

8

자연계열 논술고사 (오후)

1. 일반정보

유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 I
	핵심 개념 및 용어	등비수열, 지수함수와 로그함수
예상 소요 시간	40 분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

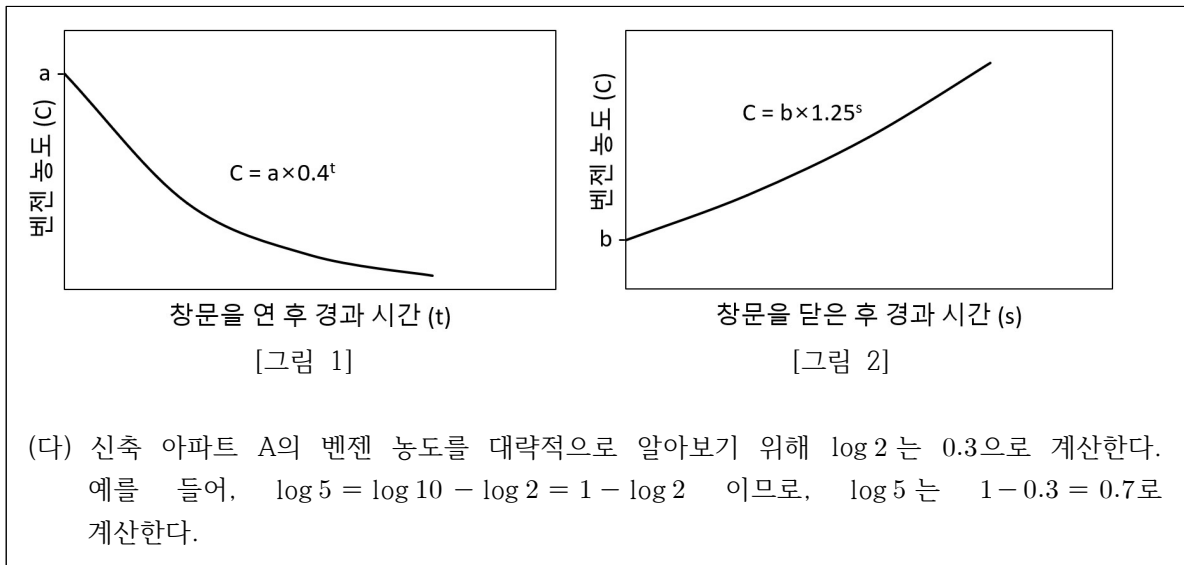
문제 1 (20점)

아파트 신축 과정에서 사용한 건축 재료에는 휘발성 성분인 벤젠을 비롯한 각종 유기화합물들이 포함되어 있다. 신축 아파트 입주자들이 이를 지속적으로 흡입하게 되면 두통이 발생하는 등 새집 증후군이라고 알려진 증상이 나타나기도 한다. 벤젠(C_6H_6)은 국제암연구소에서 제시한 물질별 위해성 등급에 따르면 1급 발암물질로 알려져 있다. 이에 정부에서는 신축 아파트의 실내공기질 권고기준을 마련하였으며, 이 중 벤젠 농도는 $30 \mu\text{g}/\text{m}^3$ 이하로 설정되어 있다.

신축 아파트 A의 완공 직후 실내공기질 검사 결과, 벤젠 농도가 $150 \mu\text{g}/\text{m}^3$ 으로 측정되었으며, 벤젠 농도는 다음의 조건 (가), (나)에 따라 변동한다.

(가) 창문을 열어 환기하는 경우, [그림 1]과 같이 창문을 열기 직전 벤젠 농도가 $a \mu\text{g}/\text{m}^3$ 이면, 환기 시작 후 t 시간이 경과했을 때, 벤젠 농도 $C = a \times 0.4^t \mu\text{g}/\text{m}^3$ 이다.

(나) 창문을 닫아 놓는 경우, [그림 2]와 같이 창문을 닫기 직전 벤젠 농도가 $b \mu\text{g}/\text{m}^3$ 이면, 창문을 닫은 후 s 시간이 경과했을 때, 벤젠 농도 $C = b \times 1.25^s \mu\text{g}/\text{m}^3$ 이다.



- (1) 완공 직후부터 창문을 열어 환기하기 시작하면 몇 시간 후 벤젠 농도가 실내공기질 권고기준을 만족하게 되는지 구하시오.
- (2) 매일 일정한 t 시간 동안 창문을 열어 환기한 후, 나머지 $24-t$ 시간 동안은 창문을 닫아 놓으려 한다. 완공 직후부터 벤젠 농도가 실내공기질 권고기준을 위반하는 시간의 총합을 최소화하려면 적어도 몇 시간 이상 매일 환기해야 하는지 구하시오.
- (3) 완공 직후부터 2시간 동안 창문을 열어 환기한 후, 6시간 동안 창문을 닫아놓는 방식으로 창문 열고 닫기를 주기적으로 반복할 경우, 최소 몇 시간 후 입주가 가능한지 구하시오. (단, 입주 후에도 같은 방식으로 계속 환기하며, 벤젠 농도가 실내공기질 권고기준을 항상 만족해야 한다.)

3. 출제 의도

사회적으로 이슈가 되고 있는 다양한 환경 문제들 가운데, 일반적으로 경험할 수 있는 것을 출제 문제의 배경으로 삼고자 하였다. 창문이 열려 있을 때와 닫혀 있을 때 실내공기 중 유해물질의 농도가 각각 지수함수로 주어졌다. 지수함수와 로그함수의 성질을 이해하고 적절히 활용하여 문제를 해결할 수 있는지 평가한다. 로그의 성질을 이해하고 계산에 활용할 수 있는지 평가한다.

- (1) 지수함수와 로그함수의 성질을 이해하고 활용하여 간단한 방정식을 풀 수 있는지 평가한다.
- (2) 지수함수를 이용하여 문제의 조건에 맞는 적절한 부등식을 찾고 로그함수를 활용하여 이를 풀 수 있는지 평가한다.
- (3) 등비수열, 지수함수를 이용하여 문제의 조건에 맞는 적절한 부등식을 찾고 로그함수를 활용하여 이를 풀 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
문제1 제시문	[수학 I] - (1) 지수함수와 로그함수 - ㉠ 지수와 로그 [12수학 I 01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. [수학 I] - (1) 지수함수와 로그함수 - ㉡ 지수함수와 로그함수 [12수학 I 01-07] 지수함수와 로그함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해한다.
문항 (1)	[수학 I] - (1) 지수함수와 로그함수 - ㉠ 지수와 로그 [12수학 I 01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. [수학 I] - (1) 지수함수와 로그함수 - ㉡ 지수함수와 로그함수 [12수학 I 01-08] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
문항 (2)	[수학 I] - (1) 지수함수와 로그함수 - ㉠ 지수와 로그 [12수학 I 01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. [수학 I] - (1) 지수함수와 로그함수 - ㉡ 지수함수와 로그함수 [12수학 I 01-08] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
문항 (3)	[수학 I] - (1) 지수함수와 로그함수 - ㉠ 지수와 로그 [12수학 I 01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. [수학 I] - (1) 지수함수와 로그함수 - ㉡ 지수함수와 로그함수 [12수학 I 01-08] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학I	홍성복 외 10인	지학사	2018	26-32, 43-57
	수학I	류희찬 외 10인	천재교과서	2018	29-34, 42-50, 53-58
	수학I	황선욱 외 8인	미래엔	2018	24-31, 41-55

5. 문항 해설

(1) 창문을 열어 환기할 때 실내 벤젠 농도는 제시문의 지수함수로 주어진다. 이 값이 기준치 이하($30 \mu\text{g}/\text{m}^3$ 이하)가 되는 시간 t 를 구한다.

(2) 창문을 열어 t 시간 동안 환기시킨 후 $24-t$ 시간 동안 창문을 닫아 두었을 때 벤젠 농도가 기준치 이하가 되면 된다. 이를 주어진 지수함수를 이용하여 부등식으로 나타내고 로그함수를 활용하여 t 의 범위를 구한다.

(3) 8시간 단위로 경과 후, 즉, 8시간, 16시간, 24시간, ... 경과 후의 벤젠 농도는 등비수열을 이룬다. 이 등비수열의 값이 처음으로 기준치 이하가 되는 때(32시간 경과 후)를 로그함수를

활용하여 먼저 구한다. 마지막 8시간 중(즉, 24시간 경과 후부터 32시간 까지) 벤젠 농도가 기준치 이하로 내려가는 시간을 (1)에서와 같이 구한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	적절한 부등식을 제시함 (3점) 농도가 권고기준을 만족하게 되는 시간을 올바르게 계산하여 구함 (1점)	4점
(2)	적절한 부등식을 제시함 (3점) $\log 0.2$, $\log 0.4$, $\log 1.25$ 를 모두 $\log 2$ 와 연관된 형태로 변환함 (4점) 구하는 환기 시간을 올바르게 계산하여 얻음 (1점)	8점
(3)	적절한 부등식을 제시함 (3점) 적어도 네 번 창문 열고 닫기를 반복해야 됨을 구하고 24시간에서 32시간 사이에 구하는 답이 존재함을 설명함 (4점) 문항에서 요구하는 답을 올바르게 계산하여 구함 (1점)	8점

7. 예시 답안

(1) 창문을 열어두었을 때 t 시간 후 벤젠 농도(C)가 기준치 이하($30 \mu\text{g}/\text{m}^3$ 이하)로 내려갔다면 $C = 150(0.4)^t \leq 30$ 이다. 로그함수를 이용하여 이 부등식을 풀면

$$(0.4)^t \leq 0.2$$

$$t \times \log 0.4 \leq \log 0.2$$

$$t \times \log \frac{4}{10} \leq \log \frac{2}{10}$$

$$t \times (\log 4 - \log 10) \leq \log 2 - \log 10$$

$$t \times (2\log 2 - \log 10) \leq \log 2 - \log 10$$

($\log 2 = 0.3$ 으로 주어졌으므로 $\log 4$ 를 $2\log 2$ 로 변환하여 계산)

$$t \times (2 \times 0.3 - 1) \leq 0.3 - 1$$

$$t \times (-0.4) \leq -0.7 \quad (* \log 0.4 = -0.4, \log 0.2 = -0.7)$$

$$t \geq 1.75 \text{ 또는 } \frac{7}{4} \text{ 이다.}$$

즉, 1.75시간 (= $\frac{7}{4}$ 시간 = 1시간 45분) 후 권고기준을 만족하게 된다.

(2) 문제에서와 같이 24시간마다 일정하게 환기를 반복할 때 벤젠 농도가 30 이상인 시간의 총합을 최소화하려면 처음 24시간 경과했을 때 벤젠 농도가 30 이하이어야 한다. 즉, 처음 창문을 열어 t 시간 동안 환기시킨 후 창문을 닫고 $24-t$ 시간 지났을 때 $30 \mu\text{g}/\text{m}^3$ 이하가 되면 된다. 이를 부등식으로 나타내면

$$150(0.4)^t(1.25)^{24-t} \leq 30$$

이고 이를 로그함수를 이용하여 풀면

$$(0.4)^t(1.25)^{24-t} \leq 0.2$$

$$t \times \log 0.4 + (24-t) \times \log 1.25 \leq \log 0.2$$

$$(\ast \log 1.25 = \log \frac{25}{100} = \log 25 - \log 100 = 3 \log 5 - 2 \log 10 = 3 \times 0.7 - 2 = 0.1)$$

$$t \times (-0.4) + (24-t) \times (0.1) \leq -0.7$$

$$t \times (-0.4 - 0.1) \leq -0.7 - 24 \times 0.1$$

$$t \times (-0.5) \leq -3.1$$

$$t \geq 6.2 \text{ 또는 } \frac{31}{5} \text{ 이다.}$$

즉, 매일 적어도 6.2시간 (= $\frac{31}{5}$ 시간 = 6시간 12분) 동안 환기해야 한다.

(3) 문제에서와 같이 8시간마다 일정하게 환기를 반복할 때 8시간마다 벤젠 농도는 직전 농도에 $0.4^2 \times 1.25^6$ 을 곱한 값이 된다. 8시간씩 n 번 지난 후 벤젠 농도가 $30 \mu\text{g}/\text{m}^3$ 이하가 되었다면

$$150(0.4)^{2n}(1.25)^{6n} \leq 30$$

이다. 이를 (1), (2)에서와 같이 로그함수를 이용하여 풀면 $n \geq 3.5$ 이다. n 은 정수이므로 $n=4$ 이다. 즉, $8 \times 3 = 24$ 시간 후($n=3$) 벤젠 농도는 30보다 크지만 $8 \times 4 = 32$ 시간 후($n=4$) 벤젠 농도는 30보다 작게 된다.

그런데, 24시간과 32시간 사이에 벤젠 농도가 30 이하로 내려가는 때가 있고 그 이후에는 항상 벤젠 농도가 30 이하이다. 이 시점을 $24+t$ 라 하면 (단, $0 < t < 8$)

$$150(0.4)^6(1.25)^{18}(0.4)^t \leq 30$$

이고, 이를 로그함수를 이용하여 풀면

$$(0.4)^6(1.25)^{18}(0.4)^t \leq 0.2$$

$$6 \times \log 0.4 + 18 \times \log 1.25 + t \times \log 0.4 \leq \log 0.2$$

$$6 \times (-0.4) + 18 \times (0.1) + t \times (-0.4) \leq -0.7$$

$$t \times (-0.4) \leq -0.1$$

$$t \geq 0.25 \text{ 이다.}$$

즉, $24 + 0.25 = 24.25$ 시간 (= $\frac{97}{4}$ 시간 = 24시간 15분) 후 입주가 가능하다.

9

자연계열 논술고사 (오후)

1. 일반정보

유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 미적분, 수학II
	핵심 개념 및 용어	이차방정식과 이차함수, 접선의 기울기, 부피
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

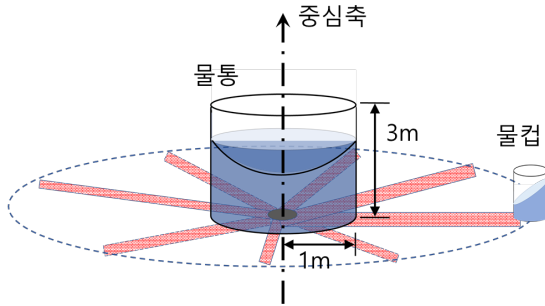
문제 2 (20점)

새로 개장한 흥익대공원에 [그림 1]과 같은 문어 모양의 놀이 기구가 있다. 밑면의 반지름이 1m이고 높이가 3m인 직원기둥 모양의 물통이 놀이 기구의 가운데 위치하고, 문어 다리 모양의 기구체가 물통에 연결되어 있다. 기구체의 끝에 흥익이가 물컵을 들고 타고 있다. 놀이 기구를 작동시키면, 전체 놀이 기구는 물통의 중심을 지나고 지표면과 수직인 중심축에 대하여 시간당 일정한 회전수로 회전한다. 놀이 기구가 정지해 있을 때는 물통과 물컵의 수면은 수평이지만, 작동하는 동안에는 회전의 영향으로 [그림 1]과 같이 물통 안의 물은 중심축 부근이 움푹 파인 모양이 된다. 물통과 물컵 안의 수면의 높이는 중심축으로부터의 거리가 멀어질수록 증가한다.

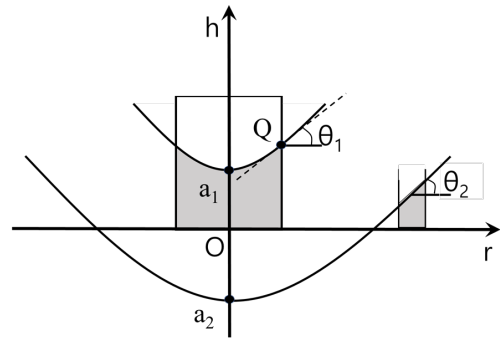
(가) [그림 2]는 놀이 기구의 중심축을 포함하고 물컵의 중심을 지나는 평면으로 자른 단면이다. 물통 안의 수면의 한 점과 중심축과의 거리를 r 이라 할 때, 밑면으로부터 그 점까지의 높이 h 는 적절한 상수 A , a_1 에 대하여, 포물선의 식 $h = Ar^2 + a_1$ 을 따른다. 흥미롭게도, 물컵 안의 수면의 한 점과 중심축과의 거리를 r 이라 할 때, 밑면으로부터 그 점까지의 높이 h 도 물통의 경우와 동일한 상수 A 와 적절한 상수 a_2 에 대하여, $h = Ar^2 + a_2$ 를 따른다.

(나) [그림 3a]에서 놀이 기구의 중심축과 물통 안 수면이 만나는 점을 점 P라 하자. 점

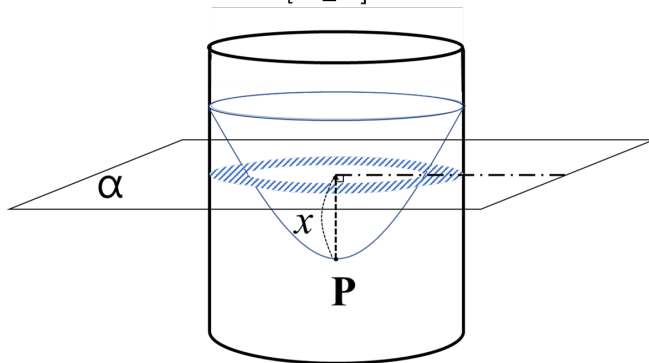
P로부터 높이가 x 인 점을 지나고 지표면과 평행인 평면 α 를 생각하자. $0 < x < A$ 일 때, 물통 안의 물이 차 있는 부분을 평면 α 로 자른 단면은 [그림 3b]와 같다. 이때 단면의 경계를 이루는 두 원은 중심이 같다.



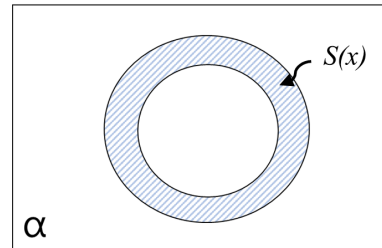
[그림 1]



[그림 2]



[그림 3a]



[그림 3b]

- (1) [그림 3b]의 단면의 넓이를 $S(x)$ m^2 라고 할 때, $S(x)$ 를 A 와 x 의 식으로 표현하시오. 이를 이용하여 물통 안의 물의 부피를 A 와 a_1 의 식으로 나타내시오.
- (2) 놀이 기구가 정지하고 있을 때 물통 안의 수면의 높이가 2m이고, 놀이 기구가 회전할 때 물통 안의 수면의 최저 높이가 $2 - \frac{\sqrt{3}}{12}$ m 일 때, A 의 값을 구하시오.
- (3) 놀이 기구가 회전할 때, 물통의 가장자리에서 물통의 수면과 지표면이 이루는 각의 크기는 [그림 2]의 점 Q에서 포물선의 접선과 r 축이 이루는 각의 크기 θ_1 으로 나타난다. 문항 (2)와 동일한 가정하에서 각의 크기 θ_1 을 구하시오.
- (4) 놀이 기구가 정지하고 있을 때 물통에 물을 가득 채우고 놀이 기구를 작동시키면, 놀이 기구가 회전하며 물통의 물이 움푹 파인 모양이 되며, 파인 만큼의 물이 물통에서 넘치게 된다. 이때 수면의 높이는 적절한 상수 a_3 에 대하여 $h = Ar^2 + a_3$ 을 따른다고 할 때, 넘치게 되는 물의 부피를 구하시오. 단, 상수 A 의 값은 문항 (2)에서 구한 값과 같다.

- (5) 홍익이가 들고 있는 물컵의 중심에서 수면이 지표면과 이루는 각의 크기 θ_2 가 60° 를 넘지 않도록 하기 위한 문어 다리의 길이(회전축으로부터 물컵의 중심까지의 거리)의 최댓값을 구하시오.

3. 출제 의도

실생활에서 경험하는 간단한 자연 현상들을 수학적으로 이해하고 해결할 수 있는지 평가한다. 이차방정식과 이차함수의 성질을 이해하고 미분과 적분을 활용하여 접선의 기울기와 입체도형의 부피를 구할 수 있는지 평가한다.

- (1) 정적분을 활용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있는지 평가한다.
- (2) 주어진 조건으로부터 이차함수의 식을 구할 수 있는지 평가한다.
- (3) 도함수를 활용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는지 평가한다.
- (4) 정적분을 활용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있는지 평가한다.
- (5) 도함수를 활용하여 접선의 기울기에 대한 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

(가) 교육과정 및 관련 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
문제2 제시문	[수학] - (1) 문자와 식 - ㉠ 이차방정식과 이차함수 [10수학01-11] 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다. [미적분] - (3) 적분법 - ㉢ 정적분의 활용 [12미적03-06] 입체도형의 부피를 구할 수 있다.
문항 (1)	[미적분] - (3) 적분법 - ㉢ 정적분의 활용 [12미적03-06] 입체도형의 부피를 구할 수 있다.
문항 (2)	[미적분] - (3) 적분법 - ㉢ 정적분의 활용 [12미적03-06] 입체도형의 부피를 구할 수 있다.
문항 (3)	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - ㉢ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.

문항 (4)	[미적분] - (3) 적분법 - ㉔ 정적분의 활용 [12미적03-06] 입체도형의 부피를 구할 수 있다
문항 (5)	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - ㉓ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	이준열 외 7인	천재교육	2019	168-175, 107-128
	미적분	고성은 외 5인	좋은책신사고	2019	155-159, 109-111
	미적분	김원경 외 14인	비상교육	2019	147-152, 96-105
	수학	황선옥 외 8인	미래엔	2018	70-79
	수학	고성은 외 6인	좋은책신사고	2018	60-69
	수학	김원경 외 14인	비상교육	2018	59-69
	수학Ⅱ	황선옥 외 8인	미래엔	2018	73-102
	수학Ⅱ	홍성복 외 10인	지학사	2018	74-98
	수학Ⅱ	김원경 외 14인	비상교육	2018	71-92

5. 문항 해설

- (1) 수면의 높이는 중심축으로부터 거리의 이차함수로 주어졌다. 이를 이용하여 단면의 넓이를 구하고 정적분을 활용하여 부피를 구한다.
- (2) 주어진 조건과 (1)의 결과로부터 이차함수의 식을 구한다.
- (3) (2)에서 구한 이차함수를 미분하여 접선의 기울기를 구한다.
- (4) 부피를 구하고자 하는 입체도형의 단면은 모두 원이다. 주어진 조건으로부터 단면의 넓이를 구하고 정적분을 활용하여 부피를 구한다.
- (5) 이차함수를 미분하여 접선의 기울기를 구한다. 기울기가 주어진 값을 넘지 않는 중심축으로부터 거리를 구한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	단면의 넓이 $S(x)$ 를 주어진 식을 이용하여 구함 (2점) 물의 부피를 적분을 이용하여 구함 (2점)	4점
(2)	물의 부피는 놀이기구가 정지했을 때와 회전할 때 같음을 이용함 (2점) 위의 관계를 이용하여 A 를 구함 (2점)	4점
(3)	식을 이용해 수면의 높이를 r 에 대해 미분한 도함수를 구함 (2점) 도함수 값을 이용하여 $\tan\theta_1$ 값과 각의 크기 θ_1 을 구함 (2점)	4점
(4)	물이 넘친 빈공간의 부피를 구함 (4점)	4점
(5)	앞의 결과가 물컵의 수면에도 적용이 가능함을 이해하고, 거리의 최댓값을 구함 (4점)	4점

7. 예시 답안

(1) [그림 3a]에서 밑면에서 평면 α 까지의 높이를 h 라 하면 $h = x + a_1$ 이다. [그림 3b]의 안쪽 원의 반지름을 r 이라 하면 $h = Ar^2 + a_1$ 이므로, $x = Ar^2$ 즉, $r = \sqrt{\frac{x}{A}}$ 이다. 바깥쪽 원의 반지름은 1이므로 $S(x) = \pi - \pi r^2 = \pi - \frac{\pi x}{A}$ 이다. 또한 $0 \leq r \leq 1$ 이므로 $0 \leq x \leq A$ 이다.

구하는 물의 부피는 점 P 아래쪽 부분의 부피와 점 P 위쪽 부분의 부피의 합이므로

$$\pi a_1 + \int_0^A S(x) dx = \pi a_1 + \pi A - \frac{\pi A^2}{2A} = \pi a_1 + \frac{\pi A}{2} \text{ 이다.}$$

(2) 놀이기구가 정지했을 때 물의 부피는 2π 인데 회전할 때도 물통 안의 물의 부피는 이와 동일하므로 (1)의 결과에서 $\pi a_1 + \frac{\pi A}{2} = 2\pi$ 이다.

$$a_1 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{12} \text{로부터 } A = 4 - 2a_1 = 4 - 2\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ 이다.}$$

(3) 수면의 높이는 $h = Ar^2 + a_1$ 이므로 $\frac{dh}{dr} = 2Ar$ 이고 점 Q에서 (즉, $r = 1$ 일 때) 접선의 기울기는 $2A = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다. $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로 $\theta_1 = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$ 이다.

(4) 물이 넘친 부분의 부피는 회전으로 인해 움푹 파이게 되는 부분의 부피와 같다. 이 부분의 부피를 (1)에서와 같이 구한다. 움푹 파인 부분의 바닥에서부터 높이가 x 인 지면과 평행한 평면으로 자른 단면은 [그림 3b]의 안쪽원과 같이 반지름 $\sqrt{\frac{x}{A}}$ 인 원이다. 단면적은 $\frac{\pi x}{A}$ 이고 $0 \leq x \leq A$ 이므로 구하는 부피는 $\int_0^A \frac{\pi x}{A} dx = \frac{\pi A}{2} = \frac{\pi \sqrt{3}}{12}$ 이다.

(5) 물컵 안의 수면의 높이는 $h = Ar^2 + a_2$ 이므로 (3)에서와 같이 놓이기구 중심축과 거리 r 인 점에서 기울기는 $2Ar = \frac{r}{\sqrt{3}}$ 이다. 물컵의 중심에서 수면이 지표면과 이루는 각이 60° 이하라면 $\frac{r}{\sqrt{3}} \leq \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ 이므로 구하는 최댓값은 $r = 3$ (m) 이다.

10

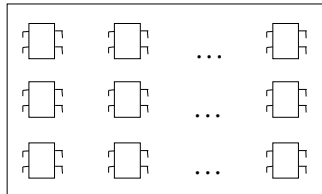
자연계열 논술고사 (오후)

1. 일반정보

유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 확률과 통계
	핵심 개념 및 용어	순열과 조합, 사건의 독립, 이항분포, 여사건, 확률의 덧셈정리
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

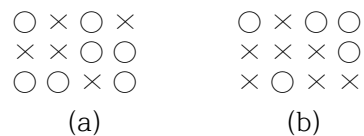
2. 문항 및 제시문

문제 3 (20점)



위의 그림과 같이 3개의 소자로 이루어진 세로줄이 n 개 있어서, 모두 $3n$ 개의 소자로 이루어진 장치를 생각하자. (단, $n \geq 3$)

전원을 켜면 장치는 초기 상태에 들어가고, 이때 각각의 소자에는 독립적으로 $1/2$ 의 확률로 오류가 생긴다. 오류가 없는 소자의 상태를 \circ , 오류가 있는 상태를 \times 로 표시하자. 예를 들어, $n=4$ 인 경우, 다음과 같은 초기 상태들이 있을 수 있다.



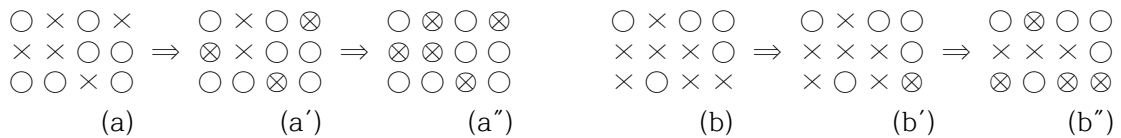
이후 아래와 같이 보호장치가 작동하여 일부 소자의 오류를 수정하는데, 이 장치의 정상작동 여부는 다음의 순서로 결정된다.

(가) [세로줄 수정] 각 세로줄에서 생긴 오류가 1개 이하이면 보호장치가 해당 세로줄의 오류를 수정하고, 오류가 2개 이상이면 오류는 모두 그대로 남는다.

(나) [가로줄 수정] 세로줄 수정 후 남은 오류들 중, 각 가로줄에서 오류가 2개 이하이면 보호장치가 해당 가로줄의 오류를 모두 수정하고, 3개 이상이면 오류는 모두 그대로 남는다.

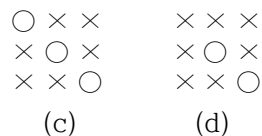
(다) 위의 (가), (나)에서 수정되지 않고 남아있는 오류가 있으면 장치는 오작동한다.

예를 들어, 수정된 오류를 \otimes 로 나타낼 때, 초기 상태가 (a)라면, [세로줄 수정]에 의해 (a')의 상태가 되고, [가로줄 수정]에 의해 (a'')의 상태가 되어 장치는 정상작동한다. 초기 상태 (b)는 [세로줄 수정]에 의해 (b')의 상태가 되고, [가로줄 수정]에 의해 (b'')의 상태가 되어 장치가 오작동한다.



장치의 정상작동 여부는 초기 상태에 의해 결정되고, 초기 상태는 2^{3n} 개가 있다. 이 장치의 전원을 켜고, [세로줄 수정] 직후, n 개의 세로줄들 중에서 오류가 남아있는 세로줄이 3개 이상이 되는 초기 상태들의 집합을 사건 A 라 하자. [세로줄 수정]과 [가로줄 수정]을 거쳐 장치의 오작동을 일으키는 초기 상태들의 집합을 사건 B 라 하자.

- (1) 장치의 전원을 켜고, [세로줄 수정] 직후, 첫 번째 세로줄에 오류가 남아있을 확률을 구하시오.
- (2) $n \geq 3$ 인 경우, 확률 $P(A)$ 를 n 에 대한 식으로 나타내시오.
- (3) $n = 3$ 인 경우, 아래에 주어진 초기 상태 (c)는 A 에 포함되고 B 에는 포함되지 않는다. 반면, (d)는 A 와 B 에 모두 포함된다. 사건 $C = A - B$ 라 할 때, 확률 $P(C)$ 를 구하시오.



- (4) $n = 3$ 인 경우, 확률 $P(B)$ 를 구하시오.
- (5) $n = 4$ 인 경우, 확률 $P(B)$ 를 구하시오.

3. 출제 의도

제시문에서 주어진 확률적 상황을 파악하여 경우의 수를 구하고 확률을 계산할 수 있는지 평가한다.

- (1) 사건의 독립을 이해하는지 평가한다.
- (2) 이항정리 또는 이항분포를 이해하고 이용할 수 있는지 평가한다.
- (3) 사건, 여사건 등의 확률적 개념을 잘 이해하고 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 계산할 수 있는지 평가한다.
- (4), (5) 순열과 조합을 이용한 경우의 수를 계산할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
문제3 제시문	[확률과 통계] - (1) 경우의 수 - ① 순열과 조합 [12확통01-01] 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.
문항 (1)	[확률과 통계] - (2) 확률 - ② 조건부확률 [12확통02-07] 확률의 곱셈 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항 (2)	[확률과 통계] - (1) 경우의 수 - ② 이항정리 [12확통01-03] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다. [확률과 통계] - (2) 확률 - ② 조건부확률 [12확통02-07] 확률의 곱셈 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항 (3)	[수학] - (5) 확률과 통계 - ② 순열과 조합 [10수학05-02] 순열의 의미를 이해하고, 순열의 수를 구할 수 있다. [확률과 통계] - (2) 확률 - ① 확률의 뜻과 활용 [12확통02-02] 확률의 기본 성질을 이해한다.
문항 (4)	[확률과 통계] - (2) 확률 - ① 확률의 뜻과 활용 [12확통02-04] 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.

문항 (5)	<p>[수학] - (5) 확률과 통계 - ② 순열과 조합 [10수학05-02] 순열의 의미를 이해하고, 순열의 수를 구할 수 있다.</p> <p>[확률과 통계] - (2) 확률 - ① 확률의 뜻과 활용 [12확통02-04] 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.</p> <p>[확률과 통계] - (2) 확률 - ② 조건부확률 [12확통02-07] 확률의 곱셈 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</p>
--------	--

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	김원경 외 14인	비상교육	2018	243-260
	수학	고성은 외 6인	좋은책신사고	2018	249-265
	수학	류희찬 외 10인	천재교과서	2018	258-274
	확률과 통계	권오남 외 14인	교학사	2019	12-76, 96-101
	확률과 통계	김원경 외 14인	비상교육	2019	11-68, 83-87
	확률과 통계	배종숙 외 6인	금성출판사	2019	13-84, 107-113

5. 문항 해설

- (1) 3개의 소자 중 각각의 소자에 오류가 생길 사건은 서로 독립이며 확률은 $\frac{1}{2}$ 이므로 이항분포 $B(3, \frac{1}{2})$ 를 이용하여 구할 수 있다. 3개의 소자 중 2개 이상에 오류가 생길 확률이므로 ${}_3C_2 \frac{1}{2^3} + {}_3C_3 \frac{1}{2^3} = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ 이다.
- (2) n 개의 세로줄 중 각각의 세로줄에 [세로줄 수정]직후 오류가 남아있을 사건은 서로 독립이며 확률은 동일하므로 이항분포 $B(n, p)$ 를 이용하여 구할 수 있다. $p = \frac{1}{2}$ 는 (1)에서 구한 확률이다.
- (3) $3 \times 3 = 9$ 개의 소자의 오류 여부를 O, X로 그림 (c), (d)와 같이 나타낸다면 $2^9 = 516$ 개의 모든 경우가 있다. 이 중 사건 C에 해당하는 경우는 (c)와 같이 각각의 세로줄, 가로줄에 O가 하나씩만 있는 경우임을 알 수 있다. 이러한 경우는 순열을 이용하면 $3! = 6$ 가지이다.
- (4) $C = A - B$ 이므로 $B \cap C = \emptyset$, 즉 B와 C는 서로 배반사건이다. 또한 $B \subset A$ 이므로 $A = B \cup C$ 이다. 따라서 $P(A) = P(B) + P(C)$ 이다.
- (5) (3)에서와 같이 $n = 4$ 일 때 사건 C에 해당하는 경우의 수를 구하여 $P(C)$ 를 구한다. (2), (4)의 결과를 이용하여 $P(B)$ 를 구한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점기준	배점
(1)	사건의 확률을 구함 (2점)	2점
(2)	각 세로줄에 오류가 남아 있을 사건이 서로 독립임을 설명함 (1점) 이항정리 또는 이항분포를 이용하여 사건의 확률을 구함 (3점)	4점
(3)	사건 C 에 포함되는 초기 상태를 정확히 설명함 (4점) 경우의 수를 계산하여 사건의 확률을 구함 (2점)	6점
(4)	두 확률의 차이를 이용하여 원하는 사건의 확률을 구함 (2점)	2점
(5)	$n = 4$ 인 경우, 사건 C 에 포함되는 초기 상태를 정확히 설명함 (3점) $n = 4$ 인 경우, 경우의 수를 계산하여 사건 C 의 확률을 구함 (2점) $n = 4$ 인 경우, 올바른 $P(A)$ 의 값을 이용하여 $P(B) = P(A) - P(C)$ 인 사실을 이용하여 계산함 (1점)	6점

7. 예시 답안

(1) 3개의 소자 중 각각의 소자에 오류가 생길 사건은 서로 독립이며 확률은 $\frac{1}{2}$ 이므로 오류가 생긴 소자의 개수는 이항분포 $B(3, \frac{1}{2})$ 를 따른다. [세로줄 수정]직후 첫 번째 세로줄에 오류가 남아있는 경우는 처음에 그 세로줄의 3개의 소자중 오류가 생긴 소자가 2개 또는 3개인 경우이므로 확률은 ${}_3C_2 \times \frac{1}{2^3} + {}_3C_3 \times \frac{1}{2^3} = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ 이다.

(2) 각 세로줄에 대해 [세로줄 수정] 직후 오류가 남아있을 사건은 서로 독립이고, (1)의 결과에 의해 각각의 확률은 $1/2$ 이다. 따라서, [세로줄 수정] 직후 n 개의 세로줄 중 k 개의 세로줄에 오류가 남아있을 확률은 이항분포에 의해 ${}_nC_k \times \frac{1}{2^n}$ 이다. 구하는 확률은 n 개 중 2개 이하의 세로줄에 오류가 남아있는 사건의 여사건의 확률이므로

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2^n}({}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2) = 1 - \frac{1}{2^n} \left(1 + n + \frac{n(n-1)}{2} \right) = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}(n^2 + n + 2) \quad \text{이다.}$$

(3) $n = 3$ 일 때, $3 \times 3 = 9$ 개의 소자의 오류 여부를 O, X로 그림 (c), (d)와 같이 나타낸다면 $2^9 = 516$ 가지 경우가 있다. 이들 중 각각의 세로줄에 두 개 이상의 오류가 있는 초기상태들의 집합이 A 이다. A 에 속하는 경우 중 만약 (d)와 같이 한 세로줄에 세 개의 오류가 있으면 세 개의 오류를 포함한 가로줄이 있게 되어서 장치는 오작동한다. 그러므로, 초기상태 $I \in C$ 이면, I 는 각 세로줄에 오직 두 개씩의 오류를 가진다.

그런데, 두 개씩의 오류를 가진 세로줄은 $\begin{matrix} \bigcirc & \times & \times \\ \times & \bigcirc & \times \\ \times, & \times, & \bigcirc \end{matrix}$ 중 하나이다. 만약, $\begin{matrix} \bigcirc & \times & \bigcirc \\ \times & \times & \times \\ \times & \bigcirc & \times \end{matrix}$ 와 같이, 같은

모양의 세로줄이 있으면, 역시 세 개의 오류를 포함한 가로줄이 있게 되어서 장치는 오작동한다.

그러므로, $C=A-B$ 에 포함되는 초기상태는 (c)와 같이 $\begin{matrix} \bigcirc & \times & \times \\ \times & \bigcirc & \times \\ \times, & \times, & \bigcirc \end{matrix}$ 를 (중복없이) 나열한

것들이다. 따라서 $3! = 6$ 가지가 있다. 그러므로 $P(C) = 6/2^9 = 3/256$ 이다.

(4) $C=A-B$ 이므로 $B \cap C = \emptyset$, 즉 B 와 C 는 서로 배반사건이다. 또한 $B \subset A$ 이므로 $A = B \cup C$ 이다. 따라서 $P(A) = P(B) + P(C)$ 이다. $n=3$ 인 경우, (2)의 결과에 의해 $P(A) = \frac{1}{8}$ 이므로 $P(B) = P(A) - P(C) = \frac{1}{8} - \frac{3}{256} = \frac{29}{256}$ 이다.

(5) (3)에서와 같이 $n=4$ 일 때 A, B, C 에 속하는 경우를 구한다. 먼저 $4 \times 3 = 12$ 개의 소자의 오류 여부를 O, X 로 아래 그림 (e), (f)와 같이 나타낸다면 2^{12} 가지 경우가 있다. 이 중 A 에

속하는 경우는 $\begin{matrix} \times & \bigcirc & \times & \times \\ \times & \times & \bigcirc & \times \\ \times, & \times, & \times, & \bigcirc \end{matrix}$ 와 같은 세로줄이 (중복을 허용하여) 세 개 이상 있는 경우이다.

이때, 네 세로줄 중에 하나가 $\begin{matrix} \times \\ \times \\ \times \end{matrix}$ 이거나, $\begin{matrix} \bigcirc & \times & \times \\ \times & \bigcirc & \times \\ \times, & \times, & \bigcirc \end{matrix}$ 중 같은 세로줄이 2개 이상 있으면

(3)에서와 같이 [세로줄 수정]직후 세 개 이상의 오류를 포함한 (즉, X 가 세 개 이상인) 가로줄이 있어서 오작동한다. (즉, B 에 속하는 경우이다.)

따라서, C 에 속하는 경우는 네 개의 세로줄 중 $\begin{matrix} \bigcirc & \times & \times \\ \times & \bigcirc & \times \\ \times, & \times, & \bigcirc \end{matrix}$ 이 하나씩 있고 나머지 한 세로줄은

오류가 한 개 이하인 즉, 아래그림의 (g) 중 하나인 경우이다. 이러한 경우의 수는 4개의 세로줄

중 3개를 선택하여 $\begin{matrix} \bigcirc & \times & \times \\ \times & \bigcirc & \times \\ \times, & \times, & \bigcirc \end{matrix}$ 을 나열하고 나머지 한줄에 (g)의 세로줄 4가지 중 하나를 선택하는

경우의 수이므로 ${}_4C_3 \times 3! \times 4$ 이다. 따라서 $P(C) = \frac{{}_4C_3 \times 3! \times 4}{2^{12}} = \frac{3}{128}$ 이다.

(2)에 의해 $n=4$ 일 때 $P(A) = \frac{5}{16}$ 이고, (4)에서와 같이 $P(A) = P(B) + P(C)$ 이므로,

$$P(B) = P(A) - P(C) = \frac{5}{16} - \frac{3}{128} = \frac{37}{128} \text{ 이다.}$$

