

● 수학 영역 ●

수학 정답

1	5	2	2	3	4	4	4	5	1
6	3	7	2	8	3	9	1	10	5
11	5	12	3	13	1	14	2	15	4
16	5	17	24	18	105	19	32	20	70
21	12	22	4						

해설

1. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 지수를 계산한다.

$$(3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{3}{2}} = (3^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{9} + \frac{3}{2}} = 3^{\frac{27}{18} + \frac{27}{12}} = 3^{\frac{27}{6}} = 3^{\frac{9}{2}} = 9$$

2. [출제의도] 도함수를 이용하여 미분계수를 계산한다.

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 3 \text{ 이므로}$$

$$f'(-1) = 3 - 4 + 3 = 2$$

3. [출제의도] 등차수열을 이해하여 첫째항을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $a_4 = 6$ 에서

$$a_1 + 3d = 6 \dots \textcircled{A}$$

$2a_7 = a_{19}$ 에서

$$2(a_1 + 6d) = a_1 + 18d, a_1 - 6d = 0 \dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면 $a_1 = 4$

4. [출제의도] 함수의 극한을 이해하여 함수의 그래프에서 좌극한과 우극한을 구한다.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0 + 1 = 1$$

5. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이해하여 삼각함수의 값을 구한다.

$$\cos\theta \tan\theta = \cos\theta \times \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sin\theta = \frac{1}{2}$$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이므로 $\theta = \frac{5}{6}\pi$

따라서 $\cos\theta + \tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{5\sqrt{3}}{6}$

6. [출제의도] 평균변화율을 이해하여 함수의 미분계수를 구한다.

$$\frac{f(a+1) - f(a)}{(a+1) - a} = 4a - 1 = 7 \text{에서 } a = 2 \text{이다.}$$

한편 $f'(x) = 4x - 3$ 이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{h} = 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{2h}$$

$$= 2f'(a)$$

$$= 2f'(2) = 10$$

7. [출제의도] 정적분을 이해하여 곡선과 직선 및 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

$f(x) = x^2 - 4x + 6$ 이라 하면

$$f'(x) = 2x - 4$$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $A(3, 3)$ 에서의 접선의 기울기가 $f'(3) = 2$ 이므로 접선 l 의 방정식은

$$y - 3 = 2(x - 3), y = 2x - 3$$

따라서 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 l 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^3 \{x^2 - 4x + 6 - (2x - 3)\} dx$$

$$= \int_0^3 (x^2 - 6x + 9) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x \right]_0^3 = 9$$

8. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 상수의 값을 구한다.

$0 \leq x \leq \frac{2\pi}{a}$ 에서 $0 \leq ax \leq 2\pi$ 이므로

$2\cos ax = 1$, 즉 $\cos ax = \frac{1}{2}$ 에서

$ax = \frac{\pi}{3}$ 또는 $ax = \frac{5\pi}{3}$, 즉 $x = \frac{\pi}{3a}$ 또는 $x = \frac{5\pi}{3a}$

두 점 A, B의 좌표가 각각 $(\frac{\pi}{3a}, 1)$, $(\frac{5\pi}{3a}, 1)$ 이고

$\overline{AB} = \frac{8}{3}$ 이므로

$$\frac{5\pi}{3a} - \frac{\pi}{3a} = \frac{4\pi}{3a} = \frac{8}{3}$$

$$a = \frac{4\pi}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{\pi}{2}$$

9. [출제의도] 속도와 위치의 변화량을 이해하여 점이 움직인 거리를 구한다.

시간 $t=0$ 에서의 점 P의 위치와 시간 $t=6$ 에서의 점 P의 위치가 서로 같으므로 시간 $t=0$ 에서 $t=6$ 까지 점 P의 위치의 변화량이 0이다. 점 P의 시간 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도 $v(t)$ 가 $v(t) = 3t^2 + at$ 이므로

$$\int_0^6 v(t) dt = \int_0^6 (3t^2 + at) dt$$

$$= \left[t^3 + \frac{a}{2}t^2 \right]_0^6$$

$$= 36\left(6 + \frac{a}{2}\right) = 0$$

$a = -12$

$v(t) = 3t^2 - 12t$ 이므로 점 P가 시간 $t=0$ 에서 $t=6$ 까지 움직인 거리는

$$\int_0^6 |v(t)| dt = \int_0^6 |3t^2 - 12t| dt$$

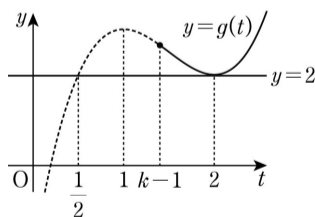
$$= \int_0^4 (-3t^2 + 12t) dt + \int_4^6 (3t^2 - 12t) dt$$

$$= \left[-t^3 + 6t^2 \right]_0^4 + \left[t^3 - 6t^2 \right]_4^6$$

$$= 32 + 32 = 64$$

10. [출제의도] 함수의 증가와 감소를 이해하여 실수의 최솟값을 구하는 문제를 해결한다.

$f(x) = x^2 + 2x + k = (x+1)^2 + k - 1$
 이므로 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq k - 1$ 이다.
 함수 $g(f(x))$ 에서 $f(x) = t$ 라 하면 $t \geq k - 1$ 이므로 함수 $g(t)$ 는 구간 $[k - 1, \infty)$ 에서 정의된 함수이다.
 한편 $g(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$ 에서
 $g'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x - 1)(x - 2)$
 이므로 $g'(x) = 0$ 에서 $x = 1$ 또는 $x = 2$ 이다.
 함수 $g(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극대, $x = 2$ 에서 극소이다.
 $g(t) = 2$ 에서
 $2t^3 - 9t^2 + 12t - 2 = 2, (2t - 1)(t - 2)^2 = 0$
 즉, 함수 $y = g(t)$ 의 그래프와 직선 $y = 2$ 는 그림과 같다.



따라서 $\frac{1}{2} \leq k - 1 \leq 2$, 즉 $\frac{3}{2} \leq k \leq 3$ 이므로 조건을 만족시키는 실수 k 의 최솟값은 $\frac{3}{2}$ 이다.

11. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 이해하여 사각형의 넓이를 구한다.

점 A의 좌표는 $(k, 2^{k-1} + 1)$ 이고 $\overline{AB} = 8$ 이므로 점 B의 좌표는 $(k, 2^{k-1} - 7)$ 이다.
 직선 BC의 기울기가 -1 이고 $\overline{BC} = 2\sqrt{2}$ 이므로 두 점 B, C의 x 좌표의 차와 y 좌표의 차는 모두 2이다.
 따라서 점 C의 좌표는 $(k - 2, 2^{k-1} - 5)$ 이다.

한편 점 C는 곡선 $y = 2^{x-1} + 1$ 위의 점이므로

$$2^{k-3} + 1 = 2^{k-1} - 5$$

$$\frac{1}{2} \times 2^k - \frac{1}{8} \times 2^k = 6, 2^k = 16$$

$$k = 4$$

즉, A(4, 9), B(4, 1), C(2, 3)이다.

점 B가 곡선 $y = \log_2(x - a)$ 위의 점이므로

$$1 = \log_2(4 - a), 4 - a = 2, a = 2$$

점 D의 x 좌표는 $x - 2 = 1$ 에서 3

사각형 ACDB의 넓이는 두 삼각형 ACB, CDB의 넓이의 합이고 $\overline{BC} \perp \overline{BD}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 10$$

12. [출제의도] 함수의 연속을 이해하여 상수의 값을 구한다.

함수 $f(x)$ 는 $f(1) = 0, f(a) = 0$ 이고, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1,$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -4 + 2a$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ 이므로 $x = 2$ 에서 불연속이다. 함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $h(x)$ 는 $x = 1, x = a, x = 2$ 에서 연속이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{f(x)} = h(1), \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = h(a) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ 즉, } g(1) = 0, g(a) = 0$$

또, $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{g(x)}{f(x)}, \frac{g(2)}{-1} = \frac{g(2)}{-4 + 2a}$ 이므로

$g(2) = 0$ 이고 $g(x) = (x - 1)(x - 2)(x - a)$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x - 2)(x - a)}{(x - 1)(x - 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 2)(x - a)}{x - 3}$$

$$= \frac{1 - a}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - 1)(x - 2)(x - a)}{-x(x - a)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - 1)(x - 2)}{-x}$$

$$= -\frac{(a - 1)(a - 2)}{a}$$

$h(1) = h(a)$ 이므로

$$\frac{1 - a}{2} = -\frac{(a - 1)(a - 2)}{a}$$

$a > 2$ 이므로 $a = 4$

따라서

$$h(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \begin{cases} \frac{(x - 2)(x - 4)}{x - 3} & (x \leq 2) \\ -\frac{(x - 1)(x - 2)}{x} & (x > 2) \end{cases}$$

이므로

$$h(1) + h(3) = -\frac{3}{2} + \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{13}{6}$$

13. [출제의도] 등차수열의 합을 이용하여 수열의 첫째항을 구하는 문제를 해결한다.

수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자. $d \geq 0$ 이면 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 양수이므로 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n > 0$ 이 되어 조건을 만족시키지 않는다. 따라서 $d < 0$ 이어야 한다.

(i) $S_3 = S_6$ 인 경우

$$\frac{3(2a_1 + 2d)}{2} = \frac{6(2a_1 + 5d)}{2} \text{에서}$$

$$a_1 = -4d \text{이므로}$$

$$S_3 = S_6 = -9d > 0,$$

$$S_{11} = \frac{11(2a_1 + 10d)}{2} = 11d < 0$$

즉, $S_3 = -S_{11} - 3$ 에서

$$-9d = -11d - 3, d = -\frac{3}{2}$$

$a_1 = -4d = 6$

(ii) $S_3 = -S_6$ 인 경우

$$\frac{3(2a_1 + 2d)}{2} = -\frac{6(2a_1 + 5d)}{2}$$

에서

$$a_1 = -2d$$

이므로

$$S_3 = -S_6 = -3d > 0$$

$$S_{11} = \frac{11(2a_1 + 10d)}{2} = 33d < 0$$

즉, $S_3 = -S_{11} - 3$ 에서

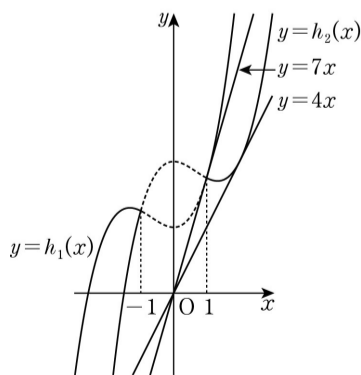
$$-3d = -33d - 3, \quad d = -\frac{1}{10}$$

$$a_1 = -2d = \frac{1}{5}$$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항의 합은 $6 + \frac{1}{5} = \frac{31}{5}$ 이다.

14. [출제의도] 함수의 그래프를 활용하여 방정식의 실근의 개수를 추론한다.

- ㄱ. $k=0$ 일 때, $f(x) + g(x) = x^3 + 2x^2 + 4$
- $$h_1(x) = x^3 + 2x^2 + 4$$
- $$h_1'(x) = 3x^2 + 4x = x(3x + 4) = 0$$
- 에서 함수 $h_1(x)$ 는 $x = -\frac{4}{3}$ 에서 극대, $x=0$ 에서 극소이다.
- $h_1(0) = 4 > 0$ 이므로 방정식 $h_1(x) = 0$ 은 오직 하나의 실근을 갖는다. (참)
- ㄴ. $f(x) - g(x) = 0$ 에서
- $$x^3 - kx + 6 - (2x^2 - 2) = 0, \quad x^3 - 2x^2 + 8 = kx$$
- $$h_2(x) = x^3 - 2x^2 + 8$$
- 이라 하면 곡선 $y = h_2(x)$ 에 직선 $y = kx$ 가 접할 때만 방정식 $h_2(x) = kx$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2이다. 접점의 좌표를 $(a, a^3 - 2a^2 + 8)$ 이라 하면 $h_2'(x) = 3x^2 - 4x$ 에서 접선의 방정식은
- $$y - (a^3 - 2a^2 + 8) = (3a^2 - 4a)(x - a)$$
- 이 접선이 원점을 지나므로
- $$0 - (a^3 - 2a^2 + 8) = (3a^2 - 4a)(0 - a),$$
- $$(a - 2)(a^2 + a + 2) = 0, \quad a = 2$$
- 따라서 구하는 k 의 값은 $h_2'(2) = 4$ 뿐이다. (참)
- ㄷ. $|x^3 - kx + 6| = 2x^2 - 2$ 에서 $2x^2 - 2 \geq 0$ 이므로 x 의 값의 범위는 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 1$ 이고, 주어진 방정식은
- $$x^3 - kx + 6 = -(2x^2 - 2) \quad \text{또는} \quad x^3 - kx + 6 = 2x^2 - 2,$$
- 즉 $x^3 + 2x^2 + 4 = kx$ 또는 $x^3 - 2x^2 + 8 = kx$
- $$h_1(x) = x^3 + 2x^2 + 4, \quad h_2(x) = x^3 - 2x^2 + 8$$
- 이라 하면 주어진 방정식의 실근의 개수는 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 1$ 일 때 직선 $y = kx$ 와 두 곡선 $y = h_1(x)$, $y = h_2(x)$ 의 교점의 개수와 같다.
- ㄴ에서 $k=4$ 일 때 직선 $y = kx$ 와 곡선 $y = h_2(x)$ 가 접하므로 $k \leq 4$ 일 때 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 1$ 에서 직선 $y = kx$ 와 두 곡선 $y = h_1(x)$, $y = h_2(x)$ 의 교점의 개수의 최댓값은 3이다.



$k > 4$ 일 때, $x \leq -1$ 에서 직선 $y = kx$ 와 두 곡선 $y = h_1(x)$, $y = h_2(x)$ 의 서로 다른 교점의 개수는 2이다. 원점에서 곡선 $y = h_1(x)$ 에 그은 접선의 방정식은 $y = 7x$ 이고 접점의 좌표는 $(1, 7)$ 이므로

$k > 4$ 일 때, $x \geq 1$ 에서 직선 $y = kx$ 와 두 곡선 $y = h_1(x)$, $y = h_2(x)$ 의 서로 다른 교점의 개수는 2이다. 즉, $k > 4$ 일 때, $x \leq -1$ 또는 $x \geq 1$ 에서 직선 $y = kx$ 와 두 곡선 $y = h_1(x)$, $y = h_2(x)$ 의 서로 다른 교점의 개수는 4이다.

따라서 방정식 $|f(x)| = g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수의 최댓값은 4이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

15. [출제의도] 코사인법칙과 사인법칙을 이용하여 각의 사인값을 추론한다.

삼각형 ABD와 삼각형 BCD에서 코사인법칙을 이용하여 선분 CD의 길이를 구하자.

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \cos \frac{\pi}{3} = 7$$

이므로 $\overline{BD} = \sqrt{7}$ 이다.

$\angle BAD + \angle BCD = \pi$ 이므로 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$2^2 + \overline{CD}^2 - 2 \times 2 \times \overline{CD} \times \cos \frac{2\pi}{3} = 7$$

이므로 $\overline{CD} = \frac{7}{3}$ 이다.

삼각형 EAB와 삼각형 ECD에서 $\angle AEB$ 는 공통이고 $\angle EAB = \angle ECD$ 이므로 삼각형 EAB와 삼각형 ECD는 닮음이다. 따라서 $\frac{\overline{EA}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ 이다. 즉,

$$\frac{3 + \overline{ED}}{\overline{EC}} = \frac{2 + \overline{EC}}{\overline{ED}} = \frac{2}{1}$$

에서 $\overline{ED} = \frac{7}{3}$ 이다.

$\angle DCE = \pi - \angle BCD = \angle BAD = \frac{\pi}{3}$

이므로 삼각형 ECD에서 사인법칙을 이용하면

$$\frac{\frac{7}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\sin \theta}$$

에서 $\sin \theta = \frac{3\sqrt{3}}{14}$ 이다.

$p = 1, q = \frac{7}{3}, r = \frac{3\sqrt{3}}{14}$ 이므로

$$(p+q) \times r = \left(1 + \frac{7}{3}\right) \times \frac{3\sqrt{3}}{14} = \frac{5\sqrt{3}}{7}$$

16. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 로그를 계산한다.

$$\frac{\log_5 72}{\log_5 2} - 4 \log_2 \frac{\sqrt{6}}{2} = \log_2 72 - \log_2 \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^4$$

$$= \log_2 \left(72 \times \frac{4}{9}\right)$$

$$= \log_2 2^5 = 5$$

17. [출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 정적분의 값을 계산한다.

$$\int_{-3}^2 (2x^3 + 6|x|) dx - \int_{-3}^{-2} (2x^3 - 6x) dx$$

$$= \int_{-3}^{-2} (2x^3 + 6|x|) dx + \int_{-2}^2 (2x^3 + 6|x|) dx - \int_{-3}^{-2} (2x^3 - 6x) dx$$

$$= \int_{-2}^2 (2x^3 + 6|x|) dx$$

$$= 2 \int_0^2 6x dx = 2 \left[3x^2 \right]_0^2 = 24$$

18. [출제의도] 등차수열과 등비수열의 합을 이해하여 부등식을 만족시키는 자연수의 값을 구한다.

$$\sum_{k=1}^5 2^{k-1} = \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = 31$$

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$$

$$\sum_{k=1}^5 (2 \times 3^{k-1}) = \frac{2 \times (3^5 - 1)}{3 - 1} = 242$$

이므로 주어진 부등식에서 $31 < n^2 < 242$ 이다.

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 n 의 값은 6, 7, 8, ..., 15이고 그 합은 $\frac{10 \times (6+15)}{2} = 105$ 이다.

19. [출제의도] 함수의 그래프를 이용하여 실수의 최솟값을 구하는 문제를 해결한다.

$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + k$ 라 하면

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$$

$$= 12x(x+1)(x-2)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 2$

함수 $f(x)$ 는 $x = -1$, $x = 2$ 에서 극소, $x = 0$ 에서 극대이다.

이때 $f(-1) = -5 + k$, $f(2) = -32 + k$ 이므로

$$f(-1) > f(2)$$

모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 항상 성립하려면 $f(2) = -32 + k \geq 0$ 즉, $k \geq 32$ 이어야 한다.

따라서 실수 k 의 최솟값은 32이다.

20. [출제의도] 귀납적으로 정의된 수열을 해석하여 수열의 첫째항을 추론한다.

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n & (a_n < 0) \\ a_n - 2 & (a_n \geq 0) \end{cases} \dots \textcircled{1}$$

이고 $1 < a_1 < 2$ 에서 $a_1 \geq 0$ 이므로

$$a_2 = a_1 - 2 < 0$$

$$a_3 = -2a_2 = -2(a_1 - 2) > 0$$

$$a_4 = a_3 - 2 = -2(a_1 - 2) - 2 = -2(a_1 - 1) < 0$$

$$a_5 = -2a_4 = 4(a_1 - 1) > 0$$

$$a_6 = a_5 - 2 = 4(a_1 - 1) - 2 = 4a_1 - 6$$

이때 $\textcircled{1}$ 에서 $a_6 < 0$ 이면 $a_7 = -2a_6 > 0$ 이므로

$$a_7 = -1 \leq 0$$
에서 $a_6 \geq 0$ 이다.
$$a_7 = a_6 - 2 = (4a_1 - 6) - 2 = 4a_1 - 8 = -1$$

$$a_1 = \frac{7}{4}$$

따라서

$$40 \times a_1 = 40 \times \frac{7}{4} = 70$$

21. [출제의도] 지수함수와 로그함수를 이용하여 점의 좌표를 구하는 문제를 해결한다.

점 $A(a, b)$ 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 B 라 하면 $B(b, a)$ 이다.

조건 (가)에서 점 $A(a, b)$ 가 곡선 $y = \log_2(x+2) + k$ 위의 점이므로

$$b = \log_2(a+2) + k \dots \textcircled{1}$$

조건 (나)에서 점 $B(b, a)$ 가 곡선 $y = 4^{x+k} + 2$ 위의 점이므로

$$a = 4^{b+k} + 2 \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 에서

$$b - k = \log_2(a+2), \quad 2^{b-k} = a+2$$

$$a = 2^{b-k} - 2 \dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 을 연립하여 정리하면

$$4^{b+k} + 2 = 2^{b-k} - 2$$

$$4^k \times 4^b - 2^{-k} \times 2^b + 4 = 0 \dots \textcircled{4}$$

조건을 만족시키는 점 A 가 오직 하나이므로 방정식 $\textcircled{4}$ 을 만족시키는 실수 b 는 오직 하나이고

$$2^b = t \quad (t > 0)$$

으로 놓으면 t 에 대한 이차방정식

$$4^k t^2 - 2^{-k} t + 4 = 0 \dots \textcircled{5}$$

은 오직 하나의 양의 실근을 갖는다. t 에 대한 이차방정식 $\textcircled{5}$ 의 두 근의 곱은 $\frac{4}{4^k} = 4^{1-k} > 0$ 이므로 t 에 대한 이차방정식 $\textcircled{5}$ 이 오직 하나의 양의 실근을 가지려면 $\textcircled{5}$ 의 판별식을 D 라 할 때 $D=0$ 이어야 한다.

$$D = (-2^{-k})^2 - 4 \times 4^k \times 4$$

$$= 4^{-k} - 16 \times 4^k = 0$$

위의 방정식의 양변에 4^k 을 곱하여 정리하면

$$2^{4k+4} = 1, k = -1$$

㉔에 대입하여 정리하면

$$\frac{1}{4}t^2 - 2t + 4 = 0, \frac{1}{4}(t-4)^2 = 0$$

$$t = 4$$

즉, $2^b = 4$ 에서 $b = 2$ 이다.

$k = -1, b = 2$ 를 ㉔에 대입하여 정리하면

$$a = 4^{2+(-1)} + 2 = 6$$

따라서 $a \times b = 6 \times 2 = 12$

22. [출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 이용하여 함수를 구하는 문제를 해결한다.

삼차함수 $g(x)$ 의 상수항이 0이므로 $g(x)$ 는 x 를 인수로 갖는다. ㉑

조건 (가)의 $x|g(x)| = \int_{2a}^x (a-t)f(t) dt$ 에 $x = 2a$ 를 대입하면 $2a|g(2a)| = 0$

a 가 양수이므로 $g(2a) = 0$ 이고 $g(x)$ 는 $(x-2a)$ 를 인수로 갖는다. ㉒

㉑, ㉒에서 $g(x) = x(x-2a)(x-b)$ (단, b 는 실수) 함수 $(a-x)f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $\int_{2a}^x (a-t)f(t) dt$ 는 실수 전체의 집합에서 미분 가능하고, $\frac{d}{dx} \int_{2a}^x (a-t)f(t) dt = (a-x)f(x)$ 이다.

즉, 함수 $x|g(x)|$ 는 $x = 2a$ 에서 미분가능하다.

$$\lim_{x \rightarrow 2a^+} \frac{x|g(x)| - 2a|g(2a)|}{x - 2a} = \lim_{x \rightarrow 2a^+} \frac{x|x(x-2a)(x-b)|}{x - 2a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2a^+} x^2|x-b|$$

$$= 4a^2|2a-b|$$

$$\lim_{x \rightarrow 2a^-} \frac{x|g(x)| - 2a|g(2a)|}{x - 2a} = \lim_{x \rightarrow 2a^-} \frac{x|x(x-2a)(x-b)|}{x - 2a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2a^-} (-x^2|x-b|)$$

$$= -4a^2|2a-b|$$

이므로 $4a^2|2a-b| = -4a^2|2a-b|$ 에서 $b = 2a$ 이다.

$$\int_{2a}^x (a-t)f(t) dt = \begin{cases} -x^2(x-2a)^2 & (x < 0) \\ x^2(x-2a)^2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

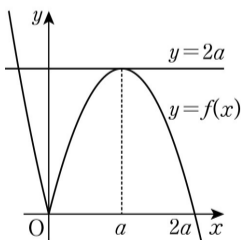
이므로 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$(a-x)f(x) = \begin{cases} -4x(x-a)(x-2a) & (x < 0) \\ 4x(x-a)(x-2a) & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 4x(x-2a) & (x < 0) \\ -4x(x-2a) & (x \geq 0) \end{cases}$$

방정식 $g(f(x)) = 0$ 에서 $f(x) = 0$ 또는 $f(x) = 2a$

방정식 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근 $0, 2a$ 를 가지므로 조건 (나)에 의해 방정식 $f(x) = 2a$ 는 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.



곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = 2a$ 의 교점의 개수가 2이어야 하므로

$$f(a) = -4a(a-2a) = 4a^2 = 2a$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-2a}^{2a} f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx$$

$$= \int_{-1}^0 (4x^2 - 4x) dx + \int_0^1 (-4x^2 + 4x) dx$$

$$= \left[\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^1$$

$$= 4$$

[확률과 통계]

23	④	24	②	25	⑤	26	①	27	③
28	④	29	65	30	708				

23. [출제의도] 중복순열의 수를 계산한다.

$${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$$

24. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

(i) 일의 자리의 수가 1인 경우

1, 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!} = 20$$

(ii) 일의 자리의 수가 3인 경우

1, 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 3!} = 10$$

따라서 구하는 경우의 수는 $20 + 10 = 30$

25. [출제의도] 원순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

A 학교 학생 5명을 배열하는 원순열의 수는

$$(5-1)! = 24$$

A 학교 학생 사이에 B 학교 학생 2명의 자리를 정하는 경우의 수는 ${}_5P_2 = 20$

따라서 구하는 경우의 수는 $24 \times 20 = 480$

26. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a , 위쪽으로 한 칸 가는 것을 b , 아래쪽으로 한 칸 가는 것을 c 라 하자.

A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 2개의 a 와 3개의 b 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{5!}{2! \times 3!} = 10$ 이다.

P 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 3개의 a 와 3개의 c 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{6!}{3! \times 3!} = 20$ 이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $10 \times 20 = 200$

27. [출제의도] 중복조합을 이해하여 경우의 수를 구한다.

8권의 책을 3개의 칸에 남김없이 나누어 꽂는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 8개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_8 = {}_{3+8-1}C_8 = {}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 = 45$$

첫 번째 칸에 6권 이상의 책을 꽂는 경우의 수는 먼저 첫 번째 칸에 6권의 책을 꽂고 남은 2권의 책을 3개의 칸에 남김없이 나누어 꽂는 경우의 수와 같으므로

$${}_3H_2 = {}_{3+2-1}C_2 = {}_4C_2 = 6$$

마찬가지로 두 번째 칸에 6권 이상의 책을 꽂는 경우의 수도 6이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$45 - 6 - 6 = 33$$

28. [출제의도] 중복순열을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

(i) 학생 B가 2개의 사탕을 받는 경우

B가 받는 사탕을 정하는 경우의 수는 ${}_5C_2 = 10$

남은 3개의 사탕을 두 명의 학생 A, C에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_3 = 2^3 = 8$$

이때 학생 A가 사탕을 받지 못하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는

$$10 \times (8-1) = 70$$

(ii) 학생 B가 1개의 사탕을 받는 경우

B가 받는 사탕을 정하는 경우의 수는 ${}_5C_1 = 5$

남은 4개의 사탕을 두 명의 학생 A, C에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2\Pi_4 = 2^4 = 16$$

이때 학생 A가 사탕을 받지 못하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는

$$5 \times (16-1) = 75$$

(iii) 학생 B가 사탕을 받지 못하는 경우

5개의 사탕을 두 명의 학생 A, C에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2\Pi_5 = 2^5 = 32$$

이때 학생 A가 사탕을 받지 못하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는 $32-1=31$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$70 + 75 + 31 = 176$$

29. [출제의도] 중복조합을 이용하여 함수의 개수를 추론한다.

조건 (가)를 만족시키는 함수 f 의 개수는 Y 의 원소 중에서 중복을 허락하여 5개를 선택하는 중복조합의 수와 같다.

이때 조건 (나)를 만족시키기 위해서는 -1 과 1 을 적어도 1개씩 선택하거나, 0 을 적어도 2개 선택해야 한다.

(i) -1 과 1 을 적어도 1개씩 선택하는 경우

-1 과 1 을 1개씩 선택한 후 Y 의 원소 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_3 = {}_{5+3-1}C_3 = {}_7C_3 = 35$$

(ii) 0 을 적어도 2개 선택하는 경우

0 을 2개 선택한 후 Y 의 원소 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 경우의 수는

$${}_5H_3 = {}_{5+3-1}C_3 = {}_7C_3 = 35$$

(iii) 위의 (i), (ii)를 동시에 만족시키는 경우

-1 을 1개, 0 을 2개, 1 을 1개 선택한 후 Y 의 원소 중에서 중복을 허락하여 1개를 선택하는 경우의 수는

$${}_5H_1 = {}_{5+1-1}C_1 = {}_5C_1 = 5$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$35 + 35 - 5 = 65$$

30. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

(i) 4개의 원판에 적힌 문자가 XXYY 꼴인 경우

4개의 문자 중 X, Y에 해당하는 문자를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_2 = 6$

4개의 원판을 쌓는 경우의 수는 $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$

그러므로 구하는 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$

(ii) 4개의 원판에 적힌 문자가 XXYZ 꼴인 경우

4개의 문자 중 X에 해당하는 문자를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_1 = 4$

Y, Z에 해당하는 문자를 선택하는 경우의 수는

$${}_3C_2 = 3$$

Y, Z에 해당하는 원판의 색을 정하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_2 = 4$

4개의 원판을 쌓는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!} = 12$

그러므로 구하는 경우의 수는 $4 \times 3 \times 4 \times 12 = 576$

(iii) 4개의 원판에 적힌 문자가 모두 다른 경우

각각의 원판의 색을 정하는 경우의 수는

$${}_2\Pi_4 = 16$$

D가 적힌 원판이 맨 아래에 놓이도록 4개의 원판을 쌓는 경우의 수는 $3! = 6$

그러므로 구하는 경우의 수는 $16 \times 6 = 96$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$36 + 576 + 96 = 708$$

[미적분]

23	②	24	⑤	25	④	26	③	27	①
28	①	29	28	30	80				

23. [출제의도] 등비수열의 극한값을 계산한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n-1}}{(-2)^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3}}{\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 1} = \frac{2 \times 0 + \frac{1}{3}}{0 + 1} = \frac{1}{3}$$

24. [출제의도] 수열의 극한에 대한 성질을 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

$b_n = 3a_n - 5n$ 이라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2, \quad a_n = \frac{b_n + 5n}{3} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)a_n}{4n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{4n^2} \times \frac{b_n + 5n}{3} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(2 + \frac{1}{n}\right) \left(b_n \times \frac{1}{n} + 5\right)}{12} \\ &= \frac{(2+0)(2 \times 0 + 5)}{12} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

25. [출제의도] 수열의 극한에 대한 성질을 이해하여 미지수를 구한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{an^2+n} - \sqrt{an^2-an})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(an^2+n) - (an^2-an)}{\sqrt{an^2+n} + \sqrt{an^2-an}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a+1)n}{\sqrt{an^2+n} + \sqrt{an^2-an}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a+1}{\sqrt{a + \frac{1}{n}} + \sqrt{a - \frac{a}{n}}} = \frac{a+1}{2\sqrt{a}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{an^2+n} - \sqrt{an^2-an}) = \frac{5}{4} \text{ 에서 } \frac{a+1}{2\sqrt{a}} = \frac{5}{4}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$4a^2 - 17a + 4 = 0, \quad (4a-1)(a-4) = 0,$$

$$a = \frac{1}{4} \text{ 또는 } a = 4$$

따라서 모든 양수 a 의 값의 합은 $\frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}$

26. [출제의도] 수열의 합과 극한에 대한 성질을 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$ 이고 공차가 3인 등차수열이므로

$$a_n = 1 + (n-1) \times 3 = 3n - 2$$

수열 $\{b_n\}$ 은 $n \geq 2$ 일 때,

$$\frac{1}{b_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{b_k} = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$$

에서 $b_n = \frac{1}{2n-1}$ 이고 $b_1 = 1$ 이므로

$$\text{모든 자연수 } n \text{에 대하여 } b_n = \frac{1}{2n-1}$$

$$\text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{3}{2}$$

27. [출제의도] 수열의 극한의 대소 관계를 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

$$a_n^2 < 4na_n + n - 4n^2 \text{ 에서 } a_n^2 - 4na_n + 4n^2 < n,$$

$$(a_n - 2n)^2 < n, \quad 2n - \sqrt{n} < a_n < 2n + \sqrt{n},$$

$$2 - \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{a_n}{n} < 2 + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2 \text{ 이므로 수열의 극한}$$

의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 2$

$$\text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 3n}{2n + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{n} + 3}{2 + \frac{4}{n}} = \frac{2+3}{2+0} = \frac{5}{2}$$

28. [출제의도] 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 추론하여 수열의 극한값을 구한다.

점 A_n 의 좌표를 (x_n, y_n) 이라 하면

$$\text{규칙 (나)에서 } x_{2n} = x_{2n-1} + a, \quad y_{2n} = y_{2n-1}$$

$$\text{규칙 (다)에서 } x_{2n+1} = x_{2n}, \quad y_{2n+1} = y_{2n} + (a+1)$$

$$x_{2n+2} = x_{2n+1} + a = x_{2n} + a,$$

$$y_{2n+2} = y_{2n+1} = y_{2n} + (a+1)$$

즉 두 수열 $\{x_{2n}\}, \{y_{2n}\}$ 은 공차가 각각 $a, a+1$ 인 등차수열이고, 규칙 (가)에서

$$x_2 = x_1 + a = a, \quad y_2 = y_1 = 0 \text{ 이므로}$$

$$x_{2n} = a + (n-1)a = an,$$

$$y_{2n} = 0 + (n-1)(a+1) = (a+1)(n-1)$$

그러므로

$$\begin{aligned} \overline{A_1 A_{2n}}^2 &= x_{2n}^2 + y_{2n}^2 \\ &= a^2 n^2 + (a+1)^2 (n-1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{A_1 A_{2n}}}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{a^2 n^2 + (a+1)^2 (n-1)^2}}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a^2 + (a+1)^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2} \\ &= \sqrt{2a^2 + 2a + 1} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{A_1 A_{2n}}}{n} = \frac{\sqrt{34}}{2} \text{ 에서 } \sqrt{2a^2 + 2a + 1} = \frac{\sqrt{34}}{2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$4a^2 + 4a - 15 = 0, \quad (2a+5)(2a-3) = 0,$$

$$a = -\frac{5}{2} \text{ 또는 } a = \frac{3}{2}$$

따라서 양수 a 의 값은 $\frac{3}{2}$ 이다.

29. [출제의도] 수열의 극한으로 정의된 함수를 구하여 문제를 해결한다.

함수 $f(x)$ 를 구하면 다음과 같다.

$$(i) |x| < 1 \text{ 이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 \text{ 이므로 } f(x) = -1$$

$$(ii) x = 1 \text{ 이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 1 \text{ 이므로 } f(x) = \frac{1}{2}$$

$$(iii) x = -1 \text{ 이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+1} = -1 \text{ 이고 } \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 1$$

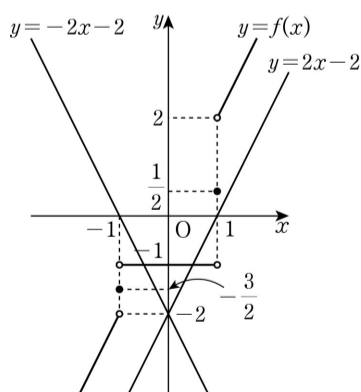
$$\text{이므로 } f(x) = -\frac{3}{2}$$

$$(iv) |x| > 1 \text{ 이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x - \left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^{2n}} = 2x$$

$$\text{그러므로 } f(x) = \begin{cases} -1 & (-1 < x < 1) \\ \frac{1}{2} & (x = 1) \\ -\frac{3}{2} & (x = -1) \\ 2x & (x < -1 \text{ 또는 } x > 1) \end{cases}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



직선 $y=tx-2$ 는 점 $(0, -2)$ 를 지나므로 기울기 t 의 값에 따른 교점의 개수 $g(t)$ 를 구해 보면

$$-1 \leq t < -\frac{1}{2} \text{ 또는 } -\frac{1}{2} < t \leq 0 \text{ 일 때 } g(t) = 0$$

$$t < -1 \text{ 또는 } t = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } 0 < t \leq 1 \text{ 또는 } t = 2 \text{ 또는}$$

$$t \geq 4 \text{ 일 때 } g(t) = 1$$

$$1 < t < 2 \text{ 또는 } 2 < t < \frac{5}{2} \text{ 또는 } \frac{5}{2} < t < 4 \text{ 일 때 } g(t) = 2$$

$$t = \frac{5}{2} \text{ 일 때 } g(t) = 3$$

즉 함수 $g(t)$ 가 $t=a$ 에서 불연속인 a 의 값은

$$-1, -\frac{1}{2}, 0, 1, 2, \frac{5}{2}, 4$$

이므로 $m=7, a_m=4$

$$\text{따라서 } m \times a_m = 7 \times 4 = 28$$

30. [출제의도] 도형의 성질을 이용하여 수열의 극한값을 구하는 문제를 해결한다.

점 P_n 의 x 좌표를 t 라 하면 y 좌표는 $\frac{\sqrt{3}}{n+1}t^2$

$$\overline{OP_n} = 2n+2 \text{ 이므로 } \sqrt{t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{n+1}t^2\right)^2} = 2n+2 \text{ 에서}$$

$$t = n+1$$

직각삼각형 $P_n O H_n$ 에서 $\overline{OH_n} : \overline{P_n H_n} = 1 : \sqrt{3}$ 이므로

$$\tan(\angle P_n O H_n) = \sqrt{3} \text{ 즉 } \angle P_n O H_n = \frac{\pi}{3}$$

$$\angle R_n P_n H_n = 2 \times \angle O P_n H_n = 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

점 R_n 을 포함하지 않는 호 $Q_n H_n$ 과 선분 $O H_n$, 곡선 T_n 으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $h(n)$ 이라 하자.

(i) 곡선 T_n 과 x 축 및 선분 $P_n H_n$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $f(n)+h(n)$ 이므로

$$\begin{aligned} f(n) + h(n) &= \int_0^{n+1} \frac{\sqrt{3}}{n+1} x^2 dx \\ &= \left[\frac{\sqrt{3}}{3(n+1)} x^3 \right]_0^{n+1} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} (n+1)^2 \dots \dots \textcircled{A} \end{aligned}$$

(ii) 점 Q_n 을 포함하는 호 $R_n H_n$ 과 두 선분 $O R_n, O H_n$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $g(n)+h(n)$ 이고, 이 값은 사각형 $O H_n P_n R_n$ 의 넓이에서 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴 $P_n R_n H_n$ 의 넓이를 뺀 값과 같으므로

$$\begin{aligned} g(n) + h(n) &= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{O H_n} \times \overline{P_n H_n} \right) - \frac{1}{2} \times \overline{P_n H_n}^2 \times \frac{\pi}{3} \\ &= \sqrt{3} (n+1)^2 - \frac{\pi (n+1)^2}{2} \\ &= \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right) (n+1)^2 \dots \dots \textcircled{B} \end{aligned}$$

①, ②에서

$$f(n) - g(n) = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) (n+1)^2 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n) - g(n)}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) (n+1)^2}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\text{그러므로 } k = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{따라서 } 60k^2 = 60 \times \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3} \right)^2 = 80$$

[기하]

23	②	24	⑤	25	④	26	③	27	①
28	④	29	128	30	384				

23. [출제의도] 포물선의 정의를 이용하여 선분의 길이를 계산한다.

포물선 $y^2=8x$ 의 준선의 방정식은 $x=-2$ 이다.

점 P와 y 축 사이의 거리가 3이므로 점 P와 준선 사이의 거리는 $2+3=5$

따라서 $PF=5$

24. [출제의도] 타원의 성질을 이해하여 단축의 길이를 구한다.

타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > a > 0$)이라 하자.

두 초점의 좌표가 (0, 3), (0, -3)이므로

$$b^2 - a^2 = 9 \dots\dots \textcircled{1}$$

타원이 y 축과 만나는 점 (0, 7)은 장축의 한 끝점이므로 $b=7$

$$\textcircled{1} \text{에서 } a = 2\sqrt{10}$$

따라서 타원의 단축의 길이는

$$2a = 4\sqrt{10}$$

25. [출제의도] 쌍곡선의 점근선의 성질을 이해하여 도형의 넓이를 구한다.

$$4x^2 - 8x - y^2 - 6y - 9 = 0 \text{에서}$$

$$4(x-1)^2 - (y+3)^2 = 4,$$

$$(x-1)^2 - \frac{(y+3)^2}{4} = 1$$

쌍곡선 $(x-1)^2 - \frac{(y+3)^2}{4} = 1$ 은 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 을

x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 이 쌍곡선의 점근선 중 기울기가 양수인 직선의 방정식은

$$y - (-3) = 2(x-1), \quad y = 2x - 5$$

직선 $y = 2x - 5$ 의 x 절편, y 절편이 각각 $\frac{5}{2}$, -5이다.

따라서 직선 $y = 2x - 5$ 와 x 축, y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times 5 = \frac{25}{4}$$

26. [출제의도] 타원의 성질을 이해하여 점의 좌표를 구한다.

타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 의 두 초점의 좌표는

$$(4, 0), (-4, 0)$$

이고 장축의 길이는 10이므로

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 10, \quad \overline{FF'} = 2 \times 4 = 8 \dots\dots \textcircled{1}$$

세 선분 PF , PF' , FF' 의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2\overline{PF'} = \overline{PF} + \overline{FF'} \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서

$$\overline{PF} = 2(10 - \overline{PF'}) - 8$$

$$\overline{PF} = 4 \text{이므로 } \overline{PF'} = 6$$

$\overline{PF} < \overline{FF'}$ 이므로 점 P 의 x 좌표를 t 라 할 때,

$$0 < t < 4$$

점 P 에서 선분 FF' 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{HF} = 4 - t, \quad \overline{HF'} = 4 + t$$

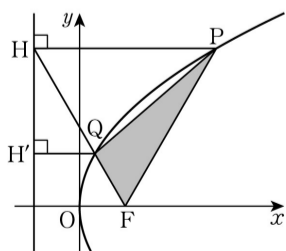
$$\overline{PH}^2 = \overline{PF}^2 - \overline{HF}^2 = \overline{PF'}^2 - \overline{HF'}^2 \text{에서}$$

$$6^2 - (4-t)^2 = 4^2 - (4+t)^2,$$

$$t = \frac{5}{4}$$

따라서 점 P 의 x 좌표는 $\frac{5}{4}$ 이다.

27. [출제의도] 포물선의 성질을 이해하여 미지수를 구한다.



점 Q 에서 포물선의 준선 $x = -p$ 에 내린 수선의 발을 H' 이라 하면

점 Q 는 포물선 위의 점이므로

$$\overline{QF} = \overline{QH'}$$

조건 (가)에서 $\overline{QF} : \overline{QH} = 1 : 2$ 이므로

$$\cos(\angle HFO) = \cos(\angle H'QH) = \frac{\overline{QH'}}{\overline{QH}} = \frac{1}{2}$$

그러므로 $\angle HFO = 60^\circ$

$$\overline{PH} \parallel \overline{OF} \text{이므로 } \angle PHF = \angle HFO = 60^\circ$$

이때 삼각형 PHF 는 $\overline{PF} = \overline{PH}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\angle PFH = \angle PHF = 60^\circ$$

$$\angle FPH = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 60^\circ \text{이므로}$$

삼각형 PHF 는 정삼각형이다.

이때 초점 F 의 좌표가 $(p, 0)$ 이므로

$$\overline{FH} = 4p$$

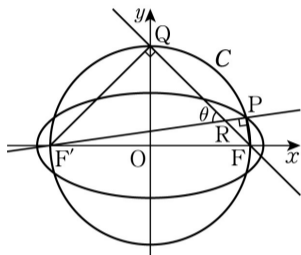
조건 (나)에서 삼각형 PQF 의 넓이는 정삼각형 PHF 의 넓이의 $\frac{1}{3}$ 이므로

$$\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (4p)^2 = \frac{8\sqrt{3}}{3}, \quad p^2 = 2$$

$$\text{따라서 } p > 0 \text{이므로 } p = \sqrt{2}$$

$$\text{따라서 } p > 0 \text{이므로 } p = \sqrt{2}$$

28. [출제의도] 타원의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.



두 직선 $F'P$, QF 의 교점을 R 라 하면 두 직각삼각형 QFR , PFR 가 서로 닮음이고

$$\cos(\angle QRF') = \cos(\angle PRF) = \cos \theta = \frac{3}{5}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{4}{5}$$

$\overline{QR} = 3t$ ($t > 0$)이라 할 때

$$\overline{RF'} = \frac{\overline{QR}}{\cos \theta} = 5t,$$

$$\overline{QF} = \overline{QR} = \overline{RF'} \sin \theta = 4t,$$

$$\overline{RF} = \overline{QF} - \overline{QR} = 4t - 3t = t,$$

$$\overline{RP} = \overline{RF} \cos \theta = \frac{3}{5}t,$$

$$\overline{PF} = \overline{RF} \sin \theta = \frac{4}{5}t$$

점 P 는 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점이므로

$$\overline{PF'} + \overline{PF} = \overline{RF'} + \overline{RP} + \overline{PF}$$

$$= 5t + \frac{3}{5}t + \frac{4}{5}t$$

$$= \frac{32}{5}t$$

$$2a = \frac{32}{5}t \text{에서 } a = \frac{16}{5}t$$

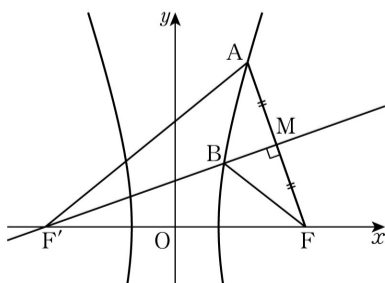
점 F 의 좌표를 $(c, 0)$ ($c > 0$)이라 할 때

$$\overline{FF'} = \sqrt{2} \times \overline{QF} \text{에서 } c = 2\sqrt{2}t$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = \frac{256}{25}t^2 - 8t^2 = \frac{56}{25}t^2$$

$$\text{따라서 } \frac{b^2}{a^2} = \frac{\frac{56}{25}t^2}{\frac{256}{25}t^2} = \frac{7}{32}$$

29. [출제의도] 쌍곡선의 성질을 이용하여 도형에 대한 문제를 해결한다.



그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{32} = 1$ 의 두 초점의 좌표를

$F(6, 0)$, $F'(-6, 0)$ 이라 하자.

점 F' 이 선분 AF 의 수직이등분선 위의 점이므로

두 직각삼각형 $AF'M$, $FF'M$ 이 합동이다.

$$\text{그러므로 } \overline{AF'} = \overline{FF'} = 12$$

점 A 가 쌍곡선 위의 점이므로

$$\overline{AF'} - \overline{AF} = 4 \text{에서 } \overline{AF} = 8$$

점 M 은 선분 AF 의 중점이므로

$$\overline{AM} = 4$$

직각삼각형 $AF'M$ 에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{MF'} = \sqrt{12^2 - 4^2} = 8\sqrt{2}$$

점 B 가 쌍곡선 위의 점이므로

$$\overline{BF} = \overline{BF'} - 4 \text{이고}$$

$$\overline{BM} = 8\sqrt{2} - \overline{BF'} \text{이므로}$$

삼각형 BFM 의 둘레의 길이는

$$\overline{BF} + \overline{FM} + \overline{BM} = (\overline{BF'} - 4) + 4 + (8\sqrt{2} - \overline{BF'})$$

$$= 8\sqrt{2}$$

따라서 $k = 8\sqrt{2}$ 이므로 $k^2 = 128$

30. [출제의도] 두 포물선의 관계를 추론하여 삼각형의 넓이를 구한다.

좌표평면에서 점 F_1 을 원점, 직선 A_1F_1 을 x 축, 직선 F_1F_2 를 y 축이라 하자.

포물선 P_1 의 방정식을 $y^2 = 4p(x+p)$ ($p > 0$)이라 하면

$$\overline{A_1F_1} = p, \quad \overline{F_1C} = 2p \text{에서 } \overline{A_1C} = \sqrt{p^2 + (2p)^2} = p\sqrt{5}$$

조건 (가)에서 $p\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$ 이므로

$$p = 5$$

두 선분 A_1A_2 , F_1F_2 의 중점은 서로 일치하므로 사각형 $A_1F_1A_2F_2$ 는 평행사변형이다.

포물선 P_1 의 준선 l_1 의 방정식은 $x = -10$ 이고 포물선 P_2 의 준선 l_2 의 방정식은 $x = 10$ 이다.

점 B 에서 두 직선 l_1 , l_2 에 내린 수선의 발을 각각 H_1 , H_2 라 하면

$$\overline{BH_1} + \overline{BH_2} = 20 \dots\dots \textcircled{1}$$

점 B 는 두 포물선이 만나는 점이므로 포물선의 정의에 의해 $\overline{F_1B} = \overline{BH_1}$, $\overline{F_2B} = \overline{BH_2}$

조건 (나)에서

$$\overline{BH_1} - \overline{BH_2} = \frac{48}{5} \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \overline{BH_1} = \frac{74}{5}, \quad \overline{BH_2} = \frac{26}{5}$$

점 B 에서 직선 F_1F_2 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{BH} = 10 - \overline{BH_2} = \frac{24}{5}$$

직각삼각형 BF_2H 에서

$$\overline{F_2H}^2 = \overline{F_2B}^2 - \overline{BH}^2$$

$$= (\overline{F_2B} - \overline{BH})(\overline{F_2B} + \overline{BH})$$

$$= \left(\frac{26}{5} - \frac{24}{5}\right) \times \left(\frac{26}{5} + \frac{24}{5}\right)$$

$$= 4$$

이므로 $\overline{F_2H} = 2$

직각삼각형 F_1BH 에서

$$\overline{F_1H}^2 = \overline{F_1B}^2 - \overline{BH}^2$$

$$= (\overline{F_1B} - \overline{BH})(\overline{F_1B} + \overline{BH})$$

$$= \left(\frac{74}{5} - \frac{24}{5}\right) \times \left(\frac{74}{5} + \frac{24}{5}\right)$$

$$= 196$$

이므로 $\overline{F_1H} = 14$

$$\overline{F_1F_2} = \overline{F_1H} + \overline{F_2H} = 14 + 2 = 16$$

그러므로 삼각형 BF_2F_1 의 넓이 S 는

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{F_1F_2} \times \overline{BH} = \frac{1}{2} \times 16 \times \frac{24}{5} = \frac{192}{5}$$

따라서

$$10S = 10 \times \frac{192}{5} = 384$$