

논술 모의고사

(자연계열) : 120분

모집단위		전 형 명	논술우수자
수험번호		성 명	

■ 일반 유의사항

1. 시험시간은 120분, 배점은 [문항1]이 30점, [문항2] 35점, [문항3] 35점입니다.
2. 답안을 구상할 때 문제지의 여백이나 문제지 내의 연습장을 사용하십시오.
3. 답안을 작성할 때 반드시 흑색 필기구만을 사용하십시오(연필, 샤프 사용 가능, 사인펜 불가).
4. 답안을 정정할 때 두 줄을 긋고 정정하십시오(수정 테이프, 지우개 사용 가능, 수정액 불가).
5. 답안은 반드시 해당 문항의 답란에 작성하고, 답란 밖에는 작성하지 마시오.

※ 답안지는 절대 교체할 수 없습니다.

■ 답안 작성 유의사항

1. 수험번호, 성명 등 신상에 관련된 사항을 답란이나 답안지의 여백에 드러내지 마시오.
2. 풀이과정이나 설명 없이 간략히 답만 쓰면 0점 처리됩니다.
3. 풀이의 과정을 순차적으로 서술하되, 필요한 경우에 수식 및 그림을 사용할 수 있으며, 수식은 반드시 문장 속에 포함 시키시오.



논술 모의고사 (자연계열)

[문항 1] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $f'(a) = 0$ 이고 $x = a$ 의 좌우에서

- (1) $f'(x)$ 의 부호가 양(+)에서 음(-)으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극대이고, 극댓값은 $f(a)$ 이다.
- (2) $f'(x)$ 의 부호가 음(-)에서 양(+)으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극소이고, 극솟값은 $f(a)$ 이다.

(나) 미분가능한 함수 $t = g(x)$ 의 도함수 $g'(x)$ 가 구간 $[\alpha, \beta]$ 에서 연속이고, 함수 $f(t)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$ 이면

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

(다) 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x = a$, $x = b$ 로 둘러싸인 영역의 넓이 S 는

$$S = \int_a^b |f(x)|dx$$

이다.

(※) 좌표평면 위를 움직이는 점 $P(x, y)$ 의 좌표가 매개변수 t 의 함수

$$x = 2\cos^2 t, \quad y = \sin 2t$$

로 주어졌다. 점 $A(0, \overline{OP})$ 와 P 를 지나는 직선이 x 축과 만나는 점을 $B(k, 0)$ 라 하고 삼각형 OAB 의 무게중심을 G 라 하자. (단, $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$, O 는 원점)

(1-1) G 가 나타내는 곡선의 방정식을 구하시오. (10점)

(1-2) 삼각형 OAB 의 넓이를 t 에 관한 식으로 나타내고 점 O, G, P 가 한 직선위에 있을 때 이 넓이가 최대가 됨을 보이시오. (10점)

(1-3) 매개변수 t 로 좌표가 주어지는 두 점 P, G 가 그리는 두 곡선과 점 O, G, P 가 한 직선위에 있을 때의 직선 OP 그리고 x 축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오. (10점)

논술 모의고사 (자연계열)

[문항 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) [평균값 정리] 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능하면

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

를 만족하는 c 가 a 와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

(나) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 일 때, $\sin x < x$ 이 항상 성립한다.

(다) 세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 가 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \leq b_n \leq c_n$ 을 만족하고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha \text{이면, } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha \text{이다.}$$

(※) 자연수 n 에 대하여 방정식 $\sin x = \frac{1}{x}$ 는 구간 $\left(2n\pi, 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 유일한 해 $x = a_n$ 을 갖는다.

(2-1) 모든 자연수 n 에 대하여

$$2n\pi < a_{n+1} - 2\pi < a_n$$

가 성립함을 보이시오. (10점)

(2-2) 각 자연수 n 에 대하여

$$a_n - a_{n+1} + 2\pi = \frac{1}{\cos b_n} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right)$$

을 만족하는 b_n 이 $a_{n+1} - 2\pi$ 와 a_n 사이에 존재함을 보이시오. (10점)

(2-3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sin(a_{n+1} - a_n) = 0$ 임을 보이시오. (15점)

논술 모의고사 (자연계열)

[문항 3] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 두 초점 $F(c,0), F'(-c,0)$ 으로부터 거리의 차가 $2a$ 인 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{이다. (단, } c > a > 0, b^2 = c^2 - a^2)$$

(나) 곡선 $f(x,y)=0$ 위의 점 (x_1,y_1) 에서의 접선의 기울기는 음함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$ 를 구한 후

$x = x_1, y = y_1$ 을 대입하여 구할 수 있다. 예를 들어 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 기울기는

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면 $\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0$ 즉 $\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}$ 이므로 $x = x_1, y = y_1$ 을 대입하면

$\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$ 이다.

(다) 쌍곡선의 방정식 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 을 y 에 대하여 풀면 $y = \pm \frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$ 이다. 이때 $|x|$ 의 값이 한없이 커지면

$\frac{a^2}{x^2}$ 의 값은 0에 한없이 가까워지므로, 쌍곡선은 두 직선 $y = \frac{b}{a}x$ 와 $y = -\frac{b}{a}x$ 에 한없이 가까워진다. 이 두 직선을

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 점근선이라 한다.

(3-1) 원 $x^2 + (y-c)^2 = r^2$ 과 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이 한 점에서 공통의 접선을 가질 때, 원의 반지름 r 을 a, b, c 의 식으로 나타내시오. (10점)

(3-2) 두 점 $F(5,0), F'(-5,0)$ 과 중심이 $(0,5)$ 인 원 C 에 대하여, 점 X 가 원 C 위를 움직일 때 $\overline{F'X} - \overline{FX}$ 의 최댓값이 8이라 한다. 이때 원 C 의 반지름을 구하시오. (10점)

(3-3) 두 점 $F(5\sqrt{2},0), F'(-5\sqrt{2},0)$ 과 $\alpha > 4$ 에 대하여 $f(\alpha)$ 는 다음 조건을 만족하는 양의 실수이다.
(조건) 중심이 $(\alpha, f(\alpha))$ 인 원 C 중에서 $\overline{F'X} - \overline{FX}$ ($X \in C$)의 최댓값과 최솟값이 각각 14, 10이 되도록 하는 C 가 존재한다.

이때, 극한값 $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{f(\alpha)}{\alpha}$ 을 구하시오. (15점)

논술 모의고사 (자연계열)

<연 습 장>

논술 모의고사 (자연계열)

<연 습 장>

논술 모의고사 (자연계열)

<연 습 장>

