+10^4n\}\le 10^4$$

이고, 양변에 $n+1$ 을 곱하여 정리하면 $1+n^2(n+1)^2+2n(n+1)\le 10^4$ 이다. $t=n(n+1)$로 치환하면, $1+t^2+2t\le 10^4$ 이 되어, $(t+1)^2\le 10^4$ 이다. 즉, $t\le 99$ 이므로, $n^2+n\le 99$ 이다. 이를 만족하는 가장 큰 양의 정수 n은 9 이다.

(2) A가 적혀 있는 칸부터 2020 이 적혀 있는 칸을 보면, [문제 1-1]의 풀이와 같은 이유로, 수열 $A, x_1, x_2, \dots, x_{2019}, 2020$ 은 등차수열이 된다. 이 수열의 공차를 d라 한다면,

$$x_1=A+d,\quad x_2=A+2d,\quad 2020=A+2020d$$

이다. 즉, $A=2020-2020d$ 이고, $x_2=A+2d=2020-1018d$ 가 된다. 또한 제시문 (나)에서처럼 A는 세 수 x_2, 2020, -1의 평균이므로

$$2020-2020d=\frac{2020-2018d+2020+(-1)}{3}$$

가 성립한다. 이를 풀면 $2021=4042d$, 즉 $d=\frac{1}{2}$이고, $A=1010$이다.

[문항 2]

[문제 2-1]

(1) P의 x좌표를 p라 하자. 접선의 방정식을 구해보면 $y-(p^3+16)=3p^2(x-p)$이다. 이 접선이 원점을 지나므로, $p^3+16=3p^3$이고 $p=2$이다. 이때 $k=3p^2=12$이다.

이제 곡선 $y=x^3+16$과 직선 $y=17x$와의 교점을 구해보면, $x^3-17x+16=(x-1)(x^2+x-16)=0$이므로 $x=1$, $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{65}}{2}$에서 해를 가진다. 두 교점 Q, R는 제1사분면 위의 점이므로 두 점의 x좌표는 1과 $\dfrac{-1+\sqrt{65}}{2}$이다. 따라서 P, Q, R의 x좌표의 곱은 $2\times1\times\left(\dfrac{-1+\sqrt{65}}{2}\right)=\sqrt{65}-1$이다.

(2) 두 직선 $y=(t+1)x$, $y=tx$가 x축의 양의 방향과 이루는 각을 각각 α, β라 하자. 이때 $\tan\alpha=t+1$, $\tan\beta=t$이다. $\theta_t=\alpha-\beta$이므로, $\tan\theta_t=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{1}{t^2+t+1}$이고 $\cot\theta_t=t^2+t+1$이다. 한편, $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$가 성립하므로, $f(t)=\csc\theta_t=\sqrt{1+(t^2+t+1)^2}$이다.

따라서 $f(1)=\sqrt{10}$이고 $f'(t)=\dfrac{(t^2+t+1)(2t+1)}{\sqrt{1+(t^2+t+1)^2}}$이므로, $f'(1)=\dfrac{9}{\sqrt{10}}=\dfrac{9}{10}\sqrt{10}$이다.

(3) $f(\theta)=\displaystyle\int_0^\theta(\sin x+\sin 2x)(\cos x+\cos 2x)dx$라 두자. 먼저 $f(0)=0$이므로 $C\geq 0$이다. 이때

$$\begin{aligned}(\sin x+\sin 2x)(\cos x+\cos 2x)&=\sin x\cos x+\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x+\sin 2x\cos 2x\\&=\frac{\sin 2x}{2}+\sin 3x+\frac{\sin 4x}{2}\end{aligned}$$

이므로, $f(\theta)$는

$$\begin{aligned}\int_0^\theta\left(\frac{\sin 2x}{2}+\sin 3x+\frac{\sin 4x}{2}\right)dx&=\left[-\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\cos 3x}{3}-\frac{\cos 4x}{8}\right]_0^\theta\\&=\frac{1}{4}-\frac{\cos 2\theta}{4}+\frac{1}{3}-\frac{\cos 3\theta}{3}+\frac{1}{8}-\frac{\cos 4\theta}{8}\end{aligned}$$

이다. 한편 $y=\cos x$의 함숫값은 항상 1이하 이므로, $f(\theta)\geq 0$이다. 따라서 $C=0$일 때 $C+f(\theta)\geq 0$을 만족한다. 따라서 가장 작은 상수 C는 0이다.

[문제 2-2]

(1) 직선 $y=tx$ 와 곡선 $y=\frac{1}{x}$의 제1사분면의 교점을 구하기 위해, $tx=\frac{1}{x}$라 두면, $x=\frac{1}{\sqrt{t}}$이다.

즉, P_t의 x좌표를 x_t라 두었으므로, $x_t=\frac{1}{\sqrt{t}}$이다.

한편, 제시문 (나)의 방법을 이용하면, $A(t)$는 정적분 $\int_{x_{t+1}}^{x_t}\frac{1}{x}dx$ 와 선분 OP_{t+1} 를 빗변으로 하는 직각 삼각형의 넓이의 합에서 선분 OP_t 을 빗변으로 하는 직각삼각형의 넓이를 빼면 된다. 선분 OP_t 와 선분 OP_{t+1} 을 빗변으로 직각삼각형의 넓이가 각각 $\dfrac{x_t\times\dfrac{1}{x_t}}{2}=\frac{1}{2}$, $\dfrac{x_{t+1}\times\dfrac{1}{x_{t+1}}}{2}=\frac{1}{2}$ 이므로

$$A(t)=\left(\int_{x_{t+1}}^{x_t}\frac{1}{x}\,dx+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=\int_{x_{t+1}}^{x_t}\frac{1}{x}\,dx$$

이다. 즉, $A(t)=\int_{\frac{1}{\sqrt{t+1}}}^{\frac{1}{\sqrt{t}}}\frac{1}{x}\,dx=\ln\frac{1}{\sqrt{t}}-\ln\frac{1}{\sqrt{t+1}}=\frac{1}{2}\ln\frac{t+1}{t}$ 가 된다.

따라서 $\lim_{t\to\infty}tA(t)=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\ln\left(\frac{t+1}{t}\right)^t=\frac{1}{2}\ln e=\frac{1}{2}$ 이다.

(2) $f(x)=-\ln\cos x$ 라 두자. 직선 $y=tx$ 와 곡선 $y=f(x)$ 와의 원점이 아닌 교점의 x좌표를 x_t 라 두면 $-\ln\cos x_t=tx_t$ 가 성립한다. 한편, 곡선의 길이 $s(t)=\int_0^{x_t}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$ 이므로 $f'(t)=\tan x$ 와 제시문 (다)의 성질을 이용하면,

$$s(t)=\int_0^{x_t}\sqrt{1+\tan^2 x}\,dx=\int_0^{x_t}\sec x\,dx=\ln(\sec x_t+\tan x_t)$$

$$=\ln\left(\frac{1+\sin x_t}{\cos x_t}\right)=\ln(1+\sin x_t)-\ln(\cos x_t)$$

가 성립한다. 한편 $-\ln(\cos x_t)=tx_t$ 임을 이용하면, $s(t)=\ln(1+\sin x_t)+tx_t$ 이므로

$$\lim_{t\to\infty}\frac{s(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{\ln(1+\sin x_t)}{t}+x_t\right\}$$

$t\to\infty$일 때, 교점의 x 좌표 x_t는 점근선 $x=\frac{\pi}{2}$ 와 한없이 가까워지므로 $\frac{\ln(1+\sin x_t)}{t}$ 는 0으로 수렴한다. 따라서 $\lim_{t\to\infty}\frac{s(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\ln(1+\sin x_t)}{t}+x_t\right)=\frac{\pi}{2}$ 이다.