수학의 시작 개념원리

# 공통수학 2

## 정답 및 풀이

# 1 평면좌표

I. 도형의 방정식

## 01 두 점 사이의 거리

본책 10~15쪽

### 1

$\overline{AB}=2\sqrt{3}$이므로

$\sqrt{(1-a)^2+(2-a-3)^2}=2\sqrt{3}$

양변을 제곱하면 $(1-a)^2+(-a-1)^2=12$

$a^2=5 \quad \therefore a=\sqrt{5}\ (\because a>0)$

답 $\sqrt{5}$

### 2

$\overline{AB}=2\overline{BC}$이므로

$\sqrt{(10-4)^2+\{1-(-5)\}^2}$

$=2\sqrt{(a-10)^2+(4-1)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2-20a+91=0, \quad (a-7)(a-13)=0$

$\therefore a=7$ 또는 $a=13$

답 7, 13

### 3

$\overline{AB}=\sqrt{\{a-(-1)\}^2+(5-a)^2}$

$=\sqrt{2a^2-8a+26}$

$=\sqrt{2(a-2)^2+18}$

따라서 $\overline{AB}$의 길이는 $a=2$일 때 최솟값 $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$를 갖는다.

답 2

### 4

두 점 P, Q의 좌표를 각각 $(a, 0)$, $(0, b)$라 하자.

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-1)^2+(0-4)^2=(a+2)^2+(0-3)^2$

$a^2-2a+17=a^2+4a+13$

$-6a=-4 \quad \therefore a=\frac{2}{3}$

$\therefore P\left(\frac{2}{3}, 0\right)$

또 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로

$(0-1)^2+(b-4)^2=(0+2)^2+(b-3)^2$

$b^2-8b+17=b^2-6b+13$

$-2b=-4 \quad \therefore b=2$

$\therefore Q(0, 2)$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{\left(0-\frac{2}{3}\right)^2+(2-0)^2}$

$=\sqrt{\frac{40}{9}}=\frac{2\sqrt{10}}{3}$

답 $\frac{2\sqrt{10}}{3}$

### 5

점 $P(a, b)$가 직선 $y=-x+2$ 위의 점이므로

$b=-a+2$ …… ㉠

점 $P(a, -a+2)$에 대하여 $\overline{AP}=\overline{BP}$이므로

$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$

$(a-2)^2+(-a+2-3)^2$

$=(a-6)^2+(-a+2+1)^2$

$2a^2-2a+5=2a^2-18a+45$

$16a=40 \quad \therefore a=\frac{5}{2}$

㉠에 $a=\frac{5}{2}$를 대입하면 $\quad b=-\frac{1}{2}$

$\therefore a-b=3$

답 3

### 6

삼각형 ABC의 외심을 $P(x, y)$라 하면 점 P에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같으므로

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(x-2)^2+(y-1)^2=(x-2)^2+(y-7)^2$

$y^2-2y+1=y^2-14y+49$

$12y=48 \quad \therefore y=4$

또 $\overline{PA}=\overline{PC}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(x-2)^2+(y-1)^2=(x-4)^2+(y-3)^2$

$x^2-4x+y^2-2y+5=x^2-8x+y^2-6y+25$

$4x+4y=20 \quad \therefore x+y=5$

$x+y=5$에 $y=4$를 대입하면

$x+4=5 \quad \therefore x=1$

따라서 삼각형 ABC의 외심의 좌표는 $(1, 4)$이다.

답 $(1, 4)$

**개념 노트**

**삼각형의 외심**

① 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점(외심)에서 만난다.

② 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.

## 7

(1) $\overline{AB}=\sqrt{(2-1)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{5}$

$\overline{BC}=\sqrt{(5-2)^2+(2+2)^2}=5$

$\overline{CA}=\sqrt{(1-5)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{5}$

$\therefore\ \overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2$

따라서 $\triangle ABC$는 $\angle A=90°$인 직각삼각형이다.

(2) $\overline{AB}=\sqrt{(0+\sqrt{3})^2+(-2-1)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\overline{BC}=\sqrt{(\sqrt{3}-0)^2+(1+2)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\overline{CA}=\sqrt{(-\sqrt{3}-\sqrt{3})^2+(1-1)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$

따라서 $\triangle ABC$는 정삼각형이다.

답 (1) **$\angle A=90°$인 직각삼각형** (2) **정삼각형**

## 8

$\overline{AB}=\sqrt{(3+1)^2+(4-1)^2}=\sqrt{25}=5$

$\overline{BC}=\sqrt{(a-3)^2+(5-4)^2}=\sqrt{a^2-6a+10}$

$\overline{CA}=\sqrt{(-1-a)^2+(1-5)^2}=\sqrt{a^2+2a+17}$

이때 $\triangle ABC$는 $\angle C=90°$인 직각삼각형이므로

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$에서

$25=a^2-6a+10+a^2+2a+17$

$a^2-2a+1=0,\quad (a-1)^2=0$

$\therefore\ a=1$

답 **1**

## 9

$\overline{AB}=\sqrt{(1-0)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{10}$

$\overline{BC}=\sqrt{(3-1)^2+(2+2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$\overline{CA}=\sqrt{(0-3)^2+(1-2)^2}=\sqrt{10}$

$\therefore\ \overline{AB}=\overline{CA},\ \overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2$

따라서 $\triangle ABC$는 $\angle A=90°$인 직각이등변삼각형이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CA}=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}=5$

답 **5**

## 10

점 P의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$

$=\{(a+4)^2+(-3)^2\}+\{(a-2)^2+3^2\}$

$=2a^2+4a+38=2(a+1)^2+36$

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$은 $a=-1$일 때 최솟값 36을 갖고, 그때의 점 P의 좌표는 $(-1,\ 0)$이다.

답 **최솟값: 36, P$(-1,\ 0)$**

## 11

점 P의 좌표를 $(a,\ a)$라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$

$=\{(a+3)^2+(a-2)^2\}+\{(a-4)^2+(a-5)^2\}$

$=4a^2-16a+54$

$=4(a-2)^2+38$

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$은 $a=2$일 때 최솟값 38을 갖고, 그때의 점 P의 좌표는 $(2,\ 2)$이다.

답 **$(2,\ 2)$**

## 12

점 P의 좌표를 $(a,\ -a+2)$라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$

$=\{(a-1)^2+(-a+2+4)^2\}$

$\quad+\{(a-3)^2+(-a+2-2)^2\}$

$\quad+\{(a+1)^2+(-a+2+1)^2\}$

$=6a^2-24a+56$

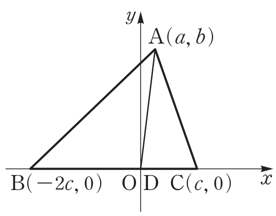
$=6(a-2)^2+32$

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$은 $a=2$일 때 최솟값 32를 갖는다.

답 **32**

## 13

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 $x$축, 점 D를 지나고 $\overline{BC}$에 수직인 직선을 $y$축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 D는 원점이 된다.




$A(a,\ b)$, $C(c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면 점 B의 좌표는 $(-2c,\ 0)$이므로

$\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2$

$=\{(a+2c)^2+b^2\}+2\{(a-c)^2+b^2\}$

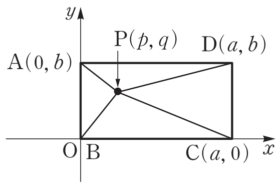
$=3a^2+3b^2+6c^2$

또 $\overline{\mathrm{AD}}^2=a^2+b^2$, $\overline{\mathrm{CD}}^2=c^2$이므로

$$3(\overline{\mathrm{AD}}^2+2\overline{\mathrm{CD}}^2)=3(a^2+b^2+2c^2)$$
$$=3a^2+3b^2+6c^2$$
$$\therefore \overline{\mathrm{AB}}^2+2\overline{\mathrm{AC}}^2=3(\overline{\mathrm{AD}}^2+2\overline{\mathrm{CD}}^2)$$

**답** 풀이 참조

## 14




오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 $x$축, 직선 AB를 $y$축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이 된다.

A$(0,\ b)$, C$(a,\ 0)$이라 하면 점 D의 좌표는

$(a,\ b)$

점 P의 좌표를 $(p,\ q)$라 하면

$$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$$
$$=\{p^2+(q-b)^2\}+\{(p-a)^2+q^2\}$$
$$=2p^2+2q^2-2ap-2bq+a^2+b^2$$
$$\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PD}}^2$$
$$=(p^2+q^2)+\{(p-a)^2+(q-b)^2\}$$
$$=2p^2+2q^2-2ap-2bq+a^2+b^2$$
$$\therefore \overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PD}}^2$$

**답** 풀이 참조

### 연습 문제

● 본책 16~17쪽

## 15

**전략** 두 점 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 $a$에 대한 부등식을 세운다.

$\overline{\mathrm{AB}}\le 2$에서 $\overline{\mathrm{AB}}^2\le 4$이므로

$$(2-a)^2+(a-4)^2\le 4$$
$$a^2-6a+8\le 0,\qquad (a-2)(a-4)\le 0$$
$$\therefore 2\le a\le 4$$

따라서 정수 $a$는 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$$2+3+4=9$$

**답** 9

## 16

**전략** $l^2$을 $t$에 대한 이차식으로 나타내고 최솟값을 구한다.

$$l^2=\overline{\mathrm{AB}}^2=(2t+1)^2+(-3-2t)^2$$
$$=8t^2+16t+10$$
$$=8(t+1)^2+2$$

따라서 $l^2$은 $t=-1$일 때 최솟값 2를 갖는다. **답** 2

## 17

**전략** 점 P의 좌표를 $(a,\ 2a-1)$로 놓고 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$임을 이용하여 $a$에 대한 방정식을 세운다.

점 P의 좌표를 $(a,\ 2a-1)$이라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$$(a-3)^2+(2a-1+2)^2$$
$$=(a-2)^2+(2a-1+1)^2$$
$$5a^2-2a+10=5a^2-4a+4$$
$$2a=-6\qquad \therefore a=-3$$

따라서 P$(-3,\ -7)$이므로

$$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(-3-3)^2+(-7+2)^2}=\sqrt{61}$$

**답** $\sqrt{61}$

## 18

**전략** 점 P의 좌표를 $(a,\ a+3)$으로 놓고 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$을 $a$에 대한 이차식으로 나타낸다.

점 P의 좌표를 $(a,\ a+3)$이라 하면

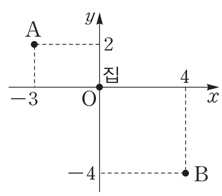
$$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$$
$$=\{(a+2)^2+(a+3)^2\}+\{(a-2)^2+(a+3)^2\}$$
$$=4a^2+12a+26$$
$$=4\left(a+\frac{3}{2}\right)^2+17$$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$은 $a=-\frac{3}{2}$일 때 최솟값 17을 갖는다.

**답** 17

## 19

**전략** 집, 마트, 영화관의 위치를 좌표평면 위에 나타낸다.




오른쪽 그림과 같이 집을 원점으로 하는 좌표평면을 잡고 마트와 영화관을 나타내는 점을 각각 A, B라 하면

A$(-3,\ 2)$, B$(4,\ -4)$

로 놓을 수 있다.

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{(4+3)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{85}$

따라서 마트와 영화관 사이의 직선 거리는 $\sqrt{85}$ km이다.

답 $\sqrt{85}$ **km**

## 20

**전략** 삼각형의 내각의 이등분선의 성질을 이용한다.

$\overline{AD}$는 $\angle A$의 이등분선이므로

$$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$$

이때 $\overline{BD}=\sqrt{8^2+(-6)^2}=10$,

$\overline{CD}=\sqrt{(8-12)^2+3^2}=5$이므로

$$\overline{AB}:\overline{AC}=10:5=2:1$$

즉 $2\overline{AC}=\overline{AB}$에서 $4\overline{AC}^2=\overline{AB}^2$이므로

$$4\{(12-a)^2+(-3-1)^2\}=(-a)^2+(6-1)^2$$
$$4(a^2-24a+160)=a^2+25$$
$$\therefore a^2-32a+205=0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 $a$의 값의 합은 32이다.

답 **32**

**참고** 이차방정식 $a^2-32a+205=0$의 판별식을 $D$라 하면

$$\frac{D}{4}=(-16)^2-205=51>0$$

따라서 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

## 21

**전략** 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점까지의 거리가 모두 같음을 이용하여 외심의 좌표를 구한다.

삼각형 ABC의 외심을 $P(a, b)$라 하면

$$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$$

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$$(a+2)^2+(b-1)^2=(a-1)^2+(b-4)^2$$
$$a^2+b^2+4a-2b+5=a^2+b^2-2a-8b+17$$
$$\therefore a+b=2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{AP}=\overline{CP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{CP}^2$이므로

$$(a+2)^2+(b-1)^2=(a-3)^2+(b+2)^2$$
$$a^2+b^2+4a-2b+5=a^2+b^2-6a+4b+13$$
$$\therefore 5a-3b=4 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{5}{4},\ b=\frac{3}{4}$

따라서 외접원의 반지름의 길이는

$$\overline{AP}=\sqrt{\left(\frac{5}{4}+2\right)^2+\left(\frac{3}{4}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{170}}{4}$$

이므로 외접원의 넓이는

$$\pi\times\left(\frac{\sqrt{170}}{4}\right)^2=\frac{85}{8}\pi$$

답 $\frac{85}{8}\pi$

## 22

**전략** 삼각형의 세 변의 길이가 모두 같음을 이용하여 $a$, $b$에 대한 연립방정식을 세운다.

$\triangle ABC$가 정삼각형이므로

$$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$$

$\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$$(1+1)^2+(-2-2)^2=(a-1)^2+(b+2)^2$$
$$\therefore a^2-2a+b^2+4b-15=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{AB}=\overline{CA}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{CA}^2$이므로

$$(1+1)^2+(-2-2)^2=(-1-a)^2+(2-b)^2$$
$$\therefore a^2+2a+b^2-4b-15=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠$-$㉡을 하면

$$-4a+8b=0 \qquad \therefore a=2b$$

㉠에 $a=2b$를 대입하면

$$4b^2-4b+b^2+4b-15=0, \qquad b^2=3$$
$$\therefore b=\pm\sqrt{3}$$

$b=\sqrt{3}$일 때 $a=2\sqrt{3}$, $b=-\sqrt{3}$일 때 $a=-2\sqrt{3}$이므로

$$ab=6$$

답 **6**

## 23

**전략** 평행사변형의 성질을 이용하여 점 D의 좌표를 구한다.

$A(a, b)$, $C(c, 0)$이라 하면

$$D(\boxed{(가)\ a+c},\ b)$$
$$\therefore \overline{AC}^2+\overline{BD}^2$$
$$=\{(c-a)^2+(-b)^2\}+\{(a+c)^2+b^2\}$$
$$=\boxed{(나)\ 2a^2+2b^2+2c^2}$$

$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\boxed{(다)\ a^2+b^2+c^2}$이므로

$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=2(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2)$$

답 (가) $\boldsymbol{a+c}$ (나) $\boldsymbol{2a^2+2b^2+2c^2}$ (다) $\boldsymbol{a^2+b^2+c^2}$

## 24

**전략** 주어진 식을 두 선분의 길이의 합으로 나타낸다.

$A(5, -2)$, $B(-3, 4)$, $P(x, y)$라 하면

$\sqrt{(x-5)^2+(y+2)^2}=\overline{\mathrm{AP}}$,

$\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2}=\overline{\mathrm{BP}}$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{(x-5)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2} &= \overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}\\ &\geq \overline{\mathrm{AB}}\\ &= \sqrt{(-3-5)^2+(4+2)^2}\\ &= 10\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 10이다. 답 **10**

**해설 Focus**

두 점 A, B와 임의의 점 P에 대하여

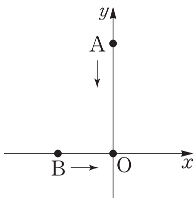
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}\geq\overline{\mathrm{AB}}$

이므로 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이와 같고, 이때 점 P는 $\overline{\mathrm{AB}}$ 위에 있다.

## 25

전략 직선 도로를 좌표평면 위에 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이 지점 O의 위치를 원점으로 하는 좌표평면에서 A와 B의 출발점의 위치를 각각 (0, 10), (−5, 0)이라 하자.




$t$시간 후의 A와 B의 위치를 각각 P, Q라 하면

$\mathrm{P}(0,\ 10-3t)$, $\mathrm{Q}(-5+4t,\ 0)$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{\mathrm{PQ}} &= \sqrt{(-5+4t)^2+(-10+3t)^2}\\ &= \sqrt{25t^2-100t+125}\\ &= \sqrt{25(t-2)^2+25}\end{aligned}$$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이는 $t=2$일 때 최솟값 $\sqrt{25}=5$를 갖는다.

즉 A와 B 사이의 거리의 최솟값은 5 km이다.

답 **5 km**

# 02 선분의 내분점

● 본책 18~26쪽

## 26

답 (1) **1, 2** (2) **5, 1** (3) **F** (4) **E**

## 27

(1) $\dfrac{3\times6+1\times2}{3+1}=5$ $\therefore$ P(5)

(2) $\dfrac{1\times6+2\times2}{1+2}=\dfrac{10}{3}$ $\therefore \mathrm{Q}\left(\dfrac{10}{3}\right)$

(3) $\dfrac{2+6}{2}=4$ $\therefore$ M(4)

답 (1) **(5)** (2) $\left(\dfrac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}}\right)$ (3) **(4)**

## 28

(1) $\mathrm{P}\left(\dfrac{1\times3+3\times(-1)}{1+3},\ \dfrac{1\times2+3\times6}{1+3}\right)$

$\therefore \mathrm{P}(0,\ 5)$

(2) $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1\times(-1)+3\times3}{1+3},\ \dfrac{1\times6+3\times2}{1+3}\right)$

$\therefore \mathrm{Q}(2,\ 3)$

(3) $\mathrm{M}\left(\dfrac{-1+3}{2},\ \dfrac{6+2}{2}\right)$ $\therefore \mathrm{M}(1,\ 4)$

답 (1) **(0, 5)** (2) **(2, 3)** (3) **(1, 4)**

## 29

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times5+1\times(-1)}{2+1},\ \dfrac{2\times(-2)+1\times4}{2+1}\right)$,

즉 (3, 0)

선분 BC를 1 : 3으로 내분하는 점 Q의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times1+3\times5}{1+3},\ \dfrac{1\times6+3\times(-2)}{1+3}\right)$,

즉 (4, 0)

따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{3+4}{2},\ \dfrac{0+0}{2}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{7}{2},\ 0\right)$ 답 $\left(\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}},\ \mathbf{0}\right)$

## 30

$\overline{\mathrm{AP}}=3\overline{\mathrm{PB}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PB}}=3:1$

따라서 점 P는 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점이므로

$\dfrac{3\times x+1\times(-1)}{3+1}=5$, $\dfrac{3\times y+1\times(-2)}{3+1}=-5$

$3x-1=20$, $3y-2=-20$

$\therefore x=7,\ y=-6$

$\therefore xy=-42$ 답 **−42**

## 31

선분 AB를 $2:b$로 내분하는 점의 좌표가 $(3,\ -1)$이므로

$$\frac{2\times6+b\times1}{2+b}=3,\ \frac{2\times a+b\times(-5)}{2+b}=-1$$

$12+b=3(2+b)$, $2a-5b=-(2+b)$

$-2b=-6$, $a-2b=-1$

$\therefore\ a=5,\ b=3$

따라서 $\mathrm{A}(1,\ -5)$, $\mathrm{B}(6,\ 5)$이므로 선분 AB를 $b:1$, 즉 $3:1$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3\times6+1\times1}{3+1},\ \frac{3\times5+1\times(-5)}{3+1}\right),$$

즉 $\left(\frac{19}{4},\ \frac{5}{2}\right)$ 답 $\left(\frac{19}{4},\ \frac{5}{2}\right)$

## 32

선분 AB를 $(1-t):t$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{(1-t)\times1+t\times(-2)}{(1-t)+t},\ \frac{(1-t)\times(-1)+t\times4}{(1-t)+t}\right),$$

즉 $(-3t+1,\ 5t-1)$

이 점이 제1사분면 위에 있으므로

$-3t+1>0$, $5t-1>0$

$\therefore\ \frac{1}{5}<t<\frac{1}{3}$ …… ㉠

한편 $1-t>0$, $t>0$이므로 $0<t<1$ … ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\frac{1}{5}<t<\frac{1}{3}$

따라서 $\alpha=\frac{1}{5}$, $\beta=\frac{1}{3}$이므로

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=5+3=8$ 답 8

## 33

선분 AB를 $1:k$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1\times0+k\times(-3)}{1+k},\ \frac{1\times12+k\times0}{1+k}\right),$$

즉 $\left(\frac{-3k}{1+k},\ \frac{12}{1+k}\right)$

이 점이 직선 $y=-x+2$ 위에 있으므로

$$\frac{12}{1+k}=-\frac{-3k}{1+k}+2$$

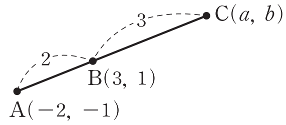
$12=3k+2(1+k)$, $-5k=-10$

$\therefore\ k=2$ 답 2

## 34

$3\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{BC}}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=2:3$

이때 $a>0$이므로 이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.




따라서 점 B는 $\overline{\mathrm{AC}}$를 $2:3$으로 내분하는 점이므로

$$\frac{2\times a+3\times(-2)}{2+3}=3,\ \frac{2\times b+3\times(-1)}{2+3}=1$$

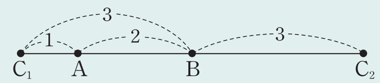
$2a-6=15$, $2b-3=5$

$\therefore\ a=\frac{21}{2},\ b=4$

$\therefore\ ab=42$ 답 42

**해설 Focus**

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=2:3$을 만족시키는 점 C의 위치는 다음 그림의 점 $\mathrm{C_1}$ 또는 점 $\mathrm{C_2}$이다.




(i) $a<0$일 때

점 C의 위치는 점 $\mathrm{C_1}$이므로 점 A는 $\overline{\mathrm{CB}}$를 $1:2$로 내분하는 점이다.

(ii) $a>0$일 때

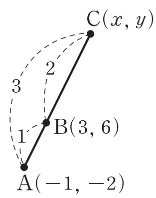
점 C의 위치는 점 $\mathrm{C_2}$이므로 점 B는 $\overline{\mathrm{AC}}$를 $2:3$으로 내분하는 점이다.

## 35

$2\overline{\mathrm{AC}}=3\overline{\mathrm{BC}}$에서

$\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{BC}}=3:2$

이를 그림으로 나타내면 오른쪽과 같으므로 점 B는 $\overline{\mathrm{AC}}$를 $1:2$로 내분하는 점이다.




점 C의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$$\frac{1\times x+2\times(-1)}{1+2}=3,$$

$$\frac{1\times y+2\times(-2)}{1+2}=6$$

$x-2=9$, $y-4=18$

$\therefore\ x=11,\ y=22$

$\therefore\ \mathrm{C}(11,\ 22)$ 답 $(11,\ 22)$

다른 풀이 $\overline{AB}$의 연장선 위의 점 C에 대하여

$\overline{AC} : \overline{BC} = 3 : 2$이므로 점 C는 $\overline{AB}$를 $3 : 2$로 외분하는 점이다.

따라서 점 C의 좌표는

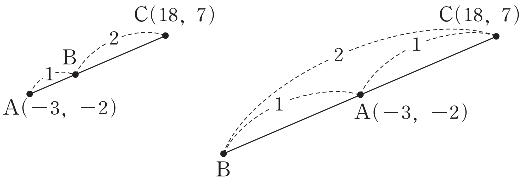
$$\left(\frac{3\times3-2\times(-1)}{3-2}, \frac{3\times6-2\times(-2)}{3-2}\right),$$

즉 $(11, 22)$

## 36

$2\overline{AB} = \overline{BC}$에서 $\quad \overline{AB} : \overline{BC} = 1 : 2$

이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.




(i) 점 B가 선분 AC를 $1 : 2$로 내분하는 경우

점 B의 좌표는

$$\left(\frac{1\times18+2\times(-3)}{1+2}, \frac{1\times7+2\times(-2)}{1+2}\right),$$

즉 $(4, 1)$

(ii) 점 A가 선분 BC의 중점인 경우

점 B의 좌표를 $(x, y)$라 하면

$$\frac{x+18}{2} = -3, \quad \frac{y+7}{2} = -2$$

$x+18=-6$, $y+7=-4$

$\therefore x=-24, y=-11$

$\therefore \mathrm{B}(-24, -11)$

(i), (ii)에서 $\quad \mathrm{B}(4, 1)$ 또는 $\mathrm{B}(-24, -11)$

답 **(4, 1), (−24, −11)**

## 37

평행사변형 ABCD의 대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+0}{2}, \frac{0+3}{2}\right), \text{ 즉 } \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

대각선 BD의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a-3}{2}, \frac{1+b}{2}\right)$

두 대각선의 중점이 일치하므로

$$-\frac{1}{2} = \frac{a-3}{2}, \quad \frac{3}{2} = \frac{1+b}{2}$$

$\therefore a=2, b=2 \qquad \therefore ab=4$

답 **4**

## 38

마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분한다.

마름모 ABCD의 대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+a}{2}, \frac{1+7}{2}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{2+a}{2}, 4\right)$$

대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{b-2}{2}, \frac{5+3}{2}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{b-2}{2}, 4\right)$$

두 대각선의 중점이 일치하므로

$$\frac{2+a}{2} = \frac{b-2}{2}$$

$\therefore b=a+4 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또 마름모의 뜻에 의하여 $\overline{AD} = \overline{DC}$이므로

$\overline{AD}^2 = \overline{DC}^2$

$(-2-2)^2+(3-1)^2=(a+2)^2+(7-3)^2$

$a^2+4a=0, \qquad a(a+4)=0$

$\therefore a=-4 \ (\because a<0)$

㉠에 $a=-4$를 대입하면 $\qquad b=0$

$\therefore a+b=-4$

답 **−4**

## 39

$\overline{AD}$는 $\angle A$의 이등분선이므로

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$

$\overline{AB} = \sqrt{(-4)^2+(1-9)^2} = 4\sqrt{5}$,

$\overline{AC} = \sqrt{(6-4)^2+(5-9)^2} = 2\sqrt{5}$이므로

$\overline{BD} : \overline{CD} = 4\sqrt{5} : 2\sqrt{5} = 2 : 1$

따라서 점 D는 $\overline{BC}$를 $2 : 1$로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{2\times6+1\times0}{2+1}, \frac{2\times5+1\times1}{2+1}\right), \text{ 즉 } \left(4, \frac{11}{3}\right)$$

$a=4$, $b=\frac{11}{3}$이므로

$$a+b=\frac{23}{3}$$

답 $\mathbf{\frac{23}{3}}$

## 40

$\angle AOP = \angle BOP$에서 점 P는 $\angle AOB$의 이등분선 위의 점이므로

$\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{AP} : \overline{BP}$

$\overline{OA}=3$, $\overline{OB}=\sqrt{3^2+4^2}=5$이므로

$$\overline{AP}:\overline{BP}=3:5$$

따라서 점 P는 $\overline{AB}$를 $3:5$로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{3\times3+5\times(-3)}{3+5}, \frac{3\times4+5\times0}{3+5}\right),$$

$$\text{즉 } \left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$$

직선 OP의 방정식은

$$y=\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{3}{4}}x \qquad \therefore y=-2x$$

답 $y=-2x$

## 03 삼각형의 무게중심

● 본책 27~29쪽

### 41

△ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{a-1+5}{3}, \frac{5+b+1}{3}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{a+4}{3}, \frac{b+6}{3}\right)$$

이때 무게중심의 좌표가 $(2, 3)$이므로

$$\frac{a+4}{3}=2, \ \frac{b+6}{3}=3$$

$$\therefore a=2, b=3$$

답 $a=2$, $b=3$

### 42

변 BC의 중점을 M이라 하면 △ABC의 무게중심은 중선 AM을 $2:1$로 내분하는 점이다.

따라서 구하는 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2\times1+1\times(-5)}{2+1}, \frac{2\times0+1\times6}{2+1}\right),$$

즉 $(-1, 2)$

답 $(-1, 2)$

### 43

세 변 AB, BC, CA의 중점을 각각 D, E, F라 하면 △ABC의 무게중심은 △DEF의 무게중심과 일치한다.

따라서 △ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-4-1+5}{3}, \frac{5-2+6}{3}\right), \text{ 즉 } (0, 3)$$

답 $(0, 3)$

다른 풀이 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$이라 하면 변 AB의 중점의 좌표가 $(-4, 5)$이므로

$$\frac{x_1+x_2}{2}=-4 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\frac{y_1+y_2}{2}=5 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

변 BC의 중점의 좌표가 $(-1, -2)$이므로

$$\frac{x_2+x_3}{2}=-1 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

$$\frac{y_2+y_3}{2}=-2 \qquad \cdots\cdots ㉣$$

변 CA의 중점의 좌표가 $(5, 6)$이므로

$$\frac{x_3+x_1}{2}=5 \qquad \cdots\cdots ㉤$$

$$\frac{y_3+y_1}{2}=6 \qquad \cdots\cdots ㉥$$

㉠+㉢+㉤을 하면 $x_1+x_2+x_3=0$

㉡+㉣+㉥을 하면 $y_1+y_2+y_3=9$

따라서 △ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right), \text{ 즉 } (0, 3)$$

### 44

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P는 △ABC의 무게중심과 일치하므로

$$a=\frac{-2+3+5}{3}=2, \ b=\frac{1+4+4}{3}=3$$

$$\therefore a+b=5$$

답 5

### 45

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P는 △ABC의 무게중심과 일치한다.

△ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-5+2+6}{3}, \frac{-2+3-7}{3}\right), \text{ 즉 } (1, -2)$$

따라서 $P(1, -2)$일 때 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 값은 최소이므로 구하는 최솟값은

$$\begin{aligned}&\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2\\&=\{(1+5)^2+(-2+2)^2\}\\&\quad+\{(1-2)^2+(-2-3)^2\}\\&\quad+\{(1-6)^2+(-2+7)^2\}\\&=36+26+50=112\end{aligned}$$

답 최솟값: 112, $P(1, -2)$

다른 풀이 점 P의 좌표를 $(x, y)$라 하면

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$$
$$=\{(x+5)^2+(y+2)^2\}$$
$$+\{(x-2)^2+(y-3)^2\}$$
$$+\{(x-6)^2+(y+7)^2\}$$
$$=3x^2-6x+3y^2+12y+127$$
$$=3(x-1)^2+3(y+2)^2+112$$

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$은 $x=1$, $y=-2$일 때 최솟값 112를 갖고, 그때의 점 P의 좌표는 $(1, -2)$이다.

## 연습 문제

본책 30~32쪽

### 46

전략 점 P가 $\overline{AB}$를 $4:3$으로 내분하는 점임을 이용한다.

$3\overline{AP}=4\overline{PB}$에서 $\qquad \overline{AP}:\overline{PB}=4:3$

따라서 점 P는 선분 AB를 $4:3$으로 내분하는 점이므로

$$\frac{4\times b+3\times(-4)}{4+3}=0, \quad \frac{4\times1+3\times a}{4+3}=1$$

$\therefore a=1, b=3$

$\therefore a+b=4$

답 **4**

### 47

전략 내분점의 좌표를 $k$에 대한 식으로 나타내어 부등식을 세운다.

선분 AB를 $k:(1-k)$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{k\times(-4)+(1-k)\times1}{k+(1-k)}, \frac{k\times6+(1-k)\times(-3)}{k+(1-k)}\right),$$

즉 $(-5k+1, 9k-3)$

이 점이 제2사분면 위에 있으므로

$-5k+1<0$, $9k-3>0$

$\therefore k>\frac{1}{3}$ …… ㉠

한편 $k>0$, $1-k>0$이므로

$0<k<1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\frac{1}{3}<k<1$

답 $\boldsymbol{\frac{1}{3}<k<1}$

### 48

전략 $y$축 위의 점은 $x$좌표가 0임을 이용한다.

선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{m-3n}{m+n}, \frac{6m+n}{m+n}\right)$$

이 점이 $y$축 위에 있으므로

$\frac{m-3n}{m+n}=0$, $\qquad m-3n=0$

$\therefore m=3n$

따라서 $m:n=3:1$이고, $m$, $n$은 서로소인 자연수이므로

$m=3$, $n=1$

$\therefore m+n=4$

답 **4**

### 49

전략 마름모의 뜻과 성질을 이용하여 $a$, $b$, $c$의 값을 구한다.

마름모 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$$\frac{a+b}{2}=\frac{3+4}{2}, \quad \frac{3+c}{2}=\frac{1+4}{2}$$

$\therefore a+b=7, c=2$

또 마름모의 뜻에 의하여 $\overline{AB}=\overline{AD}$이므로

$\overline{AB}^2=\overline{AD}^2$

$(3-a)^2+(1-3)^2=(4-a)^2+(4-3)^2$

$a^2-6a+13=a^2-8a+17$

$2a=4 \qquad \therefore a=2$

$a+b=7$에 $a=2$를 대입하면

$b=5$

$\therefore a^2+b^2+c^2=2^2+5^2+2^2=33$

답 **33**

### 50

전략 삼각형 ABC와 삼각형 DEF의 무게중심이 일치함을 이용한다.

△DEF의 무게중심은 △ABC의 무게중심과 일치하므로

$$\frac{a-1+5}{3}=2, \quad \frac{2+0+b}{3}=1$$

$a+4=6$, $b+2=3$

$\therefore a=2, b=1$

$\therefore ab=2$

답 **2**

다른 풀이 변 AB를 2 : 1로 내분하는 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{2\times(-1)+1\times a}{2+1}, \frac{2\times 0+1\times 2}{2+1}\right),$$

즉 $\left(\frac{a-2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

변 BC를 2 : 1로 내분하는 점 E의 좌표는

$$\left(\frac{2\times 5+1\times(-1)}{2+1}, \frac{2\times b+1\times 0}{2+1}\right),$$

즉 $\left(3, \frac{2}{3}b\right)$

변 CA를 2 : 1로 내분하는 점 F의 좌표는

$$\left(\frac{2\times a+1\times 5}{2+1}, \frac{2\times 2+1\times b}{2+1}\right),$$

즉 $\left(\frac{2a+5}{3}, \frac{b+4}{3}\right)$

△DEF의 무게중심의 좌표가 (2, 1)이므로

$$\frac{\frac{a-2}{3}+3+\frac{2a+5}{3}}{3}=2,$$

$$\frac{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}b+\frac{b+4}{3}}{3}=1$$

$a+4=6$, $b+2=3$

$\therefore a=2, b=1$

## 51

전략 점 P가 △ABC의 무게중심과 일치함을 이용한다.

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심과 일치한다.

따라서 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1-3+2}{3}, \frac{3-2+2}{3}\right),\ 즉\ (0, 1)$$

$\therefore \overline{PA}=\sqrt{(1-0)^2+(3-1)^2}=\sqrt{5}$ 답 $\sqrt{5}$

다른 풀이 점 P의 좌표를 $(x, y)$라 하면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$=\{(x-1)^2+(y-3)^2\}+\{(x+3)^2+(y+2)^2\}$
$\quad+\{(x-2)^2+(y-2)^2\}$

$=3x^2+3y^2-6y+31$

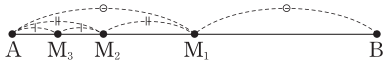
$=3x^2+3(y-1)^2+28$

따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$은 $x=0$, $y=1$일 때 최솟값 28을 갖고, 그때의 점 P의 좌표는 (0, 1)이다.

$\therefore \overline{PA}=\sqrt{(1-0)^2+(3-1)^2}=\sqrt{5}$

## 52

전략 선분 PQ의 중점이 M이면 $\overline{PM}=\frac{1}{2}\overline{PQ}$임을 이용한다.




점 $M_1$은 선분 AB의 중점이므로

$$\overline{AM_1}=\frac{1}{2}\overline{AB}$$

점 $M_2$는 선분 $AM_1$의 중점이므로

$$\overline{AM_2}=\frac{1}{2}\overline{AM_1}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{4}\overline{AB}$$

점 $M_3$은 선분 $AM_2$의 중점이므로

$$\overline{AM_3}=\frac{1}{2}\overline{AM_2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\overline{AB}=\frac{1}{8}\overline{AB}$$

같은 방법으로 하면 $\overline{AM_{10}}=\frac{1}{2^{10}}\overline{AB}$

따라서 $\overline{AB}=2^{10}\overline{AM_{10}}$에서 $\overline{AM_{10}} : \overline{AB}=1 : 2^{10}$이므로

$$\overline{AM_{10}} : \overline{M_{10}B}=1 : (2^{10}-1)=1 : 1023$$

즉 점 $M_{10}$은 선분 AB를 1 : 1023으로 내분하는 점이므로 $k=1023$ 답 **1023**

## 53

전략 두 점 P, Q의 $x$좌표를 각각 $\alpha$, $\beta$로 놓고 $\alpha$, $\beta$에 대한 방정식을 세운다.

곡선 $y=x^2-2x$와 직선 $y=3x+k$가 두 점 P, Q에서 만나므로 두 점 P, Q의 $x$좌표를 각각 $\alpha$, $\beta$라 하면 이차방정식

$$x^2-2x=3x+k,\ 즉\ x^2-5x-k=0$$

의 두 실근이 $\alpha$, $\beta$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$ …… ㉠

$\alpha\beta=-k$ …… ㉡

한편 선분 PQ를 1 : 2로 내분하는 점의 $x$좌표가 1이므로

$$\frac{1\times\beta+2\times\alpha}{1+2}=1$$

$\therefore 2\alpha+\beta=3$ …… ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $\alpha=-2$, $\beta=7$

따라서 ㉡에서

$k=-\alpha\beta=-(-2)\times 7=14$ 답 **14**

## 54

**전략** 평행사변형의 성질을 이용하여 점 D의 좌표를 구한다.

$\overline{AB}=\sqrt{(-5+1)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{5}$,

$\overline{BC}=\sqrt{(-3+5)^2+(k-1)^2}=\sqrt{k^2-2k+5}$

이고, 평행사변형 ABCD의 둘레의 길이가 $6\sqrt{5}$이므로

$2(\overline{AB}+\overline{BC})=6\sqrt{5}$에서

$$2(2\sqrt{5}+\sqrt{k^2-2k+5})=6\sqrt{5}$$

$$\therefore \sqrt{k^2-2k+5}=\sqrt{5}$$

양변을 제곱하면

$$k^2-2k+5=5$$

$$k^2-2k=0, \qquad k(k-2)=0$$

$$\therefore k=0 \text{ 또는 } k=2$$

이때 $k=2$이면 세 점 $A(-1, 3)$, $B(-5, 1)$, $C(-3, 2)$는 일직선 위에 있으므로 평행사변형이 만들어지지 않는다.

$$\therefore k=0$$

평행사변형 ABCD에서 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로 점 D의 좌표를 $(a, b)$라 하면

$$\frac{-1-3}{2}=\frac{-5+a}{2}, \quad \frac{3+0}{2}=\frac{1+b}{2}$$

$$\therefore a=1, b=2$$

따라서 점 D의 좌표는 $(1, 2)$이다.

답 **(1, 2)**

## 55

**전략** 중점의 좌표, 무게중심의 좌표를 이용하여 두 점 B, C의 좌표를 차례로 구한다.

변 AB의 중점의 좌표가 $(3, 0)$이므로 점 B의 좌표를 $(a, b)$라 하면

$$\frac{7+a}{2}=3, \quad \frac{5+b}{2}=0$$

$$\therefore a=-1, b=-5$$

즉 점 B의 좌표는 $(-1, -5)$이다.

또 △ABC의 무게중심의 좌표가 $(3, 1)$이므로 점 C의 좌표를 $(c, d)$라 하면

$$\frac{7-1+c}{3}=3, \quad \frac{5-5+d}{3}=1$$

$$\therefore c=3, d=3$$

즉 점 C의 좌표는 $(3, 3)$이다.

따라서 변 BC를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\times3+1\times(-1)}{2+1}, \frac{2\times3+1\times(-5)}{2+1}\right),$$

즉 $\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$

답 $\left(\mathbf{\frac{5}{3}}, \mathbf{\frac{1}{3}}\right)$

## 56

**전략** 두 점 A, B의 $x$좌표가 주어진 이차함수와 직선의 방정식을 연립한 방정식의 해임을 이용한다.

이차함수 $y=x^2-8x+1$의 그래프와 직선 $y=2x+6$이 만나는 두 점 A, B의 $x$좌표는

$$x^2-8x+1=2x+6, \text{ 즉 } x^2-10x-5=0$$

의 두 실근이다.

이차방정식 $x^2-10x-5=0$의 서로 다른 두 실근을 $\alpha$, $\beta$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=10$$

한편 두 점 A, B의 좌표는 $(\alpha, 2\alpha+6)$, $(\beta, 2\beta+6)$이고, △OAB의 무게중심의 좌표가 $(a, b)$이므로

$$a=\frac{\alpha+\beta}{3}=\frac{10}{3},$$

$$b=\frac{(2\alpha+6)+(2\beta+6)}{3}=\frac{2(\alpha+\beta)+12}{3}$$

$$=\frac{2\times10+12}{3}=\frac{32}{3}$$

$$\therefore a+b=14$$

답 **14**

## 57

**전략** 세 점 A, B, C의 좌표가 의미하는 것을 파악한다.

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}=\frac{1\times\sqrt{3}+1\times\sqrt{2}}{1+1}$$

이므로 점 A는 선분 PQ의 중점이다.

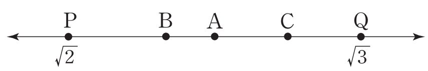
$$\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}=\frac{1\times\sqrt{3}+2\times\sqrt{2}}{1+2}$$

이므로 점 B는 선분 PQ를 $1:2$로 내분하는 점이다.

$$\frac{\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{4}=\frac{3\times\sqrt{3}+1\times\sqrt{2}}{3+1}$$

이므로 점 C는 선분 PQ를 $3:1$로 내분하는 점이다.

따라서 세 점 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같으므로 위치가 왼쪽인 점부터 순서대로 나열하면 B, A, C이다.



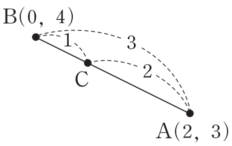

답 **B, A, C**

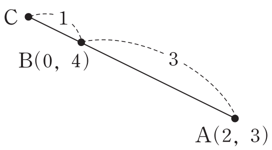
## 58

**전략** 조건을 만족시키는 점 C의 위치를 파악한다.

$\overline{AB}=3\overline{BC}$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=3:1$

이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.




(ⅰ) 점 C가 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 경우

점 C의 좌표는

$$\left(\frac{2\times0+1\times2}{2+1}, \frac{2\times4+1\times3}{2+1}\right),$$

즉 $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$

(ⅱ) 점 B가 선분 AC를 3 : 1로 내분하는 경우

점 C의 좌표를 $(x, y)$라 하면

$$\frac{3\times x+1\times2}{3+1}=0, \frac{3\times y+1\times3}{3+1}=4$$

$\therefore x=-\frac{2}{3}, y=\frac{13}{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 점 C의 좌표는

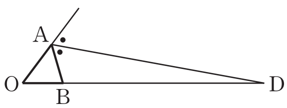
$\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$ 또는 $\left(-\frac{2}{3}, \frac{13}{3}\right)$

$$\therefore ab+pq=\frac{2}{3}\times\frac{11}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)\times\frac{13}{3}=-\frac{4}{9}$$

**답** $-\frac{4}{9}$

## 59

**전략** 삼각형의 외각의 이등분선의 성질을 이용한다.




$\overline{AD}$는 ∠A의 외각의 이등분선이므로

$\overline{AO}:\overline{AB}=\overline{OD}:\overline{BD}$

이때 $\overline{AO}=6$, $\overline{AB}=\sqrt{4^2+(3-6)^2}=5$이므로

$\overline{OD}:\overline{BD}=6:5$

$\therefore \overline{OB}:\overline{BD}=(6-5):5=1:5$

따라서 점 B는 $\overline{OD}$를 1 : 5로 내분하는 점이므로

$$\frac{1\times a+5\times0}{1+5}=4, \frac{1\times b+5\times0}{1+5}=3$$

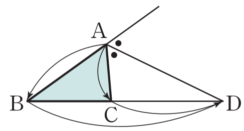
$\therefore a=24, b=18$ $\quad\therefore a-b=6$

**답** 6

**개념 노트**

**삼각형의 외각의 이등분선의 성질**

삼각형 ABC에서 ∠A의 외각의 이등분선이 변 BC의 연장선과 만나는 점을 D라 하면




$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

## 60

**전략** $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P는 △ABC의 무게중심임을 이용한다.

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P는 △ABC의 무게중심과 일치한다.

△ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{1+4+1}{3}, \frac{0+0+a}{3}\right), \text{즉} \left(2, \frac{a}{3}\right)$$

$P\left(2, \frac{a}{3}\right)$일 때

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$$
$$=\left\{(2-1)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^2\right\}+\left\{(2-4)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^2\right\}$$
$$+\left\{(2-1)^2+\left(\frac{a}{3}-a\right)^2\right\}$$
$$=\frac{2}{3}a^2+6$$

따라서 $\frac{2}{3}a^2+6=30$이므로

$a^2=36$ $\quad\therefore a=6$ ($\because a>0$)

**답** 6

**다른 풀이** 점 P의 좌표를 $(x, y)$라 하면

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$$
$$=(x-1)^2+y^2+(x-4)^2+y^2$$
$$+(x-1)^2+(y-a)^2$$
$$=3x^2+3y^2-12x-2ay+a^2+18$$
$$=3(x-2)^2+3\left(y-\frac{a}{3}\right)^2+\frac{2}{3}a^2+6$$

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$은 $x=2, y=\frac{a}{3}$일 때 최솟값 $\frac{2}{3}a^2+6$을 가지므로

$\frac{2}{3}a^2+6=30$ $\quad\therefore a=6$ ($\because a>0$)

# 2 직선의 방정식

## 01 직선의 방정식

● 본책 34~43쪽

### 61

(1) $y-3=2(x-1)$ $\qquad \therefore y=2x+1$

(2) $y-1=-3\{x-(-2)\}$ $\qquad \therefore y=-3x-5$

(3) 직선의 기울기가 $\tan 45°=1$이므로

$$y-\sqrt{2}=1\times\{x-(-\sqrt{2})\}$$

$$\therefore y=x+2\sqrt{2}$$

답 (1) $\boldsymbol{y=2x+1}$ (2) $\boldsymbol{y=-3x-5}$ (3) $\boldsymbol{y=x+2\sqrt{2}}$

### 62

(1) $y-2=\dfrac{-4-2}{3-1}(x-1)$ $\qquad \therefore y=-3x+5$

(2) $y-5=\dfrac{-1-5}{2-(-3)}\{x-(-3)\}$

$$\therefore y=-\frac{6}{5}x+\frac{7}{5}$$

(3) $y-(-2)=\dfrac{-2-4}{0-2}x$ $\qquad \therefore y=3x-2$

(4) $y=\dfrac{3-0}{4-1}(x-1)$ $\qquad \therefore y=x-1$

답 (1) $\boldsymbol{y=-3x+5}$ (2) $\boldsymbol{y=-\frac{6}{5}x+\frac{7}{5}}$ (3) $\boldsymbol{y=3x-2}$ (4) $\boldsymbol{y=x-1}$

### 63

(1) $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{-1}=1$ $\qquad \therefore y=\dfrac{1}{4}x-1$

(2) $x$절편이 $-1$이고 $y$절편이 5이므로

$$\frac{x}{-1}+\frac{y}{5}=1 \qquad \therefore y=5x+5$$

(3) $x$절편이 2이고 $y$절편이 3이므로

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1 \qquad \therefore y=-\frac{3}{2}x+3$$

답 (1) $\boldsymbol{y=\frac{1}{4}x-1}$ (2) $\boldsymbol{y=5x+5}$ (3) $\boldsymbol{y=-\frac{3}{2}x+3}$

### 64

답 (1) $\boldsymbol{y=8}$ (2) $\boldsymbol{x=3}$ (3) $\boldsymbol{x=-5}$ (4) $\boldsymbol{y=-3}$

### 65

점 $(2,\ -1)$을 지나고 기울기가 $\tan 60°=\sqrt{3}$인 직선의 방정식은

$$y-(-1)=\sqrt{3}(x-2)$$

$$\therefore \sqrt{3}x-y-2\sqrt{3}-1=0$$

따라서 $a=-1$, $b=-2\sqrt{3}-1$이므로

$$ab=2\sqrt{3}+1$$

답 $\boldsymbol{2\sqrt{3}+1}$

### 66

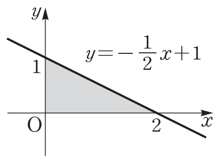
점 $(-4,\ 3)$을 지나고 기울기가 $-\dfrac{1}{2}$인 직선의 방정식은

$$y-3=-\frac{1}{2}(x+4)$$

$$\therefore y=-\frac{1}{2}x+1$$

이 직선의 $x$절편은 2, $y$절편은 1이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\times2\times1=1$$




답 **1**

**해설 Focus**

$x$절편이 $p$, $y$절편이 $q$인 직선과 $x$축, $y$축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times|p|\times|q|=\frac{|pq|}{2}$$

### 67

$\triangle$ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{2-3+7}{3},\ \frac{4-1-6}{3}\right),\ 즉\ (2,\ -1)$$

따라서 두 점 G$(2,\ -1)$, C$(7,\ -6)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-(-1)=\frac{-6-(-1)}{7-2}(x-2)$$

$$\therefore y=-x+1$$

답 $\boldsymbol{y=-x+1}$

다른 풀이 두 점 G, C를 지나는 직선은 $\triangle$ABC의 중선이므로 $\overline{\text{AB}}$의 중점을 지난다.

$\overline{\text{AB}}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2-3}{2},\ \frac{4-1}{2}\right),\ 즉\ \left(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$$

따라서 두 점 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $(7, -6)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-(-6)=\frac{-6-\frac{3}{2}}{7-\left(-\frac{1}{2}\right)}(x-7)$$

$\therefore y=-x+1$

## 68

$4x+3y=6$에 $y=0$을 대입하면

$4x=6 \quad \therefore x=\frac{3}{2} \quad \therefore \mathrm{P}\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

$3x-2y=12$에 $x=0$을 대입하면

$-2y=12 \quad \therefore y=-6 \quad \therefore \mathrm{Q}(0, -6)$

따라서 직선 PQ의 $x$절편은 $\frac{3}{2}$, $y$절편은 $-6$이므로 직선 PQ의 방정식은

$$\frac{x}{\frac{3}{2}}+\frac{y}{-6}=1, \quad \frac{2}{3}x-\frac{1}{6}y=1$$

$\therefore y=4x-6$

답 $\boldsymbol{y=4x-6}$

## 69

$y$절편을 $a\ (a\neq 0)$라 하면 $x$절편은 $2a$이므로 구하는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{2a}+\frac{y}{a}=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이 직선이 점 $(6, -4)$를 지나므로

$$\frac{6}{2a}+\frac{-4}{a}=1, \quad -\frac{1}{a}=1$$

$\therefore a=-1$

㉠에 $a=-1$을 대입하면

$$-\frac{x}{2}-y=1 \quad \therefore y=-\frac{1}{2}x-1$$

답 $\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x-1}$

## 70

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

(직선 AB의 기울기)=(직선 AC의 기울기)

이어야 하므로

$$\frac{k-(-1)}{2-1}=\frac{-10-(-1)}{-k-1}$$

$(k+1)^2=9, \quad k^2+2k-8=0$

$(k+4)(k-2)=0$

$\therefore k=-4$ 또는 $k=2$

따라서 모든 $k$의 값의 합은

$-4+2=-2$

답 $\boldsymbol{-2}$

## 71

직선 $y=ax$는 원점 O를 지나므로 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하려면 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점을 지나야 한다.

$\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{4+8}{2}, \frac{4-6}{2}\right)$, 즉 $(6, -1)$

따라서 직선 $y=ax$가 점 $(6, -1)$을 지나므로

$-1=6a \quad \therefore a=-\frac{1}{6}$

답 $\boldsymbol{-\frac{1}{6}}$

## 72

마름모의 넓이를 이등분하는 직선은 마름모의 두 대각선의 교점을 지난다.

마름모 ABCD의 두 대각선의 교점은 대각선 AC의 중점이고, 두 점 A$(1, 2)$, C$(5, 2)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{2+2}{2}\right)$, 즉 $(3, 2)$

따라서 두 점 $(-1, 1)$, $(3, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=\frac{2-1}{3-(-1)}\{x-(-1)\}$$

$\therefore y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$

답 $\boldsymbol{y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}}$

## 73

직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지난다.

직사각형 ABCD의 두 대각선의 교점은 대각선 AC의 중점이고, 두 점 A$(1, 4)$, C$(5, 2)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$, 즉 $(3, 3)$

따라서 직선 $kx-4y+3=0$이 점 $(3,\ 3)$을 지나야 하므로

$$3k-12+3=0, \qquad 3k=9$$

$$\therefore\ k=3$$

답 **3**

## 74

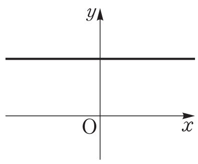
(1) $ax+by+c=0$에서 $a=0$이므로

$$y=-\frac{c}{b}$$

$bc<0$에서

$$\frac{c}{b}<0 \qquad \therefore\ -\frac{c}{b}>0$$

따라서 $x$축에 평행하고 $y$절편이 양수인 직선은 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2 사분면을 지난다.




(2) $ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$이므로

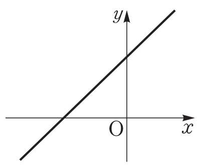
$$(\text{기울기})=-\frac{a}{b},\ (y\text{절편})=-\frac{c}{b}$$

$ab<0$, $bc<0$에서

$$\frac{a}{b}<0,\ \frac{c}{b}<0$$

$$\therefore\ -\frac{a}{b}>0,\ -\frac{c}{b}>0$$

따라서 기울기와 $y$절편이 모두 양수인 직선은 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2, 3 사분면을 지난다.



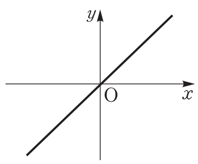

(3) $ax+by+c=0$에서 $c=0$이므로

$$y=-\frac{a}{b}x$$

$ab<0$에서

$$\frac{a}{b}<0 \qquad \therefore\ -\frac{a}{b}>0$$

따라서 기울기가 양수이고 원점을 지나는 직선은 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 3 사분면을 지난다.




답 (1) **제1, 2 사분면** (2) **제1, 2, 3 사분면** (3) **제1, 3 사분면**

## 75

$ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$이므로

$$(\text{기울기})=-\frac{a}{b},\ (y\text{절편})=-\frac{c}{b}$$

$ab>0$, $ac<0$에서 $a$, $b$의 부호는 같고, $a$, $c$의 부호는 서로 다르므로 $b$, $c$의 부호는 서로 다르다.

즉 $\frac{a}{b}>0$, $\frac{c}{b}<0$이므로

$$-\frac{a}{b}<0,\ -\frac{c}{b}>0$$

따라서 직선 $ax+by+c=0$의 기울기는 음수이고 $y$절편은 양수이므로 직선의 개형은 ③이다.

답 ③

## 76

$(2k-1)x-(k-1)y-3=0$을 $k$에 대하여 정리하면

$$(-x+y-3)+k(2x-y)=0$$

이 식이 $k$의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$-x+y-3=0,\ 2x-y=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=3,\ y=6$$

따라서 점 P의 좌표는 $(3,\ 6)$이다.

답 **(3, 6)**

## 77

$(k-2)x+(2k+1)y+7-k=0$을 $k$에 대하여 정리하면

$$(-2x+y+7)+k(x+2y-1)=0$$

이 식이 $k$의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$-2x+y+7=0,\ x+2y-1=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=3,\ y=-1$$

따라서 점 P의 좌표는 $(3,\ -1)$이므로

$$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$$

답 $\boldsymbol{\sqrt{10}}$

## 78

$mx+y-m+1=0$을 $m$에 대하여 정리하면

$$(x-1)m+y+1=0 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

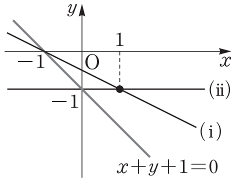
이 식이 $m$의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x-1=0,\ y+1=0$$

$$\therefore\ x=1,\ y=-1$$

따라서 직선 ㉠은 $m$의 값에 관계없이 항상 점 $(1, -1)$을 지난다.

오른쪽 그림에서




(i) 직선 ㉠이 점 $(-1, 0)$을 지날 때

$$-2m+1=0$$

$$\therefore m=\frac{1}{2}$$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(0, -1)$을 지날 때

$$-m=0 \qquad \therefore m=0$$

(i), (ii)에서 구하는 $m$의 값의 범위는

$$0<m<\frac{1}{2}$$

답 $\mathbf{0<m<\frac{1}{2}}$

## 79

$y=mx+2$에서

$$xm-y+2=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

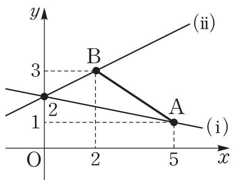
이 식이 $m$의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x=0, \ -y+2=0$$

$$\therefore x=0, \ y=2$$

따라서 직선 ㉠은 $m$의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 2)$를 지난다.

오른쪽 그림에서




(i) 직선 ㉠이 점 $A(5, 1)$을 지날 때

$$5m+1=0$$

$$\therefore m=-\frac{1}{5}$$

(ii) 직선 ㉠이 점 $B(2, 3)$을 지날 때

$$2m-1=0 \qquad \therefore m=\frac{1}{2}$$

(i), (ii)에서 구하는 $m$의 값의 범위는

$$-\frac{1}{5}\le m\le\frac{1}{2}$$

답 $\mathbf{-\frac{1}{5}\le m\le\frac{1}{2}}$

## 80

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$3x+2y+1+k(2x-y+10)=0 \ (k\text{는 실수}) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이라 하자.

직선 ㉠이 원점을 지나려면

$$1+10k=0$$

$$\therefore k=-\frac{1}{10}$$

㉠에 $k=-\frac{1}{10}$을 대입하면

$$3x+2y+1-\frac{1}{10}(2x-y+10)=0$$

$$\therefore 4x+3y=0$$

답 $\mathbf{4x+3y=0}$

다른 풀이 두 식 $3x+2y=-1$, $2x-y+10=0$을 연립하여 풀면

$$x=-3, \ y=4$$

이므로 주어진 두 직선의 교점의 좌표는

$$(-3, 4)$$

따라서 두 점 $(-3, 4)$, $(0, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y=-\frac{4}{3}x \qquad \therefore 4x+3y=0$$

## 81

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$4x-3y+5+k(x+2y-7)=0, \text{ 즉}$$

$$(k+4)x+(2k-3)y-7k+5=0 \ (k\text{는 실수}) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠의 기울기가 $-6$이려면

$$-\frac{k+4}{2k-3}=-6, \qquad k+4=6(2k-3)$$

$$-11k=-22 \qquad \therefore k=2$$

㉠에 $k=2$를 대입하면

$$6x+y-9=0$$

답 $\mathbf{6x+y-9=0}$

다른 풀이 두 식 $4x-3y+5=0$, $x+2y-7=0$을 연립하여 풀면

$$x=1, \ y=3$$

이므로 주어진 두 직선의 교점의 좌표는

$$(1, 3)$$

따라서 기울기가 $-6$이고 점 $(1, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=-6(x-1)$$

$$\therefore 6x+y-9=0$$

## 연습 문제

● 본책 44~46쪽

### 82

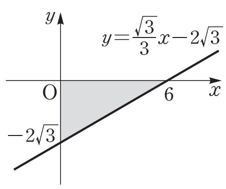
**전략** 주어진 직선의 기울기가 $\tan 30°$임을 이용한다.

기울기가 $\tan 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이고 점 $(3,\ -\sqrt{3})$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-(-\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-3)$$

$$\therefore\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2\sqrt{3}$$

이 직선의 $x$절편은 6, $y$절편은 $-2\sqrt{3}$이므로 구하는 넓이는




$$\frac{1}{2}\times 6\times 2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$$

답 $\mathbf{6\sqrt{3}}$

### 83

**전략** 먼저 두 점 $(-1,\ 2)$, $(1,\ 8)$을 지나는 직선의 방정식을 구한다.

두 점 $(-1,\ 2)$, $(1,\ 8)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-2=\frac{8-2}{1-(-1)}\{x-(-1)\}$$

$$\therefore\ y=3x+5$$

점 $(a-1,\ a+5)$가 이 직선 위의 점이므로

$$a+5=3(a-1)+5,\qquad -2a=-3$$

$$\therefore\ a=\frac{3}{2}$$

답 $\mathbf{\frac{3}{2}}$

**다른 풀이** 세 점 $(a-1,\ a+5)$, $(-1,\ 2)$, $(1,\ 8)$이 한 직선 위에 있으므로

$$\frac{2-(a+5)}{-1-(a-1)}=\frac{8-2}{1-(-1)},\qquad a+3=3a$$

$$\therefore\ a=\frac{3}{2}$$

### 84

**전략** $y$절편을 $a$라 하면 $x$절편은 $-a$임을 이용하여 직선의 방정식을 세운다.

$x$절편과 $y$절편의 절댓값이 같고 부호가 반대이므로 $y$절편을 $a\ (a\neq 0)$라 하면 $x$절편은 $-a$이다.

따라서 직선의 방정식은

$$\frac{x}{-a}+\frac{y}{a}=1$$

이 직선이 점 $(2,\ -1)$을 지나므로

$$-\frac{2}{a}-\frac{1}{a}=1\qquad \therefore\ a=-3$$

답 $\mathbf{-3}$

### 85

**전략** 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같음을 이용하여 $a$의 값을 구한다.

세 점 $\mathrm{A}(1,\ 1)$, $\mathrm{B}(-1,\ -a)$, $\mathrm{C}(a,\ 5)$가 한 직선 위에 있으므로

(직선 AB의 기울기)$=$(직선 AC의 기울기)

$$\frac{-a-1}{-1-1}=\frac{5-1}{a-1},\qquad (a+1)(a-1)=8$$

$$a^2=9\qquad \therefore\ a=3\ (\because\ a>0)$$

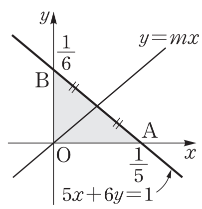
따라서 직선 $l$은 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 1)$, $\mathrm{B}(-1,\ -3)$을 지나므로 직선 $l$의 방정식은

$$y-1=\frac{-3-1}{-1-1}(x-1)\qquad \therefore\ y=2x-1$$

답 $\mathbf{y=2x-1}$

### 86

**전략** 직선 $5x+6y=1$의 $x$절편과 $y$절편을 이용하여 직선 $y=mx$가 지나는 점의 좌표를 구한다.




직선 $5x+6y=1$이 $x$축, $y$축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면

$$\mathrm{A}\left(\frac{1}{5},\ 0\right),\ \mathrm{B}\left(0,\ \frac{1}{6}\right)$$

이때 직선 $y=mx$가 원점 O를 지나므로 $\triangle\mathrm{OAB}$의 넓이를 이등분하려면 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점을 지나야 한다.

$\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{\frac{1}{5}+0}{2},\ \frac{0+\frac{1}{6}}{2}\right),\ \text{즉}\ \left(\frac{1}{10},\ \frac{1}{12}\right)$$

따라서 직선 $y=mx$가 이 점을 지나므로

$$\frac{1}{12}=\frac{1}{10}m\qquad \therefore\ m=\frac{5}{6}$$

답 $\mathbf{\frac{5}{6}}$

### 87

**전략** 주어진 그림에서 직선의 기울기와 $y$절편의 부호를 이용하여 $ab$, $bc$의 부호를 알아낸다.

$ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$이므로

$(\text{기울기})=-\frac{a}{b}<0$, $(y\text{절편})=-\frac{c}{b}>0$

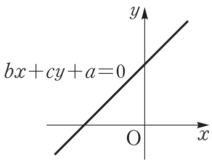
$\therefore ab>0,\ bc<0$

이때 $a$, $c$의 부호는 서로 다르므로 $ac<0$

$bx+cy+a=0$에서 $y=-\frac{b}{c}x-\frac{a}{c}$이므로

$(\text{기울기})=-\frac{b}{c}>0$, $(y\text{절편})=-\frac{a}{c}>0$

따라서 직선 $bx+cy+a=0$의 기울기와 $y$절편이 모두 양수이므로 오른쪽 그림과 같이 제4사분면을 지나지 않는다.




답 **제4사분면**

## 88

**전략** 직선 AB의 방정식과 일차함수 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$을 이용하여 두 점 C, D의 좌표를 구한다.

$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$에 $y=0$을 대입하면

$0=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\qquad \therefore x=-1$

따라서 C$(-1, 0)$이므로

$\overline{BC}=8-(-1)=9$

한편 두 점 A$(2, 6)$, B$(8, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{0-6}{8-2}(x-8)\qquad \therefore y=-x+8$

점 D는 직선 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$과 직선 $y=-x+8$의 교점이므로 $-x+8=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$에서

$-\frac{3}{2}x=-\frac{15}{2}\qquad \therefore x=5$

$\therefore$ D$(5, 3)$

따라서 △CBD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times9\times3=\frac{27}{2}$

답 ⑤

## 89

**전략** 직사각형의 둘레의 길이를 이용하여 두 점 B, D의 좌표를 구한다.

직사각형의 둘레의 길이는 32이고 세로의 길이를 $a\ (a>0)$라 하면 가로의 길이는 $3a$이므로

$2(3a+a)=32\qquad \therefore a=4$

즉 직사각형의 세로의 길이는 4, 가로의 길이는 12이므로 점 B의 $y$좌표를 $m$이라 하면

$3-m=4\qquad \therefore m=-1$

$\therefore$ B$(-8, -1)$

점 D의 $x$좌표를 $n$이라 하면

$n-(-8)=12\qquad \therefore n=4$

$\therefore$ D$(4, 3)$

따라서 두 점 B, D를 지나는 직선의 방정식은

$y-(-1)=\frac{3-(-1)}{4-(-8)}\{x-(-8)\}$

$\therefore y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$

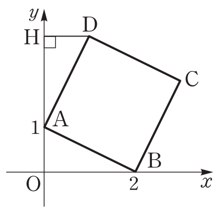
즉 구하는 $y$절편은 $\frac{5}{3}$이다.

답 $\mathbf{\frac{5}{3}}$

## 90

**전략** 직각삼각형의 합동을 이용하여 점 D의 좌표를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 점 D에서 $y$축에 내린 수선의 발을 H라 하면




△ABO≡△DAH (RHA 합동)

즉 $\overline{DH}=\overline{AO}=1$,

$\overline{HA}=\overline{OB}=2$이므로 D$(1, 3)$

따라서 두 점 B$(2, 0)$, D$(1, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{3-0}{1-2}(x-2)\qquad \therefore y=-3x+6$

답 $\boldsymbol{y=-3x+6}$

## 91

**전략** 세 점이 한 직선 위에 있을 조건을 이용한다.

세 점 A$(2, -5)$, B$(a, -2)$, C$(6, 2a+1)$이 삼각형을 이루지 않으려면 세 점이 한 직선 위에 있어야 하므로

(직선 AB의 기울기)=(직선 AC의 기울기)

$\frac{-2-(-5)}{a-2}=\frac{2a+1-(-5)}{6-2}$

$$12=(2a+6)(a-2)$$

$$a^2+a-12=0, \qquad (a+4)(a-3)=0$$

$$\therefore a=3 \ (\because a>0)$$

따라서 B$(3, -2)$, C$(6, 7)$이므로

$$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(6-3)^2+(7+2)^2}=3\sqrt{10}$$ 답 $\mathbf{3\sqrt{10}}$

## 92

**전략** 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지남을 이용한다.

두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 각 직사각형의 두 대각선의 교점을 동시에 지나야 한다.

제2사분면 위에 있는 직사각형의 두 대각선의 교점은 두 점 $(-3, 2)$, $(-1, 6)$을 이은 선분의 중점이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{-3-1}{2}, \frac{2+6}{2}\right), \text{ 즉 } (-2, 4)$$

제4사분면 위에 있는 직사각형의 두 대각선의 교점은 두 점 $(3, -4)$, $(7, -2)$를 이은 선분의 중점이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{3+7}{2}, \frac{-4-2}{2}\right), \text{ 즉 } (5, -3)$$

따라서 두 점 $(-2, 4)$, $(5, -3)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-4=\frac{-3-4}{5-(-2)}\{x-(-2)\}$$

$$\therefore y=-x+2$$ 답 $\boldsymbol{y=-x+2}$

## 93

**전략** $b$를 $a$에 대한 식으로 나타낸 후 $ax+by+6=0$에 대입한다.

점 $(a, b)$가 직선 $2x-y=3$ 위에 있으므로

$$2a-b=3 \qquad \therefore b=2a-3$$

$ax+by+6=0$에 이것을 대입하면

$$ax+(2a-3)y+6=0$$

이 식을 $a$에 대하여 정리하면

$$-3y+6+(x+2y)a=0$$

이 식이 $a$의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$-3y+6=0, \ x+2y=0$$

$$\therefore x=-4, \ y=2$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-4, 2)$이다.

답 $\mathbf{(-4, 2)}$

## 94

**전략** 먼저 직선 $y=mx+2m-1$이 $m$의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 구한다.

$y=mx+2m-1$을 $m$에 대하여 정리하면

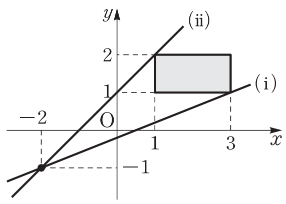
$$(x+2)m-(y+1)=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이 식이 $m$의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x+2=0, \ y+1=0$$

$$\therefore x=-2, \ y=-1$$

따라서 직선 ㉠은 $m$의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, -1)$을 지난다.




위의 그림에서

(i) 직선 ㉠이 점 $(3, 1)$을 지날 때

$$5m-2=0 \qquad \therefore m=\frac{2}{5}$$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(1, 2)$를 지날 때

$$3m-3=0 \qquad \therefore m=1$$

(i), (ii)에서 $m$의 값의 범위는 $\quad \frac{2}{5}\le m\le 1$

따라서 $\alpha=\frac{2}{5}$, $\beta=1$이므로

$$5\alpha\beta=2$$ 답 $\mathbf{2}$

## 95

**전략** □OAEF와 □BCFD의 넓이 사이의 관계를 이용하여 $\overline{\mathrm{AD}}$와 $\overline{\mathrm{BE}}$의 길이 사이의 관계를 구한다.

□OAEF$=$□BCFD$+4$이므로

$$\triangle\mathrm{OAD}=\square\mathrm{OAEF}+\triangle\mathrm{DFE}$$

$$=(\square\mathrm{BCFD}+4)+\triangle\mathrm{DFE}$$

$$=\triangle\mathrm{BCE}+4$$

이때

$$\triangle\mathrm{OAD}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{AD}}=\frac{1}{2}\times4\times\overline{\mathrm{AD}}=2\overline{\mathrm{AD}},$$

$$\triangle\mathrm{BCE}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{BE}}=\frac{1}{2}\times4\times\overline{\mathrm{BE}}=2\overline{\mathrm{BE}}$$

이므로 $\quad 2\overline{\mathrm{AD}}=2\overline{\mathrm{BE}}+4$

$$\therefore \overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BE}}+2$$

이때 $\overline{\mathrm{BE}}=k\ (0<k<6)$라 하면 $\quad\overline{\mathrm{AD}}=k+2$

한편 직선 OD의 기울기는

$$\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\overline{\mathrm{OA}}}=\frac{k+2}{4}$$

직선 CE의 기울기는

$$-\frac{\overline{\mathrm{BE}}}{\overline{\mathrm{CB}}}=-\frac{k}{4} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 OD와 직선 CE의 기울기의 곱이 $-\frac{15}{16}$이므로

$$\frac{k+2}{4}\times\left(-\frac{k}{4}\right)=-\frac{15}{16}$$

$$k(k+2)=15, \qquad k^2+2k-15=0$$

$$(k+5)(k-3)=0 \qquad \therefore k=3\ (\because 0<k<6)$$

따라서 ㉠에서 직선 CE의 기울기는 $-\frac{3}{4}$이므로 구하는 방정식은

$$y=-\frac{3}{4}x+6$$

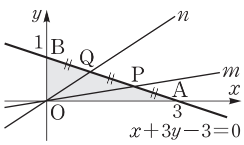
답 $\boldsymbol{y=-\frac{3}{4}x+6}$

## 96

**전략** 삼각형의 한 꼭짓점을 지나면서 넓이를 삼등분하는 직선은 그 꼭짓점의 대변을 삼등분하는 점을 각각 지남을 이용한다.

직선 $x+3y-3=0$이 $x$축, $y$축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면

$$\mathrm{A}(3,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ 1)$$




$\overline{\mathrm{AB}}$의 삼등분점을 각각 P, Q라 하면 두 직선 $m$, $n$은 각각 점 P, Q를 지나야 한다.

위의 그림에서 점 P는 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $1:2$로 내분하므로 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1\times0+2\times3}{1+2},\ \frac{1\times1+2\times0}{1+2}\right),\ 즉\ \left(2,\ \frac{1}{3}\right)$$

점 Q는 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $2:1$로 내분하므로 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{2\times0+1\times3}{2+1},\ \frac{2\times1+1\times0}{2+1}\right),\ 즉\ \left(1,\ \frac{2}{3}\right)$$

따라서 직선 OP의 기울기는 $\frac{\frac{1}{3}}{2}=\frac{1}{6}$, 직선 OQ의 기울기는 $\frac{2}{3}$이므로 두 직선 $m$, $n$의 기울기의 합은

$$\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$$

답 $\boldsymbol{\frac{5}{6}}$

## 97

**전략** 먼저 직선 $y=kx-2k+2$가 $k$의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 구한다.

$y=kx-2k+2$에서

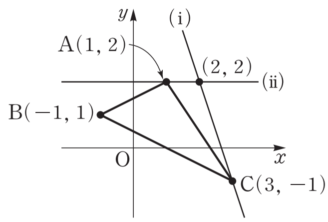
$$(x-2)k-y+2=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이 식이 $k$의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x-2=0,\ -y+2=0$$

$$\therefore x=2,\ y=2$$

따라서 직선 ㉠은 $k$의 값에 관계없이 항상 점 $(2,\ 2)$를 지난다.




위의 그림에서

(i) 직선 ㉠이 점 $\mathrm{C}(3,\ -1)$을 지날 때

$$k+3=0 \qquad \therefore k=-3$$

(ii) 직선 ㉠이 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$를 지날 때

$$-k=0 \qquad \therefore k=0$$

(i), (ii)에서 구하는 $k$의 값의 범위는

$$-3<k<0$$

답 $\boldsymbol{-3<k<0}$

# 02 직선의 위치 관계

● 본책 47~53쪽

## 98

(2) 두 직선이 평행하므로

$$\frac{a}{1}=\frac{4}{a}\neq\frac{1}{-3}$$

$$\frac{a}{1}=\frac{4}{a}에서 \qquad a^2=4 \qquad \therefore a=\pm2$$

답 (1) $\boldsymbol{-3}$ (2) $\boldsymbol{-2,\ 2}$

## 99

(2) 두 직선이 일치하므로

$$\frac{a}{3}=\frac{3}{b}=\frac{-2}{6}$$

$\frac{a}{3}=\frac{-2}{6}$에서 $\quad 6a=-6 \quad \therefore a=-1$

$\frac{3}{b}=\frac{-2}{6}$에서 $\quad 18=-2b \quad \therefore b=-9$

답 (1) $\boldsymbol{a=-1,\ b=5}$ (2) $\boldsymbol{a=-1,\ b=-9}$

## 100

(1) 두 직선의 기울기의 곱이 $-1$이므로

$$a\times4=-1 \qquad \therefore a=-\frac{1}{4}$$

(2) 두 직선이 수직이므로

$$(a-2)\times a+3\times(-1)=0$$

$$a^2-2a-3=0, \qquad (a+1)(a-3)=0$$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$

답 (1) $\boldsymbol{-\frac{1}{4}}$ (2) $\boldsymbol{-1,\ 3}$

## 101

두 직선이 평행하므로

$$\frac{a+1}{2}=\frac{1}{-(a-2)}\neq\frac{-1}{-1}$$

$\frac{a+1}{2}=\frac{1}{-(a-2)}$에서 $\quad -(a+1)(a-2)=2$

$$a^2-a=0, \qquad a(a-1)=0$$

$\therefore a=0$ 또는 $a=1$ …… ㉠

$\frac{a+1}{2}\neq\frac{-1}{-1}$에서 $\quad a+1\neq2$

$\therefore a\neq1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad a=0$

답 **0**

## 102

두 직선 $ax-6y-5=0$, $x-2y-3=0$이 평행하므로

$$\frac{a}{1}=\frac{-6}{-2}\neq\frac{-5}{-3} \qquad \therefore a=3$$

두 직선 $ax-6y-5=0$, $2x-by+1=0$이 수직이므로

$$a\times2+(-6)\times(-b)=0$$

$$\therefore a+3b=0$$

이 식에 $a=3$을 대입하면

$$3+3b=0 \qquad \therefore b=-1$$

$$\therefore a+b=2$$

답 **2**

## 103

두 직선 $(a-2)x+y+1=0$, $ax-3y+b=0$이 수직이므로

$$(a-2)\times a+1\times(-3)=0$$

$$a^2-2a-3=0, \qquad (a+1)(a-3)=0$$

$$\therefore a=3\ (\because a>0)$$

즉 두 직선 $x+y+1=0$, $3x-3y+b=0$의 교점의 좌표가 $(-2,\ c)$이므로

$$-2+c+1=0,\ -6-3c+b=0$$

$$\therefore c=1,\ b=9$$

$$\therefore a+b+c=3+9+1=13$$

답 **13**

## 104

직선 $y=4x-12$에 평행한 직선의 기울기는 4이다.

기울기가 4이고 점 $(-2,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y-5=4(x+2) \qquad \therefore y=4x+13$$

이 직선이 점 $(6,\ k)$를 지나므로

$$k=4\times6+13=37$$

답 **37**

## 105

두 점 $(1,\ 3)$, $(5,\ -7)$을 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+5}{2},\ \frac{3-7}{2}\right)$, 즉 $(3,\ -2)$

$3x+5y-12=0$에서 $\quad y=-\frac{3}{5}x+\frac{12}{5}$

이 직선에 수직인 직선의 기울기를 $m$이라 하면

$$-\frac{3}{5}\times m=-1 \qquad \therefore m=\frac{5}{3}$$

따라서 기울기가 $\frac{5}{3}$이고 점 $(3,\ -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y+2=\frac{5}{3}(x-3) \qquad \therefore y=\frac{5}{3}x-7$$

답 $\boldsymbol{y=\frac{5}{3}x-7}$

## 106

$\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{2-4}{2}\right), \text{ 즉 } (2, -1)$$

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{-4-2}{5-(-1)}=-1$$

따라서 $\overline{AB}$의 수직이등분선은 기울기가 1이고 점 $(2, -1)$을 지나는 직선이므로 그 방정식은

$$y+1=1\times(x-2) \qquad \therefore y=x-3$$

이 직선이 점 $(a, -2)$를 지나므로

$$-2=a-3 \qquad \therefore a=1$$

답 **1**

## 107

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{8-(-4)}{a-(-5)}=\frac{12}{a+5}$$

$2x+3y+b=0$에서

$$y=-\frac{2}{3}x-\frac{b}{3}$$

두 직선이 수직이므로

$$\frac{12}{a+5}\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-1, \qquad a+5=8$$

$$\therefore a=3$$

즉 B$(3, 8)$이므로 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-5+3}{2}, \frac{-4+8}{2}\right), \text{ 즉 } (-1, 2)$$

따라서 직선 $2x+3y+b=0$이 점 $(-1, 2)$를 지나므로

$$-2+6+b=0 \qquad \therefore b=-4$$

$$\therefore a-b=3-(-4)=7$$

답 **7**

## 108

$2x+y+1=0$ …… ㉠

$x-y+2=0$ …… ㉡

$ax-y=0$ …… ㉢

(i) 세 직선이 평행한 경우

두 직선 ㉠, ㉡은 평행하지 않으므로 세 직선이 평행할 수는 없다.

(ii) 두 직선이 평행한 경우

두 직선 ㉠, ㉢이 평행하려면

$$\frac{a}{2}=\frac{-1}{1}\neq\frac{0}{1} \qquad \therefore a=-2$$

두 직선 ㉡, ㉢이 평행하려면

$$\frac{a}{1}=\frac{-1}{-1}\neq\frac{0}{2} \qquad \therefore a=1$$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad x=-1, y=1$

따라서 두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 좌표는 $(-1, 1)$이다.

직선 ㉢이 점 $(-1, 1)$을 지나려면

$$-a-1=0 \qquad \therefore a=-1$$

이상에서 모든 상수 $a$의 값의 합은

$$-2+1+(-1)=-2$$

답 **−2**

### 연습 문제

● 본책 54~55쪽

## 109

**전략** 두 직선의 평행과 수직 조건을 이용하여 $a+b$, $ab$의 값을 구한다.

두 직선 $x+ay+1=0$, $2x-by+1=0$이 수직이므로

$$1\times2+a\times(-b)=0 \qquad \therefore ab=2$$

두 직선 $x+ay+1=0$, $x-(b-3)y-1=0$이 평행하므로

$$\frac{1}{1}=\frac{a}{-(b-3)}\neq\frac{1}{-1} \qquad \therefore a+b=3$$

$$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=3^2-2\times2=5$$

답 **5**

## 110

**전략** 두 직선이 지나는 점의 좌표와 두 직선의 수직 조건을 이용한다.

직선 $2x+ay+3=0$이 점 $(1, 1)$을 지나므로

$$2+a+3=0 \qquad \therefore a=-5$$

직선 $bx+2y+c=0$도 점 $(1, 1)$을 지나므로

$$b+2+c=0$$

$\therefore c=-b-2$ …… ㉠

한편 두 직선이 수직이므로

$2\times b+a\times 2=0,\qquad 2b-10=0$

$\therefore\ b=5$

㉠에 $b=5$를 대입하면 $\qquad c=-7$

$\therefore\ abc=-5\times 5\times(-7)=175$ **답 175**

## 111

**전략** 두 직선의 방정식을 연립하여 교점의 좌표를 구한다.

$x-y+5=0,\ 2x-y+3=0$을 연립하여 풀면

$x=2,\ y=7$

따라서 두 직선 $x-y+5=0,\ 2x-y+3=0$의 교점의 좌표는 $\quad(2,\ 7)$

한편 직선 $3x-2y+1=0$, 즉 $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$과 평행한 직선의 기울기는 $\frac{3}{2}$이다.

기울기가 $\frac{3}{2}$이고 점 $(2,\ 7)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-7=\frac{3}{2}(x-2)$

$\therefore\ y=\frac{3}{2}x+4$

따라서 $a=\frac{3}{2},\ b=4$이므로

$ab=6$ **답 6**

다른 풀이 두 직선 $x-y+5=0,\ 2x-y+3=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x-y+5+k(2x-y+3)=0$, 즉

$(2k+1)x-(k+1)y+3k+5=0$ ($k$는 실수) $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 직선 $3x-2y+1=0$과 평행하려면

$$\frac{2k+1}{3}=\frac{-(k+1)}{-2}\neq\frac{3k+5}{1}$$

$\frac{2k+1}{3}=\frac{-(k+1)}{-2}$에서

$4k+2=3k+3$

$\therefore\ k=1$

㉠에 $k=1$을 대입하면

$3x-2y+8=0\qquad\therefore\ y=\frac{3}{2}x+4$

## 112

**전략** 두 직선의 수직 조건을 이용한다.

두 직선 $3x+2y-4=0,\ 2x+ay+b=0$이 수직이므로

$3\times 2+2\times a=0\qquad\therefore\ a=-3$

따라서 직선 $2x+ay+b=0$, 즉 $2x-3y+b=0$이 점 $(2,\ 5)$를 지나므로

$2\times 2-3\times 5+b=0\qquad\therefore\ b=11$

$\therefore\ a+b=-3+11=8$ **답 8**

## 113

**전략** 내분점의 좌표를 구하는 공식을 이용하여 점 C의 좌표를 구한다.

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 C의 좌표는

$\left(\frac{2\times 9+1\times(-3)}{2+1},\ \frac{2\times(-4)+1\times 2}{2+1}\right)$, 즉

$(5,\ -2)$

직선 AB의 기울기는

$\frac{-4-2}{9-(-3)}=-\frac{1}{2}$

이므로 직선 AB와 수직인 직선의 기울기는 2이다.

따라서 점 $C(5,\ -2)$를 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$y+2=2(x-5)\qquad\therefore\ y=2x-12$

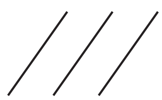
이 직선의 $x$절편은 6, $y$절편은 $-12$이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times 6\times 12=36$ **답 36**

## 114

**전략** 세 직선이 평면을 네 부분으로 나누려면 세 직선이 평행해야 한다.

서로 다른 세 직선이 좌표평면을 네 부분으로 나누려면 오른쪽 그림과 같이 세 직선이 평행해야 한다.



두 직선 $ax+y+5=0,\ x+2y+3=0$이 평행하므로

$\frac{a}{1}=\frac{1}{2}\neq\frac{5}{3}\qquad\therefore\ a=\frac{1}{2}$

두 직선 $2x+by-4=0,\ x+2y+3=0$이 평행하므로

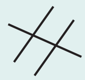
$\frac{2}{1}=\frac{b}{2}\neq\frac{-4}{3}\qquad\therefore\ b=4$

$\therefore\ a+b=\frac{9}{2}$ **답 $\frac{9}{2}$**

**해설 Focus**

① 세 직선이 좌표평면을 네 부분으로 나누는 경우
⇨ 세 직선이 평행할 때

② 세 직선이 좌표평면을 여섯 부분으로 나누는 경우
⇨ 세 직선이 한 점에서 만나거나 세 직선 중 두 직선이 평행할 때



## 115

**전략** 직선 $(3k-2)x-y+5=0$의 기울기와 $y$절편을 이용한다.

직선 $(3k-2)x-y+5=0$, 즉 $y=(3k-2)x+5$와 $y$축에서 수직으로 만나는 직선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{3k-2}x+5$$

이 직선이 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$$0=-\frac{1}{3k-2}\times2+5,\qquad 3k-2=\frac{2}{5}$$

$$\therefore\ k=\frac{4}{5}$$

**답** $\frac{4}{5}$

**다른 풀이** 직선 $(3k-2)x-y+5=0$의 $y$절편은 5이다.
$x$절편이 2, $y$절편이 5인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{5}=1$$

두 직선 $(3k-2)x-y+5=0$, $\frac{x}{2}+\frac{y}{5}=1$이 수직이므로

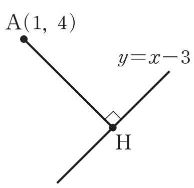
$$(3k-2)\times\frac{1}{2}+(-1)\times\frac{1}{5}=0$$

$$\frac{3k-2}{2}=\frac{1}{5},\qquad 15k-10=2$$

$$\therefore\ k=\frac{4}{5}$$

## 116

**전략** 점 A를 지나고 직선 $y=x-3$에 수직인 직선의 방정식을 이용한다.




오른쪽 그림과 같이 직선 AH는 직선 $y=x-3$에 수직이므로 직선 AH의 기울기는 $-1$이다.
따라서 직선 AH의 방정식은

$$y-4=-1\times(x-1)$$

$$\therefore\ y=-x+5$$

즉 점 H는 두 직선 $y=x-3$, $y=-x+5$의 교점이다.
$y=x-3$, $y=-x+5$를 연립하여 풀면

$$x=4,\ y=1$$

따라서 점 H의 좌표는 $(4,\ 1)$이다.

**답** $(4,\ 1)$

## 117

**전략** 수직 조건과 중점의 좌표를 이용하여 점 B의 좌표를 구한다.

점 B의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 직선 AB와 직선 $x+3y+1=0$, 즉 $y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$이 수직이므로

$$\frac{b-(-4)}{a-1}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$$

$$\therefore\ 3a-b=7 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 직선 $x+3y+1=0$이 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점 $\left(\frac{1+a}{2},\ \frac{-4+b}{2}\right)$를 지나므로

$$\frac{1+a}{2}+3\times\frac{-4+b}{2}+1=0$$

$$\therefore\ a+3b=9 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=3,\ b=2$$

따라서 점 B의 좌표는 $(3,\ 2)$이다.

**답** $(3,\ 2)$

## 118

**전략** 세 직선으로 둘러싸인 삼각형이 직각삼각형이 되려면 세 직선 중 두 직선이 수직이어야 한다.

세 직선

$$x+2y=3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$2x-3y-12=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$$ax+y=1 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

로 둘러싸인 삼각형이 직각삼각형이 되려면 세 직선 중 두 직선이 수직이어야 한다.

세 직선 ㉠, ㉡, ㉢의 기울기가 각각 $-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $-a$이므로 두 직선 ㉠, ㉡은 수직이 아니다.

(i) 두 직선 ㉠, ㉢이 수직이려면

$$-\frac{1}{2}\times(-a)=-1\qquad \therefore\ a=-2$$

(ii) 두 직선 ㉡, ㉢이 수직이려면

$$\frac{2}{3}\times(-a)=-1\qquad \therefore\ a=\frac{3}{2}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 상수 $a$의 값의 합은

$$-2+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

## 119

**전략** 주어진 세 직선 중 두 직선이 평행하거나 세 직선이 한 점에서 만나야 함을 이용한다.

$2x-y=4$에서 $\quad 2x-y-4=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$3x+2y=-1$에서 $\quad 3x+2y+1=0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

$x-ay=0 \quad \cdots\cdots$ ㉢

(ⅰ) 세 직선이 평행한 경우

두 직선 ㉠, ㉡은 평행하지 않으므로 세 직선이 평행할 수는 없다.

(ⅱ) 두 직선이 평행한 경우

두 직선 ㉠, ㉢이 평행하려면

$$\frac{1}{2}=\frac{-a}{-1}\neq\frac{0}{-4} \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$$

두 직선 ㉡, ㉢이 평행하려면

$$\frac{1}{3}=\frac{-a}{2}\neq\frac{0}{1} \qquad \therefore a=-\frac{2}{3}$$

(ⅲ) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad x=1,\ y=-2$

따라서 두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 좌표는 $(1,\ -2)$이다.

직선 ㉢이 점 $(1,\ -2)$를 지나려면

$$1+2a=0 \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$$

이상에서 모든 상수 $a$의 값의 곱은

$$\frac{1}{2}\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}$$

답 $\frac{1}{6}$

## 120

**전략** 점 P에서의 접선의 기울기를 이용하여 직선 $l_2$의 기울기를 구한다.

직선 $l_1$의 기울기를 $m$이라 하면 직선 $l_1$이 점 $\mathrm{P}(1,\ 1)$을 지나므로 직선 $l_1$의 방정식은

$$y-1=m(x-1)$$

$$\therefore y=mx-m+1$$

직선 $l_1$이 함수 $y=x^2$의 그래프에 접하므로 방정식

$$x^2=mx-m+1,\ \text{즉 } x^2-mx+m-1=0$$

이 중근을 갖는다.

이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$$D=(-m)^2-4\times1\times(m-1)=0$$

$$m^2-4m+4=0, \qquad (m-2)^2=0$$

$$\therefore m=2\ (\text{중근})$$

따라서 직선 $l_1$의 방정식은

$$y=2x-1 \qquad \therefore \mathrm{Q}(0,\ -1)$$

한편 직선 $l_1$에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로

직선 $l_2$는 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 점 $\mathrm{P}(1,\ 1)$을 지난다.

즉 직선 $l_2$의 방정식은

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-1) \qquad \therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

점 R는 직선 $l_2$와 함수 $y=x^2$의 그래프의 교점이므로

$x^2=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$에서 $\qquad 2x^2+x-3=0$

$$(2x+3)(x-1)=0$$

$$\therefore x=-\frac{3}{2} \text{ 또는 } x=1$$

$$\therefore \mathrm{R}\left(-\frac{3}{2},\ \frac{9}{4}\right)$$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(0-1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{5}$,

$\overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}-1\right)^2+\left(\frac{9}{4}-1\right)^2}=\frac{5\sqrt{5}}{4}$이므로

$$S=\triangle\mathrm{PRQ}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{5\sqrt{5}}{4}=\frac{25}{8}$$

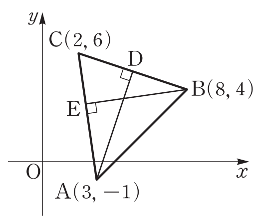
$$\therefore 40S=40\times\frac{25}{8}=125$$

답 **125**

## 121

**전략** 두 직선 BC, AC의 기울기를 이용하여 두 수선의 방정식을 구한다.

점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D, 점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 E라 하자.




직선 BC의 기울기는

$$\frac{6-4}{2-8}=-\frac{1}{3}$$

이므로 직선 AD의 기울기는 3이다.

따라서 직선 AD의 방정식은

$$y+1=3(x-3)$$

$$\therefore y=3x-10 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 직선 AC의 기울기는

$$\frac{6-(-1)}{2-3}=-7$$

이므로 직선 BE의 기울기는 $\frac{1}{7}$이다.

따라서 직선 BE의 방정식은

$$y-4=\frac{1}{7}(x-8)$$

$$\therefore y=\frac{1}{7}x+\frac{20}{7} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=\frac{9}{2},\ y=\frac{7}{2}$

따라서 구하는 세 수선의 교점의 좌표는 $\left(\frac{9}{2},\ \frac{7}{2}\right)$이다.

답 $\left(\frac{9}{2},\ \frac{7}{2}\right)$

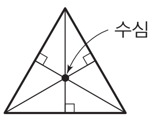
참고 점 C에서 변 AB에 내린 수선의 발을 F라 하면 직선 CF의 기울기는 $-1$이므로 직선 CF의 방정식은

$y-6=-(x-2) \qquad \therefore y=-x+8$

이 직선이 점 $\left(\frac{9}{2},\ \frac{7}{2}\right)$을 지나므로 세 수선은 한 점에서 만난다.

**개념 노트**

삼각형의 각 꼭짓점에서 대변에 그은 세 수선은 한 점에서 만나고, 세 수선의 교점을 수심이라 한다.




## 03 점과 직선 사이의 거리

● 본책 56~62쪽

### 122

(1) $\frac{|2\times(-1)-1\times4+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

(2) $\frac{|3\times3+4\times(-2)-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{1}{5}$

(3) $\frac{|4\times(-5)-3\times3+4|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{25}{5}=5$

(4) 점 $(2,\ -6)$과 직선 $y=3x-2$, 즉 $3x-y-2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3\times2-1\times(-6)-2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

답 (1) $\sqrt{5}$ (2) $\frac{1}{5}$ (3) $5$ (4) $\sqrt{10}$

### 123

(1) $\frac{|-13|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$

(2) $\frac{|10|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$

(3) $\frac{|-5|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}}=\frac{5}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

(4) 원점과 직선 $y=2x-4$, 즉 $2x-y-4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

답 (1) $\sqrt{13}$ (2) $\sqrt{10}$ (3) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (4) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

### 124

(1) 두 직선 사이의 거리는 직선 $2x-y+2=0$ 위의 점 $(0,\ 2)$와 직선 $2x-y-3=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2\times0-1\times2-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

(2) 두 직선 사이의 거리는 직선 $x+3y-1=0$ 위의 점 $(1,\ 0)$과 직선 $x+3y+4=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|1\times1+3\times0+4|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{5}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

(3) 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x-4y=0$ 위의 점 $(0,\ 0)$과 직선 $3x-4y+5=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{5}{5}=1$$

(4) 두 직선 사이의 거리는 직선 $x-2y+1=0$ 위의 점 $(-1,\ 0)$과 직선 $2x-4y-3=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2\times(-1)-4\times0-3|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}}=\frac{5}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

답 (1) $\sqrt{5}$ (2) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ (3) $1$ (4) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

## 125

점 $(1,\ a)$와 직선 $3x+y-5=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$$\frac{|3+a-5|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\sqrt{10}$$

$|a-2|=10,\quad a-2=\pm 10$

$\therefore a=-8$ 또는 $a=12$

그런데 점 $(1,\ a)$가 제1사분면 위의 점이므로

$a>0$

$\therefore a=12$

답 **12**

## 126

점 $(-2,\ 3)$과 직선 $x+2y-1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-2+2\times 3-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

점 $(-2,\ 3)$과 직선 $2x+y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2\times(-2)+3+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|k-1|}{\sqrt{5}}$$

두 직선까지의 거리가 같으므로

$$\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{|k-1|}{\sqrt{5}},\qquad k-1=\pm 3$$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=4$

따라서 구하는 곱은

$-2\times 4=-8$

답 **$-8$**

## 127

직선 $3x+4y+1=0$, 즉 $y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{4}{3}$이므로 구하는 직선의 방정식을

$y=\frac{4}{3}x+k$, 즉 $4x-3y+3k=0$ ($k$는 상수)

으로 놓을 수 있다.

원점과 이 직선 사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|3k|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=1,\qquad |3k|=5$$

$3k=\pm 5\qquad \therefore k=-\frac{5}{3}$ 또는 $k=\frac{5}{3}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$4x-3y-5=0$ 또는 $4x-3y+5=0$

답 **$4x-3y-5=0,\ 4x-3y+5=0$**

## 128

두 직선 $x+y-3=0,\ x+y+m=0$ 사이의 거리는 직선 $x+y-3=0$ 위의 점 $(0,\ 3)$과 직선 $x+y+m=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|3+m|}{\sqrt{1^2+1^2}}=4\sqrt{2},\qquad |3+m|=8$$

$3+m=\pm 8\qquad \therefore m=5\ (\because m>0)$

답 **5**

## 129

주어진 두 직선이 평행하므로

$$\frac{3}{a}=\frac{-1}{2}\neq\frac{12}{-4}\qquad \therefore a=-6$$

따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x-y+12=0$ 위의 점 $(-4,\ 0)$과 직선 $-6x+2y-4=0$, 즉 $3x-y+2=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|3\times(-4)+2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

답 **$a=-6$, 거리: $\sqrt{10}$**

## 130

주어진 두 직선이 평행하므로

$$\frac{3}{3}=\frac{4}{a}\neq\frac{-5}{b}\qquad \therefore a=4,\ b\neq -5$$

따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x+4y-5=0$ 위의 점 $(3,\ -1)$과 직선 $3x+4y+b=0$ 사이의 거리와 같으므로

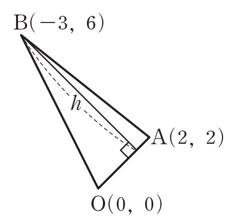
$$\frac{|3\times 3+4\times(-1)+b|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$$

$|b+5|=15,\qquad b+5=\pm 15$

$\therefore b=-20\ (\because b<0)$

답 **$a=4,\ b=-20$**

## 131




선분 OA의 길이는

$\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

직선 OA의 방정식은

$y=x\qquad \therefore x-y=0$

점 $B(-3,\ 6)$과 직선 OA 사이의 거리를 $h$라 하면

$$h=\frac{|-3-6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{9}{\sqrt{2}}$$

따라서 △OAB의 넓이는

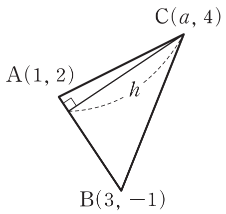
$$\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times h=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{9}{\sqrt{2}}=9$$

**답** **9**

## 132

선분 AB의 길이는

$$\sqrt{(3-1)^2+(-1-2)^2}$$
$$=\sqrt{13}$$




직선 AB의 방정식은

$$y-2=\frac{-1-2}{3-1}(x-1)$$

$$\therefore\ 3x+2y-7=0$$

점 C$(a, 4)$와 직선 AB 사이의 거리를 $h$라 하면

$$h=\frac{|3a+2\times4-7|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{|3a+1|}{\sqrt{13}}$$

이때 △ABC의 넓이가 8이므로

$$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times h=\frac{1}{2}\times\sqrt{13}\times\frac{|3a+1|}{\sqrt{13}}=8$$

$$|3a+1|=16,\qquad 3a+1=\pm16$$

$$\therefore\ a=5\ 또는\ a=-\frac{17}{3}$$

**답** $\boldsymbol{5,\ -\frac{17}{3}}$

## 133

$y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$에서 $\quad x+2y+3=0$

$y=2x-5$에서 $\quad 2x-y-5=0$

점 P의 좌표를 $(x, y)$라 하면

$$\frac{|x+2y+3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|2x-y-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$

$$|x+2y+3|=|2x-y-5|$$

$$x+2y+3=\pm(2x-y-5)$$

$$\therefore\ x-3y-8=0\ 또는\ 3x+y-2=0$$

**답** $\boldsymbol{x-3y-8=0}$ **또는** $\boldsymbol{3x+y-2=0}$

**참고** 점 P가 나타내는 도형은 두 직선 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$, $y=2x-5$가 이루는 각의 이등분선이다.

## 134

각의 이등분선 위의 임의의 점을 P$(x, y)$라 하면 점 P에서 두 직선 $x-3y+4=0$, $3x-y-2=0$에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|x-3y+4|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{|3x-y-2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}$$

$$|x-3y+4|=|3x-y-2|$$

$$x-3y+4=\pm(3x-y-2)$$

$$\therefore\ x+y-3=0\ 또는\ 2x-2y+1=0$$

따라서 기울기가 음수인 직선의 방정식은 $x+y-3=0$이다.

**답** $\boldsymbol{x+y-3=0}$

## 135

$$\triangle OAB=\frac{|-3\times(-3)-5\times1|}{2}$$
$$=\frac{4}{2}=2$$

**답** **2**

**다른 풀이** 선분 OB의 길이는

$$\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$$

직선 OB의 방정식은

$$y=-3x\qquad\therefore\ 3x+y=0$$

점 A$(-3, 5)$와 직선 OB 사이의 거리는

$$\frac{|3\times(-3)+5|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{10}}$$

따라서 △OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\frac{4}{\sqrt{10}}=2$$

### 연습 문제

● 본책 63~64쪽

## 136

**전략** 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 방정식을 세운다.

점 P의 좌표를 $(a, 0)$이라 하면 점 P와 직선 $x+3y-2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|a-2|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|a-2|}{\sqrt{10}}$$

점 P와 직선 $3x-y+3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3a+3|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|3a+3|}{\sqrt{10}}$$

두 직선까지의 거리가 같으므로

$$\frac{|a-2|}{\sqrt{10}}=\frac{|3a+3|}{\sqrt{10}}$$

$$|a-2|=|3a+3|$$

$$\therefore\ a-2=\pm(3a+3)$$

(ⅰ) $a-2=3a+3$일 때

$$-2a=5 \qquad \therefore a=-\frac{5}{2}$$

(ⅱ) $a-2=-(3a+3)$일 때

$$4a=-1 \qquad \therefore a=-\frac{1}{4}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$$\mathrm{P}\left(-\frac{5}{2},\ 0\right) \text{ 또는 } \mathrm{P}\left(-\frac{1}{4},\ 0\right)$$

답 $\left(-\frac{5}{2},\ 0\right), \left(-\frac{1}{4},\ 0\right)$

## 137

**전략** 평행한 두 직선의 기울기가 같음을 이용한다.

직선 $y=3x+2$에 평행하고 $y$절편이 $k$인 직선의 방정식은

$$y=3x+k,\ \text{즉 } 3x-y+k=0 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

직선 $y=3x+2$ 위의 점 $(0,\ 2)$와 직선 ㉠ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이려면

$$\frac{|-2+k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}, \qquad |-2+k|=10$$

$$-2+k=\pm 10$$

$$\therefore k=-8 \text{ 또는 } k=12$$

따라서 구하는 $y$절편의 합은

$$-8+12=4$$

답 **4**

## 138

**전략** 직선 OA의 기울기와 직선 $3x+y-6=0$의 기울기가 같음을 이용한다.

선분 OA의 길이는

$$\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$$

이때 직선 OA의 방정식은 $y=-3x$, 즉 $3x+y=0$이므로 직선 $3x+y-6=0$과 평행하다.

따라서 삼각형 AOP의 밑변을 $\overline{\mathrm{OA}}$라 할 때 높이는 직선 OA와 직선 $3x+y-6=0$ 사이의 거리와 같고, 두 직선 사이의 거리는 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$과 직선 $3x+y-6=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-6|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{10}}$$

즉 구하는 삼각형 AOP의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\frac{6}{\sqrt{10}}=3$$

답 **3**

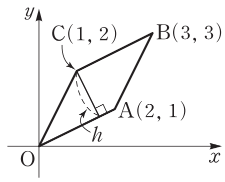
**다른 풀이** 직선 $3x+y-6=0$ 위의 점 P의 좌표를 $(2,\ 0)$이라 하면 세 점 $(0,\ 0)$, $(-1,\ 3)$, $(2,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{|-1\times 0-3\times 2|}{2}=\frac{6}{2}=3$$

**참고** 직선 OA와 직선 $3x+y-6=0$이 평행하므로 점 P의 위치에 관계없이 $\triangle$AOP의 넓이는 일정하다.

## 139

**전략** 두 점 사이의 거리, 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 평행사변형의 밑변의 길이와 높이를 구한다.




선분 OA의 길이는

$$\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

직선 OA의 방정식은

$$y=\frac{1}{2}x$$

$$\therefore x-2y=0$$

점 C$(1,\ 2)$와 직선 OA 사이의 거리를 $h$라 하면

$$h=\frac{|1-2\times 2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

따라서 평행사변형 OABC의 넓이는

$$\overline{\mathrm{OA}}\times h=\sqrt{5}\times\frac{3}{\sqrt{5}}=3$$

답 **3**

## 140

**전략** 각의 이등분선 위의 임의의 점에서 두 직선에 이르는 거리가 같음을 이용한다.

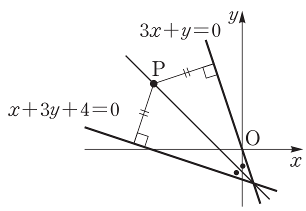
예각의 이등분선 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면 점 P에서 두 직선 $3x+y=0$, $x+3y+4=0$에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|3x+y|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|x+3y+4|}{\sqrt{1^2+3^2}}$$

$$|3x+y|=|x+3y+4|$$

$$3x+y=\pm(x+3y+4)$$

$$\therefore x-y-2=0 \text{ 또는 } x+y+1=0$$




그런데 오른쪽 그림에서 두 직선이 이루는 예각의 이등분선은 기울기가 음수이므로 구하는 직선의 방정식은

$$x+y+1=0$$

답 $\boldsymbol{x+y+1=0}$

## 141

**전략** 주어진 직선의 방정식을 $a$에 대하여 정리하여 점 A의 좌표를 구한다.

$(a+1)x-(a-3)y+a-15=0$을 $a$에 대하여 정리하면

$$x+3y-15+(x-y+1)a=0$$

이 식이 $a$의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$x+3y-15=0,\ x-y+1=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=3,\ y=4$$

$$\therefore\ \mathrm{A}(3,\ 4)$$

점 A와 직선 $2x-y+p=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$$\frac{|2\times3-4+p|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$

$$|2+p|=5,\qquad 2+p=\pm5$$

$$\therefore\ p=-7 \text{ 또는 } p=3$$

따라서 모든 상수 $p$의 값의 합은

$$-7+3=-4$$

**답** $\mathbf{-4}$

## 142

**전략** 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 $f(k)$를 구한다.

$x-2y-4+k(2x+y)=0$에서

$$(2k+1)x+(k-2)y-4=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

점 $(1,\ -2)$와 직선 ㉠ 사이의 거리 $f(k)$는

$$f(k)=\frac{|2k+1-2(k-2)-4|}{\sqrt{(2k+1)^2+(k-2)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5k^2+5}}$$

$f(k)$의 분모 $\sqrt{5k^2+5}$의 값이 최소일 때 $f(k)$의 값은 최대가 된다.

임의의 실수 $k$에 대하여 $k^2\geq0$이므로

$$5k^2+5\geq5$$

따라서 $k=0$일 때 분모는 최솟값 $\sqrt{5}$를 가지므로 $f(k)$의 최댓값은

$$f(0)=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

**답** $\mathbf{\frac{\sqrt{5}}{5}}$

## 143

**전략** 마름모 ABCD 위의 점 중 점 P에서 가장 가까운 점과 가장 먼 점의 위치를 파악한다.

점 P$(-3,\ 3)$과 마름모 ABCD 위의 점 Q 사이의 거리의 최솟값 $m$은 점 P와 직선 AD 사이의 거리와 같고, 최댓값 $M$은 점 P와 점 B 사이의 거리와 같다.

직선 AD의 방정식은

$$\frac{x}{-1}+\frac{y}{2}=1 \qquad \therefore\ 2x-y+2=0$$

$$\therefore\ m=\frac{|2\times(-3)-3+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{7}{\sqrt{5}}$$

또 B$(0,\ -2)$이므로

$$M=\sqrt{(0+3)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{34}$$

$$\therefore\ M^2-m^2=34-\frac{49}{5}=\frac{121}{5}$$

**답** $\mathbf{\frac{121}{5}}$

**참고** C$(1,\ 0)$이므로 $\overline{\mathrm{PC}}=\sqrt{(1+3)^2+(0-3)^2}=5$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{PB}}>\overline{\mathrm{PC}}$$

## 144

**전략** 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을 세운다.

두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x-y+1+k(x-2y+3)=0,\text{ 즉}$$

$$(k+1)x-(2k+1)y+3k+1=0\ (k\text{는 실수}) \quad \cdots\cdots ㉠$$

원점과 직선 ㉠ 사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|3k+1|}{\sqrt{(k+1)^2+\{-(2k+1)\}^2}}=1$$

$$|3k+1|=\sqrt{5k^2+6k+2}$$

양변을 제곱하면

$$9k^2+6k+1=5k^2+6k+2$$

$$4k^2=1,\qquad k^2=\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ k=\pm\frac{1}{2}$$

(ⅰ) ㉠에 $k=\frac{1}{2}$을 대입하면

$$\frac{3}{2}x-2y+\frac{5}{2}=0 \qquad \therefore\ 3x-4y+5=0$$

(ⅱ) ㉠에 $k=-\frac{1}{2}$을 대입하면

$$\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0 \qquad \therefore\ x=1$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 직선의 방정식은

$$3x-4y+5=0,\ x=1$$

**답** $\mathbf{3x-4y+5=0,\ x=1}$

다른 풀이 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$을 연립하여 풀면

$x=1$, $y=2$

따라서 두 직선의 교점의 좌표는

$(1, 2)$

점 $(1, 2)$를 지나고 기울기가 $m$인 직선의 방정식은

$y-2=m(x-1)$

$\therefore\ mx-y-m+2=0$ ⋯⋯ ㉠

직선 ㉠과 원점 사이의 거리가 1이라 하면

$$\frac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$$

$|-m+2|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$m^2-4m+4=m^2+1$

$\therefore\ m=\frac{3}{4}$

㉠에 이것을 대입하면

$\frac{3}{4}x-y+\frac{5}{4}=0$

$\therefore\ 3x-4y+5=0$

또 점 $(1, 2)$를 지나고 $y$축에 평행한 직선 $x=1$과 원점 사이의 거리도 1이다.

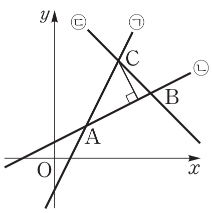
## 145

전략 직선의 방정식을 연립하여 교점의 좌표를 구한다.

$2x-y-1=0$ ⋯⋯ ㉠

$x-2y+1=0$ ⋯⋯ ㉡

$x+y-5=0$ ⋯⋯ ㉢




두 직선 ㉠과 ㉡, ㉡과 ㉢, ㉢과 ㉠의 교점을 각각 A, B, C라 하면

A$(1, 1)$, B$(3, 2)$, C$(2, 3)$

선분 AB의 길이는

$\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$

점 C$(2, 3)$과 직선 ㉡ 사이의 거리는

$$\frac{|2-2\times3+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

따라서 △ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

## 146

전략 점 P에서 삼각형 ABC의 세 변까지의 거리가 모두 같음을 이용한다.

직선 AB의 기울기는 $\frac{-3-0}{0-6}=\frac{1}{2}$이므로 직선 AB의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x-3$ $\quad\therefore\ x-2y-6=0$

직선 BC의 기울기는 $\frac{-8-(-3)}{10-0}=-\frac{1}{2}$이므로 직선 BC의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}x-3$ $\quad\therefore\ x+2y+6=0$

직선 CA의 기울기는 $\frac{0-(-8)}{6-10}=-2$이므로 직선 CA의 방정식은

$y=-2(x-6)$ $\quad\therefore\ 2x+y-12=0$

삼각형 ABC에 내접하는 원의 중심 P의 좌표를 $(a, b)$라 하자.

점 P에서 직선 AB까지의 거리와 직선 BC까지의 거리가 같으므로

$$\frac{|a-2b-6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|a+2b+6|}{\sqrt{1^2+2^2}}$$

$|a-2b-6|=|a+2b+6|$

$\therefore\ a-2b-6=\pm(a+2b+6)$

(i) $a-2b-6=a+2b+6$일 때

$-4b=12$ $\quad\therefore\ b=-3$

(ii) $a-2b-6=-(a+2b+6)$일 때

$2a=0$ $\quad\therefore\ a=0$

이때 $0<a<10$, $-8<b<0$이므로

$b=-3$

또 점 P에서 직선 BC까지의 거리와 직선 CA까지의 거리가 같으므로

$$\frac{|a+2b+6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|2a+b-12|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$\therefore\ |a+2b+6|=|2a+b-12|$

이때 $b=-3$이므로

$|a|=|2a-15|$, $\quad a=\pm(2a-15)$

$\therefore\ a=5$ ($\because\ 0<a<10$)

따라서 점 P의 좌표는 $(5, -3)$이므로 선분 OP의 길이는 $\sqrt{5^2+(-3)^2}=\sqrt{34}$ 답 ④

**개념 노트**

**삼각형의 내심**

삼각형 ABC의 내심 I에 대하여

① 점 I는 세 내각의 이등분선의 교점이다.

② 점 I에서 세 변까지의 거리가 모두 같다.

## 147

**전략** 기울기가 $-2$이고 이차함수 $y=x^2+3$의 그래프에 접하는 직선과 주어진 직선 사이의 거리가 $\sqrt{5}$임을 이용한다.

직선 $y=-2x+k$와 평행하고 $y=x^2+3$의 그래프에 접하는 직선의 방정식을

$$y=-2x+a\ (a\text{는 상수})$$

라 하면 $x^2+3=-2x+a$에서

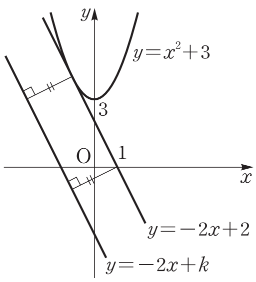
$$x^2+2x+3-a=0$$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 $D$라 하면

$$\frac{D}{4}=1^2-(3-a)=0 \qquad \therefore\ a=2$$

따라서 접선의 방정식은 $y=-2x+2$이다.

오른쪽 그림에서 함수 $y=x^2+3$의 그래프 위의 점과 직선 $y=-2x+k$ 사이의 거리의 최솟값은 두 직선 $y=-2x+k$, $y=-2x+2$ 사이의 거리와 같다.




즉 직선 $y=-2x+2$ 위의 점 $(1,\ 0)$과 직선 $y=-2x+k$, 즉 $2x+y-k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$$\frac{|2\times1-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}, \qquad |2-k|=5$$

$$2-k=\pm5$$

$$\therefore\ k=-3 \text{ 또는 } k=7$$

이때 $k=7$이면 이차함수 $y=x^2+3$의 그래프와 직선 $y=-2x+7$이 만나므로 $\qquad k\neq7$

$$\therefore\ k=-3$$

**답** $\mathbf{-3}$

**참고** $k\geq2$이면 $y=x^2+3$의 그래프와 직선 $y=-2x+k$가 만나므로 그래프 위의 점과 직선 사이의 거리의 최솟값은 0이다.

## 148

**전략** 직선 AB, AC의 방정식을 각각 구하여 직선 $y=a$와의 교점의 $x$좌표를 구한다.

선분 BC의 길이는

$$\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

직선 BC의 방정식은

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}=1 \qquad \therefore\ x-2y-2=0$$

점 A$(1,\ 4)$와 직선 BC 사이의 거리는

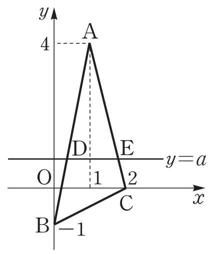
$$\frac{|1-2\times4-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{9}{\sqrt{5}}$$

따라서 △ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{9}{\sqrt{5}}=\frac{9}{2}$$

한편 직선 AB의 방정식은

$$y=5x-1$$




이므로 직선 $y=a$와 직선 AB의 교점을 D라 하면 점 D의 $x$좌표는 $a=5x-1$에서

$$x=\frac{a+1}{5}$$

직선 AC의 방정식은

$$y=-4x+8$$

이므로 직선 $y=a$와 직선 AC의 교점을 E라 하면 점 E의 $x$좌표는 $a=-4x+8$에서

$$x=\frac{8-a}{4}$$

$$\therefore\ \overline{DE}=\frac{8-a}{4}-\frac{a+1}{5}=\frac{36-9a}{20}$$

$$=\frac{9(4-a)}{20}$$

이때 점 A와 직선 $y=a$ 사이의 거리는 $4-a$이고

△ADE의 넓이가 $\frac{9}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{9}{4}$이므로

$$\frac{1}{2}\times\frac{9(4-a)}{20}\times(4-a)=\frac{9}{4}$$

$$(4-a)^2=10, \qquad a^2-8a+6=0$$

$$\therefore\ a=4-\sqrt{10}\ (\because\ -1<a<4)$$

**답** $\mathbf{4-\sqrt{10}}$

# 3 원의 방정식

## 01 원의 방정식

● 본책 66~76쪽

### 149

답 (1) **중심의 좌표: $(0, 0)$, 반지름의 길이: $\sqrt{11}$**
(2) **중심의 좌표: $(5, 0)$, 반지름의 길이: $3$**
(3) **중심의 좌표: $(-2, 3)$, 반지름의 길이: $5$**

### 150

답 (1) $x^2+y^2=9$
(2) $(x-2)^2+(y+3)^2=16$
(3) $(x+5)^2+(y-1)^2=5$

### 151

(1) $x^2+y^2-8x=0$에서

$$(x-4)^2+y^2=16$$

따라서 **중심의 좌표는 $(4, 0)$, 반지름의 길이는 $4$**이다.

(2) $x^2+y^2+2x-4y-20=0$에서

$$(x+1)^2+(y-2)^2=25$$

따라서 **중심의 좌표는 $(-1, 2)$, 반지름의 길이는 $5$** 이다.

(3) $x^2+y^2-6x+4y+12=0$에서

$$(x-3)^2+(y+2)^2=1$$

따라서 **중심의 좌표는 $(3, -2)$, 반지름의 길이는 $1$** 이다.

답 **풀이 참조**

### 152

답 (1) $(x+1)^2+(y-3)^2=9$
(2) $(x-3)^2+(y-1)^2=9$
(3) $(x-2)^2+(y+2)^2=4$

### 153

원의 반지름의 길이를 $r$라 하면 원의 방정식은

$$(x-1)^2+(y+2)^2=r^2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이 원이 점 $(4, 2)$를 지나므로

$$(4-1)^2+(2+2)^2=r^2 \qquad \therefore r^2=25$$

㉠에 $r^2=25$를 대입하면

$$(x-1)^2+(y+2)^2=25$$

이 원이 점 $(a, 1)$을 지나므로

$$(a-1)^2+(1+2)^2=25, \qquad (a-1)^2=16$$

$$a-1=\pm4 \qquad \therefore a=5 \ (\because a>0)$$

답 **5**

### 154

두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심은 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{5-1}{2}, \frac{1+7}{2}\right), \text{ 즉 } (2, 4)$$

또 $\overline{\mathrm{AB}}$가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\sqrt{(-1-5)^2+(7-1)^2}=3\sqrt{2}$$

따라서 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2+(y-4)^2=18$$

즉 $a=2$, $b=4$, $c=18$이므로

$$a+b+c=24$$

답 **24**

### 155

원의 중심이 $x$축 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(a, 0)$, 반지름의 길이를 $r$라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2+y^2=r^2$$

이 원이 두 점 $(4, -3)$, $(2, 3)$을 지나므로

$$(4-a)^2+9=r^2, \ (2-a)^2+9=r^2$$

$$\therefore a^2-8a+25=r^2, \ a^2-4a+13=r^2$$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=3, \ r^2=10$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2+y^2=10$$

답 $(x-3)^2+y^2=10$

다른 풀이 원의 중심의 좌표를 $(a, 0)$이라 하면 이 점에서 두 점 $(4, -3)$, $(2, 3)$까지의 거리가 같으므로

$$\sqrt{(a-4)^2+3^2}=\sqrt{(a-2)^2+(-3)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2-8a+25=a^2-4a+13$$

$$\therefore a=3$$

즉 원의 중심의 좌표는 $(3, 0)$이고, 반지름의 길이는 두 점 $(3, 0)$, $(4, -3)$ 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{(4-3)^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2+y^2=10$$

## 156

원의 중심이 직선 $y=x+5$ 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(a,\ a+5)$, 반지름의 길이를 $r$라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-a-5)^2=r^2$$

이 원이 두 점 $(0,\ 0)$, $(1,\ 2)$를 지나므로

$$(-a)^2+(-a-5)^2=r^2,$$
$$(1-a)^2+(2-a-5)^2=r^2$$
$$\therefore\ 2a^2+10a+25=r^2,\ 2a^2+4a+10=r^2$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=-\frac{5}{2},\ r^2=\frac{25}{2}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$$

답 $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$

## 157

$x^2+y^2+2x-4y-15+k=0$에서

$$(x+1)^2+(y-2)^2=20-k$$

이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{20-k}$이므로

$$\sqrt{20-k}=5$$

양변을 제곱하면

$$20-k=25\qquad\therefore\ k=-5$$

답 $-5$

## 158

$x^2+y^2-6x+ay+9=0$에서

$$(x-3)^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}$$

이 원의 중심의 좌표는 $\left(3,\ -\frac{a}{2}\right)$이므로

$$3=b,\ -\frac{a}{2}=-3\qquad\therefore\ a=6,\ b=3$$

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{\frac{a^2}{4}}$이므로

$$r=\sqrt{\frac{6^2}{4}}=3$$
$$\therefore\ a+b+r=6+3+3=12$$

답 12

## 159

$x^2+y^2-2(a+1)x+2ay+3a^2-2=0$에서

$$\{x-(a+1)\}^2+(y+a)^2=-a^2+2a+3$$

이 방정식이 원을 나타내려면

$$-a^2+2a+3>0,\qquad a^2-2a-3<0$$
$$(a+1)(a-3)<0$$
$$\therefore\ -1<a<3$$

따라서 정수 $a$는 0, 1, 2의 3개이다.

답 3

## 160

주어진 세 점을 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(-1,\ 2)$, $\mathrm{B}(3,\ -1)$이라 하고, 세 점 O, A, B를 지나는 원의 중심을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면

$$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$$

$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{AP}}$에서 $\overline{\mathrm{OP}}^2=\overline{\mathrm{AP}}^2$이므로

$$a^2+b^2=(a+1)^2+(b-2)^2$$
$$\therefore\ 2a-4b=-5\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{BP}}$에서 $\overline{\mathrm{OP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$$a^2+b^2=(a-3)^2+(b+1)^2$$
$$\therefore\ 3a-b=5\qquad\cdots\cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=\frac{5}{2},\ b=\frac{5}{2}$$

즉 원의 중심은 점 $\mathrm{P}\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}\right)$이고 반지름의 길이는

$$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$$

답 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$

다른 풀이 구하는 원의 방정식을

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

이라 하면 이 원이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$$C=0$$

즉 원 $x^2+y^2+Ax+By=0$이 두 점 $(-1,\ 2)$, $(3,\ -1)$을 지나므로

$$1+4-A+2B=0,\ 9+1+3A-B=0$$
$$\therefore\ A-2B=5,\ 3A-B=-10$$

두 식을 연립하여 풀면

$A=-5,\ B=-5$

따라서 구하는 원의 방정식은

$x^2+y^2-5x-5y=0$

## 161

세 점 A$(-3,\ 4)$, B$(1,\ 0)$, C$(3,\ 4)$를 지나는 원의 중심을 P$(a,\ b)$라 하면

$\overline{\text{AP}}=\overline{\text{BP}}=\overline{\text{CP}}$

$\overline{\text{AP}}=\overline{\text{BP}}$에서 $\overline{\text{AP}}^2=\overline{\text{BP}}^2$이므로

$(a+3)^2+(b-4)^2=(a-1)^2+b^2$

$\therefore\ a-b=-3$ …… ㉠

$\overline{\text{BP}}=\overline{\text{CP}}$에서 $\overline{\text{BP}}^2=\overline{\text{CP}}^2$이므로

$(a-1)^2+b^2=(a-3)^2+(b-4)^2$

$\therefore\ a+2b=6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0,\ b=3$

즉 원의 중심은 점 P$(0,\ 3)$이고 반지름의 길이는

$\overline{\text{AP}}=\sqrt{(0+3)^2+(3-4)^2}=\sqrt{10}$

따라서 구하는 원의 넓이는

$\pi\times(\sqrt{10})^2=10\pi$ **답 $10\pi$**

다른 풀이 주어진 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 하면 이 원이 세 점 A$(-3,\ 4)$, B$(1,\ 0)$, C$(3,\ 4)$를 지나므로

$9+16-3A+4B+C=0$ …… ㉢

$1+A+C=0$ …… ㉣

$9+16+3A+4B+C=0$ …… ㉤

㉢$-$㉤을 하면

$-6A=0 \qquad \therefore\ A=0$

㉣에 $A=0$을 대입하면

$1+C=0 \qquad \therefore\ C=-1$

㉢에 $A=0,\ C=-1$을 대입하면

$24+4B=0 \qquad \therefore\ B=-6$

따라서 주어진 원의 방정식은

$x^2+y^2-6y-1=0$

$\therefore\ x^2+(y-3)^2=10$

## 162

$x^2+y^2-8x+10y+k=0$에서

$(x-4)^2+(y+5)^2=41-k$

이 원의 중심의 좌표가 $(4,\ -5)$이고 $x$축에 접하므로

$\sqrt{41-k}=|-5|$

양변을 제곱하면

$41-k=25 \qquad \therefore\ k=16$ **답 16**

## 163

원의 중심이 직선 $y=x+2$ 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(a,\ a+2)$라 하면 원이 $y$축에 접하므로 반지름의 길이는 $|a|$이다.

즉 이 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a-2)^2=a^2$

이 원이 점 $(4,\ 4)$를 지나므로

$(4-a)^2+(4-a-2)^2=a^2$

$a^2-12a+20=0, \qquad (a-2)(a-10)=0$

$\therefore\ a=2$ 또는 $a=10$

따라서 두 원의 반지름의 길이의 합은

$2+10=12$ **답 12**

## 164

점 $(-2,\ 1)$을 지나고 $x$축과 $y$축에 동시에 접하는 원의 중심은 제2사분면 위에 있으므로 원의 반지름의 길이를 $r\ (r>0)$라 하면 원의 방정식은

$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$ → 중심의 좌표: $(-r,\ r)$

이 원이 점 $(-2,\ 1)$을 지나므로

$(-2+r)^2+(1-r)^2=r^2$

$r^2-6r+5=0, \qquad (r-1)(r-5)=0$

$\therefore\ r=1$ 또는 $r=5$

따라서 두 원의 중심의 좌표는 각각 $(-1,\ 1)$, $(-5,\ 5)$이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(-5+1)^2+(5-1)^2}=4\sqrt{2}$ **답 $4\sqrt{2}$**

## 165

$x^2+y^2+2ax+6y+7-b=0$에서

$(x+a)^2+(y+3)^2=a^2+b+2$

이 원의 중심의 좌표가 $(-a,\ -3)$이고 $x$축과 $y$축에 동시에 접하므로

$|-a|=|-3|=\sqrt{a^2+b+2}$

$|-a|=|-3|$에서 $\qquad a=3\ (\because\ a>0)$

$|-3|=\sqrt{a^2+b+2}$의 양변을 제곱하면

$$9=a^2+b+2$$

위의 식에 $a=3$을 대입하면

$$9=9+b+2 \qquad \therefore b=-2$$

$$\therefore a+b=3+(-2)=1$$

답 **1**

## 166

원의 반지름의 길이를 $r$ $(r>0)$라 하면 $x$축과 $y$축에 동시에 접하고 원의 중심이 제4사분면 위에 있으므로 원의 중심의 좌표는 $\quad(r, -r)$

이때 점 $(r, -r)$가 직선 $x+3y+6=0$ 위에 있으므로

$$r-3r+6=0 \qquad \therefore r=3$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2+(y+3)^2=9$$

답 $\boldsymbol{(x-3)^2+(y+3)^2=9}$

## 167

$x^2+y^2-2x-10y+10=0$에서

$$(x-1)^2+(y-5)^2=16$$

따라서 원의 중심을 C라 하면 점 C의 좌표는 $(1, 5)$, 원의 반지름의 길이는 4이다.

이때 $\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$이므로

$$M=\sqrt{26}+4,\ m=\sqrt{26}-4$$

$$\begin{aligned}\therefore M^2+m^2&=(\sqrt{26}+4)^2+(\sqrt{26}-4)^2\\&=42+8\sqrt{26}+42-8\sqrt{26}\\&=84\end{aligned}$$

답 **84**

## 168

원 $(x+5)^2+(y-4)^2=r^2$의 중심을 C라 하면

$$\mathrm{C}(-5, 4)$$

$$\therefore \overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{(-1+5)^2+(1-4)^2}=5$$

이때 원의 반지름의 길이가 $r$이므로

$$5-r=3 \qquad \therefore r=2$$

답 **2**

## 169

점 P의 좌표를 $(x, y)$라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=30$에서

$$x^2+(y+1)^2+(x-2)^2+(y-3)^2=30$$

$$x^2+y^2-2x-2y-8=0$$

$$\therefore (x-1)^2+(y-1)^2=10$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(1, 1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$인 원이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\pi\times(\sqrt{10})^2=10\pi$$

답 $\boldsymbol{10\pi}$

## 170

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=1:3$에서

$$3\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}} \qquad \therefore 9\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$$

점 P의 좌표를 $(x, y)$라 하면

$$9\{(x-2)^2+y^2\}=(x-10)^2+y^2$$

$$x^2+y^2-2x-8=0$$

$$\therefore (x-1)^2+y^2=9$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(1, 0)$이고 반지름의 길이가 3인 원이므로 구하는 도형의 길이는

$$2\pi\times3=6\pi$$

답 $\boldsymbol{6\pi}$

## 171

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=3:2$에서

$$2\overline{\mathrm{AP}}=3\overline{\mathrm{BP}} \qquad \therefore 4\overline{\mathrm{AP}}^2=9\overline{\mathrm{BP}}^2$$

점 P의 좌표를 $(x, y)$라 하면

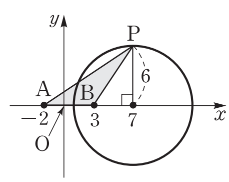
$$4\{(x+2)^2+y^2\}=9\{(x-3)^2+y^2\}$$

$$x^2+y^2-14x+13=0$$

$$\therefore (x-7)^2+y^2=36$$

즉 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(7, 0)$이고 반지름의 길이가 6인 원이다.

이때 $\triangle$PAB에서 $\overline{\mathrm{AB}}$를 밑변으로 생각하면 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 높이이므로 오른쪽 그림과 같이 높이가 원의 반지름의 길이와 같을 때 $\triangle$PAB의 넓이가 최대이다.




따라서 $\triangle$PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\times|3-(-2)|\times6=15$$

답 **15**

Ⅰ-3 원의 방정식

## 연습 문제

본책 77~78쪽

### 172

전략 중심의 좌표와 반지름의 길이를 이용하여 원의 방정식을 세운다.

중심이 점 $(a,\ 1)$이고 반지름의 길이가 5인 원의 방정식은 $\quad (x-a)^2+(y-1)^2=25$

이 원이 점 $(0,\ -2)$를 지나므로

$$(0-a)^2+(-2-1)^2=25$$

$$a^2=16 \qquad \therefore a=4\ (\because a>0)$$

답 **4**

### 173

전략 $\overline{AB}$가 원의 지름임을 이용한다.

$\overline{AB}$가 원의 지름이므로 $\frac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{5}$에서

$$\overline{AB}=2\sqrt{5}$$

$$\therefore \sqrt{(a-5)^2+(-3-1)^2}=2\sqrt{5}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2-10a+21=0, \qquad (a-3)(a-7)=0$$

$$\therefore a=3\ (\because a<5)$$

즉 원의 중심은 두 점 $A(5,\ 1)$, $B(3,\ -3)$을 이은 선분 AB의 중점이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{5+3}{2},\ \frac{1-3}{2}\right), \text{ 즉 } (4,\ -1)$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-4)^2+(y+1)^2=5$$

답 $\boldsymbol{(x-4)^2+(y+1)^2=5}$

### 174

전략 두 원의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 두 원의 중심을 지남을 이용한다.

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심을 지나야 한다.

$x^2+y^2-6x-8y+10=0$에서

$$(x-3)^2+(y-4)^2=15 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

원 $(x-1)^2+y^2=4$의 중심인 점 $(1,\ 0)$과 원 ㉠의 중심인 점 $(3,\ 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{4-0}{3-1}(x-1)$$

$$\therefore y=2x-2$$

따라서 구하는 $y$절편은 $-2$이다.

답 **−2**

### 175

전략 주어진 방정식을 변형하여 반지름의 길이를 $k$에 대한 식으로 나타낸다.

$x^2+y^2+4x-2y+2k-7=0$에서

$$(x+2)^2+(y-1)^2=12-2k$$

이 방정식이 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$ 이하인 원을 나타내려면

$$0<\sqrt{12-2k}\le\sqrt{6}$$

$$0<12-2k\le 6, \qquad -12<-2k\le -6$$

$$\therefore 3\le k<6$$

답 $\boldsymbol{3\le k<6}$

### 176

전략 원의 중심과 주어진 세 점 사이의 거리가 모두 같음을 이용한다.

주어진 세 점을 $O(0,\ 0)$, $A(6,\ 0)$, $B(-4,\ 4)$라 하고, 세 점 O, A, B를 지나는 원의 중심을 $C(p,\ q)$라 하면

$$\overline{OC}=\overline{AC}=\overline{BC}$$

$\overline{OC}=\overline{AC}$에서 $\overline{OC}^2=\overline{AC}^2$이므로

$$p^2+q^2=(p-6)^2+q^2$$

$$-12p+36=0 \qquad \therefore p=3$$

$\overline{OC}=\overline{BC}$에서 $\overline{OC}^2=\overline{BC}^2$이므로

$$p^2+q^2=(p+4)^2+(q-4)^2$$

$$\therefore q=p+4$$

위의 식에 $p=3$을 대입하면 $\qquad q=7$

$$\therefore p+q=3+7=10$$

답 **10**

다른 풀이 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 하면 이 원이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$$C=0$$

따라서 원 $x^2+y^2+Ax+By=0$이 두 점 $(6,\ 0)$, $(-4,\ 4)$를 지나므로

$$36+6A=0,\ 16+16-4A+4B=0$$

$$\therefore A=-6,\ B=-14$$

즉 주어진 원의 방정식은

$$x^2+y^2-6x-14y=0$$

$$\therefore (x-3)^2+(y-7)^2=58$$

따라서 $p=3$, $q=7$이므로

$$p+q=10$$

## 177

**전략** 제2사분면에서 $x$축과 $y$축에 동시에 접하는 원의 중심의 좌표를 $(-r,\ r)$로 놓는다.

주어진 원의 반지름의 길이를 $r\ (r>0)$라 하면 $x$축과 $y$축에 동시에 접하고 원의 중심이 제2사분면에 있으므로 원의 중심의 좌표는

$$(-r,\ r)$$

이때 점 $(-r,\ r)$가 곡선 $y=x^2-x-1$ 위에 있으므로

$$r=(-r)^2-(-r)-1$$

$$r^2=1 \qquad \therefore\ r=1\ (\because\ r>0)$$

즉 중심의 좌표가 $(-1,\ 1)$이고 반지름의 길이가 1인 원의 방정식은

$$(x+1)^2+(y-1)^2=1$$

$$\therefore\ x^2+y^2+2x-2y+1=0$$

따라서 $a=2,\ b=-2,\ c=1$이므로

$$a+b+c=1$$

**답 1**

## 178

**전략** 주어진 두 점을 이은 선분의 중점의 좌표와 두 점 사이의 거리를 이용하여 원의 방정식을 구한다.

원의 중심은 두 점 $(-2,\ 3),\ (4,\ -5)$를 이은 선분의 중점이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{-2+4}{2},\ \frac{3-5}{2}\right),\ \text{즉}\ (1,\ -1)$$

또 두 점 $(-2,\ 3),\ (4,\ -5)$를 이은 선분이 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\sqrt{(4+2)^2+(-5-3)^2}=5$$

따라서 주어진 원의 방정식은

$$(x-1)^2+(y+1)^2=25$$

이때 $x$축 위의 점은 $y$좌표가 0이므로 위의 방정식에 $y=0$을 대입하면

$$(x-1)^2+1=25$$

$$(x-1)^2=24, \qquad x-1=\pm2\sqrt{6}$$

$$\therefore\ x=1\pm2\sqrt{6}$$

따라서 $x$축과 만나는 두 점의 좌표는

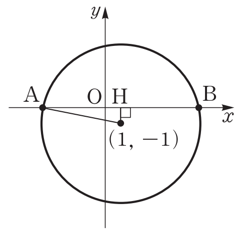
$$(1+2\sqrt{6},\ 0),\ (1-2\sqrt{6},\ 0)$$

이므로 구하는 두 점 사이의 거리는

$$1+2\sqrt{6}-(1-2\sqrt{6})=4\sqrt{6}$$

**답 $4\sqrt{6}$**

**다른 풀이** 주어진 원의 중심의 좌표가 $(1,\ -1)$이고 반지름의 길이가 5이므로 오른쪽 그림과 같이 $x$축과 원이 만나는 두 점을 각각 A, B, 원의 중심에서 $x$축에 내린 수선의 발을 H라 하면




$$\overline{AH}=\sqrt{5^2-1^2}=2\sqrt{6}$$

$$\therefore\ \overline{AB}=2\overline{AH}=2\times2\sqrt{6}=4\sqrt{6}$$

## 179

**전략** 주어진 방정식을 변형하여 반지름의 길이를 $k$에 대한 식으로 나타낸다.

$x^2+y^2-4kx+2ky+10k-15=0$에서

$$(x-2k)^2+(y+k)^2=5k^2-10k+15$$

이 원의 중심의 좌표는 $(2k,\ -k)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{5k^2-10k+15}$이다.

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름의 길이가 최소가 되어야 하고

$$\sqrt{5k^2-10k+15}=\sqrt{5(k-1)^2+10}$$

이므로 $k=1$일 때 원의 반지름의 길이가 최소이다.

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는

$$(2,\ -1)$$

**답 $(2,\ -1)$**

## 180

**전략** 세 직선의 교점의 좌표를 구하고 외접원의 중심에서 세 교점까지의 거리가 모두 같음을 이용한다.

$5x+2y+8=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$7x-3y-12=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

$3x+7y-30=0$ $\cdots\cdots$ ㉢

직선 ㉠과 ㉡, 직선 ㉡과 ㉢, 직선 ㉢과 ㉠의 교점을 각각 A, B, C라 하면

$$A(0,\ -4),\ B(3,\ 3),\ C(-4,\ 6)$$

세 점 A, B, C를 지나는 원의 중심을 $P(a,\ b)$라 하면

$$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$$

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$$a^2+(b+4)^2=(a-3)^2+(b-3)^2$$

$$6a+14b=2$$

$\therefore\ 3a+7b=1$ $\cdots\cdots$ ㉣

$\overline{AP}=\overline{CP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{CP}^2$이므로

$$a^2+(b+4)^2=(a+4)^2+(b-6)^2$$

$$8a-20b=-36$$

$$\therefore\ 2a-5b=-9 \qquad \cdots\cdots ㉤$$

㉣, ㉤을 연립하여 풀면 $\quad a=-2,\ b=1$

즉 원의 중심은 점 P$(-2,\ 1)$이고 반지름의 길이는

$$\overline{AP}=\sqrt{(-2-0)^2+(1+4)^2}=\sqrt{29}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+2)^2+(y-1)^2=29$$

**답** $\boldsymbol{(x+2)^2+(y-1)^2=29}$

다른 풀이 구하는 원의 방정식을

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 하면 이 원이 세 점 $(0,\ -4)$, $(3,\ 3)$, $(-4,\ 6)$을 지나므로

$$16-4B+C=0 \qquad \cdots\cdots ㉥$$

$$9+9+3A+3B+C=0 \qquad \cdots\cdots ㉦$$

$$16+36-4A+6B+C=0 \qquad \cdots\cdots ㉧$$

㉥에서 $\quad C=4B-16 \qquad \cdots\cdots ㉨$

㉦, ㉧에 각각 ㉨을 대입하면

$$18+3A+3B+4B-16=0,$$

$$52-4A+6B+4B-16=0$$

$$\therefore\ 3A+7B=-2,\ 2A-5B=18$$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad A=4,\ B=-2$

㉨에 $B=-2$를 대입하면 $\quad C=-24$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2+y^2+4x-2y-24=0$$

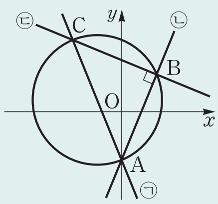
**해설 Focus**

두 직선 $7x-3y-12=0$, $3x+7y-30=0$에서

$$7\times3+(-3)\times7=0$$

이므로 두 직선은 수직이다.

이때 원의 지름에 대한 원주각의 크기는 $90°$이므로 주어진 세 직선으로 만들어지는 삼각형의 외접원은 오른쪽 그림과 같이 직선 $5x+2y+8=0$과 두 직선 $7x-3y-12=0$, $3x+7y-30=0$의 교점 A$(0,\ -4)$, C$(-4,\ 6)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원과 같다.




## 181

**전략** 두 원의 중심 사이의 거리와 반지름의 길이를 이용한다.

원 $x^2+y^2=1$의 중심의 좌표는 $(0,\ 0)$, 반지름의 길이는 1이다.

$x^2+y^2+6x+6y+10=0$에서

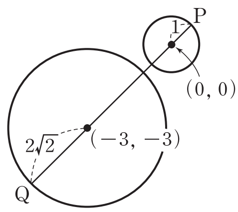
$$(x+3)^2+(y+3)^2=8$$

이므로 이 원의 중심의 좌표는 $(-3,\ -3)$, 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$이다.

따라서 두 원의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}$$

$$=3\sqrt{2}$$




이므로 선분 PQ의 길이의 최댓값은

$$3\sqrt{2}+1+2\sqrt{2}=1+5\sqrt{2}$$

**답** $\boldsymbol{1+5\sqrt{2}}$

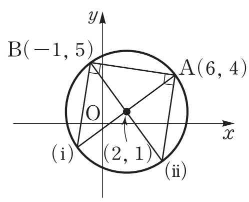
참고 선분 PQ의 길이의 최솟값은

$$3\sqrt{2}-1-2\sqrt{2}=\sqrt{2}-1$$

## 182

**전략** 직각삼각형이 되려면 삼각형의 한 변이 원의 지름이어야 함을 이용한다.

원주각의 성질에 의하여 △PAB가 직각삼각형이 되려면 선분 PA 또는 선분 PB가 원의 지름이 되어야 한다.




점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

(i) 선분 PA가 원의 지름일 때

$\overline{PA}$의 중점이 원의 중심 $(2,\ 1)$이어야 하므로

$$\frac{x+6}{2}=2,\ \frac{y+4}{2}=1$$

$$\therefore\ x=-2,\ y=-2$$

(ii) 선분 PB가 원의 지름일 때

$\overline{PB}$의 중점이 원의 중심 $(2,\ 1)$이어야 하므로

$$\frac{x-1}{2}=2,\ \frac{y+5}{2}=1$$

$$\therefore\ x=5,\ y=-3$$

(i), (ii)에서 점 P의 좌표는

$(-2,\ -2)$ 또는 $(5,\ -3)$

이므로 이 두 점을 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-2+5}{2}, \frac{-2-3}{2}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$$

따라서 $a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{5}{2}$이므로

$$a+b=-1$$

답 $-1$

## 183

전략 점 P의 좌표를 $(a, b)$, $\overline{\mathrm{AP}}$의 중점의 좌표를 $(x, y)$로 놓고 $a$, $b$를 $x$, $y$에 대한 식으로 나타낸다.

점 P의 좌표를 $(a, b)$, 선분 AP의 중점의 좌표를 $(x, y)$라 하면

$$x=\frac{a+3}{2}, \ y=\frac{b+2}{2}$$

$$\therefore a=2x-3, \ b=2y-2 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

점 P가 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=8$ 위의 점이므로

$$(a-1)^2+(b+2)^2=8 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉡에 ㉠을 대입하면

$$(2x-3-1)^2+(2y-2+2)^2=8$$

$$4(x-2)^2+4y^2=8$$

$$\therefore (x-2)^2+y^2=2$$

따라서 선분 AP의 중점이 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(2, 0)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\pi\times(\sqrt{2})^2=2\pi$$

답 $2\pi$

# 02 원과 직선의 위치 관계

● 본책 79~84쪽

## 184

답 $x+1$, $2x^2+2x-7$, $2$

## 185

(1) $x^2+y^2+3x=0$에 $y=x-1$을 대입하면

$$x^2+(x-1)^2+3x=0$$

$$\therefore 2x^2+x+1=0$$

이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$$D=1^2-4\times2\times1=-7<0$$

따라서 원과 직선은 만나지 않는다.

(2) $x^2+y^2-2x+4y-3=0$에 $x+y=3$, 즉 $y=-x+3$을 대입하면

$$x^2+(-x+3)^2-2x+4(-x+3)-3=0$$

$$\therefore x^2-6x+9=0$$

이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$$\frac{D}{4}=(-3)^2-1\times9=0$$

따라서 원과 직선은 한 점에서 만난다. (접한다.)

답 (1) 만나지 않는다.
(2) 한 점에서 만난다. (접한다.)

## 186

답 $5$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$, $=$, $1$

## 187

(1) 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $3x+y-10=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-10|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\sqrt{10}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{7}$이고 $\sqrt{10}>\sqrt{7}$이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

(2) 원의 중심 $(-1, 2)$와 직선 $2x+y+5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-2+2+5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$$

원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이고 $\sqrt{5}<2\sqrt{2}$이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

답 (1) 만나지 않는다.
(2) 서로 다른 두 점에서 만난다.

## 188

$x^2+y^2=5$에 $y=2x+k$를 대입하면

$$x^2+(2x+k)^2=5$$

$$\therefore 5x^2+4kx+k^2-5=0$$

이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$$\frac{D}{4}=(2k)^2-5(k^2-5)=-k^2+25$$

(1) 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D>0$이어야 하므로 $\quad -k^2+25>0$

$$(k+5)(k-5)<0 \qquad \therefore -5<k<5$$

(2) 원과 직선이 접하려면 $D=0$이어야 하므로

$$-k^2+25=0, \qquad k^2=25$$

$$\therefore k=\pm 5$$

(3) 원과 직선이 만나지 않으려면 $D<0$이어야 하므로

$$-k^2+25<0, \qquad (k+5)(k-5)>0$$

$$\therefore k<-5 \text{ 또는 } k>5$$

답 (1) $\boldsymbol{-5<k<5}$ (2) $\boldsymbol{k=\pm 5}$
(3) $\boldsymbol{k<-5}$ **또는** $\boldsymbol{k>5}$

다른 풀이 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리를 $d$라 하면

$$d=\frac{|k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

이때 원의 반지름의 길이를 $r$라 하면 $r=\sqrt{5}$이다.

(1) 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d<r$이어야 하므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5}, \qquad |k|<5$$

$$\therefore -5<k<5$$

(2) 원과 직선이 접하려면 $d=r$이어야 하므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}, \qquad |k|=5 \qquad \therefore k=\pm 5$$

(3) 원과 직선이 만나지 않으려면 $d>r$이어야 하므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}}>\sqrt{5}, \qquad |k|>5$$

$$\therefore k<-5 \text{ 또는 } k>5$$

## 189

기울기가 2인 접선의 방정식을 $y=2x+n$ ($n$은 상수), 즉 $2x-y+n=0$이라 하면 원의 중심 $(1, 2)$와 접선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 3과 같으므로

$$\frac{|2-2+n|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=3, \qquad |n|=3\sqrt{5}$$

$$\therefore n=\pm 3\sqrt{5}$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y=2x+3\sqrt{5} \text{ 또는 } y=2x-3\sqrt{5}$$

답 $\boldsymbol{y=2x+3\sqrt{5}}$, $\boldsymbol{y=2x-3\sqrt{5}}$

다른 풀이 기울기가 2인 접선의 방정식을 $y=2x+n$ ($n$은 상수)이라 하자.

$(x-1)^2+(y-2)^2=9$에 $y=2x+n$을 대입하면

$$(x-1)^2+(2x+n-2)^2=9$$

$$\therefore 5x^2+2(2n-5)x+n^2-4n-4=0$$

이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

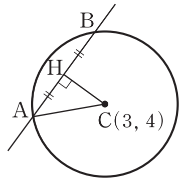
$$\frac{D}{4}=(2n-5)^2-5(n^2-4n-4)=0$$

$$n^2-45=0 \qquad \therefore n=\pm 3\sqrt{5}$$

## 190

$x^2+y^2-6x-8y+21=0$에서

$$(x-3)^2+(y-4)^2=4$$




오른쪽 그림과 같이 주어진 원의 중심을 $C(3, 4)$라 하고 점 C에서 직선 $y=x+3$, 즉 $x-y+3=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{CH}=\frac{|3-4+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

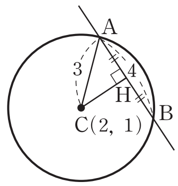
또 $\overline{AC}=2$이므로 직각삼각형 ACH에서

$$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{2}$$

답 $\boldsymbol{2\sqrt{2}}$

## 191




오른쪽 그림과 같이 주어진 원과 직선의 두 교점을 A, B, 원의 중심을 $C(2, 1)$이라 하고 점 C에서 직선 $y=-2x+k$, 즉 $2x+y-k=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{CH}=\frac{|4+1-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|5-k|}{\sqrt{5}} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 $\overline{AC}=3$, $\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=2$이므로 직각삼각형 ACH에서

$$\overline{CH}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AH}^2}$$

$$=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\frac{|5-k|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$, $\quad |5-k|=5$

$$5-k=\pm 5 \qquad \therefore k=10 \ (\because k>0)$$

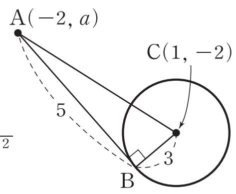
답 **10**

## 192

$x^2+y^2-2x+4y-4=0$에서

$$(x-1)^2+(y+2)^2=9$$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C(1, −2)라 하면




$$\overline{\mathrm{CA}}$$
$$=\sqrt{(-2-1)^2+(a+2)^2}$$
$$=\sqrt{a^2+4a+13}$$

또 $\overline{\mathrm{CB}}=3$이므로 직각삼각형 ABC에서

$$\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{CB}}^2$$
$$a^2+4a+13=5^2+3^2$$
$$a^2+4a-21=0, \qquad (a+7)(a-3)=0$$
$$\therefore\ a=3\ (\because\ a>0)$$

답 3

## 193

$x^2+y^2+6x-8y+9=0$에서

$$(x+3)^2+(y-4)^2=16$$

원의 중심 $(-3,\ 4)$와 직선 $3x-4y-10=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-9-16-10|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=7$$

원의 반지름의 길이가 4이므로 원 위의 점과 직선 사이의 거리의

최댓값은 $\quad 7+4=11$

최솟값은 $\quad 7-4=3$

답 **최댓값: 11, 최솟값: 3**

**연습 문제** ● 본책 85~86쪽

## 194

**전략** 원의 중심과 직선 사이의 거리를 이용하여 $k$에 대한 부등식을 세운다.

$x^2+y^2-4x-6y+12=0$에서

$$(x-2)^2+(y-3)^2=1$$

이 원과 직선 $kx+y-2=0$이 만나려면 원의 중심 $(2,\ 3)$과 직선 사이의 거리가 반지름의 길이 1보다 작거나 같아야 하므로

$$\frac{|2k+3-2|}{\sqrt{k^2+1^2}}\le 1 \qquad \therefore\ |2k+1|\le\sqrt{k^2+1}$$

양변을 제곱하면 $\quad 4k^2+4k+1\le k^2+1$

$$3k^2+4k\le 0, \qquad k(3k+4)\le 0$$
$$\therefore\ -\frac{4}{3}\le k\le 0$$

답 $\boldsymbol{-\frac{4}{3}\le k\le 0}$

**다른 풀이** $kx+y-2=0$에서 $\quad y=-kx+2$

$x^2+y^2-4x-6y+12=0$에 이것을 대입하면

$$x^2+(-kx+2)^2-4x-6(-kx+2)+12=0$$
$$\therefore\ (k^2+1)x^2+2(k-2)x+4=0$$

이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$$\frac{D}{4}=(k-2)^2-(k^2+1)\times 4\ge 0$$
$$-3k^2-4k\ge 0, \qquad k(3k+4)\le 0$$
$$\therefore\ -\frac{4}{3}\le k\le 0$$

## 195

**전략** 원과 직선이 접하면 원의 중심과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

주어진 직선에 접하는 원의 반지름의 길이를 $r$라 하면

$$\pi r^2=20\pi, \qquad r^2=20$$
$$\therefore\ r=2\sqrt{5}\ (\because\ r>0)$$

이때 원과 직선이 접하면 원의 중심 $(-1,\ 3)$과 직선 $2x-y+k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $2\sqrt{5}$와 같으므로

$$\frac{|-2-3+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}$$
$$|k-5|=10, \qquad k-5=\pm 10$$
$$\therefore\ k=15\ (\because\ k>0)$$

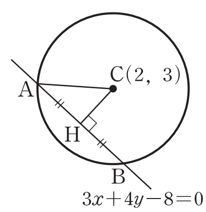
답 15

## 196

**전략** 원과 직선이 만나서 생기는 현을 지름으로 하는 원의 넓이를 구한다.

주어진 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하면 두 점 A, B를 지나는 원 중에서 그 넓이가 최소인 것은 $\overline{\mathrm{AB}}$를 지름으로 하는 원이다.

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C(2, 3)이라 하고, 점 C에서 직선 $3x+4y-8=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면




$$\overline{\mathrm{CH}}=\frac{|6+12-8|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$$

또 $\overline{CA}=\sqrt{10}$이므로 직각삼각형 CAH에서

$$\overline{AH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CH}^2}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{10})^2-2^2}=\sqrt{6}$$

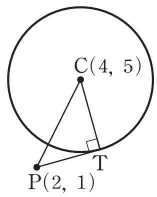
따라서 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$이므로 구하는 넓이는

$$\pi\times(\sqrt{6})^2=6\pi$$

답 $6\pi$

## 197

**전략** 원의 중심과 접선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.




오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C(4, 5)라 하면

$$\overline{CP}=\sqrt{(2-4)^2+(1-5)^2}$$
$$=2\sqrt{5}$$

접점을 T라 하면 접선의 길이가 3이므로

$$\overline{PT}=3$$

이때 원의 반지름의 길이는 $\overline{CT}$의 길이와 같으므로 직각삼각형 CPT에서

$$\overline{CT}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{PT}^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-3^2}=\sqrt{11}$$

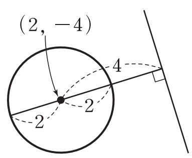
답 $\sqrt{11}$

## 198

**전략** 원의 중심과 직선 사이의 거리를 이용하여 점 P와 직선 사이의 거리의 최댓값과 최솟값을 구한다.

$x^2+y^2-4x+8y+16=0$에서

$$(x-2)^2+(y+4)^2=4$$




원의 중심 $(2, -4)$와 직선 $4x+3y-16=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|8-12-16|}{\sqrt{4^2+3^2}}=4$$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로 원 위의 점 P와 직선 사이의 거리를 $l$이라 하면

$$4-2\le l\le 4+2$$
$$\therefore 2\le l\le 6$$

$l=2$, 6인 점 P는 각각 1개씩이고, $l=3$, 4, 5인 점 P는 각각 2개씩이므로 구하는 점 P의 개수는

$$2\times1+3\times2=8$$

답 8

## 199

**전략** 원과 직선이 접하면 원의 중심과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

$y=ax+b$에서

$$ax-y+b=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠이 원 $x^2+y^2=1$에 접하면 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 사이의 거리가 반지름의 길이 1과 같으므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=1 \qquad \therefore |b|=\sqrt{a^2+1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2=b^2-1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

또 직선 ㉠이 원 $x^2+(y-2)^2=4$에 접하면 원의 중심 $(0, 2)$와 직선 사이의 거리가 반지름의 길이 2와 같으므로

$$\frac{|-2+b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=2$$
$$\therefore |b-2|=2\sqrt{a^2+1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$b^2-4b=4a^2$$

위의 식에 ㉡을 대입하면

$$b^2-4b=4(b^2-1)$$
$$3b^2+4b-4=0, \qquad (b+2)(3b-2)=0$$
$$\therefore b=-2 \text{ 또는 } b=\frac{2}{3}$$

이때 ㉡에서 $a^2=b^2-1\ge0$이므로

$$b^2\ge1$$
$$\therefore b=-2,\ a^2=3$$
$$\therefore a^2+b^2=3+(-2)^2=7$$

답 7

## 200

**전략** 직선 $y=x$ 위의 점의 좌표를 $(k, k)$로 놓는다.

원의 중심의 좌표를 $(k, k)$라 하면 원이 $x$축과 $y$축에 동시에 접하므로 원의 반지름의 길이는 $|k|$이다.

이때 원과 직선 $3x-4y+12=0$이 접하면 원의 중심 $(k, k)$와 직선 $3x-4y+12=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 $|k|$와 같으므로

$$\frac{|3k-4k+12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=|k|$$
$$|-k+12|=5|k|$$

양변을 제곱하면　$k^2-24k+144=25k^2$

$k^2+k-6=0,\quad (k+3)(k-2)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=2$

따라서 두 원의 중심 A, B의 좌표는 $(-3,\ -3)$, $(2,\ 2)$이므로

$\overline{AB}^2=\{2-(-3)\}^2+\{2-(-3)\}^2=50$

답 **50**

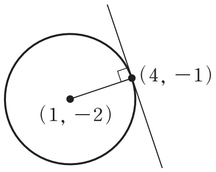
## 201

**전략** 원의 중심과 접점을 지나는 직선의 기울기를 이용하여 접선의 기울기를 구한다.

$x^2+y^2-2x+4y-5=0$에서

$(x-1)^2+(y+2)^2=10$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(1,\ -2)$이므로 원의 중심과 점 $(4,\ -1)$을 지나는 직선의 기울기는




$$\frac{-1-(-2)}{4-1}=\frac{1}{3}$$

이때 점 $(4,\ -1)$에서의 접선과 두 점 $(1,\ -2)$, $(4,\ -1)$을 지나는 직선은 수직이므로 접선의 기울기는 $-3$이다.

따라서 접선의 방정식은

$y+1=-3(x-4)\quad \therefore y=-3x+11$

이 직선이 점 $(-1,\ k)$를 지나므로

$k=-3\times(-1)+11=14$

답 **14**

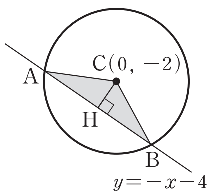
## 202

**전략** △ABC에서 $\overline{AB}$를 밑변, 원의 중심과 직선 사이의 거리를 높이로 생각한다.

$x^2+y^2+4y+k=0$에서

$x^2+(y+2)^2=4-k$

따라서 $C(0,\ -2)$이고, 점 C에서 직선 $y=-x-4$, 즉 $x+y+4=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면




$$\overline{CH}=\frac{|0-2+4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$$

이때 △ABC의 넓이가 4이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\sqrt{2}=4\quad \therefore \overline{AB}=4\sqrt{2}$

따라서 $\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=2\sqrt{2}$이므로 직각삼각형 AHC에서

$\overline{CA}=\sqrt{\overline{CH}^2+\overline{AH}^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{10}$

즉 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로

$4-k=(\sqrt{10})^2\quad \therefore k=-6$

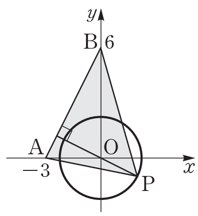
답 **−6**

## 203

**전략** 직선 AB와 원의 중심 사이의 거리를 이용하여 △PAB의 넓이의 최댓값을 구한다.

$\overline{AB}=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$

원 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최대일 때 △PAB의 넓이는 최대가 된다.




직선 AB의 방정식은

$\frac{x}{-3}+\frac{y}{6}=1\quad \therefore 2x-y+6=0$

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $2x-y+6=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최댓값은

$$\frac{6\sqrt{5}}{5}+\sqrt{5}=\frac{11\sqrt{5}}{5}$$

따라서 △PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times\frac{11\sqrt{5}}{5}=\frac{33}{2}$$

답 $\frac{33}{2}$

## 204

**전략** 선분 $H_1H_2$의 길이가 최대인 경우와 최소인 경우를 파악한다.

원 $C_1$: $(x+6)^2+y^2=4$의 중심을 $C_1$이라 하면 $C_1(-6,\ 0)$이고 반지름의 길이는 2이다.

또 원 $C_2$: $(x-5)^2+(y+3)^2=1$의 중심을 $C_2$라 하면 $C_2(5,\ -3)$이고 반지름의 길이는 1이다.

이때 점 $C_1$에서 직선 $l$에 내린 수선의 발을 $R(a,\ a-2)$라 하면 직선 $C_1R$와 직선 $l$은 수직이므로

$\frac{a-2}{a-(-6)}=-1,\quad a-2=-a-6$

$\therefore a=-2$

$\therefore R(-2,\ -4)$

또 점 $C_2$에서 직선 $l$에 내린 수선의 발을 $S(b,\ b-2)$라 하면 직선 $C_2S$와 직선 $l$은 수직이므로

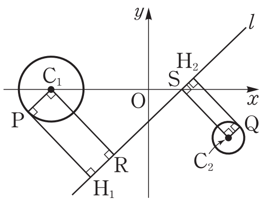
$$\frac{b-2-(-3)}{b-5}=-1, \qquad b+1=-b+5$$

$\therefore\ b=2 \qquad \therefore\ S(2,\ 0)$

$\therefore\ \overline{RS}=\sqrt{(2+2)^2+4^2}=4\sqrt{2}$

선분 $H_1H_2$의 길이가 최대이려면 두 점 P, Q의 위치가 [그림 1]과 같아야 하므로

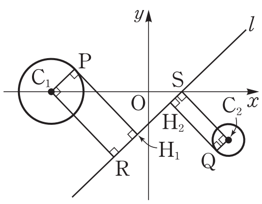
$$M=\overline{RS}+\overline{H_1R}+\overline{H_2S}$$
$$=4\sqrt{2}+2+1=4\sqrt{2}+3$$




[그림 1]

선분 $H_1H_2$의 길이가 최소이려면 두 점 P, Q의 위치가 [그림 2]와 같아야 하므로

$$m=\overline{RS}-\overline{RH_1}-\overline{SH_2}$$
$$=4\sqrt{2}-2-1=4\sqrt{2}-3$$

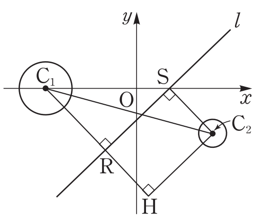



[그림 2]

$\therefore\ Mm=(4\sqrt{2}+3)(4\sqrt{2}-3)=23$ 　　**답 23**

다른 풀이 원 $C_1$의 중심을 $C_1(-6,\ 0)$, 원 $C_2$의 중심을 $C_2(5,\ -3)$이라 하면

$$\overline{C_1C_2}=\sqrt{(5+6)^2+(-3)^2}=\sqrt{130}$$




위의 그림과 같이 두 점 $C_1$, $C_2$에서 직선 $l$, 즉 $x-y-2=0$에 내린 수선의 발을 각각 R, S라 하고, 점 $C_2$에서 $\overline{C_1R}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{C_1R}=\frac{|-6-0-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=4\sqrt{2},$$

$$\overline{C_2S}=\frac{|5+3-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}$$

$\therefore\ \overline{C_1H}=\overline{C_1R}+\overline{C_2S}=4\sqrt{2}+3\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

$\therefore\ \overline{RS}=\overline{HC_2}=\sqrt{\overline{C_1C_2}^2-\overline{C_1H}^2}$

$$=\sqrt{(\sqrt{130})^2-(7\sqrt{2})^2}=4\sqrt{2}$$

## 205

**전략** 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓고 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구한다.

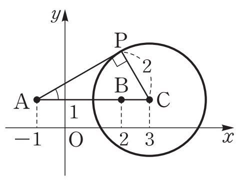
$\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$에서

$\overline{AP}=2\overline{BP} \qquad \therefore\ \overline{AP}^2=4\overline{BP}^2$

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$$(x+1)^2+(y-1)^2=4\{(x-2)^2+(y-1)^2\}$$
$$x^2+y^2-6x-2y+6=0$$
$$\therefore\ (x-3)^2+(y-1)^2=4$$

즉 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(3,\ 1)$이고 반지름의 길이가 2인 원이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 AP가 원에 접할 때 $\angle PAB$의 크기가 최대이다.




이때 원의 중심을 C라 하면 $\angle APC=90°$이므로 $\triangle PAC$에서

$$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{PC}^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$$

$$\therefore\ \cos(\angle PAB)=\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

**답** $\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

# 03 원의 접선의 방정식

● 본책 87~90쪽

## 206

직선 $y=-3x+5$와 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$이고, 원 $x^2+y^2=9$의 반지름의 길이는 3이므로 구하는 직

선의 방정식은

$$y=\frac{1}{3}x\pm3\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+1} \qquad \therefore\ y=\frac{1}{3}x\pm\sqrt{10}$$

답 $\boldsymbol{y=\frac{1}{3}x+\sqrt{10},\ y=\frac{1}{3}x-\sqrt{10}}$

## 207

$x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $45°$인 직선의 기울기는

$$\tan 45°=1$$

원 $x^2+y^2=3$의 반지름의 길이는 $\sqrt{3}$이므로 접선의 방정식은

$$y=x\pm\sqrt{3}\times\sqrt{1^2+1}$$

$$\therefore\ y=x\pm\sqrt{6}$$

따라서 두 직선의 $x$절편은 $\sqrt{6}$, $-\sqrt{6}$이므로 구하는 곱은

$$\sqrt{6}\times(-\sqrt{6})=-6$$

답 $\boldsymbol{-6}$

## 208

원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(-1,\ -3)$에서의 접선의 방정식은

$$-1\times x+(-3)\times y=10$$

$$\therefore\ x+3y+10=0$$

이 접선의 $x$절편은 $-10$, $y$절편은 $-\frac{10}{3}$이므로

$\triangle$OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times|-10|\times\left|-\frac{10}{3}\right|=\frac{50}{3}$$

답 $\boldsymbol{\frac{50}{3}}$

## 209

$x^2+y^2=25$에 $y=x-1$을 대입하면

$$x^2+(x-1)^2=25$$

$$x^2-x-12=0, \qquad (x+3)(x-4)=0$$

$$\therefore\ x=-3 \text{ 또는 } x=4$$

원과 직선의 교점 중에서 제1사분면 위에 있는 교점의 좌표는

$$(4,\ 3)$$

따라서 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $(4,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$$4x+3y=25$$

답 $\boldsymbol{4x+3y=25}$

## 210

접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=5 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠이 점 $(3,\ -1)$을 지나므로

$$3x_1-y_1=5$$

$$\therefore\ y_1=3x_1-5 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

또 접점 $(x_1,\ 3x_1-5)$는 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점이므로

$$x_1^2+(3x_1-5)^2=5$$

$$x_1^2-3x_1+2=0, \qquad (x_1-1)(x_1-2)=0$$

$$\therefore\ x_1=1 \text{ 또는 } x_1=2$$

㉡에서 $x_1=1$일 때 $y_1=-2$, $x_1=2$일 때 $y_1=1$이므로 ㉠에 대입하여 정리하면

$$x-2y-5=0,\ 2x+y-5=0$$

답 $\boldsymbol{x-2y-5=0,\ 2x+y-5=0}$

다른 풀이 1 점 $(3,\ -1)$을 지나는 접선의 기울기를 $m$이라 하면 접선의 방정식은

$$y+1=m(x-3)$$

$$\therefore\ mx-y-3m-1=0 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

원의 중심 $(0,\ 0)$과 접선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같아야 하므로

$$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$

$$\therefore\ |3m+1|=\sqrt{5(m^2+1)}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$2m^2+3m-2=0, \qquad (m+2)(2m-1)=0$$

$$\therefore\ m=-2 \text{ 또는 } m=\frac{1}{2}$$

이것을 ㉢에 대입하여 정리하면

$$-2x-y+5=0,\ \frac{1}{2}x-y-\frac{5}{2}=0$$

$$\therefore\ 2x+y-5=0,\ x-2y-5=0$$

다른 풀이 2 점 $(3,\ -1)$을 지나는 접선의 기울기를 $m$이라 하면 접선의 방정식은

$$y+1=m(x-3)$$

$$\therefore\ y=mx-3m-1 \qquad \cdots\cdots ㉣$$

$x^2+y^2=5$에 ㉣을 대입하여 정리하면

$$(m^2+1)x^2-2m(3m+1)x+9m^2+6m-4=0$$

이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

Ⅰ-3 원의 방정식

$$\frac{D}{4}=\{-m(3m+1)\}^2$$
$$-(m^2+1)(9m^2+6m-4)$$
$$=0$$

$-4m^2-6m+4=0,\quad 2m^2+3m-2=0$

$(m+2)(2m-1)=0$

$\therefore m=-2$ 또는 $m=\frac{1}{2}$

㉣에 이것을 대입하여 정리하면

$y=-2x+5,\ y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

$\therefore 2x+y-5=0,\ x-2y-5=0$

## 211

점 $(2,\ -1)$을 지나는 접선의 기울기를 $m$이라 하면 접선의 방정식은

$y+1=m(x-2)$

$\therefore mx-y-2m-1=0$

원의 중심 $(-1,\ 2)$와 접선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{3}$과 같아야 하므로

$$\frac{|-m-2-2m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{3}$$

$\therefore |3m+3|=\sqrt{3(m^2+1)}$

양변을 제곱하여 정리하면

$m^2+3m+1=0$ ······ ㉠

두 접선의 기울기를 $m_1$, $m_2$라 하면 이차방정식 ㉠의 두 근이 $m_1$, $m_2$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$m_1+m_2=-3$

답 $-3$

참고 이차방정식 ㉠의 판별식을 $D$라 하면

$D=3^2-4\times1\times1=5>0$

따라서 이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

## 연습 문제

● 본책 91쪽

## 212

전략 기울기가 3인 접선의 방정식을 구한다.

직선 $y=3x+2$와 평행한 직선의 기울기는 3이고, 원 $x^2+y^2=10$의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이므로 접선의 방정식은

$y=3x\pm\sqrt{10}\times\sqrt{3^2+1}$

$\therefore y=3x\pm10$

따라서 두 직선이 $y$축과 만나는 점의 좌표는 $(0,\ 10)$, $(0,\ -10)$이므로

$\overline{AB}=20$

답 20

## 213

전략 원 위의 점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 방정식을 먼저 구한다.

원 $x^2+y^2=2$ 위의 점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 방정식은

$1\times x+(-1)\times y=2$

$\therefore x-y-2=0$

$x^2+y^2-6x+2y+k=0$에서

$(x-3)^2+(y+1)^2=10-k$

이 원과 직선 $x-y-2=0$이 접하려면 원의 중심 $(3,\ -1)$과 직선 $x-y-2=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{10-k}$와 같아야 하므로

$$\frac{|3+1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{10-k}$$

$\sqrt{2}=\sqrt{10-k},\quad 2=10-k$

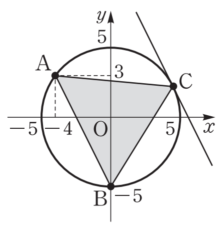
$\therefore k=8$

답 8

## 214

전략 $\triangle$ABC의 넓이가 최대일 때, 점 C의 위치를 파악한다.

원 $x^2+y^2=25$와 두 점 $A(-4,\ 3)$, $B(0,\ -5)$는 오른쪽 그림과 같으므로 $\triangle$ABC의 넓이가 최대이려면 점 C에서의 접선이 직선 AB와 평행해야 한다.




직선 AB의 기울기는

$$\frac{-5-3}{0-(-4)}=-2$$

따라서 기울기가 $-2$인 접선의 방정식은

$y=-2x\pm5\sqrt{(-2)^2+1}$

$\therefore y=-2x\pm5\sqrt{5}$

이때 점 C에서의 접선의 $y$절편은 양수이어야 하므로 구하는 접선의 방정식은

$y=-2x+5\sqrt{5}$

답 $y=-2x+5\sqrt{5}$

## 215

**전략** 점 P의 $x$좌표를 $x_1$이라 하고, 점 B의 좌표를 $x_1$에 대한 식으로 나타낸다.

점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$ $(x_1>0,\ y_1>0)$이라 하면 원 $C$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=4 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이때 점 H의 좌표가 $(x_1,\ 0)$이므로

$$\overline{\mathrm{AH}}=x_1-(-2)=x_1+2$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{BH}}=2\overline{\mathrm{AH}}=2x_1+4$$

따라서 $\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OH}}+\overline{\mathrm{BH}}=3x_1+4$이므로

$$\mathrm{B}(3x_1+4,\ 0)$$

직선 ㉠이 점 B를 지나므로

$$x_1(3x_1+4)=4, \qquad 3x_1^2+4x_1-4=0$$

$$(x_1+2)(3x_1-2)=0$$

$$\therefore\ x_1=\frac{2}{3}\ (\because\ x_1>0)$$

즉 점 B의 좌표는 $(6,\ 0)$이므로

$$\overline{\mathrm{AB}}=6-(-2)=8$$

또 점 $\mathrm{P}\left(\frac{2}{3},\ y_1\right)$은 원 $C$ 위의 점이므로

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2+y_1^2=4, \qquad y_1^2=\frac{32}{9}$$

$$\therefore\ y_1=\frac{4\sqrt{2}}{3}\ (\because\ y_1>0)$$

따라서 △PAB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{PH}}=\frac{1}{2}\times 8\times\frac{4\sqrt{2}}{3}=\frac{16\sqrt{2}}{3}$$

**답** ④

## 216

**전략** 접선의 기울기를 $m$으로 놓고 접선의 방정식을 세운 다음 두 접선의 기울기의 곱이 $-1$임을 이용한다.

점 $\mathrm{A}(0,\ a)$를 지나고 기울기가 $m$인 접선의 방정식은

$$y=mx+a$$

$$\therefore\ mx-y+a=0 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

원의 중심 $(0,\ 3)$과 접선 ㉠ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $2\sqrt{2}$와 같으므로

$$\frac{|-3+a|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$$

$$\therefore\ |a-3|=\sqrt{8(m^2+1)}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$8m^2-a^2+6a-1=0$$

$m$에 대한 이 이차방정식의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 하면 $\alpha$, $\beta$는 두 접선의 기울기이고 두 접선이 수직이므로

$$\alpha\beta=-1$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{-a^2+6a-1}{8}=-1, \qquad a^2-6a-7=0$$

$$(a+1)(a-7)=0$$

$$\therefore\ a=7\ (\because\ a>0)$$

**답** 7

## 217

**전략** 원 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선이 점 P를 지남을 이용한다.

접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=4 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

직선 ㉠이 점 $\mathrm{P}(-2\sqrt{3},\ 2)$를 지나므로

$$-2\sqrt{3}x_1+2y_1=4$$

$$\therefore\ y_1=\sqrt{3}x_1+2 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

또 접점 $(x_1,\ y_1)$, 즉 $(x_1,\ \sqrt{3}x_1+2)$는 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

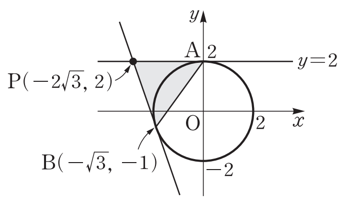
$$x_1^2+(\sqrt{3}x_1+2)^2=4$$

$$4x_1^2+4\sqrt{3}x_1=0, \qquad x_1(x_1+\sqrt{3})=0$$

$$\therefore\ x_1=0 \text{ 또는 } x_1=-\sqrt{3}$$

㉡에서 $x_1=0$일 때 $y_1=2$, $x_1=-\sqrt{3}$일 때 $y_1=-1$이므로 두 접점의 좌표는

$$(0,\ 2),\ (-\sqrt{3},\ -1)$$




오른쪽 그림과 같이 $\mathrm{A}(0,\ 2)$, $\mathrm{B}(-\sqrt{3},\ -1)$이라 하면

$$\overline{\mathrm{AP}}=2\sqrt{3}$$

이고, 점 B와 직선 AP, 즉 $y=2$ 사이의 거리는 3이므로 △ABP의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 3=3\sqrt{3}$$

**답** $3\sqrt{3}$

**다른 풀이** 점 $\mathrm{P}(-2\sqrt{3},\ 2)$를 지나고 기울기가 $m$인 접선의 방정식은

$$y-2=m(x+2\sqrt{3})$$

$$\therefore\ mx-y+2\sqrt{3}m+2=0 \quad \cdots\cdots \text{㉢}$$

Ⅰ-3 원의 방정식

원의 중심 $(0,\ 0)$과 접선 ㉢ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 2와 같으므로

$$\frac{|2\sqrt{3}m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$$

$$\therefore\ |2\sqrt{3}m+2|=2\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

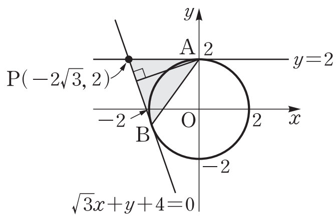
$$m^2+\sqrt{3}m=0, \qquad m(m+\sqrt{3})=0$$

$$\therefore\ m=0 \text{ 또는 } m=-\sqrt{3}$$

㉢에 이것을 대입하여 정리하면

$$y=2,\ \sqrt{3}x+y+4=0$$

다음 그림과 같이 $\mathrm{A}(0,\ 2)$라 하고 다른 접점을 점 B라 하자.




점 P에서 원에 그은 두 접선의 길이는 같으므로

$$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}=2\sqrt{3}$$

점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$와 직선 $\sqrt{3}x+y+4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2+4|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=3$$

따라서 $\triangle\mathrm{ABP}$의 넓이는

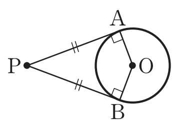
$$\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times3=3\sqrt{3}$$

**개념 노트**

점 P에서 원에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 할 때

① $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$

② $\angle\mathrm{PAO}=\angle\mathrm{PBO}=90^\circ$




## 04 두 원의 교점을 지나는 직선과 원의 방정식

● 본책 92~94쪽

### 218

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2-2x+ky-4-(x^2+y^2-4x-2y+4)=0$$

$$\therefore\ 2x+(k+2)y-8=0$$

이 직선이 직선 $y=3x+4$, 즉 $3x-y+4=0$과 수직이므로

$$2\times3+(k+2)\times(-1)=0$$

$$\therefore\ k=4$$

**답** $4$

**개념 노트**

**두 직선의 평행과 수직**

두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이

① 평행하다. ⇨ $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$

② 수직이다. ⇨ $aa'+bb'=0$

### 219

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2+y^2-5+k(x^2+y^2-3x-y-4)=0\ (k\neq-1) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이 원이 원점을 지나므로

$$-5-4k=0 \qquad \therefore\ k=-\frac{5}{4}$$

㉠에 $k=-\dfrac{5}{4}$를 대입하면

$$x^2+y^2-5-\frac{5}{4}(x^2+y^2-3x-y-4)=0$$

$$4(x^2+y^2-5)-5(x^2+y^2-3x-y-4)=0$$

$$-x^2-y^2+15x+5y=0$$

$$\therefore\ x^2+y^2-15x-5y=0$$

**답** $x^2+y^2-15x-5y=0$

### 220

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2+y^2+ax-2ay+k(x^2+y^2-10x-8y+16)=0\ (k\neq-1) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이 원이 두 점 $(0,\ 2)$, $(3,\ 1)$을 지나므로

$$4-4a+4k=0,\ 10+a-12k=0$$

$$\therefore\ a-k=1,\ a-12k=-10$$

두 식을 연립하여 풀면 $\qquad a=2,\ k=1$

㉠에 $a=2$, $k=1$을 대입하면

$$x^2+y^2+2x-4y+(x^2+y^2-10x-8y+16)$$
$$=0$$
$$2x^2+2y^2-8x-12y+16=0$$
$$x^2+y^2-4x-6y+8=0$$
$$\therefore\ (x-2)^2+(y-3)^2=5$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi\times(\sqrt{5})^2=5\pi$$

답 $5\pi$

## 221

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

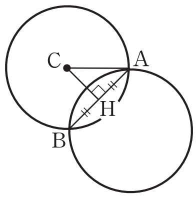
$$x^2+y^2-2x-4y+1-(x^2+y^2-6x+5)=0$$
$$\therefore\ x-y-1=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x^2+y^2-2x-4y+1=0$에서

$$(x-1)^2+(y-2)^2=4$$

이므로 이 원의 중심을 C(1, 2)라 하자.

오른쪽 그림과 같이 두 원의 교점을 각각 A, B라 하고, 점 C에서 $\overline{\text{AB}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면




$$\overline{\text{CH}}=\frac{|1-2-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

또 $\overline{\text{CA}}=2$이므로 직각삼각형 ACH에서

$$\overline{\text{AH}}=\sqrt{\overline{\text{CA}}^2-\overline{\text{CH}}^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$$

따라서 구하는 공통인 현의 길이는

$$\overline{\text{AB}}=2\overline{\text{AH}}=2\sqrt{2}$$

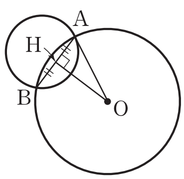
답 $2\sqrt{2}$

## 222

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2-5-(x^2+y^2+4x-3y+a)=0$$
$$\therefore\ 4x-3y+a+5=0$$

오른쪽 그림과 같이 두 원의 교점을 각각 A, B라 하고,
원 $x^2+y^2=5$의 중심 O(0, 0)에서 $\overline{\text{AB}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면




$$\overline{\text{OH}}=\frac{|a+5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|a+5|}{5} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 $\overline{\text{AH}}=\frac{1}{2}\overline{\text{AB}}=1$, $\overline{\text{OA}}=\sqrt{5}$이므로 직각삼각형 OAH에서

$$\overline{\text{OH}}=\sqrt{\overline{\text{OA}}^2-\overline{\text{AH}}^2}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\frac{|a+5|}{5}=2$, $\quad |a+5|=10$

$$a+5=\pm10 \qquad \therefore\ a=5\ (\because\ a>0)$$

답 5

**연습 문제** ● 본책 95쪽

## 223

**전략** 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구한다.

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2-6-(x^2+y^2-4x+ky)=0$$
$$\therefore\ 4x-ky-6=0$$

이 직선이 직선 $x-y+3=0$과 평행하므로

$$\frac{4}{1}=\frac{-k}{-1}\neq\frac{-6}{3} \qquad \therefore\ k=4$$

따라서 두 직선 $x-y+3=0$, $4x-4y-6=0$ 사이의 거리는 직선 $x-y+3=0$ 위의 점 (0, 3)과 직선 $4x-4y-6=0$, 즉 $2x-2y-3=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-6-3|}{\sqrt{2^2+(-2)^2}}=\frac{9\sqrt{2}}{4}$$

답 $\frac{9\sqrt{2}}{4}$

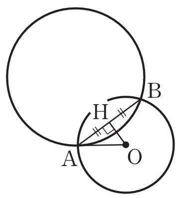
## 224

**전략** 공통인 현의 길이를 이용하여 원 $x^2+y^2=4$의 중심과 공통인 현 사이의 거리를 구한다.

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2-4-(x^2+y^2+3x-4y+k)=0$$
$$\therefore\ 3x-4y+k+4=0$$

오른쪽 그림과 같이 두 원의 교점을 각각 A, B라 하고,
원 $x^2+y^2=4$의 중심 O(0, 0)에서 $\overline{\text{AB}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면




$$\overline{\text{OH}}=\frac{|k+4|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|k+4|}{5} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

Ⅰ-3 원의 방정식

또 $\overline{\mathrm{AH}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{OA}}=2$이므로

$$\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{AH}}^2}$$
$$=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $\frac{|k+4|}{5}=1$

$|k+4|=5, \quad k+4=\pm5$

$\therefore k=-9$ 또는 $k=1$

따라서 모든 상수 $k$의 값의 합은

$-9+1=-8$

답 $-8$

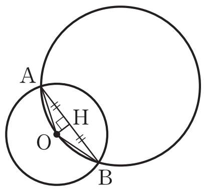
## 225

전략 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식을 이용한다.

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2-9-(x^2+y^2-8x-6y+1)=0$$
$$\therefore 4x+3y-5=0 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=9$의 중심 $\mathrm{O}(0,\ 0)$에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면




$$\overline{\mathrm{OH}}=\frac{|-5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1$$

또 $\overline{\mathrm{OA}}=3$이므로 직각삼각형 AOH에서

$$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OH}}^2}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$$
$$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}=4\sqrt{2}$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{OH}}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times1=2\sqrt{2}$$

답 $2\sqrt{2}$

## 226

전략 두 원의 공통인 현을 지름으로 하는 원의 중심의 좌표를 구한다.

두 원의 교점을 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 것은 두 원의 공통인 현을 지름으로 하는 원이므로 구하는 원의 중심의 좌표는 공통인 현의 중점이다.

이때 두 원의 중심을 지나는 직선은 공통인 현을 수직이등분하므로 공통인 현의 중점은 두 원의 교점을 지나는 직선과 두 원의 중심을 지나는 직선의 교점이다.

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2+6x+2y+1-(x^2+y^2-2x-3)=0$$
$$\therefore 4x+y+2=0 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$x^2+y^2+6x+2y+1=0$에서

$$(x+3)^2+(y+1)^2=9$$

$x^2+y^2-2x-3=0$에서

$$(x-1)^2+y^2=4$$

따라서 두 원의 중심 $(-3,\ -1)$, $(1,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{0-(-1)}{1-(-3)}(x-1), \quad y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$$
$$\therefore x-4y-1=0 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$x=-\frac{7}{17},\ y=-\frac{6}{17}$$

즉 구하는 원의 중심의 좌표가 $\left(-\frac{7}{17},\ -\frac{6}{17}\right)$이므로

$$a=-\frac{7}{17},\ b=-\frac{6}{17}$$
$$\therefore \frac{b}{a}=\frac{6}{7}$$

답 $\frac{6}{7}$

## 227

전략 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을 세우고 이 원의 중심이 $x$축 위에 있음을 이용한다.

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2+y^2+4x+4y+k(x^2+y^2+x-2y-6)=0$$
$$\therefore (k+1)x^2+(k+1)y^2+(k+4)x$$
$$+(4-2k)y-6k$$
$$=0\ (k\neq-1) \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이 원의 중심이 $x$축 위에 있으므로 중심의 $y$좌표는 0이어야 한다.

즉 ㉠의 $y$의 계수가 0이어야 하므로

$4-2k=0 \quad \therefore k=2$

㉠에 $k=2$를 대입하면

$$3x^2+3y^2+6x-12=0$$
$$x^2+y^2+2x-4=0$$
$$\therefore (x+1)^2+y^2=5$$

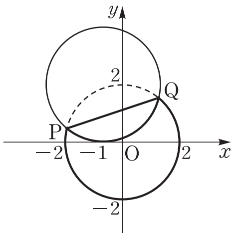
따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이다.

답 $\sqrt{5}$

## 228

**전략** $\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}$를 포함하는 원의 방정식을 구한다.

호 PQ는 오른쪽 그림과 같이 점 $(-1,\ 0)$에서 $x$축에 접하고 반지름의 길이가 2인 원의 일부이므로 그 원의 방정식을




$$(x-a)^2+(y-2)^2=4$$

라 하자.

이 원이 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$$(-1-a)^2+(0-2)^2=4$$

$$\therefore\ a=-1\ (\text{중근})$$

따라서 선분 PQ는 두 원

$$x^2+y^2=4,\ (x+1)^2+(y-2)^2=4$$

의 공통인 현이므로 직선 PQ의 방정식은

$$x^2+y^2-4-\{(x+1)^2+(y-2)^2-4\}=0$$

$$x^2+y^2-4-(x^2+y^2+2x-4y+1)=0$$

$$\therefore\ 2x-4y+5=0$$

**답** $\boldsymbol{2x-4y+5=0}$

**참고** 점 $(-1,\ 0)$에서 $x$축에 접하고 반지름의 길이가 2인 원의 중심은 $x$축에 수직인 직선 $x=-1$ 위에 있다. 따라서 이 원은 중심의 좌표가 $(-1,\ 2)$이고 반지름의 길이가 2인 원이다.

# 4 도형의 이동

Ⅰ. 도형의 방정식

## 01 평행이동

● 본책 98~102쪽

## 229

(1) $(7-3,\ 2+4)$, 즉 $(4,\ 6)$

(2) $(-6-3,\ 5+4)$, 즉 $(-9,\ 9)$

(3) $(-2-3,\ -4+4)$, 즉 $(-5,\ 0)$

**답** (1) $\boldsymbol{(4,\ 6)}$ (2) $\boldsymbol{(-9,\ 9)}$ (3) $\boldsymbol{(-5,\ 0)}$

## 230

평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x-5,\ y+3)$은 $x$축의 방향으로 $-5$만큼, $y$축의 방향으로 3만큼 평행이동하는 것이다.

(1) $(1-5,\ 3+3)$, 즉 $(-4,\ 6)$

(2) $(4-5,\ -6+3)$, 즉 $(-1,\ -3)$

(3) $(-2-5,\ 5+3)$, 즉 $(-7,\ 8)$

**답** (1) $\boldsymbol{(-4,\ 6)}$ (2) $\boldsymbol{(-1,\ -3)}$ (3) $\boldsymbol{(-7,\ 8)}$

## 231

주어진 식에 $x$ 대신 $x-2$, $y$ 대신 $y+3$을 대입한다.

(1) $3(x-2)-2(y+3)+5=0$에서

$$3x-2y-7=0$$

(2) $y+3=(x-2)^2+4$에서

$$y=x^2-4x+5$$

(3) $(x-2-3)^2+(y+3+4)^2=1$에서

$$(x-5)^2+(y+7)^2=1$$

**답** (1) $\boldsymbol{3x-2y-7=0}$

(2) $\boldsymbol{y=x^2-4x+5}$

(3) $\boldsymbol{(x-5)^2+(y+7)^2=1}$

## 232

평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x-2,\ y+5)$는 $x$축의 방향으로 $-2$만큼, $y$축의 방향으로 5만큼 평행이동하는 것이므로 주어진 식에 $x$ 대신 $x+2$, $y$ 대신 $y-5$를 대입한다.

(1) $2(x+2)-(y-5)-3=0$에서

$$2x-y+6=0$$

(2) $y-5=-(x+2)^2+2(x+2)$에서

$y=-x^2-2x+5$

(3) $(x+2+3)^2+(y-5-2)^2=5$에서

$(x+5)^2+(y-7)^2=5$

답 (1) $\mathbf{2x-y+6=0}$

(2) $\mathbf{y=-x^2-2x+5}$

(3) $\mathbf{(x+5)^2+(y-7)^2=5}$

## 233

평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x-3,\ y+2)$는 $x$축의 방향으로 $-3$만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동하는 것이므로 이 평행이동에 의하여 점 $(a,\ -1)$이 옮겨지는 점의 좌표는

$(a-3,\ -1+2)$, 즉 $(a-3,\ 1)$

이 점이 직선 $y=2x-3$ 위의 점이므로

$1=2(a-3)-3,\qquad -2a=-10$

$\therefore\ a=5$

답 **5**

## 234

점 $(2,\ -4)$를 $x$축의 방향으로 $a$만큼, $y$축의 방향으로 $b$만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(1,\ -3)$이라 하면

$2+a=1,\ -4+b=-3$

$\therefore\ a=-1,\ b=1$

즉 주어진 평행이동은 $x$축의 방향으로 $-1$만큼, $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동하는 것이므로 이 평행이동에 의하여 점 $(-3,\ 6)$이 옮겨지는 점의 좌표는

$(-3-1,\ 6+1)$, 즉 $(-4,\ 7)$

답 $\mathbf{(-4,\ 7)}$

## 235

점 $(m,\ n)$을 $x$축의 방향으로 2만큼, $y$축의 방향으로 $-3$만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(m+2,\ n-3)$

한편 $x^2+y^2-6x+8y+19=0$에서

$(x-3)^2+(y+4)^2=6$

이 원의 중심의 좌표는 $(3,\ -4)$이므로

$m+2=3,\ n-3=-4\qquad \therefore\ m=1,\ n=-1$

$\therefore\ mn=-1$

답 $\mathbf{-1}$

## 236

직선 $2x-3y+k=0$을 $x$축의 방향으로 1만큼, $y$축의 방향으로 $-2$만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$2(x-1)-3(y+2)+k=0$

$\therefore\ 2x-3y-8+k=0$

이 직선이 점 $(1,\ -4)$를 지나므로

$2+12-8+k=0$

$\therefore\ k=-6$

답 $\mathbf{-6}$

## 237

점 $(1,\ 2)$를 $x$축의 방향으로 $m$만큼, $y$축의 방향으로 $n$만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(-2,\ 4)$라 하면

$1+m=-2,\ 2+n=4$

$\therefore\ m=-3,\ n=2$

즉 주어진 평행이동은 $x$축의 방향으로 $-3$만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동하는 것이므로 이 평행이동에 의하여 직선 $3x-4y+2=0$이 옮겨지는 직선의 방정식은

$3(x+3)-4(y-2)+2=0$

$\therefore\ 3x-4y+19=0$

이 직선이 직선 $3x+py+q=0$과 일치하므로

$p=-4,\ q=19$

$\therefore\ p+q=15$

답 **15**

## 238

직선 $y=ax+b$를 $x$축의 방향으로 $-3$만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-2=a(x+3)+b$

$\therefore\ y=ax+3a+b+2$

이 직선과 직선 $y=2x+1$이 $y$축에서 수직으로 만나므로 두 직선의 기울기의 곱이 $-1$이고, $y$절편이 같아야 한다.

즉 $a\times2=-1,\ 3a+b+2=1$이므로

$a=-\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ b-a=1$

답 **1**

## 239

$y=x^2-4x+3$에서 $\qquad y=(x-2)^2-1$ ······ ㉠

평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x-a, y+2b)$는 $x$축의 방향으로 $-a$만큼, $y$축의 방향으로 $2b$만큼 평행이동하는 것이므로 이 평행이동에 의하여 포물선 ㉠이 옮겨지는 포물선의 방정식은

$$y-2b=(x+a-2)^2-1$$
$$\therefore y=x^2+2(a-2)x+(a-2)^2+2b-1$$

이 포물선이 포물선 $y=x^2-3$과 일치하므로

$$a-2=0, (a-2)^2+2b-1=-3$$
$$\therefore a=2, b=-1$$
$$\therefore a+b=1$$

답 **1**

다른 풀이 포물선 ㉠의 꼭짓점의 좌표는 $(2, -1)$, 포물선 $y=x^2-3$의 꼭짓점의 좌표는 $(0, -3)$이므로 주어진 평행이동은 점 $(2, -1)$을 점 $(0, -3)$으로 옮기는 평행이동이다.

즉 주어진 평행이동은 $x$축의 방향으로 $-2$만큼, $y$축의 방향으로 $-2$만큼 평행이동하는 것이므로

$$-a=-2, 2b=-2$$
$$\therefore a=2, b=-1$$

## 240

$x^2+y^2+6x+2y+8=0$에서

$$(x+3)^2+(y+1)^2=2$$

이 원을 $x$축의 방향으로 $a$만큼, $y$축의 방향으로 $b$만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-a+3)^2+(y-b+1)^2=2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x^2+y^2-4x-4y+6=0$에서

$$(x-2)^2+(y-2)^2=2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

두 원 ㉠, ㉡이 일치하므로

$$-a+3=-2, -b+1=-2$$
$$\therefore a=5, b=3$$
$$\therefore ab=15$$

답 **15**

다른 풀이 원 $(x+3)^2+(y+1)^2=2$의 중심의 좌표는

$$(-3, -1)$$

원 ㉡의 중심의 좌표는 $(2, 2)$

이때 점 $(-3, -1)$을 $x$축의 방향으로 $a$만큼, $y$축의 방향으로 $b$만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(2, 2)$이므로

$$-3+a=2, -1+b=2$$
$$\therefore a=5, b=3$$

## 연습 문제

• 본책 103~104쪽

## 241

**전략** 두 점 A, A′의 $x$좌표와 두 점 B, B′의 $y$좌표를 이용하여 주어진 평행이동을 파악한다.

두 점 $A(2, a)$, $B(b, 3)$을 $x$축의 방향으로 $m$만큼, $y$축의 방향으로 $n$만큼 평행이동한 점이 각각 $A'(-1, 5)$, $B'(1, 0)$이라 하면

$$2+m=-1, a+n=5, b+m=1, 3+n=0$$

$2+m=-1$, $3+n=0$에서

$$m=-3, n=-3$$

$a+n=5$, $b+m=1$에 이것을 대입하면

$$a-3=5, b-3=1 \qquad \therefore a=8, b=4$$

따라서 $a+b=12$, $a-b=4$이므로 점 $(12, 4)$를 $x$축의 방향으로 $-3$만큼, $y$축의 방향으로 $-3$만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(12-3, 4-3), 즉 (9, 1)$$

답 **(9, 1)**

## 242

**전략** 평행이동한 직선의 방정식이 $2x-y+4=0$임을 이용한다.

직선 $2x-y+4=0$을 $x$축의 방향으로 $a$만큼, $y$축의 방향으로 $b$만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$2(x-a)-(y-b)+4=0$$
$$\therefore 2x-y-2a+b+4=0$$

이 직선이 원래의 직선과 일치하므로

$$-2a+b+4=4 \qquad \therefore b=2a$$
$$\therefore \frac{a}{b}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$$

답 $\mathbf{\frac{1}{2}}$

## 243

**전략** 직선의 평행이동을 이용하여 $a$의 값을 구한다.

직선 $y=\frac{1}{2}x-1$을 $x$축의 방향으로 $a$만큼, $y$축의 방향으로 $-3$만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y+3=\frac{1}{2}(x-a)-1$$
$$\therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}a-4$$

이 직선이 직선 $y=-x+5$와 $y$축에서 만나므로

$$-\frac{1}{2}a-4=5, \qquad -\frac{1}{2}a=9$$
$$\therefore a=-18$$

따라서 점 $(p,\ q)$를 $x$축의 방향으로 $-18$만큼, $y$축의 방향으로 $-3$만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(-1,\ 2)$라 하면 $\quad p-18=-1,\ q-3=2$

$\therefore\ p=17,\ q=5$

즉 구하는 점의 좌표는 $(17,\ 5)$이다. **답 (17, 5)**

## 244

**전략** 주어진 평행이동은 $x$축의 방향으로 4만큼, $y$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동하는 것이다.

$y=x^2+2ax+a+3$에서

$y=(x+a)^2-a^2+a+3$

주어진 평행이동에 의하여 이 포물선이 옮겨지는 포물선의 방정식은

$y+1=(x-4+a)^2-a^2+a+3$

$\therefore\ y=(x-4+a)^2-a^2+a+2$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(3,\ b)$이므로

$4-a=3,\ -a^2+a+2=b$

$\therefore\ a=1,\ b=2$

$\therefore\ a+b=3$ **답 3**

**다른 풀이** 포물선 $y=(x+a)^2-a^2+a+3$의 꼭짓점의 좌표는

$(-a,\ -a^2+a+3)$

주어진 평행이동은 $x$축의 방향으로 4만큼, $y$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동하는 것이므로 이 꼭짓점이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$(-a+4,\ -a^2+a+2)$

이 점이 점 $(3,\ b)$와 일치하므로

$-a+4=3,\ -a^2+a+2=b \qquad \therefore\ a=1,\ b=2$

## 245

**전략** 두 원의 중심의 좌표를 이용하여 평행이동을 파악한다.

주어진 평행이동에 의하여 원 $x^2+(y-1)^2=9$의 중심 $(0,\ 1)$이 원 $(x-1)^2+y^2=9$의 중심 $(1,\ 0)$으로 옮겨지므로 주어진 평행이동은 $x$축의 방향으로 1만큼, $y$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동하는 것이다.

따라서 주어진 평행이동에 의하여 직선 $x+2y-4=0$이 옮겨지는 직선의 방정식은

$(x-1)+2(y+1)-4=0$

$\therefore\ x+2y-3=0$

이 직선이 직선 $x+ay+b=0$과 일치하므로

$a=2,\ b=-3$

$\therefore\ a+b=-1$ **답 −1**

## 246

**전략** 두 점 B, B′의 좌표를 이용하여 평행이동을 파악한다.

직사각형 OABC에서 점 B의 좌표는

$(2,\ 3)$

따라서 주어진 평행이동에 의하여 점 $\mathrm{B}(2,\ 3)$이 점 $\mathrm{B'}(6,\ 4)$로 옮겨지므로 주어진 평행이동은 $x$축의 방향으로 4만큼, $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동하는 것이다.

이때 직선 AC의 방정식은

$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1 \qquad \therefore\ 3x+2y-6=0$

직선 A′C′은 직선 AC를 $x$축의 방향으로 4만큼, $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 직선 A′C′의 방정식은

$3(x-4)+2(y-1)-6=0$

$\therefore\ 3x+2y-20=0$

$x=0$일 때 $y=10$이므로 구하는 $y$절편은 10이다.

**답 10**

**다른 풀이** 두 점 A′, C′은 각각 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 3)$을 $x$축의 방향으로 4만큼, $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$\mathrm{A'}(6,\ 1),\ \mathrm{C'}(4,\ 4)$

따라서 직선 A′C′의 방정식은

$y-1=\dfrac{1-4}{6-4}(x-6) \qquad \therefore\ y=-\dfrac{3}{2}x+10$

## 247

**전략** 평행이동한 직선과 원의 중심 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

직선 $4x+3y-5=0$을 $y$축의 방향으로 $k$만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$4x+3(y-k)-5=0$

$\therefore\ 4x+3y-3k-5=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠이 원 $(x-1)^2+y^2=4$에 접하므로 원의 중심 $(1,\ 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 2와 같다.

즉 $\frac{|4-3k-5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$이므로

$|3k+1|=10, \quad 3k+1=\pm 10$

$\therefore k=3 \ (\because k>0)$

답 3

## 248

전략 포물선의 꼭짓점의 좌표를 이용하여 주어진 평행이동을 파악한다.

$y=x^2+8x+9$에서

$y=(x+4)^2-7 \qquad \cdots\cdots ㉠$

주어진 평행이동에 의하여 포물선 ㉠의 꼭짓점 $(-4, -7)$이 포물선 $y=x^2$의 꼭짓점 $(0, 0)$으로 옮겨지므로 주어진 평행이동은 $x$축의 방향으로 4만큼, $y$축의 방향으로 7만큼 평행이동하는 것이다.

따라서 직선 $2x-3y-2=0$을 $x$축의 방향으로 4만큼, $y$축의 방향으로 7만큼 평행이동한 직선 $l'$의 방정식은

$2(x-4)-3(y-7)-2=0$

$\therefore 2x-3y+11=0$

두 직선 $l$, $l'$ 사이의 거리는 직선 $l$ 위의 점 $(1, 0)$과 직선 $2x-3y+11=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|2+11|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\sqrt{13}$

답 $\sqrt{13}$

## 249

전략 원 $C_1$의 방정식을 표준형으로 변형하여 원 $C_2$의 방정식을 구한다.

$x^2+y^2-6x+2y+2=0$에서

$(x-3)^2+(y+1)^2=8$

이 원을 $x$축의 방향으로 $-2$만큼, $y$축의 방향으로 $p$만큼 평행이동한 원 $C_2$의 방정식은

$(x+2-3)^2+(y-p+1)^2=8$

$\therefore (x-1)^2+(y-p+1)^2=8$

따라서 원 $C_1$의 중심의 좌표는 $(3, -1)$, 원 $C_2$의 중심의 좌표는 $(1, p-1)$이므로 두 원 $C_1$, $C_2$의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(1-3)^2+(p-1+1)^2}=\sqrt{p^2+4}$

즉 $\sqrt{p^2+4}=3$이므로 $\quad p^2+4=9$

$p^2=5 \qquad \therefore p=\sqrt{5} \ (\because p>0)$

따라서 원 $C_2$의 중심의 좌표는

$(1, \sqrt{5}-1)$

답 $(1, \sqrt{5}-1)$

## 250

전략 원 $C$의 방정식을 구하고 원 $C$가 $x$축과 $y$축에 동시에 접함을 이용한다.

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$을 $x$축의 방향으로 3만큼, $y$축의 방향으로 $-8$만큼 평행이동한 원 $C$의 방정식은

$(x-3-a)^2+(y+8-b)^2=b^2$

이므로 원 $C$의 중심의 좌표는 $(a+3, b-8)$이고 반지름의 길이는 $b$이다.

이때 원 $C$가 $x$축과 $y$축에 동시에 접하므로 두 양수 $a$, $b$에 대하여

$a+3=|b-8|=b$

$|b-8|=b$에서

$-b+8=b \ (\because b-8\neq b)$

$-2b=-8 \qquad \therefore b=4$

$a+3=b$에서 $\qquad a+3=4$

$\therefore a=1$

$\therefore a+b=5$

답 ①

## 251

전략 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이보다 작아야 함을 이용한다.

평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+2, y-3)$은 $x$축의 방향으로 2만큼, $y$축의 방향으로 $-3$만큼 평행이동하는 것이다.

따라서 이 평행이동에 의하여 원 $x^2+(y-1)^2=9$가 옮겨지는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y+3-1)^2=9$

$\therefore (x-2)^2+(y+2)^2=9$

이 원이 직선 $3x-4y+k=0$과 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심 $(2, -2)$와 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 3보다 작아야 하므로

$\frac{|6+8+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}<3$

$|14+k|<15, \qquad -15<14+k<15$

$\therefore -29<k<1$

따라서 $m=-29$, $n=1$이므로

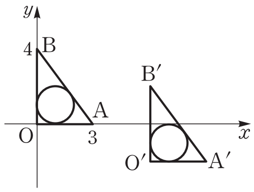
$n-m=30$

답 30

## 252

전략 삼각형 OAB의 내접원의 방정식을 구하여 평행이동한다.

오른쪽 그림과 같이 삼각형 OAB의 내접원은 중심이 제1사분면 위에 있고 $x$축과 $y$축에 동시에 접하므로 내접원의 방정식을




$$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2\ (r>0)$$

이라 하자.

이때 직선 AB의 방정식은

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1 \qquad \therefore\ 4x+3y-12=0$$

내접원의 중심 $(r,\ r)$와 직선 AB 사이의 거리가 내접원의 반지름의 길이 $r$와 같아야 하므로

$$\frac{|4r+3r-12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=r$$

$$|7r-12|=5r, \qquad 7r-12=\pm5r$$

$$\therefore\ r=1\left(\because\ 0<r<\frac{3}{2}\right)$$

따라서 삼각형 OAB의 내접원의 방정식은

$$(x-1)^2+(y-1)^2=1 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

한편 주어진 평행이동에 의하여 점 $\mathrm{B}(0,\ 4)$가 점 $\mathrm{B}'(6,\ 2)$로 옮겨지므로 주어진 평행이동은 $x$축의 방향으로 6만큼, $y$축의 방향으로 $-2$만큼 평행이동하는 것이다.

따라서 삼각형 O′A′B′의 내접원은 원 ㉠을 $x$축의 방향으로 6만큼, $y$축의 방향으로 $-2$만큼 평행이동한 것이므로 삼각형 O′A′B′의 내접원의 방정식은

$$(x-6-1)^2+(y+2-1)^2=1$$

$$\therefore\ (x-7)^2+(y+1)^2=1$$

답 $\boldsymbol{(x-7)^2+(y+1)^2=1}$

## 02 대칭이동

● 본책 105~111쪽

### 253

답 (1) $\boldsymbol{(-2,\ -3)}$ (2) $\boldsymbol{(2,\ 3)}$
(3) $\boldsymbol{(2,\ -3)}$ (4) $\boldsymbol{(3,\ -2)}$

### 254

(1) $3x-2\times(-y)+1=0$에서

$$3x+2y+1=0$$

(2) $3\times(-x)-2y+1=0$에서

$$3x+2y-1=0$$

(3) $3\times(-x)-2\times(-y)+1=0$에서

$$3x-2y-1=0$$

(4) $3y-2x+1=0$에서

$$2x-3y-1=0$$

답 (1) $\boldsymbol{3x+2y+1=0}$ (2) $\boldsymbol{3x+2y-1=0}$
(3) $\boldsymbol{3x-2y-1=0}$ (4) $\boldsymbol{2x-3y-1=0}$

### 255

(1) $-y=x^2-2x+3$에서

$$y=-x^2+2x-3$$

(2) $y=(-x)^2-2\times(-x)+3$에서

$$y=x^2+2x+3$$

(3) $-y=(-x)^2-2\times(-x)+3$에서

$$y=-x^2-2x-3$$

답 (1) $\boldsymbol{y=-x^2+2x-3}$ (2) $\boldsymbol{y=x^2+2x+3}$
(3) $\boldsymbol{y=-x^2-2x-3}$

### 256

(1) $(x-3)^2+(-y+2)^2=6$에서

$$(x-3)^2+(y-2)^2=6$$

(2) $(-x-3)^2+(y+2)^2=6$에서

$$(x+3)^2+(y+2)^2=6$$

(3) $(-x-3)^2+(-y+2)^2=6$에서

$$(x+3)^2+(y-2)^2=6$$

(4) $(y-3)^2+(x+2)^2=6$에서

$$(x+2)^2+(y-3)^2=6$$

답 (1) $\boldsymbol{(x-3)^2+(y-2)^2=6}$
(2) $\boldsymbol{(x+3)^2+(y+2)^2=6}$
(3) $\boldsymbol{(x+3)^2+(y-2)^2=6}$
(4) $\boldsymbol{(x+2)^2+(y-3)^2=6}$

### 257

점 $(3,\ -5)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(-3,\ 5)$$

이 점이 직선 $ax-2y+1=0$ 위에 있으므로

$$-3a-10+1=0, \qquad -3a=9$$

$$\therefore\ a=-3$$

답 $\boldsymbol{-3}$

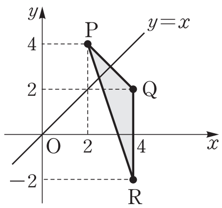
## 258

점 P(2, 4)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 $(4,\ 2)$

점 Q(4, 2)를 $x$축에 대하여 대칭이동한 점 R의 좌표는 $(4,\ -2)$

따라서 오른쪽 그림에서 삼각형 PQR의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times4\times2=4$$




답 4

## 259

점 $(k,\ 3)$을 $y$축에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는

$(-k,\ 3)$

점 $(k,\ 3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 $(3,\ k)$

이때 선분 PQ의 길이가 $2\sqrt{5}$이므로

$\sqrt{(3+k)^2+(k-3)^2}=2\sqrt{5}$

양변을 제곱하여 정리하면

$2k^2+18=20$

$k^2=1 \qquad \therefore k=1\ (\because k>0)$

답 1

## 260

직선 $y=-3x+6$을 $y$축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y=-3\times(-x)+6 \qquad \therefore y=3x+6$

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이므로 점 $(-3,\ 4)$를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{3}$인 직선의 방정식은

$y-4=-\frac{1}{3}(x+3) \qquad \therefore y=-\frac{1}{3}x+3$

답 $y=-\frac{1}{3}x+3$

## 261

직선 $2x-3y+1=0$을 $x$축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$2x-3\times(-y)+1=0$

$\therefore 2x+3y+1=0$

이 직선이 원 $(x-4)^2+(y+k)^2=3$의 넓이를 이등분하므로 원의 중심 $(4,\ -k)$를 지난다.

즉 $8-3k+1=0$이므로 $\qquad -3k=-9$

$\therefore k=3$

답 3

## 262

$y=x^2-2mx+m^2-5$에서

$y=(x-m)^2-5$

포물선 $y=(x-m)^2-5$를 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=(-x-m)^2-5$

$\therefore y=-(x+m)^2+5$

이 포물선의 꼭짓점 $(-m,\ 5)$가 점 $(-2,\ k)$와 일치하므로 $\qquad m=2,\ k=5$

$\therefore m+k=7$

답 7

다른 풀이 포물선 $y=(x-m)^2-5$의 꼭짓점 $(m,\ -5)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-m,\ 5)$

이 점이 점 $(-2,\ k)$와 일치하므로 $\qquad m=2,\ k=5$

## 263

직선 $4x-2y+3=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$4y-2x+3=0 \qquad \therefore 2x-4y-3=0$

이 직선을 $x$축의 방향으로 $-1$만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$2(x+1)-4(y-2)-3=0$

$\therefore 2x-4y+7=0$

답 $2x-4y+7=0$

## 264

포물선 $y=x^2-2x+a$를 $x$축의 방향으로 3만큼, $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-1=(x-3)^2-2(x-3)+a$

$\therefore y=x^2-8x+16+a$

이 포물선을 $x$축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은 $\qquad -y=x^2-8x+16+a$

$\therefore y=-x^2+8x-16-a$

이 포물선이 포물선 $y=-x^2+8x-10$과 일치하므로

$-16-a=-10 \qquad \therefore a=-6$

답 $-6$

다른 풀이 $y=x^2-2x+a$에서

$$y=(x-1)^2+a-1 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$y=-x^2+8x-10$에서

$$y=-(x-4)^2+6 \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

포물선 ㉠의 꼭짓점 $(1,\ a-1)$을 $x$축의 방향으로 3만큼, $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(1+3,\ a-1+1),\ 즉\ (4,\ a)$$

이 점을 $x$축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(4,\ -a)$$

이 점이 포물선 ㉡의 꼭짓점 $(4,\ 6)$과 일치하므로

$$-a=6 \qquad \therefore\ a=-6$$

## 265

원 $x^2+y^2-4x=0$을 $y$축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은 $\quad (-x)^2+y^2-4\times(-x)=0$

$$\therefore\ (x+2)^2+y^2=4$$

이 원을 $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 원의 방정식은 $\quad (x+2)^2+(y-1)^2=4$

이 원이 직선 $y=mx-2$, 즉 $mx-y-2=0$과 접하므로

$$\frac{|-2m-1-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$$

$$|2m+3|=2\sqrt{m^2+1}$$

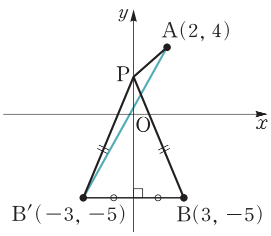
양변을 제곱하면 $\quad 4m^2+12m+9=4(m^2+1)$

$$12m=-5 \qquad \therefore\ m=-\frac{5}{12}$$

답 $-\dfrac{5}{12}$

## 266

오른쪽 그림과 같이 점 B$(3,\ -5)$를 $y$축에 대하여 대칭이동한 점을 B$'$이라 하면




$$B'(-3,\ -5)$$

이때 $\overline{BP}=\overline{B'P}$이므로

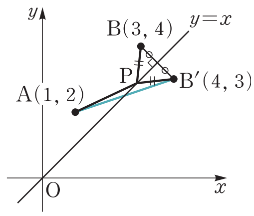
$$\begin{aligned}\overline{AP}+\overline{BP}&=\overline{AP}+\overline{B'P}\\&\geq\overline{AB'}\\&=\sqrt{(-3-2)^2+(-5-4)^2}=\sqrt{106}\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{106}$이다.

답 $\sqrt{106}$

## 267

오른쪽 그림과 같이 점 B$(3,\ 4)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B$'$이라 하면




$$B'(4,\ 3)$$

이때 $\overline{BP}=\overline{B'P}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{AP}+\overline{BP}&=\overline{AP}+\overline{B'P}\\&\geq\overline{AB'}\\&=\sqrt{(4-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{10}\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{10}$이다.

한편 이때의 점 P의 위치는 직선 AB$'$과 직선 $y=x$의 교점이다.

직선 AB$'$의 방정식은

$$y-2=\frac{3-2}{4-1}(x-1)$$

$$\therefore\ y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$$

따라서 점 P의 $x$좌표는 $\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}=x$에서

$$-\frac{2}{3}x=-\frac{5}{3} \qquad \therefore\ x=\frac{5}{2}$$

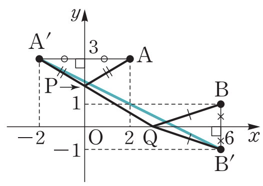
즉 구하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}\right)$$

답 **최솟값: $\sqrt{10}$, P$\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$**

## 268

오른쪽 그림과 같이 점 A$(2,\ 3)$을 $y$축에 대하여 대칭이동한 점을 A$'$, 점 B$(6,\ 1)$을 $x$축에 대하여 대칭이동한 점을 B$'$이라 하면




$$A'(-2,\ 3),\ B'(6,\ -1)$$

이때 $\overline{AP}=\overline{A'P}$, $\overline{QB}=\overline{QB'}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}&=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}\\&\geq\overline{A'B'}\\&=\sqrt{(6+2)^2+(-1-3)^2}\\&=4\sqrt{5}\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $4\sqrt{5}$이다.

답 $4\sqrt{5}$

## 03 점과 직선에 대한 대칭이동

● 본책 112~115쪽

### 269

점 $(4, 5)$가 두 점 $(a, 3)$, $(-2, b)$를 이은 선분의 중점이므로

$$\frac{a-2}{2}=4,\ \frac{3+b}{2}=5$$

$\therefore a=10,\ b=7 \qquad \therefore ab=70$

답 **70**

### 270

$y=-x^2+2x+5$에서 $\qquad y=-(x-1)^2+6$

이 포물선의 꼭짓점 $(1, 6)$을 점 $(a, b)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 $(3, 6)$이므로 점 $(a, b)$는 두 점 $(1, 6)$, $(3, 6)$을 이은 선분의 중점이다.

$$\therefore a=\frac{1+3}{2}=2,\ b=\frac{6+6}{2}=6$$

$\therefore a+b=8$

답 **8**

### 271

원의 중심 $(3, -1)$을 점 $(1, 2)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a, b)$라 하면 점 $(1, 2)$가 두 점 $(3, -1)$, $(a, b)$를 이은 선분의 중점이므로

$$\frac{3+a}{2}=1,\ \frac{-1+b}{2}=2$$

$\therefore a=-1,\ b=5$

따라서 대칭이동한 원의 중심의 좌표는 $(-1, 5)$이고 반지름의 길이는 2이므로 구하는 원의 방정식은

$$(x+1)^2+(y-5)^2=4$$

답 $\boldsymbol{(x+1)^2+(y-5)^2=4}$

### 272

두 점 $P(-3, 4)$, $Q(1, 8)$을 이은 선분 PQ의 중점

$$\left(\frac{-3+1}{2},\ \frac{4+8}{2}\right),\ \text{즉 } (-1, 6)$$

이 직선 $y=ax+b$ 위의 점이므로

$6=-a+b$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

또 직선 PQ와 직선 $y=ax+b$는 수직이므로

$$\frac{8-4}{1-(-3)}\times a=-1 \qquad \therefore a=-1$$

㉠에서 $\qquad b=5$

$\therefore a+b=4$

답 **4**

### 273

원 $x^2+(y+1)^2=4$의 중심 $(0, -1)$을 직선 $x-2y+3=0$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a, b)$라 하자.

두 점 $(0, -1)$, $(a, b)$를 이은 선분의 중점 $\left(\frac{a}{2},\ \frac{-1+b}{2}\right)$가 직선 $x-2y+3=0$ 위의 점이므로

$$\frac{a}{2}-2\times\frac{-1+b}{2}+3=0$$

$\therefore a-2b=-8$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

또 두 점 $(0, -1)$, $(a, b)$를 지나는 직선과 직선 $x-2y+3=0$은 수직이므로

$$\frac{b-(-1)}{a-0}\times\frac{1}{2}=-1$$

$\therefore 2a+b=-1$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=3$

따라서 대칭이동한 원의 중심의 좌표는 $(-2, 3)$이고 반지름의 길이는 2이므로 구하는 원의 방정식은

$$(x+2)^2+(y-3)^2=4$$

답 $\boldsymbol{(x+2)^2+(y-3)^2=4}$

### 274

(1) 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 $y$축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

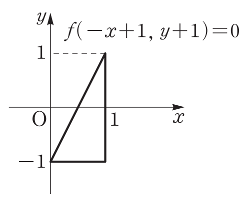
$$f(-x, y)=0$$

방정식 $f(-x, y)=0$이 나타내는 도형을 $x$축의 방향으로 1만큼, $y$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(-(x-1), y+1)=0,$$

즉 $f(-x+1, y+1)=0$

따라서 방정식 $f(-x+1, y+1)=0$이 나타내는 도형은 주어진 도형을 $y$축에 대하여 대칭이동한 후 $x$축의 방향으로 1만큼, $y$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



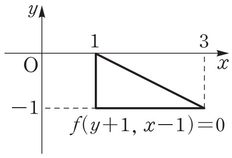
(2) 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(y,\ x)=0$$

방정식 $f(y,\ x)=0$이 나타내는 도형을 $x$축의 방향으로 1만큼, $y$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(y+1,\ x-1)=0$$

따라서 방정식 $f(y+1,\ x-1)=0$이 나타내는 도형은 주어진 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 $x$축의 방향으로 1만큼, $y$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.




답 풀이 참조

다른 풀이 주어진 도형은 세 직선

$$x=0,\ y=0,\ y=-2x+2 \qquad \cdots\cdots \ ㉠$$

로 둘러싸인 도형이다.

(1) ㉠에 $x$ 대신 $-x+1$, $y$ 대신 $y+1$을 대입하면

$-x+1=0,\ y+1=0,$

$y+1=-2(-x+1)+2$

$\therefore\ x=1,\ y=-1,\ y=2x-1$

(2) ㉠에 $x$ 대신 $y+1$, $y$ 대신 $x-1$을 대입하면

$y+1=0,\ x-1=0,\ x-1=-2(y+1)+2$

$\therefore\ y=-1,\ x=1,\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

## 연습 문제

본책 116~118쪽

## 275

전략 두 점 P, Q의 좌표를 각각 구한다.

점 $(-5,\ 4)$를 $x$축에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는

$(-5,\ -4)$

점 $(-5,\ 4)$를 $y$축에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는

$(5,\ 4)$

따라서 선분 PQ의 길이는

$\sqrt{(5+5)^2+(4+4)^2}=2\sqrt{41}$

답 $2\sqrt{41}$

## 276

전략 세 점이 한 직선 위에 있을 조건을 이용한다.

점 A$(-3,\ 4)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는

$(4,\ -3)$

점 B를 $x$축의 방향으로 2만큼, $y$축의 방향으로 $k$만큼 평행이동한 점 C의 좌표는

$(4+2,\ -3+k)$, 즉 $(6,\ -3+k)$

이때 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$$\frac{-3-4}{4-(-3)}=\frac{-3+k-(-3)}{6-4}$$

$-1=\frac{k}{2} \qquad \therefore\ k=-2$

답 ④

**개념 노트**

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으면

(직선 AB의 기울기)=(직선 BC의 기울기)

=(직선 CA의 기울기)

## 277

전략 두 직선 $m$, $n$의 방정식을 이용하여 교점의 좌표를 구한다.

직선 $m$의 방정식은

$(x+2)-3y-6=0$

$\therefore\ x-3y-4=0 \qquad \cdots\cdots \ ㉠$

직선 $n$의 방정식은

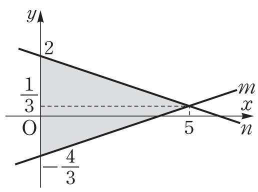
$x-3\times(-y)-6=0$

$\therefore\ x+3y-6=0 \qquad \cdots\cdots \ ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad x=5,\ y=\frac{1}{3}$

따라서 두 직선 $m$, $n$의 교점의 좌표는 $\left(5,\ \frac{1}{3}\right)$

또 두 직선 $m$, $n$의 $y$절편은 각각 $-\frac{4}{3}$, 2이므로 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는




$\frac{1}{2}\times\left(2+\frac{4}{3}\right)\times5$

$=\frac{25}{3}$

답 $\frac{25}{3}$

## 278

**전략** 점 $(6,\ -2)$를 주어진 순서대로 대칭이동하고 평행이동한다.

점 $(6,\ -2)$를 $x$축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(6,\ 2)$

점 $(6,\ 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(2,\ 6)$

점 $(2,\ 6)$을 $x$축의 방향으로 $-3$만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(2-3,\ 6)$, 즉 $(-1,\ 6)$

따라서 점 $(-1,\ 6)$이 직선 $y=ax+4$ 위의 점이므로

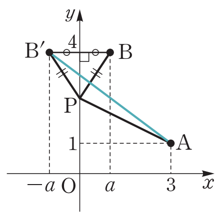
$6=-a+4 \qquad \therefore a=-2$

**답** $-2$

## 279

**전략** 점 B를 $y$축에 대하여 대칭이동한 점을 이용하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값을 $a$에 대한 식으로 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이 점 $\mathrm{B}(a,\ 4)$를 $y$축에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{B}'$이라 하면




$\mathrm{B}'(-a,\ 4)$

이때 $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{B'P}}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}&=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}\\&\ge\overline{\mathrm{AB'}}\\&=\sqrt{(3+a)^2+(1-4)^2}\\&=\sqrt{a^2+6a+18}\end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값이 5이므로

$\sqrt{a^2+6a+18}=5$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2+6a-7=0, \qquad (a+7)(a-1)=0$

$\therefore a=1\ (\because a>0)$

**답** 1

## 280

**전략** 선분 PQ의 중점이 주어진 직선 위에 있고, 직선 PQ가 주어진 직선과 수직임을 이용한다.

두 점 $\mathrm{P}(-1,\ 3)$, $\mathrm{Q}(a,\ b)$를 이은 선분 PQ의 중점 $\left(\dfrac{a-1}{2},\ \dfrac{b+3}{2}\right)$이 직선 $y=2x+1$ 위의 점이므로

$\dfrac{b+3}{2}=2\times\dfrac{a-1}{2}+1$

$\therefore 2a-b=3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또 직선 PQ와 직선 $y=2x+1$은 수직이므로

$\dfrac{b-3}{a-(-1)}\times2=-1$

$\therefore a+2b=5 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\dfrac{11}{5},\ b=\dfrac{7}{5}$

$\therefore a+b=\dfrac{18}{5}$

**답** $\dfrac{18}{5}$

## 281

**전략** 원 $(x-1)^2+(y-a)^2=4$를 주어진 순서대로 평행이동하고 대칭이동한 원의 방정식을 구한다.

원 $(x-1)^2+(y-a)^2=4$를 $x$축의 방향으로 3만큼, $y$축의 방향으로 $-2$만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-3-1)^2+(y+2-a)^2=4$

$\therefore (x-4)^2+(y+2-a)^2=4$

이 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x+2-a)^2+(y-4)^2=4$

이 원의 중심의 좌표가 $(a-2,\ 4)$이고 반지름의 길이가 2이므로 원이 $y$축에 접하려면

$|a-2|=2, \qquad a-2=\pm2$

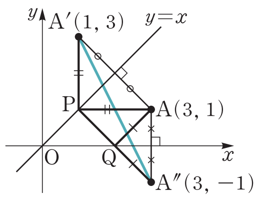
$\therefore a=4\ (\because a>0)$

**답** 4

## 282

**전략** 점 A를 직선 $y=x$, $x$축에 대하여 각각 대칭이동한 점을 이용한다.

점 $\mathrm{A}(3,\ 1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{A}'$, $x$축에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{A}''$이라 하면




$\mathrm{A}'(1,\ 3)$, $\mathrm{A}''(3,\ -1)$

이때 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$, $\overline{\mathrm{QA}}=\overline{\mathrm{QA''}}$이므로 삼각형 APQ의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA}}&=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA''}}\\&\ge\overline{\mathrm{A'A''}}\\&=\sqrt{(3-1)^2+(-1-3)^2}\\&=2\sqrt{5}\end{aligned}$$

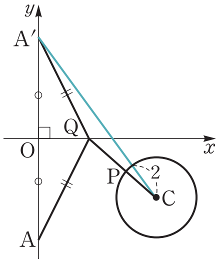
따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{5}$이다.

**답** $2\sqrt{5}$

## 283

**전략** 점 A를 $x$축에 대하여 대칭이동한 점을 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 원 $(x-6)^2+(y+3)^2=4$의 중심을 C라 하고 점 $A(0, -5)$를 $x$축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면




$$C(6, -3),\ A'(0, 5)$$

이때 $\overline{AQ}=\overline{A'Q}$이므로

$$\overline{AQ}+\overline{QP}=\overline{A'Q}+\overline{QP}$$
$$\geq \overline{A'C}-\overline{PC}$$
$$=\sqrt{(6-0)^2+(-3-5)^2}-2$$
$$=8$$

따라서 구하는 최솟값은 8이다. **답** ①

## 284

**전략** 포물선 $y=3x^2+12x+8$의 꼭짓점을 대칭이동한 점의 좌표를 이용한다.

$y=3x^2+12x+8$에서 $\quad y=3(x+2)^2-4$

이 포물선의 꼭짓점 $(-2, -4)$를 점 $(a, -a)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(p, q)$라 하면 점 $(a, -a)$가 두 점 $(-2, -4)$, $(p, q)$를 이은 선분의 중점이므로

$$\frac{-2+p}{2}=a,\ \frac{-4+q}{2}=-a$$

$$\therefore p=2a+2,\ q=-2a+4$$

이때 대칭이동한 포물선의 꼭짓점 $(p, q)$가 제1사분면 위에 있으려면 $p>0$, $q>0$에서

$$2a+2>0,\ -2a+4>0$$
$$\therefore -1<a<2$$

따라서 정수 $a$는 0, 1의 2개이다. **답** 2

## 285

**전략** 원의 중심의 대칭이동으로 생각한다.

$x^2+y^2-4x-8y=0$에서

$$(x-2)^2+(y-4)^2=20$$

이 원의 중심 $(2, 4)$와 원 $x^2+y^2=c$의 중심 $(0, 0)$이 직선 $y=ax+b$에 대하여 대칭이므로 두 점 $(2, 4)$, $(0, 0)$을 이은 선분의 중점 $(1, 2)$가 직선 $y=ax+b$ 위의 점이다.

$$\therefore 2=a+b \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 두 점 $(2, 4)$, $(0, 0)$을 지나는 직선과 직선 $y=ax+b$는 수직이므로

$$\frac{4-0}{2-0}\times a=-1 \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$$

㉠에 $a=-\frac{1}{2}$을 대입하면

$$2=-\frac{1}{2}+b \qquad \therefore b=\frac{5}{2}$$

한편 원을 대칭이동해도 반지름의 길이는 변하지 않으므로 $\quad c=20$

$$\therefore abc=-\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times 20=-25$$

**답** $-25$

## 286

**전략** 두 방정식 $f(x, y)=0$과 $f(y, x-1)=0$ 사이의 관계를 파악한다.

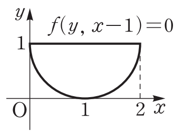
방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(y, x)=0$$

방정식 $f(y, x)=0$이 나타내는 도형을 $x$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(y, x-1)=0$$

따라서 방정식 $f(y, x-1)=0$이 나타내는 도형은 주어진 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 $x$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.




**답** ④

## 287

**전략** 원의 방정식을 표준형으로 변형하여 대칭이동한 원의 방정식을 구한다.

$x^2+y^2-2x-3=0$에서

$$(x-1)^2+y^2=4$$

이 원을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(-x-1)^2+(-y)^2=4$$
$$\therefore (x+1)^2+y^2=4$$

이 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$x^2+(y+1)^2=4 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에 $y=0$을 대입하면 $\quad x^2+1=4$

$x^2=3 \quad \therefore x=\pm\sqrt{3}$

따라서 원과 $x$축의 교점의 좌표가 $(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$이므로 구하는 현의 길이는

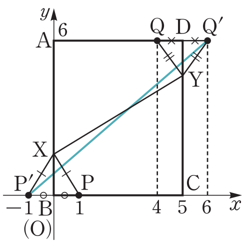
$\sqrt{3}-(-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$ 답 $2\sqrt{3}$

## 288

**전략** 직사각형 ABCD를 좌표평면 위에 놓고, 각 점의 좌표를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$를 $x$축, $\overline{AB}$를 $y$축으로 하는 좌표평면을 잡으면

A$(0, 6)$, B$(0, 0)$,
C$(5, 0)$, D$(5, 6)$,
P$(1, 0)$, Q$(4, 6)$




점 P를 $y$축에 대하여 대칭이동한 점을 P′, 점 Q를 직선 CD에 대하여 대칭이동한 점을 Q′이라 하면

P′$(-1, 0)$, Q′$(6, 6)$

이때 $\overline{PX}=\overline{P'X}$, $\overline{YQ}=\overline{YQ'}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{PX}+\overline{XY}+\overline{YQ}&=\overline{P'X}+\overline{XY}+\overline{YQ'}\\&\ge\overline{P'Q'}\\&=\sqrt{(6+1)^2+6^2}\\&=\sqrt{85}\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{85}$이다. 답 $\sqrt{85}$

## 289

**전략** 직선 $3x+y-3=0$ 위의 점 $(x, y)$를 대칭이동한 점의 좌표를 $(x', y')$으로 놓고, 중점 조건과 수직 조건을 이용한다.

직선 $3x+y-3=0$ 위의 임의의 점 P$(x, y)$를 직선 $x-y-8=0$에 대하여 대칭이동한 점을 P′$(x', y')$이라 하자.

$\overline{PP'}$의 중점 $\left(\dfrac{x+x'}{2}, \dfrac{y+y'}{2}\right)$이 직선 $x-y-8=0$ 위의 점이므로

$\dfrac{x+x'}{2}-\dfrac{y+y'}{2}-8=0$

$\therefore x-y+x'-y'-16=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또 직선 PP′과 직선 $x-y-8=0$은 수직이므로

$\dfrac{y'-y}{x'-x}\times1=-1, \quad y'-y=x-x'$

$\therefore x+y-x'-y'=0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면

$2x-2y'-16=0 \quad \therefore x=y'+8$

㉠−㉡을 하면

$-2y+2x'-16=0 \quad \therefore y=x'-8$

이때 점 P$(x, y)$가 직선 $3x+y-3=0$ 위의 점이므로

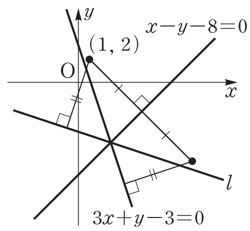
$3(y'+8)+(x'-8)-3=0$

$\therefore x'+3y'+13=0$

즉 직선 $l$의 방정식이 $x+3y+13=0$이므로 점 $(1, 2)$와 직선 $l$ 사이의 거리는

$\dfrac{|1+6+13|}{\sqrt{1^2+3^2}}=2\sqrt{10}$ 답 $2\sqrt{10}$

**다른 풀이** 두 직선 $3x+y-3=0$, $l$이 직선 $x-y-8=0$에 대하여 대칭이므로 점 $(1, 2)$와 직선 $l$ 사이의 거리는 점 $(1, 2)$를 직선 $x-y-8=0$에 대하여 대칭이동한 점과 직선 $3x+y-3=0$ 사이의 거리와 같다.




점 $(1, 2)$를 직선 $x-y-8=0$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a, b)$라 하면 두 점 $(1, 2)$, $(a, b)$를 이은 선분의 중점 $\left(\dfrac{a+1}{2}, \dfrac{b+2}{2}\right)$가 직선 $x-y-8=0$ 위의 점이므로

$\dfrac{a+1}{2}-\dfrac{b+2}{2}-8=0$

$\therefore a-b=17 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또 두 점 $(1, 2)$, $(a, b)$를 지나는 직선과 직선 $x-y-8=0$은 수직이므로

$\dfrac{b-2}{a-1}\times1=-1$

$\therefore a+b=3 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=10, b=-7$

따라서 구하는 거리는 점 $(10, -7)$과 직선 $3x+y-3=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|30-7-3|}{\sqrt{3^2+1^2}}=2\sqrt{10}$

Ⅰ-4 도형의 이동

# 1 집합의 뜻과 포함 관계

## 01 집합의 뜻과 표현

● 본책 120~125쪽

### 290

ㄴ, ㄷ. '큰', '가까운'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

**답** **집합: ㄱ, ㄹ**
**ㄱ의 원소: 1, 3, 5, 15**
**ㄹ의 원소: $-1$, 2**

### 291

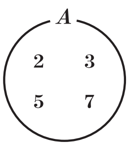
**답** (1) $\in$ (2) $\notin$ (3) $\notin$ (4) $\in$

### 292

**답** (1) $A=\{2, 3, 5, 7\}$

(2) $A=\{x|x$**는 10 이하의 소수**$\}$

(3)




### 293

$A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{9, 18, 27, \cdots\}$,
$C=\{2, 3, 4\}$, $D=\varnothing$

**답** (1) $A$, $C$, $D$ (2) $B$ (3) $D$

### 294

(2) $x^2+1=0$, 즉 $x^2=-1$을 만족시키는 실수 $x$는 존재하지 않으므로 $A=\varnothing$

$\therefore n(A)=0$

(3) $|x|<2$에서 $-2<x<2$

따라서 정수 $x$는 $-1$, 0, 1의 3개이므로

$n(A)=3$

**답** (1) **10** (2) **0** (3) **3**

### 295

'작은', '유명한', '잘하는'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

**답** ④, ⑤

### 296

$x^2-8x+12<0$에서 $(x-2)(x-6)<0$

$\therefore 2<x<6$

이를 만족시키는 정수 $x$는 3, 4, 5이므로

$A=\{3, 4, 5\}$

③ $2\notin A$

**답** ③

### 297

① $\{3, 5, 7, 9\}$ ② $\{3, 5, 7, 9\}$
④ $\{2, 3, 5, 7\}$ ⑤ $\{1, 3, 5, 7\}$

**답** ③

### 298

$A=\{2, 4, 6, 8\}$이므로

$x=2$일 때, $y=3\times2-2=4$
$x=4$일 때, $y=3\times4-2=10$
$x=6$일 때, $y=3\times6-2=16$
$x=8$일 때, $y=3\times8-2=22$

$\therefore B=\{4, 10, 16, 22\}$

**답** $\{4, 10, 16, 22\}$

### 299

① $10=2^1\times5^1$ ② $60=2^2\times3^1\times5^1$
③ $100=2^2\times5^2$ ④ $250=2^1\times5^3$
⑤ $400=2^4\times5^2$

따라서 집합 $A$의 원소가 아닌 것은 ②이다.

**답** ②

### 300

ㄱ. $\{11, 13, 15, 17, \cdots\}$이므로 무한집합이다.
ㄴ. $\varnothing$를 원소로 갖는 집합이므로 유한집합이다.
ㄷ. $1<x<3$인 홀수 $x$는 없다.
따라서 공집합이므로 유한집합이다.
ㄹ. $n=1$일 때, $x=2\times1=2$
$n=2$일 때, $x=2\times2=4$
$n=3$일 때, $x=2\times3=6$
⋮
즉 $\{2, 4, 6, \cdots\}$이므로 무한집합이다.

이상에서 유한집합인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

**답** ㄴ, ㄷ

## 301

$A=\{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49\}$

$x^2=-4$를 만족시키는 실수 $x$는 존재하지 않으므로

$B=\varnothing$

$|x|=4$에서 $\quad x=\pm4 \quad \therefore C=\{-4, 4\}$

따라서 $n(A)=7$, $n(B)=0$, $n(C)=2$이므로

$n(A)+n(B)-n(C)=5$

**답 5**

### 연습 문제

● 본책 126쪽

## 302

**전략** 어떤 대상이 그 모임에 속하는지 판단할 수 있는 기준이 명확한 것을 찾는다.

'좋아하는', '가까운'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

ㄱ. $\{12, 14, 16, \cdots\}$

ㄷ. 1보다 작은 자연수는 없으므로 공집합이다.

ㄹ. {부산광역시, 대구광역시, 인천광역시,
광주광역시, 대전광역시, 울산광역시}

이상에서 집합인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

**답 ㄱ, ㄷ, ㄹ**

## 303

**전략** 집합 $A$의 원소를 구하여 조건을 만족시키는 집합 $B$의 원소를 구한다.

집합 $A=\{x|x=2k^2+1, k\le3$인 자연수$\}$에서

$k=1, 2, 3$

$k=1$일 때, $\quad x=2\times1^2+1=3$

$k=2$일 때, $\quad x=2\times2^2+1=9$

$k=3$일 때, $\quad x=2\times3^2+1=19$

$\therefore A=\{3, 9, 19\}$

$B=\{y|y$는 $x$를 4로 나누었을 때의 나머지, $x\in A\}$에서

$x=3$일 때, $\quad y=3$

$x=9$일 때, $\quad y=1$

$x=19$일 때, $\quad y=3$

$\therefore B=\{1, 3\}$

따라서 집합 $B$의 모든 원소의 합은

$1+3=4$

**답 4**

## 304

**전략** $n(A)$는 유한집합 $A$의 원소의 개수임을 이용한다.

① $n(\{\varnothing, 1\})=2$

② $n(\{0\})=1$, $n(\{2\})=1$이므로

$n(\{0\})=n(\{2\})$

③ $n(\{a, c\})=2$, $n(\{f, g\})=2$이므로

$n(\{a, c\})=n(\{f, g\})$

④ $n(A)=0$이면 $\quad A=\varnothing$

⑤ $n(\{3, 5, 7\})-n(\{3, 7\})=3-2=1$

따라서 옳은 것은 ③이다.

**답 ③**

## 305

**전략** 이차부등식의 해가 존재하지 않을 조건을 이용한다.

집합 $X$가 공집합이 되려면 이차부등식 $x^2-ax+4\le0$의 해가 존재하지 않아야 하므로 이차함수 $y=x^2-ax+4$의 그래프가 $x$축과 만나지 않아야 한다.

즉 이차방정식 $x^2-ax+4=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=(-a)^2-4\times1\times4<0$

$a^2-16<0, \quad (a+4)(a-4)<0$

$\therefore -4<a<4$

따라서 정수 $a$는 $-3, -2, \cdots, 3$의 7개이다.

**답 7**

**개념 노트**

이차부등식 $ax^2+bx+c\le0$의 해가 없다.

⇨ 모든 실수 $x$에 대하여 $ax^2+bx+c>0$이 성립한다.

⇨ $a>0$, $b^2-4ac<0$

## 306

**전략** 두 집합 $A$, $B$의 원소의 개수를 각각 구한다.

$x^2+y^2=25$를 만족시키는 정수 $x$, $y$는

$x=0$일 때, $\quad y=\pm5$

$x=\pm3$일 때, $\quad y=\pm4$

$x=\pm4$일 때, $\quad y=\pm3$

$x=\pm5$일 때, $\quad y=0$

따라서 정수 $x$, $y$의 순서쌍 $(x, y)$의 개수는

$2+4+4+2=12 \quad \therefore n(A)=12$

한편 $k$는 자연수이므로 $\quad n(B)=k$

따라서 $n(A)+n(B)=25$에서

$12+k=25 \quad \therefore k=13$

**답 13**

## 307

전략 집합 $B$의 원소를 이용하여 $a$, $b$, $c$의 값을 구한다.

$x\in A$, $y\in A$, $x\neq y$일 때, $x+y$의 값은 다음 표와 같다.

| $x$ \ $y$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | | $a+b$ | $a+c$ |
| $b$ | $a+b$ | | $b+c$ |
| $c$ | $a+c$ | $b+c$ | |

$\therefore B=\{a+b, a+c, b+c\}$

이때 $a<b<c$라 하면 $a+b<a+c<b+c$이므로

$a+b=6$ ······ ㉠

$a+c=9$ ······ ㉡

$b+c=11$ ······ ㉢

㉠－㉡을 하면 $b-c=-3$ ······ ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $b=4$, $c=7$

따라서 집합 $A$의 원소 중 가장 큰 수는 7이다.

답 **7**

다른 풀이 ㉠+㉡+㉢을 하면 $2(a+b+c)=26$

$\therefore a+b+c=13$ ······ ㉤

㉤－㉠을 하면 $c=7$

참고 $b=4$를 ㉠에 대입하면 $a+4=6$ $\therefore a=2$

$\therefore A=\{2, 4, 7\}$

# 02 집합 사이의 포함 관계

● 본책 127~134쪽

## 308

답 (1) $\varnothing$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{2, 4\}$

(2) $\varnothing$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{9\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 9\}$, $\{3, 9\}$, $\{1, 3, 9\}$

## 309

답 (1) $\subset$ (2) $\not\subset$ (3) $\subset$

## 310

(1) $\{x\,|\,x^2-2x+1=0\}=\{1\}$이므로

$\{-1, 1\}\ \boxed{\neq}\ \{x\,|\,x^2-2x+1=0\}$

(2) $\{x\,|\,x$는 $2<x<4$인 자연수$\}=\{3\}$이므로

$\varnothing\ \boxed{\neq}\ \{x\,|\,x$는 $2<x<4$인 자연수$\}$

(3) $\{x\,|\,x=2^n, n=1, 2, 3\}=\{2, 4, 8\}$이므로

$\{2, 4, 8\}\ \boxed{=}\ \{x\,|\,x=2^n, n=1, 2, 3\}$

답 (1) $\neq$ (2) $\neq$ (3) $=$

## 311

$\{x\,|\,x$는 5 이하의 소수$\}=\{2, 3, 5\}$

이므로 주어진 집합의 진부분집합은

$\varnothing$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 5\}$

답 **풀이 참조**

## 312

$A=\{1, 2, 4, 8, 16\}$이므로 $n(A)=5$

(1) $2^5=32$ (2) $2^5-1=31$

(3) $2^{5-2}=2^3=8$ (4) $2^{5-1}=2^4=16$

답 (1) **32** (2) **31** (3) **8** (4) **16**

## 313

① 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing\subset A$

② 1은 집합 $B$의 원소이므로 $1\in B$

③ 3은 집합 $A$의 원소가 아니므로 $3\notin A$

④ 2는 집합 $A$의 원소이므로 $\{2\}\subset A$

⑤ 1, 3, 5는 집합 $B$의 원소이므로

$\{1, 3, 5\}\subset B$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

## 314

$A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$

ㄱ. 5는 집합 $A$의 원소가 아니므로 $5\notin A$ (거짓)

ㄴ. 6은 집합 $A$의 원소이므로 $6\in A$ (거짓)

ㄷ. 4, 10은 집합 $A$의 원소이므로

$\{4, 10\}\subset A$ (참)

ㄹ. $10\in A$, $10\notin\{2, 4, 6, 8\}$이므로

$A\not\subset\{2, 4, 6, 8\}$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ㄷ

## 315

집합 $S$의 원소는 $\varnothing$, $\{0\}$, 1이다.

① $\varnothing$는 집합 $S$의 원소이므로 $\varnothing\in S$

② 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing\subset S$

③ 1은 집합 $S$의 원소이므로 $1\in S$

④ $\{0\}$은 집합 $S$의 원소이므로

$\{0\}\in S$, $\{\{0\}\}\subset S$

⑤ $\varnothing$, $\{0\}$은 집합 $S$의 원소이므로

$\{\varnothing, \{0\}\}\subset S$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

## 316

$A\subset B$이고 $-1\in A$이므로 $-1\in B$

(ⅰ) $a-2=-1$, 즉 $a=1$일 때

$A=\{-1, 0\}$, $B=\{-1, 0, 2\}$이므로

$A\subset B$

(ⅱ) $1-a=-1$, 즉 $a=2$일 때

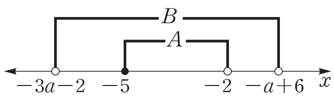
$A=\{-1, 3\}$, $B=\{-1, 0, 2\}$이므로

$A\not\subset B$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=1$ 답 1

## 317

두 집합 $A$, $B$에 대하여 $A\subset B$가 성립하도록 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.




즉 $-3a-2<-5$, $-a+6\geq -2$이므로

$1<a\leq 8$

따라서 정수 $a$의 최댓값은 8, 최솟값은 2이므로 구하는 합은 $8+2=10$ 답 10

## 318

$A\subset B$이고 $B\subset A$이므로 $A=B$

$4\in A$이므로 $4\in B$

$a^2-3a=4$, $a^2-3a-4=0$

$(a+1)(a-4)=0$ $\therefore a=-1$ 또는 $a=4$

(ⅰ) $a=-1$일 때

$A=\{-3, 0, 4\}$, $B=\{2, 4, 5\}$이므로

$A\neq B$

(ⅱ) $a=4$일 때

$A=\{2, 4, 5\}$, $B=\{2, 4, 5\}$이므로

$A=B$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=4$ 답 4

다른 풀이 $A=B$이고 $2\in B$, $5\in B$이므로

$2\in A$, $5\in A$

이때 $a-2<a+1$이므로

$a-2=2$, $a+1=5$ $\therefore a=4$

## 319

집합 $X$는 집합 $A$의 부분집합 중 3, 5는 반드시 원소로 갖고 9는 원소로 갖지 않는 부분집합이므로 구하는 집합 $X$의 개수는

$2^{6-2-1}=2^3=8$ 답 8

## 320

집합 $A$의 부분집합의 개수는

$2^4=16$

집합 $A$의 부분집합 중 소수 2, 3, 5를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$2^{4-3}=2$

따라서 적어도 한 개의 소수를 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$16-2=14$ 답 14

## 321

집합 $X$는 집합 $B$의 부분집합 중 0, 1을 반드시 원소로 갖는 부분집합이므로

$\{0, 1\}$, $\{0, 1, 2\}$, $\{0, 1, 3\}$, $\{0, 1, 2, 3\}$

따라서 집합 $X$가 될 수 없는 것은 ④이다. 답 ④

## 322

집합 $X$의 개수는 집합 $B$의 부분집합 중 1, 2를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$2^{n-2}=128=2^7$

$n-2=7$ $\therefore n=9$ 답 9

## 323

집합 $X$는 $a$, $b$, $c$를 반드시 원소로 갖는 집합 $A$의 부분집합 중 집합 $A$를 제외한 것이다.

따라서 구하는 집합 $X$의 개수는

$2^{5-3}-1=2^2-1=3$ 답 3

참고 집합 $X$가 될 수 있는 것은

$\{a, b, c\}$, $\{a, b, c, d\}$, $\{a, b, c, e\}$

## 연습 문제

● 본책 135~136쪽

# 324

**전략** 두 집합 $B$, $C$의 원소를 구하여 세 집합 사이의 포함 관계를 파악한다.

$x\in A$, $y\in A$일 때, $2x+y$, $xy$의 값은 각각 [표 1], [표 2]와 같다.

| $2x$ \ $y$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $-2$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ |
| $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
| $2$ | $1$ | $2$ | $3$ |

[표 1]

| $x$ \ $y$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $-1$ | $1$ | $0$ | $-1$ |
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $1$ | $-1$ | $0$ | $1$ |

[표 2]

따라서 $B=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,
$C=\{-1, 0, 1\}$이므로

$$A=C\subset B$$

답 ③

# 325

**전략** $x$가 집합 $S$의 원소이면 $x\in S$, $\{x\}\subset S$이다.

집합 $A$의 원소는 $\varnothing$, $a$, $b$, $\{a, b\}$이다.

ㄱ. $n(A)=4$ (거짓)

ㄴ. $\{\varnothing\}\subset A$ (거짓)

ㄷ. $b\in A$, $\{b\}\subset A$ (거짓)

ㅁ. $\{\{a, b\}\}\subset A$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄹ, ㅂ이다.

답 ㄹ, ㅂ

# 326

**전략** $A=B$이면 두 집합 $A$, $B$의 모든 원소가 같음을 이용한다.

$A\subset B$이고 $B\subset A$이므로 $\quad A=B$

$A=\{1, 3, 5, 15\}$에서 $3\in A$, $5\in A$이므로

$$3\in B,\ 5\in B$$

즉 $a-2=3$, $b-2=5$ 또는 $a-2=5$, $b-2=3$이므로

$$a=5,\ b=7 \text{ 또는 } a=7,\ b=5$$

$$\therefore ab=35$$

답 35

# 327

**전략** 1, 2는 반드시 원소로 갖고 3, 4는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는 집합 $\{5, 6, \cdots, n\}$의 부분집합의 개수와 같음을 이용한다.

집합 $A$의 원소의 개수는 $n$이고, 집합 $A$의 부분집합 중 1, 2는 반드시 원소로 갖고 3, 4는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수가 16이므로

$$2^{n-2-2}=16, \qquad 2^{n-4}=2^4$$

$$n-4=4 \qquad \therefore n=8$$

답 8

# 328

**전략** 집합 $X$가 반드시 원소로 갖는 것의 개수를 구한다.

$A=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B=\{-2, 2\}$이므로 집합 $X$는 $-2$, $2$를 반드시 원소로 갖는 집합 $A$의 부분집합 중 두 집합 $A$, $B$를 제외한 것이다.

따라서 구하는 집합 $X$의 개수는

$$2^{7-2}-2=2^5-2=30$$

답 30

# 329

**전략** 집합 $A_{25}$의 원소를 이용하여 $A_n\subset A_{25}$를 만족시키는 $n$의 값의 범위를 구한다.

$A_{25}=\{x\,|\,x$는 5 이하의 홀수$\}=\{1, 3, 5\}$

따라서 $A_n\subset A_{25}$, 즉 $A_n\subset\{1, 3, 5\}$를 만족시키려면 집합 $A_n$의 원소는 5 이하의 홀수로만 이루어져 있어야 한다.

즉 $\sqrt{n}<7$에서 $\qquad n<49$

따라서 자연수 $n$의 최댓값은 48이다.

답 48

**참고** $\sqrt{n}\ge 7$이면 $7\in A_n$이므로 $\qquad A_n\not\subset A_{25}$

# 330

**전략** 포함 관계가 성립하도록 세 집합 $A$, $B$, $C$를 수직선 위에 나타낸다.

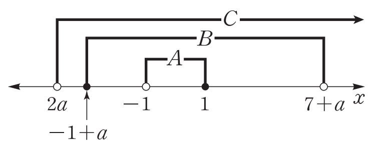
$1<x\le 3$에서 $-1<x-2\le 1$이므로

$$A=\{x\,|\,-1<x\le 1\}$$

$-1\le x<7$에서 $-1+a\le x+a<7+a$이므로

$$B=\{x\,|\,-1+a\le x<7+a\}$$

$A\subset B\subset C$를 만족시키도록 세 집합 $A$, $B$, $C$를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.




(i) $2a<-1+a$에서 $\qquad a<-1$

(ii) $-1+a\le -1$에서 $\qquad a\le 0$

(iii) $1<7+a$에서 $\qquad a>-6$

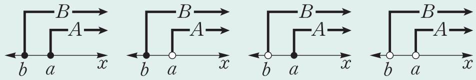
이상에서 $\quad -6<a<-1$

따라서 정수 $a$는 $-5$, $-4$, $-3$, $-2$의 4개이다.

답 **4**

**해설 Focus**

수직선에서 $A\subset B$를 만족시키는 미지수의 범위를 구할 때에는 등호의 포함 여부에 주의한다.




⇩ $b\le a$ ⇩ $b\le a$ ⇩ $b<a$ ⇩ $b\le a$

## 331

**전략** 두 집합 $A$, $B$의 모든 원소의 합과 곱이 각각 같음을 이용한다.

$A=B$이므로 집합 $A$의 모든 원소의 합과 집합 $B$의 모든 원소의 합이 같다.

즉 $a+b+c=ab+bc+ca$에서

$$ab+bc+ca=-3$$

또 집합 $A$의 모든 원소의 곱과 집합 $B$의 모든 원소의 곱이 같으므로

$$abc=ab\times bc\times ca$$

$$abc=(abc)^2, \qquad abc(abc-1)=0$$

$$\therefore abc=1 \ (\because abc\neq 0)$$

$$\begin{aligned}\therefore a^3+b^3+c^3 &=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\ &\quad +3abc\\ &=(a+b+c)\\ &\quad \times\{(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\}+3abc\\ &=-3\times\{(-3)^2-3\times(-3)\}+3\times 1\\ &=-3\times 18+3=-51\end{aligned}$$

답 **$-51$**

## 332

**전략** 집합 $A$의 부분집합에서 $b$, $f$를 원소로 갖지 않는 부분집합을 제외한다.

집합 $A$의 부분집합의 개수는

$$2^7=128$$

집합 $A$의 부분집합 중 $b$, $f$를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{7-2}=2^5=32$$

따라서 집합 $A$의 부분집합 중 $b$ 또는 $f$를 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$$128-32=96$$

답 **96**

다른 풀이 (i) 집합 $A$의 부분집합 중 $b$를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는 $\quad 2^{7-1}=2^6=64$

(ii) 집합 $A$의 부분집합 중 $f$를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는 $\quad 2^{7-1}=2^6=64$

(iii) 집합 $A$의 부분집합 중 $b$, $f$를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는 $\quad 2^{7-2}=2^5=32$

이상에서 구하는 부분집합의 개수는

$$64+64-32=96$$

## 333

**전략** 두 집합 $A$, $B$의 원소의 개수를 이용한다.

$x^2-4x+3=0$에서

$$(x-1)(x-3)=0 \qquad \therefore x=1 \text{ 또는 } x=3$$

$$\therefore A=\{1, 3\}$$

$x^2-6x+5\le 0$에서

$$(x-1)(x-5)\le 0 \qquad \therefore 1\le x\le 5$$

$$\therefore B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

따라서 $A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 $X$의 개수는 1, 3을 반드시 원소로 갖는 집합 $B$의 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^{5-2}=2^3=8$$

이때 $n(X)\ge 3$이므로 $n(X)=2$, 즉 $X=\{1, 3\}$인 경우를 제외하면 구하는 집합 $X$의 개수는

$$8-1=7$$

답 **7**

## 334

**전략** $a\in A$이려면 $a$, $\dfrac{81}{a}$이 모두 자연수이어야 함을 이용한다.

조건 (가), (나)에서 집합 $A$의 원소는 81의 양의 약수이어야 한다.

이때 81의 양의 약수는 1, 3, 9, 27, 81이고 조건 (나)에 의하여 1과 81, 3과 27은 어느 하나가 $A$의 원소이면 나머지 하나도 반드시 $A$의 원소이어야 한다.

따라서 구하는 집합 $A$의 개수는 집합 $\{1, 3, 9\}$의 공집합이 아닌 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^3-1=7$$

답 **7**

**다른 풀이** 조건 (가), (나)에서 집합 $A$의 원소가 될 수 있는 것은 81의 양의 약수인 1, 3, 9, 27, 81이고 1과 81, 3과 27은 동시에 집합 $A$의 원소이거나 원소가 아니어야 한다.

따라서 원소의 개수에 따라 집합 $A$를 구해 보면 다음과 같다.

(ⅰ) 원소가 1개일 때

$A=\{9\}$

(ⅱ) 원소가 2개일 때

$A=\{1, 81\}$ 또는 $A=\{3, 27\}$

(ⅲ) 원소가 3개일 때

$A=\{1, 9, 81\}$ 또는 $A=\{3, 9, 27\}$

(ⅳ) 원소가 4개일 때

$A=\{1, 3, 27, 81\}$

(ⅴ) 원소가 5개일 때

$A=\{1, 3, 9, 27, 81\}$

이상에서 조건을 만족시키는 집합 $A$의 개수는

$1+2+2+1+1=7$

## 335

**전략** $a_n=k$이면 집합 $A_n$은 $k$를 반드시 원소로 갖고 $k$보다 작은 수는 원소로 갖지 않아야 한다.

집합 $A$의 공집합이 아닌 부분집합의 원소 중 가장 작은 원소는 2, 3, 4, 5 중 하나이다.

(ⅰ) 가장 작은 원소가 2인 집합은 2를 반드시 원소로 갖는 부분집합이므로 그 개수는

$2^{4-1}=2^3=8$

(ⅱ) 가장 작은 원소가 3인 집합은 3은 반드시 원소로 갖고 2는 원소로 갖지 않는 부분집합이므로 그 개수는 $2^{4-1-1}=2^2=4$

(ⅲ) 가장 작은 원소가 4인 집합은 4는 반드시 원소로 갖고 2, 3은 원소로 갖지 않는 부분집합이므로 그 개수는 $2^{4-1-2}=2$

(ⅳ) 가장 작은 원소가 5인 집합은 $\{5\}$의 1개이다.

이상에서

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{15}$

$=2\times8+3\times4+4\times2+5\times1$

$=16+12+8+5=41$

**답** 41



# 2 집합의 연산

## 01 집합의 연산

● 본책 138~147쪽

## 336

(1) $A\cup B=\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}\}$

(2) $A=\{3, 6, 9\}$, $B=\{1, 2, 3, 6\}$이므로

$A\cup B=\{\mathbf{1, 2, 3, 6, 9}\}$

(3) $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{-2, 1\}$이므로

$A\cup B=\{\mathbf{-2, 1, 2, 3, 4}\}$

**답** 풀이 참조

## 337

(1) $A\cap B=\{\mathbf{2, 4}\}$

(2) $A\cap B=\{\boldsymbol{d}\}$

(3) $A=\{2, 4, 6, \cdots\}$, $B=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$이므로

$A\cap B=\{\mathbf{2, 4, 6, 8, 10}\}$

**답** 풀이 참조

## 338

ㄱ. $A\cap B=\varnothing$이므로 두 집합 $A$, $B$는 서로소이다.

ㄴ. $A=\{0, 1, 2\}$, $B=\{2\}$이므로

$A\cap B=\{2\}$

따라서 두 집합 $A$, $B$는 서로소가 아니다.

ㄷ. $A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{1, 3, 9\}$이므로

$A\cap B=\{1\}$

따라서 두 집합 $A$, $B$는 서로소가 아니다.

ㄹ. 음의 정수이면서 양의 정수인 정수는 없으므로

$A\cap B=\varnothing$

따라서 두 집합 $A$, $B$는 서로소이다.

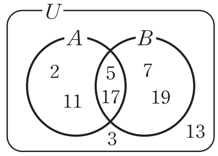
이상에서 두 집합 $A$, $B$가 서로소인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

**답** ㄱ, ㄹ

## 339

$U=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

전체집합 $U$와 두 부분집합 $A$, $B$를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.




(1) $A^C=\{\mathbf{3, 7, 13, 19}\}$

(2) $B^C=\{\mathbf{2, 3, 11, 13}\}$

(3) $A-B=\{\mathbf{2},\ \mathbf{11}\}$

(4) $B-A=\{\mathbf{7},\ \mathbf{19}\}$

(5) $(A\cup B)^{C}=\{\mathbf{3},\ \mathbf{13}\}$

(6) $(A\cap B)^{C}=\{\mathbf{2},\ \mathbf{3},\ \mathbf{7},\ \mathbf{11},\ \mathbf{13},\ \mathbf{19}\}$

**답 풀이 참조**

## 340

② $U-A^{C}=(A^{C})^{C}=A$

③ $(A^{C})^{C}\cap U=A\cap U=A$

⑤ $(A\cap B)\subset A$이므로 $\quad A\cup(A\cap B)=A$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. **답 ⑤**

## 341

$A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{1,\ 2,\ 4\}$, $C=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$

③ $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이므로

$\quad(A\cup B)\cap C=\{1,\ 3\}$

④ $B\cap C=\{1\}$이므로

$\quad A\cup(B\cap C)=\{1,\ 2,\ 3\}$

⑤ $B\cup C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7\}$이므로

$\quad A\cap(B\cup C)=\{1,\ 2,\ 3\}$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다. **답 ③**

## 342

구하는 집합의 개수는 집합 $A$의 부분집합 중 $a$, $c$를 원소로 갖지 않는 집합의 개수와 같으므로

$\quad 2^{4-2}=2^{2}=4$ **답 4**

## 343

$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$이므로

$\quad A^{C}=\{1,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10\}$

따라서 $n(A)=4$, $n(A^{C})=6$이므로

$\quad n(A^{C})-n(A)=6-4=2$ **답 2**

## 344

$A=\{2,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$이므로

$\quad A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$,

$\quad A\cap B=\{5,\ 9\}$

$\quad\therefore\ (A\cup B)-(A\cap B)=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 8\}$

**답 $\{\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3},\ \mathbf{6},\ \mathbf{7},\ \mathbf{8}\}$**

## 345

전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8\}$의 두 부분집합 $A$, $B$가 $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$이므로

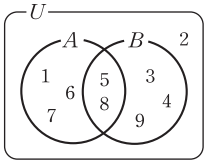
$\quad A-B=\{4,\ 8\}$

$\quad\therefore\ (A-B)^{C}=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7\}$

따라서 집합 $(A-B)^{C}$의 모든 원소의 합은

$\quad 1+2+3+5+6+7=24$ **답 24**

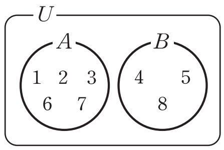
## 346




전체집합 $U=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 9\}$와 주어진 조건을 만족시키는 두 부분집합 $A$, $B$를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$\quad B=\{3,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9\}$ **답 $\{\mathbf{3},\ \mathbf{4},\ \mathbf{5},\ \mathbf{8},\ \mathbf{9}\}$**

## 347



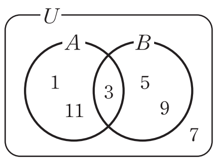

전체집합 $U=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 8\}$과 주어진 조건을 만족시키는 두 부분집합 $A$, $B$를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$\quad A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 7\}$

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$\quad 1+2+3+6+7=19$ **답 19**

## 348




전체집합 $U=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$과 주어진 조건을 만족시키는 두 부분집합 $A$, $B$를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$\quad B=\{3,\ 5,\ 9\}$

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$\quad 3+5+9=17$ **답 17**

## 349

$A\cap B=\{1,\ 6\}$에서 $6\in A$이므로 $\quad a^{2}+2=6$

$\quad a^{2}=4 \qquad \therefore\ a=-2$ 또는 $a=2$

(i) $a=-2$일 때

$A=\{1, 4, 6\}$, $B=\{-11, -2, 3\}$이므로

$A\cap B=\varnothing$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=2$일 때

$A=\{1, 4, 6\}$, $B=\{1, 3, 6\}$이므로

$A\cap B=\{1, 6\}$

(i), (ii)에서 $a=2$

답 **2**

## 350

$A-B=\{2, 3\}$에서 $2\in A$이므로

$a^2-a=2$, $a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$

(i) $a=-1$일 때

$A=\{1, 2, 3, 5\}$, $B=\{-2, 1, 5\}$이므로

$A-B=\{2, 3\}$

(ii) $a=2$일 때

$A=\{1, 2, 3, 5\}$, $B=\{1, 4, 8\}$이므로

$A-B=\{2, 3, 5\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $B=\{-2, 1, 5\}$

답 $\{-2, 1, 5\}$

## 351

$A\cup B=\{2, 4, 5, 7\}$에서 $4\in A$ 또는 $7\in A$이므로

$a-1=4$ 또는 $a-1=7$

$\therefore a=5$ 또는 $a=8$

(i) $a=5$일 때

$A=\{2, 4, 5\}$, $B=\{4, 7\}$이므로

$A\cup B=\{2, 4, 5, 7\}$

(ii) $a=8$일 때

$A=\{2, 5, 7\}$, $B=\{4, 13\}$이므로

$A\cup B=\{2, 4, 5, 7, 13\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $B=\{4, 7\}$

따라서 집합 $B$의 모든 원소의 합은

$4+7=11$

답 **11**

## 352

① $A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B$

② $(A\cup A^C)\cup B=U\cup B=U$

③ $(U-A^C)\cap B=(A^C)^C\cap B=A\cap B$

④ $(A^C)^C\cap(U-B^C)=A\cap(B^C)^C=A\cap B$

⑤ $(A\cap B)\cup(B\cap B^C)=(A\cap B)\cup\varnothing=A\cap B$

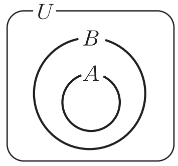
따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ②이다.

답 ②

## 353

$B^C\subset A^C$에서 $A\subset B$

이를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.




④ $A\neq B$이면 $A\cup B^C\neq U$

따라서 항상 성립한다고 할 수 없는 것은 ④이다.

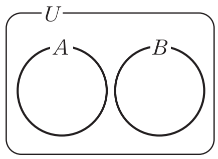
답 ④

## 354

전체집합 $U$의 두 부분집합 $A$, $B$가 서로소이므로

$A\cap B=\varnothing$

이를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.




ㄱ. $A-B=A$ (거짓)

ㄴ. $A\subset B^C$ (참)

ㄷ. $A\cup B^C=B^C$ (참)

ㄹ. $B\cap A^C=B-A=B$ (참)

ㅁ. $A\cap(B-A)=A\cap B=\varnothing$ (참)

ㅂ. $A-(U-B)=A-B^C=A\cap(B^C)^C$

$=A\cap B=\varnothing$ (거짓)

이상에서 항상 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ이다.

답 ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ

## 355

$A\cap X=X$에서 $X\subset A$

$(A\cap B)\cup X=X$에서 $(A\cap B)\subset X$

$\therefore (A\cap B)\subset X\subset A$

이때 $A\cap B=\{4, 5, 6\}$이므로

$\{4, 5, 6\}\subset X\subset\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

따라서 집합 $X$는 집합 $A$의 부분집합 중 4, 5, 6을 반드시 원소로 갖는 집합이므로 구하는 집합 $X$의 개수는

$2^{6-3}=2^3=8$ **답 8**

## 356

$A-X=\varnothing$에서 $\quad A\subset X$

$B-X=B$에서 $\quad B\cap X=\varnothing$

즉 집합 $X$는 전체집합 $U=\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$의 부분집합 중 집합 $A$의 원소 2, 7은 반드시 원소로 갖고 집합 $B$의 원소 3, 13은 원소로 갖지 않는 집합이다.

따라서 구하는 집합 $X$의 개수는

$2^{6-2-2}=2^2=4$ **답 4**

## 357

$(A\cup X)\subset(B\cup X)$를 만족시키는 전체집합 $U$의 부분집합 $X$는 두 집합 $A$, $B$의 공통인 원소 9를 제외한 집합 $A$의 나머지 원소 1, 5, 13을 반드시 원소로 가져야 하므로

$\{1, 5, 13\}\subset X\subset\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$

따라서 구하는 집합 $X$의 개수는

$2^{7-3}=2^4=16$ **답 16**

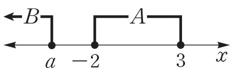
### 연습 문제

● 본책 148~149쪽

## 358

**전략** 주어진 조건을 만족시키도록 두 집합 $A$, $B$를 수직선 위에 나타낸다.

두 집합 $A$, $B$가 서로소, 즉 $A\cap B=\varnothing$이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로




$a<-2$

따라서 정수 $a$의 최댓값은 $-3$이다. **답 −3**

## 359

**전략** 집합 $B-A$의 원소를 이용하여 집합 $A\cap B$의 원소를 구한다.

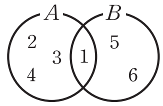
$B=(B-A)\cup(A\cap B)$

$=\{5, 6\}\cup(A\cap B)$

이때 집합 $B$의 모든 원소의 합이 12이므로

$A\cap B=\{1\}$

즉 두 집합 $A$, $B$를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 $\quad A-B=\{2, 3, 4\}$



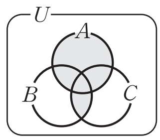

따라서 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은

$2+3+4=9$ **답 ⑤**

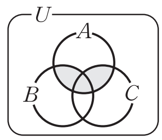
## 360

**전략** 주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내어 본다.

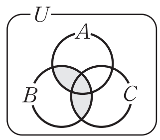
① $A\cup(B\cap C)$



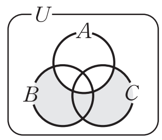

② $A\cap(B\cup C)$



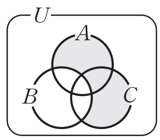

③ $B\cap(A\cup C)$




④ $A^C\cap(B\cup C)$




⑤ $B^C\cap(A\cup C)$




따라서 주어진 벤다이어그램에서 색칠한 부분을 나타내는 집합은 ②이다. **답 ②**

## 361

**전략** 두 집합 $A$, $B$ 사이의 포함 관계를 이용한다.

$B-A=\varnothing$에서 $\quad B\subset A$

이때 $3\in B$이므로 $\quad 3\in A$

(ⅰ) $2a-3=3$, 즉 $a=3$일 때

$A=\{-2, 3, 4\}$, $B=\{-7, 3\}$이므로

$B\not\subset A$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a+1=3$, 즉 $a=2$일 때

$A=\{-2, 1, 3\}$, $B=\{-2, 3\}$이므로

$B\subset A$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\quad a=2$ **답 2**

## 362

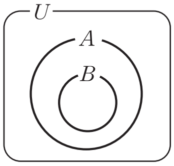
**전략** 주어진 조건으로부터 두 집합 $A$, $B$ 사이의 포함 관계를 알아낸다.

$B-(A\cap B)=\varnothing$에서

$B\subset(A\cap B)$

$\therefore B\subset A$

이를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.




④ $A\neq B$이면 $\quad A-B\neq\varnothing$

따라서 항상 성립한다고 할 수 없는 것은 ④이다.

답 ④

## 363

**전략** 주어진 조건을 이용하여 집합 사이의 포함 관계를 알아낸다.

$A\cup X=A$에서 $\quad X\subset A$

$B\cap X=\varnothing$에서 두 집합 $B$, $X$는 서로소이므로

$X\subset B^C$

따라서 집합 $X$는 집합 $A\cap B^C$, 즉 집합 $A-B$의 부분집합이다.

이때 집합 $A-B$는 50 이하의 6의 배수 중 4의 배수가 아닌 자연수의 집합이므로

$A-B=\{6, 18, 30, 42\}$

따라서 구하는 집합 $X$의 개수는

$2^4=16$

답 ②

## 364

**전략** 삼차방정식을 풀어 집합 $A$의 원소를 구한다.

$x^3-3x^2+2x=0$에서

$x(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

$\therefore A=\{0, 1, 2\}$

이때 $A-B=\{0, 1\}$이므로

$2\in B$

즉 $x^2+x+a=0$의 한 근이 2이므로

$4+2+a=0 \quad \therefore a=-6$

$x^2+x-6=0$에서 $\quad (x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

따라서 $B=\{-3, 2\}$이므로

$B-A=\{-3\}$

답 $\{-3\}$

## 365

**전략** $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$임을 이용한다.

$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$이므로

$a+2\in(A\cap B) \quad \therefore a+2\in B$

그런데 $a+2\neq a+7$이므로 $\quad a+2=a^3-2a$

$a^3-3a-2=0, \quad (a+1)^2(a-2)=0$

$\therefore a=-1$ (중근) 또는 $a=2$

(i) $a=-1$일 때

$A=\{1, 2, 9\}$, $B=\{1, 6\}$이므로

$(A-B)\cup(B-A)=\{2, 6, 9\}$

(ii) $a=2$일 때

$A=\{2, 4, 9\}$, $B=\{4, 9\}$이므로

$(A-B)\cup(B-A)=\{2\}$

(i), (ii)에서 $\quad a=-1$, $b=6$

$\therefore a+b=5$

답 **5**

## 366

**전략** 집합 $C$가 반드시 원소로 갖는 것과 원소로 갖지 않는 것을 구한다.

$U=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, $A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$이므로

$A-B=\{1, 3\}$

$(A-B)\cap C=\{3\}$에서 집합 $C$는 3을 반드시 원소로 갖고 1을 원소로 갖지 않는다.

또 $B\cap C=B$에서 $B\subset C$이므로 집합 $C$는 집합 $B$의 원소 2, 4, 6, 8을 반드시 원소로 갖는다.

따라서 집합 $C$는 전체집합 $U$의 부분집합 중 2, 3, 4, 6, 8을 반드시 원소로 갖고 1을 원소로 갖지 않는 집합이므로 구하는 집합 $C$의 개수는

$2^{8-5-1}=2^2=4$

답 **4**

## 367

**전략** $B=\varnothing$일 때와 $B\neq\varnothing$일 때로 나누어 생각한다.

$A\cap B=B$이므로 $\quad B\subset A$

(i) $B=\varnothing$일 때

방정식 $ax+2=2x$, 즉 $(a-2)x=-2$의 해가 존재하지 않아야 하므로

$a-2=0 \quad \therefore a=2$

(ii) $B \neq \varnothing$일 때

$B=\{-2\}$ 또는 $B=\{3\}$이므로

$-2a+2=-4$ 또는 $3a+2=6$

$\therefore a=3$ 또는 $a=\frac{4}{3}$

(i), (ii)에서 $a=\frac{4}{3}$ 또는 $a=2$ 또는 $a=3$

따라서 모든 실수 $a$의 값의 곱은

$\frac{4}{3} \times 2 \times 3=8$ **답 8**

## 368

**전략** 조건 (가), (나)를 만족시키는 집합 $B-A$를 구한다.

조건 (가)에서 $A-B=\varnothing$이므로 $A \subset B$

$\therefore S(B-A)=S(B)-S(A)$

$=10$ ($\because$ 조건 (나))

이때 전체집합 $U=\{2, 3, 5, 7, 11\}$에 대하여 원소의 합이 10인 경우는

$2+3+5=10$ 또는 $3+7=10$

$\therefore B-A=\{2, 3, 5\}$ 또는 $B-A=\{3, 7\}$

한편

$S(B)+S(B^C)=S(U)=2+3+5+7+11=28$

이므로 조건 (다)에서 $S(B)<14$

$S(A)+10<14$ ($\because$ 조건 (나))

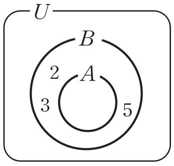
$\therefore S(A)<4$ …… ㉠

(i) $B-A=\{2, 3, 5\}$일 때

$A \neq \varnothing$이므로

$7 \in A$ 또는 $11 \in A$

이때 ㉠을 만족시키지 않는다.

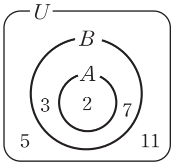



(ii) $B-A=\{3, 7\}$일 때

$A \neq \varnothing$이므로

$2 \in A$ 또는 $5 \in A$

또는 $11 \in A$




이때 ㉠에서 $A=\{2\}$

$\therefore B=\{2, 3, 7\}$

(i), (ii)에서 $B=\{2, 3, 7\}$ **답 {2, 3, 7}**

## 369

**전략** 집합 $X$가 2를 포함하는 경우와 포함하지 않는 경우로 나누어 생각한다.

집합 $X$는 $X \cap A \neq \varnothing$, $X \cap B \neq \varnothing$을 만족시켜야 하므로 집합 $A$의 원소 중 적어도 하나와 집합 $B$의 원소 중 적어도 하나를 원소로 가져야 한다.

(i) $2 \in X$인 경우

$2 \in (X \cap A)$, $2 \in (X \cap B)$이므로 집합 $X$는 $X \cap A \neq \varnothing$, $X \cap B \neq \varnothing$을 만족시킨다.

이때 집합 $X$의 개수는 전체집합 $U$의 부분집합 중 2를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$2^{5-1}=16$

(ii) $2 \notin X$인 경우

집합 $X$는 집합 $A$의 원소 1을 반드시 원소로 갖고, 집합 $B$의 원소 3, 4 중 적어도 하나를 반드시 원소로 가져야 한다.

집합 $\{1, 3, 4, 5\}$의 부분집합 중 1을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는

$2^{4-1}=2^3=8$

집합 $\{1, 3, 4, 5\}$의 부분집합 중 1을 반드시 원소로 갖고, 3, 4를 원소로 갖지 않는 집합의 개수는

$2^{4-1-2}=2$

따라서 집합 $X$의 개수는

$8-2=6$

(i), (ii)에서 구하는 집합 $X$의 개수는

$16+6=22$ **답 22**

# 02 집합의 연산 법칙

● 본책 150~155쪽

## 370

(1) $(A-B^C) \cup (B-A)=(A \cap B) \cup (B \cap A^C)$

$=B \cap (A \cup A^C)$

$=B \cap U=B$

(2) $\{A \cap (A^C \cup B)\} \cup \{B \cap (B \cup C)\}$

$=\{(A \cap A^C) \cup (A \cap B)\} \cup B$ ← $B \subset (B \cup C)$

$=\{\varnothing \cup (A \cap B)\} \cup B$

$=(A \cap B) \cup B=B$ ← $(A \cap B) \subset B$

**답** (1) $B$ (2) $B$

## 371

$A-(B\cup C)=A\cap(B\cup C)^C$

$=A\cap(B^C\cap C^C)$ ← 드모르간의 법칙

$=(A\cap B^C)\cap C^C$ ← 결합법칙

$=(A\cap B^C)-C$

$=(A-B)-C$

답 풀이 참조

## 372

주어진 등식의 좌변을 간단히 하면

$(A\cup B)\cap A^C=(A\cap A^C)\cup(B\cap A^C)$

$=\varnothing\cup(B\cap A^C)$

$=B\cap A^C=B-A$

즉 $B-A=\varnothing$이므로 $B\subset A$

ㄱ. $A\cap B=B$ (거짓)

ㄴ. $A\cup B=A$ (참)

ㄷ. $A\cup B^C=U$ (참)

이상에서 항상 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

## 373

주어진 등식의 좌변을 간단히 하면

$(A\cup B)\cap(B-A)^C=(A\cup B)\cap(B\cap A^C)^C$

$=(A\cup B)\cap(B^C\cup A)$

$=(A\cup B)\cap(A\cup B^C)$

$=A\cup(B\cap B^C)$

$=A\cup\varnothing=A$

즉 $A=A\cap B$이므로 $A\subset B$

①, ② $A\cap B=A$

③ $A\cap B^C=\varnothing$

④, ⑤ $A\cup B=B$

따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

## 374

$(A\circledcirc B)\circledcirc A=(B\circledcirc A)\circledcirc A$ ← 교환법칙

$=B\circledcirc(A\circledcirc A)$ ← 결합법칙

$=B\circledcirc\{(A\cup A)-(A\cap A)\}$

$=B\circledcirc(A-A)=B\circledcirc\varnothing$

$=(B\cup\varnothing)-(B\cap\varnothing)$

$=B-\varnothing$

$=B$ 답 ②

## 375

(1) $(A_2\cup A_8)\cap(A_3\cup A_9)=A_2\cap A_3=A_6$

$\therefore m=6$

(2) $(A_6\cap A_8)\cup A_{12}=A_{24}\cup A_{12}=A_{12}$

$\therefore m=12$

답 (1) **6** (2) **12**

# 03 유한집합의 원소의 개수

● 본책 156~160쪽

## 376

(1) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=10+8-4=14$

(2) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$10=8+5-n(A\cap B)$

$\therefore n(A\cap B)=3$

(3) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$13=6+n(B)-2$ $\therefore n(B)=9$

답 (1) **14** (2) **3** (3) **9**

## 377

$n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$

$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$=12+16+17-8-12-7+5$

$=23$ 답 **23**

## 378

(1) $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

$=20-8=12$

(2) $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$

$=13-8=5$

답 (1) **12** (2) **5**

## 379

(1) $n(A^C)=n(U)-n(A)=33-21=12$

(2) $n(B^C)=n(U)-n(B)=33-14=19$

(3) $n((A\cap B)^C)=n(U)-n(A\cap B)$

$=33-9=24$

(4) $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$

$=n(U)-n(A\cup B)$

이때

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=21+14-9=26$

이므로

$n(A^C\cap B^C)=n(U)-n(A\cup B)$

$=33-26=7$

답 (1) **12** (2) **19** (3) **24** (4) **7**

## 380

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$

$=n(U)-n(A\cup B)$

에서

$11=32-n(A\cup B)$ $\therefore n(A\cup B)=21$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$21=n(A)+n(B)-4$

$\therefore n(A)+n(B)=25$

답 **25**

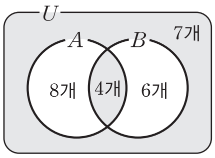
## 381

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$18=12+10-n(A\cap B)$

$\therefore n(A\cap B)=4$

따라서 벤다이어그램에 각 집합의 원소의 개수를 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 색칠한 부분에 속하는 원소의 개수는 $4+7=11$




답 **11**

## 382

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$15=10+9-n(A\cap B)$

$\therefore n(A\cap B)=4$

$n(B\cup C)=n(B)+n(C)-n(B\cap C)$에서

$11=9+6-n(B\cap C)$

$\therefore n(B\cap C)=4$

또 $A\cap C=\varnothing$이므로 $A\cap B\cap C=\varnothing$

$\therefore n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)$

$-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)$

$+n(A\cap B\cap C)$

$=10+9+6-4-4-0+0$

$=17$

답 **17**

## 383

중국어를 신청한 학생의 집합을 $A$, 일본어를 신청한 학생의 집합을 $B$라 하면

$n(A)=52$, $n(B)=45$

80명의 학생이 두 과목 중 적어도 한 과목을 신청하였으므로 $n(A\cup B)=80$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$80=52+45-n(A\cap B)$

$\therefore n(A\cap B)=17$

한 과목만 신청한 학생 수는 전체 학생 수에서 두 과목을 모두 신청한 학생 수를 뺀 것과 같으므로

$n(A\cup B)-n(A\cap B)=80-17=63$

따라서 구하는 학생 수는 63이다.

답 **63**

다른 풀이 중국어만 신청한 학생 수는

$n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)$

$=80-45=35$

일본어만 신청한 학생 수는

$n(B-A)=n(A\cup B)-n(A)$

$=80-52=28$

따라서 구하는 학생 수는

$n(A-B)+n(B-A)=35+28=63$

## 384

학급 전체 학생의 집합을 $U$, A 포털사이트의 이메일을 이용하는 학생의 집합을 $A$, B 포털사이트의 이메일을 이용하는 학생의 집합을 $B$라 하면

$n(U)=40$, $n(A)=25$, $n(B)=20$,

$n(A^C\cap B^C)=5$

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$

에서 $5=40-n(A\cup B)$

$\therefore n(A\cup B)=35$

두 포털사이트의 이메일을 모두 이용하는 학생의 집합은 $A\cap B$이므로

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$35=25+20-n(A\cap B)$

$\therefore\ n(A\cap B)=10$

따라서 구하는 학생 수는 10이다. 답 **10**

## 385

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=15+26-n(A\cap B)$

$=41-n(A\cap B)$

(i) $n(A\cup B)$가 최대인 경우는 $n(A\cap B)$가 최소일 때이므로 $n(A\cap B)=7$일 때이다.

따라서 $n(A\cup B)$의 최댓값은

$41-7=34$

(ii) $n(A\cup B)$가 최소인 경우는 $n(A\cap B)$가 최대일 때이므로 $A\subset B$일 때이다.

따라서 $n(A\cup B)$의 최솟값은

$n(B)=26$

(i), (ii)에서 $n(A\cup B)$의 최댓값과 최솟값의 합은

$34+26=60$ 답 **60**

다른 풀이 $(A\cap B)\subset A$, $(A\cap B)\subset B$이므로

$n(A\cap B)\le n(A)$, $n(A\cap B)\le n(B)$

$\therefore\ n(A\cap B)\le 15$

또 $n(A\cap B)\ge 7$이므로

$7\le n(A\cap B)\le 15$

$-15\le -n(A\cap B)\le -7$

$\therefore\ 26\le 41-n(A\cap B)\le 34$

즉 $26\le n(A\cup B)\le 34$이므로 $n(A\cup B)$의 최댓값은 34, 최솟값은 26이다.

## 386

학급 전체 학생의 집합을 $U$, 설악산에 가 본 학생의 집합을 $A$, 지리산에 가 본 학생의 집합을 $B$라 하면

$n(U)=40$, $n(A)=25$, $n(B)=18$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=25+18-n(A\cup B)$

$=43-n(A\cup B)$

(i) $n(A\cap B)$가 최대인 경우는 $n(A\cup B)$가 최소일 때이므로 $B\subset A$일 때이다.

$\therefore\ M=n(B)=18$

(ii) $n(A\cap B)$가 최소인 경우는 $n(A\cup B)$가 최대일 때이므로 $A\cup B=U$일 때이다.

$\therefore\ m=43-40=3$

(i), (ii)에서 $M+m=21$

답 **21**

다른 풀이 $A\subset(A\cup B)\subset U$이므로

$n(A)\le n(A\cup B)\le n(U)$

$\therefore\ 25\le n(A\cup B)\le 40$

따라서 $3\le 43-n(A\cup B)\le 18$이므로

$3\le n(A\cap B)\le 18$

$\therefore\ M=18,\ m=3$

### 연습 문제

본책 161~163쪽

## 387

**전략** 분배법칙과 드모르간의 법칙을 이용하여 좌변을 간단히 한다.

ㄱ. $(A^C\cup B)\cap A=(A^C\cap A)\cup(B\cap A)$

$=\varnothing\cup(B\cap A)$

$=A\cap B$

ㄴ. $(A\cup B)\cap(A^C\cap B^C)=(A\cup B)\cap(A\cup B)^C$

$=\varnothing$

ㄷ. $(A-B)\cup(A-C)=(A\cap B^C)\cup(A\cap C^C)$

$=A\cap(B^C\cup C^C)$

$=A\cap(B\cap C)^C$

$=A-(B\cap C)$

ㄹ. $\{(A\cap B)\cup(A-B)\}\cap B$

$=\{(A\cap B)\cup(A\cap B^C)\}\cap B$

$=\{A\cap(B\cup B^C)\}\cap B$

$=(A\cap U)\cap B$

$=A\cap B$

이상에서 항상 성립하는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

## 388

**전략** 분배법칙을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

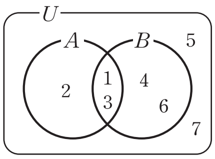
$\{(A\cap B)\cup(A\cap B^C)\}\cup\{(A^C\cup B)\cap(A^C\cup B^C)\}$
$=\{A\cap(B\cup B^C)\}\cup\{A^C\cup(B\cap B^C)\}$
$=(A\cap U)\cup(A^C\cup\varnothing)$
$=A\cup A^C=U$ 답 $U$

## 389

**전략** 주어진 조건을 만족시키는 집합 $U$, $A$, $B$를 벤다이어그램으로 나타낸다.

$(A\cup B)\cap(A^C\cup B^C)=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$
$=(A\cup B)-(A\cap B)$
$=\{2, 4, 6\}$

이때 $A=\{1, 2, 3\}$이므로 전체집합 $U$와 주어진 조건을 만족시키는 두 부분집합 $A$, $B$를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.




$\therefore B=\{1, 3, 4, 6\}$

따라서 집합 $B$의 모든 원소의 합은

$1+3+4+6=14$ 답 14

## 390

**전략** 주어진 등식의 좌변을 간단히 하여 집합 $A$, $B$ 사이의 포함관계를 구한다.

주어진 등식의 좌변을 간단히 하면

$(A-B)^C\cap B^C=(A\cap B^C)^C\cap B^C$
$=(A^C\cup B)\cap B^C$
$=(A^C\cap B^C)\cup(B\cap B^C)$
$=(A^C\cap B^C)\cup\varnothing$
$=A^C\cap B^C$

즉 $A^C\cap B^C=A^C$이므로 $A^C\subset B^C$

$\therefore B\subset A$ 답 ②

## 391

**전략** 연산 ⊙의 뜻에 따라 먼저 $A⊙B$의 원소를 구한다.

$A⊙B=(A-B)\cup(B-A)$
$=(\{1, 2, 3, 4\}-\{1, 2\})$
$\cup(\{1, 2\}-\{1, 2, 3, 4\})$
$=\{3, 4\}\cup\varnothing=\{3, 4\}$

$\therefore (A⊙B)⊙C$
$=\{(A⊙B)-C\}\cup\{C-(A⊙B)\}$
$=(\{3, 4\}-\{1, 3, 5\})\cup(\{1, 3, 5\}-\{3, 4\})$
$=\{4\}\cup\{1, 5\}=\{1, 4, 5\}$

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$1+4+5=10$ 답 10

## 392

**전략** 최소공배수의 성질을 이용한다.

$A_5\cap(A_3\cup A_6)=A_5\cap A_3=A_{15}$
$=\{15, 30, 45, \cdots, 195\}$

따라서 원소의 최댓값은 195, 최솟값은 15이므로 구하는 합은

$195+15=210$ 답 210

다른 풀이 $A_5\cap(A_3\cup A_6)=(A_5\cap A_3)\cup(A_5\cap A_6)$
$=A_{15}\cup A_{30}=A_{15}$
$=\{15, 30, 45, \cdots, 195\}$

## 393

**전략** 주어진 조건을 집합을 이용하여 나타낸다.

전체 학생의 집합을 $U$, A 문제를 맞힌 학생의 집합을 $A$, B 문제를 맞힌 학생의 집합을 $B$라 하면

$n(U)=48$, $n(A)=23$, $n(A\cap B)=10$,
$n(A^C\cap B^C)=5$

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$
에서 $5=48-n(A\cup B)$

$\therefore n(A\cup B)=43$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$43=23+n(B)-10$

$\therefore n(B)=30$

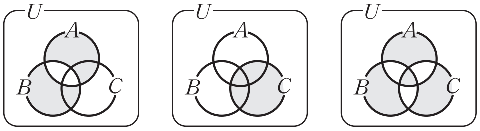
따라서 B 문제를 맞힌 학생 수는 30이다. 답 30

## 394

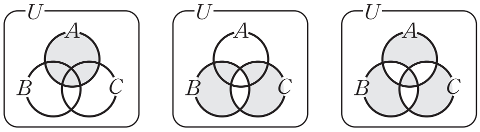
**전략** 벤다이어그램을 이용하여 연산 $*$에 대하여 결합법칙이 성립하는지 확인한다.

ㄱ. $A^C * B^C=(A^C-B^C)\cup(B^C-A^C)$
$=(A^C\cap B)\cup(B^C\cap A)$
$=(B-A)\cup(A-B)$
$=(A-B)\cup(B-A)$
$=A * B$ (참)

ㄴ.




$(A*B) \quad * \quad C \quad = \quad (A*B)*C$




$A \quad * \quad (B*C) \quad = \quad A*(B*C)$

$\therefore\ (A*B)*C=A*(B*C)$ (참)

ㄷ. ㄴ에 의하여

$$\begin{aligned} A*(A*B)&=(A*A)*B \\ &=\{(A-A)\cup(A-A)\}*B \\ &=\varnothing*B \\ &=(\varnothing-B)\cup(B-\varnothing) \\ &=\varnothing\cup B=B \text{ (참)} \end{aligned}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 항상 옳다. **답** ㄱ, ㄴ, ㄷ

## 395

**전략** 분배법칙을 이용하여 집합 $A_3\cap(A_4\cup A_6)$을 간단히 한다.

$A_3\cap(A_4\cup A_6)=(A_3\cap A_4)\cup(A_3\cap A_6)$

$x\in(A_3\cap A_4)$이면 $x-2$는 3과 4의 공배수, 즉 12의 배수이므로 $\quad x=12k+2$ (단, $k$는 정수)

즉 $x\in A_{12}$이므로 $\quad A_3\cap A_4=A_{12}$

$x\in(A_3\cap A_6)$이면 $x-2$는 3과 6의 공배수, 즉 6의 배수이므로 $\quad x=6k+2$ (단, $k$는 정수)

즉 $x\in A_6$이므로 $\quad A_3\cap A_6=A_6$

$\therefore\ (A_3\cap A_4)\cup(A_3\cap A_6)=A_{12}\cup A_6$

이때 $x\in(A_{12}\cup A_6)$이면 $x-2$는 6의 배수이므로

$x=6k+2$ (단, $k$는 정수)

즉 $x\in A_6$이므로 $\quad A_{12}\cup A_6=A_6$

이때 $A_6=\{2, 8, 14, 20, \cdots, 50\}$이므로 구하는 원소의 개수는 9이다. **답** 9

## 396

**전략** 드모르간의 법칙을 이용한다.

$A^C\cup B=(A\cap B^C)^C=(A-B)^C$이므로

$$\begin{aligned} n(A^C\cup B)&=n((A-B)^C) \\ &=n(U)-n(A-B) \quad \cdots ㉠ \end{aligned}$$

이때 $A=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$,

$B=\{3, 6, 9, \cdots, 48\}$이므로

$A-B=\{1, 2, 5, 10\}$

$\therefore\ n(A-B)=4$

$n(U)=50$이므로 ㉠에서

$n(A^C\cup B)=50-4=46$ **답** ④

**다른 풀이** $n(A^C\cup B)$

$=n(A^C)+n(B)-n(A^C\cap B)$

$=\{n(U)-n(A)\}+n(B)-n(B-A)$

$=50-n(A)+n(B)-\{n(B)-n(A\cap B)\}$

$=50-n(A)+n(A\cap B) \quad \cdots\cdots ㉡$

이때 $A=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$,

$B=\{3, 6, 9, \cdots, 48\}$이므로

$A\cap B=\{3, 6, 15, 30\}$

따라서 $n(A)=8$, $n(A\cap B)=4$이므로 ㉡에서

$n(A^C\cup B)=50-8+4=46$

## 397

**전략** 주어진 조건을 집합으로 나타낸 후 유한집합의 원소의 개수를 구하는 공식을 이용한다.

학생 전체의 집합을 $U$, 역사 체험을 신청한 학생의 집합을 $A$, 과학 체험을 신청한 학생의 집합을 $B$라 하면

$n(U)=50$, $n(A)=33$, $n(A-B)=15$,

$n(A^C\cap B^C)=8$

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$에서

$15=33-n(A\cap B)$

$\therefore\ n(A\cap B)=18$

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$ 에서

$8=50-n(A\cup B)$

$\therefore\ n(A\cup B)=42$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$42=33+n(B)-18$

$\therefore\ n(B)=27$

따라서 과학 체험을 신청한 학생 수는 27이다. **답** 27

## 398

**전략** 집합 $X\cap Y$의 원소의 개수가 최대, 최소인 경우를 각각 생각해 본다.

$n(X\cup Y)=n(X)+n(Y)-n(X\cap Y)$에서

$n(X\cap Y)=n(X)+n(Y)-n(X\cup Y)$
$=23+19-n(X\cup Y)$
$=42-n(X\cup Y)$

(i) $n(X\cap Y)$가 최대인 경우는 $n(X\cup Y)$가 최소일 때이므로 $Y\subset X$일 때이다.

$\therefore\ M=n(Y)=19$

(ii) $n(X\cap Y)$가 최소인 경우는 $n(X\cup Y)$가 최대일 때이므로 $X\cup Y=U$일 때이다.

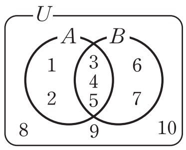
$\therefore\ m=42-36=6$

(i), (ii)에서 $\quad M-m=13$ **답** 13

## 399

**전략** 주어진 조건을 이용하여 집합 $X$가 포함해야 하는 원소를 구한다.

전체집합 $U$와 두 부분집합 $A$, $B$를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.




$(A-X)\subset A$, $(B-X)\subset B$이고 조건 (나)에서 $A-X=B-X$이므로 두 집합 $A-X$, $B-X$는 모두 $A\cap B$, 즉 $\{3, 4, 5\}$의 부분집합이다.

따라서 집합 $X$는 1, 2, 6, 7을 반드시 원소로 가져야 한다. ...... ㉠

한편 조건 (다)에서 $(X-A)\cap(X-B)\neq\varnothing$이므로

$(X\cap A^C)\cap(X\cap B^C)\neq\varnothing$
$X\cap(A^C\cap B^C)\neq\varnothing$
$X\cap(A\cup B)^C\neq\varnothing$
$\therefore\ X\cap\{8, 9, 10\}\neq\varnothing$

따라서 집합 $X$는 8, 9, 10 중 적어도 하나를 원소로 가져야 한다. ...... ㉡

즉 집합 $X$는 ㉠, ㉡을 만족시키고, 조건 (가)에 의하여 원소의 개수가 6이어야 하므로 집합 $X$의 모든 원소의 합이 최소가 되려면 8, 9, 10 중 가장 작은 수인 8과 3, 4, 5 중 가장 작은 수인 3을 원소로 가져야 한다.

따라서 $X=\{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$이어야 하므로 $X$의 모든 원소의 합의 최솟값은

$1+2+3+6+7+8=27$ **답** ②

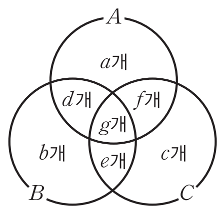
### 해설 Focus

㉠을 자세히 알아보자.
예를 들어 $1\not\in X$라 하면
$1\in(A-X)$
이때 $1\not\in(A\cap B)$이므로
$(A-X)\not\subset(A\cap B)$
따라서 $(A-X)\subset(A\cap B)$이려면 $1\in X$이어야 한다.
같은 방법으로 하면 집합 $X$가 1, 2, 6, 7을 원소로 가져야 함을 알 수 있다.

## 400

**전략** 벤다이어그램을 그리고 각 영역에 속하는 원소의 개수를 나타내어 본다.

오른쪽 그림과 같이 벤다이어그램의 각 영역에 속하는 원소의 개수를 $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$라 하면




$n(A\cup B\cup C)=75$,
$n(A\triangle B)=45$,
$n(B\triangle C)=47$, $n(C\triangle A)=42$이므로

$a+b+c+d+e+f+g=75$ ...... ㉠
$a+f+b+e=45$ ...... ㉡
$b+d+c+f=47$ ...... ㉢
$a+d+c+e=42$ ...... ㉣

㉡+㉢+㉣을 하면

$2(a+b+c+d+e+f)=134$
$\therefore\ a+b+c+d+e+f=67$ ...... ㉤

㉠−㉤을 하면 $\quad g=8$

$\therefore\ n(A\cap B\cap C)=8$ **답** 8

## 401

**전략** 주어진 조건을 집합으로 나타낸 후 합집합의 원소의 개수를 구하는 공식을 이용한다.

전체 학생의 집합을 $U$, 과학 탐구, 코딩, 영화 논평의 세 동아리에 가입한 학생의 집합을 각각 $A$, $B$, $C$라 하면

$n(U)=50$, $n(A)=23$, $n(B)=28$,
$n(C)=21$, $n(A\cap B\cap C)=7$,
$n(A^C\cap B^C\cap C^C)=4$

이때

$n(A^C\cap B^C\cap C^C)=n((A\cup B\cup C)^C)$

$=n(U)-n(A\cup B\cup C)$

에서 $4=50-n(A\cup B\cup C)$

$\therefore\ n(A\cup B\cup C)=46$

$n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)$

$-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)$

$+n(A\cap B\cap C)$

에서

$46=23+28+21$

$-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)$

$+7$

$\therefore\ n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)=33$

따라서 세 동아리 중 두 동아리에만 가입한 학생 수는

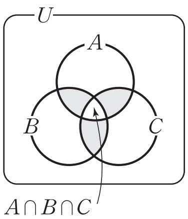
$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$

$-3\times n(A\cap B\cap C)$

$=33-3\times 7=12$

**답 12**

참고 세 동아리 중 두 동아리에만 가입한 학생의 집합은 오른쪽 벤다이어그램의 색칠한 부분과 같으므로 두 동아리에만 가입한 학생 수는




$n(A\cap B)-n(A\cap B\cap C)$

$+n(B\cap C)-n(A\cap B\cap C)$

$+n(C\cap A)-n(A\cap B\cap C)$

$=n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$

$-3\times n(A\cap B\cap C)$

## 402

전략 버스 또는 지하철을 모두 이용하지 않는 학생이 최대인 경우와 최소인 경우를 파악한다.

학급 전체 학생의 집합을 $U$, 버스를 이용하는 학생의 집합을 $A$, 지하철을 이용하는 학생의 집합을 $B$라 하면

$n(U)=36,\ n(A)=22,\ n(B)=9,$

$n(A\cap B)\geq 5$

버스와 지하철을 모두 이용하지 않는 학생의 집합은 $A^C\cap B^C$이므로

$n(A^C\cap B^C)$

$=n((A\cup B)^C)$

$=n(U)-n(A\cup B)$

$=36-\{n(A)+n(B)-n(A\cap B)\}$

$=36-\{22+9-n(A\cap B)\}$

$=n(A\cap B)+5$

(i) $n(A^C\cap B^C)$가 최대인 경우는 $n(A\cap B)$가 최대일 때이므로 $B\subset A$일 때이다.

$\therefore\ a=n(B)+5=9+5=14$

(ii) $n(A^C\cap B^C)$가 최소인 경우는 $n(A\cap B)$가 최소일 때이므로 $n(A\cap B)=5$일 때이다.

$\therefore\ b=5+5=10$

(i), (ii)에서 $a+b=24$

**답 24**

다른 풀이 $(A\cap B)\subset A,\ (A\cap B)\subset B$이므로

$n(A\cap B)\leq n(A),\ n(A\cap B)\leq n(B)$

$\therefore\ n(A\cap B)\leq 9$

이때 $n(A\cap B)\geq 5$이므로

$5\leq n(A\cap B)\leq 9$

$\therefore\ 10\leq n(A\cap B)+5\leq 14$

즉 $10\leq n(A^C\cap B^C)\leq 14$이므로

$a=14,\ b=10$

# 3 명제

Ⅱ. 집합과 명제

## 01 명제와 조건

● 본책 166~171쪽

### 403

①, ② '아름답다', '크다'는 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

③ $x$의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

④ $7-x=2-x$에서 $7=2$이므로 거짓인 명제이다.

⑤ 맞꼭지각의 크기는 서로 같으므로 참인 명제이다.

따라서 명제인 것은 ④, ⑤이다. 답 ④, ⑤

### 404

답 (1) $\mathbf{2+6\le 8}$ (2) $\varnothing\subset\{a, b, c, d\}$

### 405

(2) $x^2-5x-6=0$에서 $(x+1)(x-6)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=6$

그런데 $-1\notin U$이므로 조건 $q$의 진리집합은 $\{6\}$

답 (1) $\{1, 2, 4, 8\}$ (2) $\{6\}$

### 406

전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 하자.

(1) $4x-8=0$에서 $x=2$

따라서 조건 $p$의 진리집합은 $P=\{2\}$

(2) 조건 $\sim p$의 진리집합은 $P^C$이므로

$P^C=\{1, 3, 4, 5\}$

(3) $x^2+1<10$에서 $x^2-9<0$

$(x+3)(x-3)<0$ $\therefore -3<x<3$

따라서 조건 $q$의 진리집합은 $Q=\{1, 2\}$

(4) 조건 $\sim q$의 진리집합은 $Q^C$이므로

$Q^C=\{3, 4, 5\}$

답 (1) $\{2\}$ (2) $\{1, 3, 4, 5\}$ (3) $\{1, 2\}$ (4) $\{3, 4, 5\}$

### 407

답 (1) $x=-7$ **또는** $x=5$

(2) $x\le -4$ **또는** $x\ge 6$

(3) $-2<x\le 3$

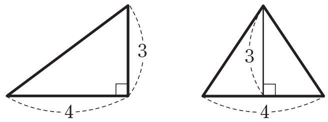
### 408

(1) $\sqrt{4}=2$는 유리수이므로 참인 명제이다.

(2) $x$의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

(3) 직각삼각형은 한 내각의 크기가 $90°$이고 나머지 두 내각의 크기는 $90°$보다 작으므로 참인 명제이다.

(4)




위의 그림의 두 삼각형의 넓이는 6으로 같지만 합동은 아니므로 거짓인 명제이다.

답 (1) **참인 명제,** (3) **참인 명제,** (4) **거짓인 명제**

### 409

ㄷ. 6과 8의 최소공배수는 24이다.

이상에서 참인 명제는 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

### 410

①, ③, ④, ⑤ 주어진 명제가 참이므로 그 부정은 거짓이다.

② 주어진 명제가 거짓이므로 그 부정은 참이다.

답 ②

### 411

두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 하면

$P=\{2, 4, 6\}$

$x^2-5x+6=0$에서

$(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

$\therefore Q=\{2, 3\}$

(1) 조건 $\sim q$의 진리집합은 $Q^C$이므로

$Q^C=\{1, 4, 5, 6\}$

(2) 조건 '$p$ 또는 $q$'의 진리집합은 $P\cup Q$이므로

$P\cup Q=\{2, 3, 4, 6\}$

(3) 조건 '$\sim p$ 그리고 $q$'의 진리집합은 $P^C\cap Q$이므로

$P^C\cap Q=Q-P=\{3\}$

답 (1) $\{1, 4, 5, 6\}$ (2) $\{2, 3, 4, 6\}$ (3) $\{3\}$

## 412

두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 하면

$P=\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$,

$Q=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$

조건 $\sim q$의 진리집합은 $Q^C$이므로

$Q^C=\{0,\ -1,\ -2,\ \cdots\}$

이때 조건 '$p$ 그리고 $\sim q$'의 진리집합은 $P\cap Q^C$이므로

$P\cap Q^C=\{-3,\ -2,\ -1,\ 0\}$

따라서 구하는 원소의 개수는 4이다. 답 **4**

## 413

$-2\leq x<3$에서

$x\geq -2$ 그리고 $x<3$ …… ㉠

$P=\{x\,|\,x\geq 3\}$이므로 $P^C=\{x\,|\,x<3\}$

$Q=\{x\,|\,x<-2\}$이므로 $Q^C=\{x\,|\,x\geq -2\}$

따라서 ㉠의 진리집합은

$Q^C\cap P^C=(P\cup Q)^C$ 답 ⑤

# 02 명제 $p \longrightarrow q$

● 본책 172~175쪽

## 414

(1) $p$: $x^2=9$, $q$: $x^3=27$이라 하고, 두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 하면

$P=\{-3,\ 3\}$, $Q=\{3\}$

따라서 $P\not\subset Q$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

(2) $(x-1)(y-3)=0$이면

$x-1=0$ 또는 $y-3=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $y=3$

따라서 주어진 명제는 참이다.

답 (1) **거짓** (2) **참**

## 415

두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 하면

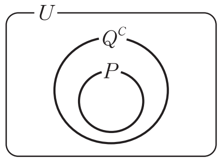
$P=\{4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20\}$, $Q=\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$

명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 원소는 $P$에는 속하고 $Q$에는 속하지 않아야 하므로 $P\cap Q^C$의 원소이다.

이때 $P\cap Q^C=P-Q=\{12,\ 20\}$이므로 구하는 모든 원소의 합은

$12+20=32$ 답 **32**

## 416




명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로

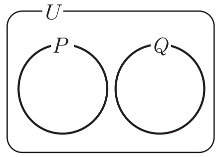
$P\subset Q^C$

이것을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$Q\subset P^C$

따라서 항상 옳은 것은 ③이다. 답 ③

## 417




$P\cap Q=\varnothing$을 만족시키는 두 집합 $P$, $Q$를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

이때 $P\subset Q^C$이고 $Q\subset P^C$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim q$와 $q \longrightarrow \sim p$는 항상 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ㄷ, ㅁ이다. 답 **ㄷ, ㅁ**

## 418

$P\cup Q=P$에서 $Q\subset P$

$Q\cap R=R$에서 $R\subset Q$

$\therefore\ R\subset Q\subset P$, $P^C\subset Q^C\subset R^C$

① $R\subset Q$이므로 명제 $r \longrightarrow q$는 참이다.

② $Q^C\subset R^C$이므로 명제 $\sim q \longrightarrow \sim r$는 참이다.

③ $P^C\subset Q^C$이므로 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$는 참이다.

④ $Q\subset P$이므로 명제 $q \longrightarrow p$는 참이다.

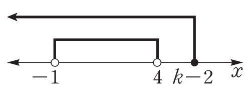
따라서 항상 참이라고 할 수 없는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

## 419

주어진 명제가 참이 되려면

$\{x\,|\,-1<x<4\}\subset\{x\,|\,x\leq k-2\}$

이어야 하므로 오른쪽 그림에서




$k-2\geq 4$

$\therefore\ k\geq 6$ 답 $\boldsymbol{k\geq 6}$

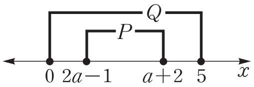
## 420

두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 하면

$P=\{x\,|\,2a-1\leq x\leq a+2\}$,

$Q=\{x\,|\,0\leq x\leq 5\}$

명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P \subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서




$2a-1 \geq 0,\ a+2 \leq 5$

$\therefore\ \frac{1}{2} \leq a \leq 3$

따라서 정수 $a$는 1, 2, 3의 3개이다. **답** 3

## 421

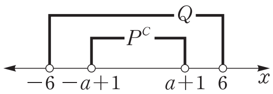
$\sim p$: $|x-1|<a$에서 $\quad -a+1<x<a+1$

두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 하면

$P^C=\{x \mid -a+1<x<a+1\}$,

$Q=\{x \mid -6<x<6\}$

명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P^C \subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서




$-a+1 \geq -6,\ a+1 \leq 6$

$\therefore\ a \leq 5$

따라서 양수 $a$의 최댓값은 5이다. **답** 5

## 03 '모든'이나 '어떤'을 포함한 명제

● 본책 176~177쪽

## 422

① $x=6$이면 $x-2=4$이므로 주어진 명제는 참이다.

② $x=-\sqrt{2}$이면 $\sqrt{2}+x=0$이므로 주어진 명제는 참이다.

③ 모든 실수 $x$에 대하여 $x^2 \geq 0$이므로 주어진 명제는 참이다.

④ [반례] $x=0,\ y=0$이면 $x^2+y^2=0$이다.

⑤ 모든 자연수 $x$, $y$에 대하여 $x \geq 1,\ y \geq 1$이므로 $x+y \geq 2$이다.

따라서 거짓인 명제는 ④이다. **답** ④

## 423

(1) 주어진 명제의 부정은

**모든 실수 $x$에 대하여 $x^2>0$이다.**

$x=0$이면 $x^2=0$이므로 주어진 명제의 부정은 **거짓**이다.

(2) 주어진 명제의 부정은

**어떤 실수 $x$에 대하여 $x^2-x+4 \leq 0$이다.**

이때 모든 실수 $x$에 대하여

$x^2-x+4=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$

이므로 주어진 명제의 부정은 **거짓**이다.

**답** 풀이 참조

Ⅱ-3 명제

### 연습 문제

● 본책 178~179쪽

## 424

**전략** 두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 하면 '$p$ 또는 $\sim q$'의 진리집합은 $P \cup Q^C$임을 이용한다.

$|x| \leq 4$에서 $\quad -4 \leq x \leq 4$

$\therefore\ U=\{-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

$x^2-4x=0$에서 $\quad x(x-4)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=4$

따라서 조건 $p$의 진리집합을 $P$라 하면

$P=\{0,\ 4\}$

$x^2-2x-3 \leq 0$에서 $\quad (x+1)(x-3) \leq 0$

$\therefore\ -1 \leq x \leq 3$

따라서 조건 $q$의 진리집합을 $Q$라 하면

$Q=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

이때 조건 '$p$ 또는 $\sim q$'의 진리집합은 $P \cup Q^C$이고

$Q^C=\{-4,\ -3,\ -2,\ 4\}$이므로

$P \cup Q^C=\{-4,\ -3,\ -2,\ 0,\ 4\}$

따라서 구하는 원소의 개수는 5이다. **답** 5

## 425

**전략** 주어진 명제의 반례를 찾아 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $p$: $x$는 8의 양의 배수, $q$: $x$는 4의 양의 배수라 하고, 두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 하면

$P=\{8,\ 16,\ 24,\ \cdots\}$, $Q=\{4,\ 8,\ 12,\ \cdots\}$

따라서 $P \subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.

ㄴ. [반례] $x=1,\ y=0$이면 $xy=0$이지만 $x^2+y^2=1$이다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

ㄷ. $x>0$, $y>0$이면 $xy>0$이므로 $|xy|=xy$
따라서 주어진 명제는 참이다.
ㄹ. [반례] $\angle A=40°$, $\angle B=\angle C=70°$이면 삼각형 ABC가 이등변삼각형이지만 $\angle A\neq\angle B$이다.
따라서 주어진 명제는 거짓이다.
이상에서 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

## 426

전략 $p$는 만족시키지만 $\sim q$는 만족시키지 않는 원소가 속하는 집합을 찾는다.

명제 $p \longrightarrow \sim q$가 거짓임을 보이는 원소는 $P$에는 속하고 $Q^C$에는 속하지 않아야 하므로 구하는 집합은

$$P\cap(Q^C)^C=P\cap Q$$

답 ①

## 427

전략 세 조건 $p$, $q$, $r$의 진리집합 사이의 포함 관계를 이용한다.

$4x-1=27$에서 $4x=28$ $\therefore x=7$
$x^2-3x-4=0$에서 $(x+1)(x-4)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$
따라서 세 조건 $p$, $q$, $r$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$, $R$라 하면

$$P=\{x|x<2a-5\},\ Q=\{7\},\ R=\{-1,\ 4\}$$

명제 $q \longrightarrow \sim p$, $r \longrightarrow p$가 모두 참이므로

$$Q\subset P^C,\ R\subset P$$

즉 $7\in P^C$, $-1\in P$, $4\in P$이므로

$$7\geq 2a-5,\ -1<2a-5,\ 4<2a-5$$

$$a\leq 6,\ a>2,\ a>\frac{9}{2}$$

$$\therefore \frac{9}{2}<a\leq 6$$

따라서 정수 $a$는 5, 6의 2개이다. 답 **2**

## 428

전략 $(\text{실수})^2\geq 0$임을 이용한다.

$x$, $y$, $z$는 모두 실수이므로
$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$에서

$$x-y=0,\ y-z=0,\ z-x=0$$

$$\therefore x=y=z$$

즉 '$x=y$이고 $y=z$이고 $z=x$'이므로 구하는 부정은

$$x\neq y \text{ 또는 } y\neq z \text{ 또는 } z\neq x$$

따라서 $x$, $y$, $z$ 중 적어도 두 수는 서로 다르다.

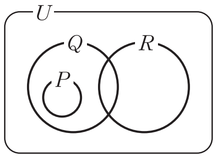
답 ⑤

참고 ① $(x-y)(y-z)(z-x)=0$이면
$x=y$ 또는 $y=z$ 또는 $z=x$
② $(x-y)(y-z)(z-x)\neq 0$이면
$x\neq y$이고 $y\neq z$이고 $z\neq x$

## 429

전략 주어진 집합 사이의 포함 관계를 만족시키는 세 집합을 벤다이어그램으로 나타낸다.

$P\subset(Q-R)$를 만족시키는 세 집합 $P$, $Q$, $R$를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.




이때 $P\subset R^C$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$가 참이다.
또 $R\subset P^C$이므로 명제 $r \longrightarrow \sim p$가 참이다.
따라서 항상 참인 명제는 ①, ④이다. 답 ①, ④

## 430

전략 $\sim p \longrightarrow q$가 참이면 $P^C\subset Q$임을 이용한다.

명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이므로 $P^C\subset Q$
이때 $P=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13\}$에서

$$P^C=\{1,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12\}$$

따라서 집합 $Q$는 $P^C$의 모든 원소를 반드시 원소로 가져야 하므로 집합 $Q$의 개수는

$$2^{13-7}=2^6=64$$

답 **64**

## 431

전략 주어진 조건이 참인 명제가 되려면 $2\leq x\leq 5$에서 $x^2-8x+n$의 최댓값이 0 이상이어야 함을 이용한다.

$f(x)=x^2-8x+n$이라 하면

$$f(x)=(x-4)^2+n-16$$

$2\leq x\leq 5$인 어떤 실수 $x$에 대하여 $f(x)\geq 0$이려면 이 범위에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 0 이상이어야 한다.
이때

$$f(2)=n-12,\ f(4)=n-16,\ f(5)=n-15$$

이므로 $n-12\geq 0$

$$\therefore n\geq 12$$

따라서 자연수 $n$의 최솟값은 12이다. 답 ①

**개념 노트**

$\alpha \le x \le \beta$에서 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값은

① $\alpha < p < \beta$일 때
$f(\alpha)$, $f(p)$, $f(\beta)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

② $p \le \alpha$ 또는 $p \ge \beta$일 때
$f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다.

## 432

**전략** '어떤 $x$에 대하여 $p$이다.'의 부정은 '모든 $x$에 대하여 $\sim p$이다.'임을 이용한다.

주어진 명제의 부정은

모든 실수 $x$에 대하여 $x^2-2kx+k+6 \ge 0$이다.

즉 모든 실수 $x$에 대하여 이차부등식 $x^2-2kx+k+6 \ge 0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-2kx+k+6=0$의 판별식을 $D$라 하면

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-(k+6) \le 0$$

$$k^2-k-6 \le 0, \qquad (k+2)(k-3) \le 0$$

$$\therefore -2 \le k \le 3$$

따라서 주어진 명제의 부정이 참이 되도록 하는 정수 $k$는 $-2$, $-1$, $0$, $1$, $2$, $3$의 6개이다. **답 6**

## 433

**전략** (가), (나)를 이용하여 세 집합 $P$, $Q$, $R$ 사이의 포함 관계를 파악한다.

(가)에서 $P \not\subset Q$

(나)에서 $Q \cap R = \varnothing$

ㄱ. 명제 $q \longrightarrow p$가 참이려면 $Q \subset P$
그런데 두 집합 $P$, $Q$ 사이의 포함 관계는 알 수 없으므로 항상 참이라 할 수 없다.

ㄴ. 명제 $r \longrightarrow \sim q$가 참이려면 $R \subset Q^C$
이때 $Q \cap R = \varnothing$에서 $R \subset Q^C$이므로 $r \longrightarrow \sim q$는 항상 참이다.

ㄷ. 명제 $\sim q \longrightarrow p$가 참이려면 $Q^C \subset P$
그런데 두 집합 $P$, $Q^C$ 사이의 포함 관계는 알 수 없으므로 항상 참이라 할 수 없다.

이상에서 항상 참인 명제는 ㄴ뿐이다. **답 ㄴ**

# 04 명제의 역과 대우

● 본책 180~183쪽

## 434

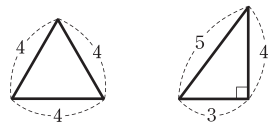
① 역: $x=0$ 또는 $x=1$이면 $x^3=x$이다. (참)
대우: $x \ne 0$이고 $x \ne 1$이면 $x^3 \ne x$이다. (거짓)
[반례] $x=-1$이면 $x \ne 0$이고 $x \ne 1$이지만 $x^3=(-1)^3=-1=x$이다.

② 역: $x>1$이고 $y>1$이면 $xy>1$이다. (참)
대우: $x \le 1$ 또는 $y \le 1$이면 $xy \le 1$이다. (거짓)
[반례] $x=-2$, $y=-1$이면 $x \le 1$ 또는 $y \le 1$이지만 $xy=2>1$이다.

③ 역: $x=0$이고 $y=0$이면 $|x|+|y|=0$이다. (참)
대우: $x \ne 0$ 또는 $y \ne 0$이면 $|x|+|y| \ne 0$이다. (참)

④ 역: $x^2+y^2>0$이면 $xy<0$이다. (거짓)
[반례] $x=1$, $y=1$이면 $x^2+y^2>0$이지만 $xy>0$이다.
대우: $x^2+y^2 \le 0$이면 $xy \ge 0$이다. (참)

⑤ 역: 두 삼각형의 둘레의 길이가 같으면 두 삼각형은 합동이다. (거짓)
[반례] 다음 그림의 두 삼각형은 둘레의 길이는 12로 같지만 합동은 아니다.




대우: 두 삼각형의 둘레의 길이가 같지 않으면 두 삼각형은 합동이 아니다. (참)

따라서 역과 대우가 모두 참인 명제는 ③이다. **답 ③**

## 435

ㄱ. 역: $xy$가 홀수이면 $x$ 또는 $y$는 홀수이다. (참)

ㄴ. 역: $x+y$가 짝수이면 $x$, $y$는 짝수이다. (거짓)
[반례] $x=3$, $y=1$이면 $x+y$가 짝수이지만 $x$, $y$는 홀수이다.

ㄷ. 역: $x^2-4x+3=0$이면 $x-3=0$이다. (거짓)
[반례] $x=1$이면 $x^2-4x+3=0$이지만 $x-3 \ne 0$이다.

이상에서 역이 거짓인 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

**답 ㄴ, ㄷ**

## 436

주어진 명제가 참이므로 그 대우

'$x-1=0$이면 $x^2-ax+7=0$이다.'

도 참이다.

$x^2-ax+7=0$에 $x-1=0$, 즉 $x=1$을 대입하면

$1-a+7=0$　　$\therefore a=8$　　답 8

## 437

① 명제 $p \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참이다.

② 명제 $s \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow \sim s$도 참이다.

따라서 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow \sim s$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow \sim s$가 참이다.

④ 명제 $\sim q \longrightarrow \sim r$가 참이므로 그 대우 $r \longrightarrow q$도 참이다.

따라서 두 명제 $r \longrightarrow q$, $q \longrightarrow \sim s$가 참이므로 명제 $r \longrightarrow \sim s$가 참이다.

⑤ 명제 $p \longrightarrow \sim s$가 참이므로 그 대우 $s \longrightarrow \sim p$도 참이다.

따라서 항상 참이라고 할 수 없는 것은 ③이다.

답 ③

## 05 충분조건과 필요조건

● 본책 184~187쪽

## 438

ㄱ. $p$: $|x|<1$에서　　$-1<x<1$

따라서 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 $p$는 $q$이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. $|x|=|y| \Longleftrightarrow |x|^2=|y|^2 \Longleftrightarrow x^2=y^2$

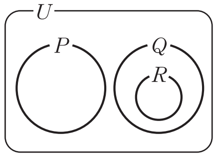
즉 $p \Longleftrightarrow q$이므로 $p$는 $q$이기 위한 필요충분조건이다.

ㄷ. $p$: $(x-y)(y-z)=0$에서　　$x=y$ 또는 $y=z$

따라서 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 $p$는 $q$이기 위한 필요조건이다.

이상에서 필요충분조건인 것은 ㄴ뿐이다.　　답 ㄴ

## 439




$P\cap Q=\varnothing$이고 $Q\cup R=Q$에서 $R\subset Q$이므로 세 집합 $P$, $Q$, $R$를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

(1) $Q\subset P^C$이므로　　$q \Longrightarrow \sim p$

따라서 $q$는 $\sim p$이기 위한 $\boxed{\text{충분}}$조건이다.

(2) $R\subset Q$에서 $Q^C\subset R^C$이므로　　$\sim q \Longrightarrow \sim r$

따라서 $\sim r$는 $\sim q$이기 위한 $\boxed{\text{필요}}$조건이다.

(3) $P\subset R^C$이므로　　$p \Longrightarrow \sim r$

따라서 $p$는 $\sim r$이기 위한 $\boxed{\text{충분}}$조건이다.

답 (1) **충분**　(2) **필요**　(3) **충분**

## 440

$p$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이므로　　$\sim r \Longrightarrow p$

$\therefore R^C\subset P$　　…… ㉠

$r$는 $q$이기 위한 충분조건이므로　　$r \Longrightarrow q$

즉 $R\subset Q$이므로　　$Q^C\subset R^C$　　…… ㉡

㉠, ㉡에서　　$Q^C\subset R^C\subset P$

ㄱ. $R\subset Q$ (참)

ㄴ. $R^C\subset P$이므로　　$P\cup R^C=P$ (참)

ㄷ. $Q^C\subset P$이므로

$P-Q=P\cap Q^C=Q^C$ (참)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 항상 옳다.　　답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

## 441

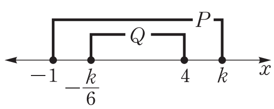
두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 하면

$$P=\{x\mid -1\le x\le k\},\ Q=\left\{x \,\middle|\, -\frac{k}{6}\le x\le 4\right\}$$

$p$가 $q$이기 위한 필요조건이므로

$q \Longrightarrow p$, 즉 $Q\subset P$

이를 만족시키도록 두 집합 $P$, $Q$를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.




따라서 $-\dfrac{k}{6}\ge -1$, $k\ge 4$이므로

$4\le k\le 6$　　답 $4\le k\le 6$

## 442

$(x+3)(x-4)^2=0$에서

$x=-3$ 또는 $x=4$ (중근)

$p$가 $q$이기 위한 필요충분조건이려면 이차방정식 $x^2-x+a=0$의 해가 $x=-3$ 또는 $x=4$이어야 하므로 근과 계수의 관계에 의하여

$a=-3\times4=-12$ **답 $-12$**

## 443

세 조건 $p$, $q$, $r$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$, $R$라 하면

$P=\{x\,|\,-2<x<1$ 또는 $x>3\}$,

$Q=\{x\,|\,x>a\}$, $R=\{x\,|\,x>b\}$

$q$는 $p$이기 위한 필요조건이므로

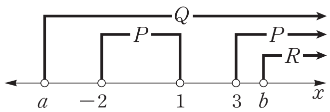
$p \Longrightarrow q$, 즉 $P\subset Q$

$r$는 $p$이기 위한 충분조건이므로

$r \Longrightarrow p$, 즉 $R\subset P$

$\therefore R\subset P\subset Q$

이를 만족시키도록 세 집합 $P$, $Q$, $R$를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.




$\therefore a\le-2,\ b\ge3$

따라서 $a$의 최댓값은 $-2$, $b$의 최솟값은 3이므로 구하는 곱은

$-2\times3=-6$ **답 $-6$**

### 연습 문제

● 본책 188~190쪽

## 444

**전략** 명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참임을 이용한다.

주어진 명제가 참이 되려면 그 대우

'$x=k$이면 $x^2\le100$이다.'

가 참이어야 한다.

즉 $k^2\le100$이므로 $-10\le k\le10$

따라서 정수 $k$는 $-10$, $-9$, $-8$, $\cdots$, 10의 21개이다.

**답 21**

## 445

**전략** 명제가 참이면 그 대우도 참임과 삼단논법을 이용한다.

① 명제 $\sim s \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow s$도 참이다.

② 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow s$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow s$가 참이다.

③ 두 명제 $q \longrightarrow s$, $s \longrightarrow r$가 참이므로 명제 $q \longrightarrow r$가 참이다.

⑤ 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow r$가 참이다.

따라서 그 대우 $\sim r \longrightarrow \sim p$도 참이다.

이상에서 항상 참이라고 할 수 없는 것은 ④이다.

**답 ④**

## 446

**전략** 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이고, 명제 $q \longrightarrow p$는 참인 것을 찾는다.

① $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 $p$는 $q$이기 위한 충분조건이다.

[$q \longrightarrow p$의 반례] $x$가 9이면 18의 양의 약수이지만 6의 양의 약수는 아니다.

② $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 $p$는 $q$이기 위한 필요조건이다.

[$p \longrightarrow q$의 반례] $x=-1$, $y=-2$이면 $xy>1$이지만 $x<1$, $y<1$이다.

③ $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 $p$는 $q$이기 위한 충분조건이다.

[$q \longrightarrow p$의 반례] $x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$이면 $xy=2$는 유리수이지만 $x$, $y$는 유리수가 아니다.

④ $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 $p$는 $q$이기 위한 충분조건이다.

[$q \longrightarrow p$의 반례] □ABCD가 등변사다리꼴이면 두 대각선의 길이는 같지만 직사각형이 아니다.

⑤ $p \Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 $p$는 $q$이기 위한 필요충분조건이다.

따라서 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ②이다.

**답 ②**

## 447

**전략** $p \Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow r$이면 $p \Longrightarrow r$임을 이용한다.

$p$는 $\sim r$이기 위한 충분조건이므로

$p \Longrightarrow \sim r$

$r$는 $q$이기 위한 필요조건이므로

$q \Longrightarrow r \qquad \therefore\ \sim r \Longrightarrow \sim q$

따라서 $p \Longrightarrow \sim r$, $\sim r \Longrightarrow \sim q$이므로

$p \Longrightarrow \sim q$ **답** ③

## 448

**전략** 각 조건의 진리집합 사이의 포함 관계를 이용한다.

① $P \not\subset R$, $R \not\subset P$이므로 $p$는 $r$이기 위한 아무 조건도 아니다.

② $Q \subset P$이므로 $p$는 $q$이기 위한 필요조건이다.

③ $Q \subset R^C$이므로 $q$는 $\sim r$이기 위한 충분조건이다.

④ $R \subset Q^C$이므로 $r$는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.

⑤ $P^C \subset Q^C$이므로 $\sim q$는 $\sim p$이기 위한 필요조건이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다. **답** ⑤

## 449

**전략** $q \Longrightarrow p$일 때 두 조건 $p$, $q$의 진리집합 사이의 포함 관계를 이용한다.

$x^3-4x^2-x+4=0$에서

$x^2(x-4)-(x-4)=0$

$(x^2-1)(x-4)=0$

$(x+1)(x-1)(x-4)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=4$

따라서 조건 $p$의 진리집합을 $P$라 하면

$P=\{-1,\ 1,\ 4\}$

$2x+a=0$에서 $\qquad x=-\dfrac{a}{2}$

따라서 조건 $q$의 진리집합을 $Q$라 하면

$Q=\left\{-\dfrac{a}{2}\right\}$

$p$가 $q$이기 위한 필요조건이 되려면 $q \Longrightarrow p$, 즉 $Q \subset P$이어야 하므로

$-\dfrac{a}{2}=-1$ 또는 $-\dfrac{a}{2}=1$ 또는 $-\dfrac{a}{2}=4$

$\therefore\ a=2$ 또는 $a=-2$ 또는 $a=-8$

따라서 구하는 모든 실수 $a$의 값의 곱은

$2\times(-2)\times(-8)=32$ **답** 32

## 450

**전략** $p \Longrightarrow \sim q$일 때 두 조건 $p$, $\sim q$의 진리집합 사이의 포함 관계를 이용한다.

$x^2-4x-12=0$에서 $\qquad (x+2)(x-6)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=6$

따라서 조건 $p$의 진리집합을 $P$라 하면

$P=\{-2,\ 6\}$

$q$: $|x-3|>k$에서 $\qquad \sim q$: $|x-3|\le k$

조건 $q$의 진리집합을 $Q$라 하면

$Q^C=\{x\,|\,|x-3|\le k\}$

이때 $p$가 $\sim q$이기 위한 충분조건이 되려면

$p \Longrightarrow \sim q$, 즉 $P \subset Q^C$

즉 $-2\in Q^C$, $6\in Q^C$이어야 하므로

$|-2-3|\le k$, $|6-3|\le k$

$\therefore\ k\ge 5$

따라서 자연수 $k$의 최솟값은 5이다. **답** ③

## 451

**전략** 명제 $p \longrightarrow \sim q$의 역이 참이 되도록 두 조건 $p$, $\sim q$의 진리집합을 수직선 위에 나타낸다.

$|x+2|\ge k$에서 $\qquad x+2\le -k$ 또는 $x+2\ge k$

$\therefore\ x\le -k-2$ 또는 $x\ge k-2$

따라서 조건 $p$의 진리집합을 $P$라 하면

$P=\{x\,|\,x\le -k-2$ 또는 $x\ge k-2\}$

$|x+3|<4$에서 $\qquad -4<x+3<4$

$\therefore\ -7<x<1$

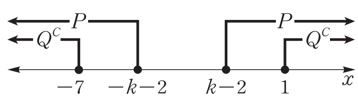
따라서 조건 $q$의 진리집합을 $Q$라 하면

$Q=\{x\,|\,-7<x<1\}$ $\qquad \cdots\cdots$ ㉠

명제 $p \longrightarrow \sim q$의 역, 즉 $\sim q \longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q^C \subset P$이어야 한다.

이때 ㉠에서 $\qquad Q^C=\{x\,|\,x\le -7$ 또는 $x\ge 1\}$

따라서 $Q^C \subset P$를 만족시키도록 두 집합 $P$, $Q^C$를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.




즉 $-k-2\ge -7$, $k-2\le 1$이므로

$0<k\le 3$ ($\because\ k>0$)

따라서 양수 $k$의 최댓값은 3이다. **답** 3

## 452

**전략** 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 참이면 명제 $p \longrightarrow r$가 참임을 이용한다.

명제 $q \longrightarrow \sim p$가 참이므로 그 대우 $p \longrightarrow \sim q$도 참이다.

또 명제 $\sim r \longrightarrow s$가 참이므로 그 대우 $\sim s \longrightarrow r$도 참이다.

즉 두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim s \longrightarrow r$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow r$가 참이 되려면 명제 $\sim q \longrightarrow \sim s$ 또는 그 대우 $s \longrightarrow q$가 참이어야 한다.

따라서 명제 $p \longrightarrow r$가 참임을 보이기 위해 필요한 참인 명제는 ④이다. **답** ④

## 453

**전략** $p \Longrightarrow q$이고 $q \Longrightarrow p$이면 $p \Longleftrightarrow q$이므로 $p$는 $q$이기 위한 필요충분조건이다.

$p$는 $q$이기 위한 필요조건이므로 $\quad q \Longrightarrow p$

$q$는 $r$이기 위한 필요조건이므로 $\quad r \Longrightarrow q$

$r$는 $s$이기 위한 충분조건이므로 $\quad r \Longrightarrow s$

$\sim r$는 $\sim t$이기 위한 충분조건이므로

$\sim r \Longrightarrow \sim t \qquad \therefore t \Longrightarrow r$

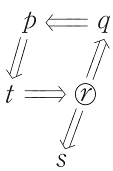
$t$는 $p$이기 위한 필요조건이므로

$p \Longrightarrow t$

따라서 $p \Longleftrightarrow q \Longleftrightarrow r \Longleftrightarrow t$이므로

$r$이기 위한 필요충분조건인 것은

$p$, $q$, $t$의 3개이다. **답** 3




## 454

**전략** $r \Longrightarrow p$, $q \Longrightarrow r$가 되도록 세 조건 $p$, $q$, $r$의 진리집합을 수직선 위에 나타낸다.

$|x|>a$에서 $\quad x<-a$ 또는 $x>a$

세 조건 $p$, $q$, $r$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$, $R$라 하면

$P=\{x|x<-a$ 또는 $x>a\}$, $Q=\{x|x>b\}$,

$R=\{x|-5<x<-2$ 또는 $x>5\}$

$p$는 $r$이기 위한 필요조건이므로

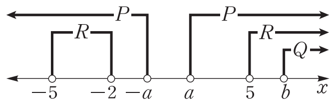
$r \Longrightarrow p$, 즉 $R\subset P$

$q$는 $r$이기 위한 충분조건이므로

$q \Longrightarrow r$, 즉 $Q\subset R$

$\therefore Q\subset R\subset P$

이를 만족시키도록 세 집합 $P$, $Q$, $R$를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.




즉 $-a\ge-2$, $a\le5$, $b\ge5$이므로

$0<a\le2$, $b\ge5$ ($\because a>0$)

따라서 $a$의 최댓값은 2, $b$의 최솟값은 5이므로 구하는 합은

$2+5=7$ **답** 7

## 455

**전략** 명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참임을 이용한다.

명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참이다.

$\sim q$: $x^2-x-6>0$에서 $\quad (x+2)(x-3)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>3$

$\sim p$: $(x^2-kx+k)(x^2-x-6)>0$

따라서 명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참이 되려면 $x<-2$ 또는 $x>3$에서 $x^2-kx+k>0$이어야 한다.

$f(x)=x^2-kx+k$라 하고, 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=(-k)^2-4k=k^2-4k$

(i) $D<0$, 즉 $0<k<4$일 때

모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)>0$이므로 명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참이다.

(ii) $D=0$, 즉 $k=0$ 또는 $k=4$일 때

$f(x)=x^2$ 또는 $f(x)=(x-2)^2$이므로

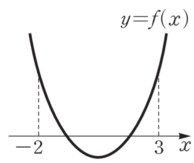
$x<-2$ 또는 $x>3$에서

$f(x)>0$

따라서 명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참이다.

(iii) $D>0$, 즉 $k<0$ 또는 $k>4$일 때

$x<-2$ 또는 $x>3$에서 $f(x)>0$이려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.




ⓐ $f(-2)\ge0$에서

$4+2k+k\ge0 \qquad \therefore k\ge-\frac{4}{3}$

Ⅱ-3 명제

ⓑ $f(3)\geq 0$에서

$$9-3k+k\geq 0 \qquad \therefore k\leq \frac{9}{2}$$

ⓒ 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이

$x=\frac{k}{2}$이므로

$$-2<\frac{k}{2}<3 \qquad \therefore -4<k<6$$

이상에서 $\quad -\frac{4}{3}\leq k\leq \frac{9}{2}$

그런데 $k<0$ 또는 $k>4$이므로

$$-\frac{4}{3}\leq k<0 \text{ 또는 } 4<k\leq \frac{9}{2}$$

이상에서 $\quad -\frac{4}{3}\leq k\leq \frac{9}{2}$

따라서 $M=\frac{9}{2}$, $m=-\frac{4}{3}$이므로

$12Mm=-72$

답 **−72**

## 456

**전략** 삼단논법을 이용한다.

네 조건 $p$, $q$, $r$, $s$를

$p$: 판매량이 증가한다.

$q$: 인지도가 높아진다.

$r$: 가격이 상승한다.

$s$: 수입이 증가한다.

라 하면 (가), (나)에서 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$, $r \longrightarrow s$가 모두 참이다.

또한 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow p$도 참이다.

따라서 명제 $q \longrightarrow s$가 참이 되는 경우는 다음과 같이 세 가지 경우가 있다.

(i) 명제 $p \longrightarrow s$ 또는 그 대우인 $\sim s \longrightarrow \sim p$가 참인 경우

(ii) 명제 $q \longrightarrow r$ 또는 그 대우인 명제 $\sim r \longrightarrow \sim q$가 참인 경우

(iii) 명제 $p \longrightarrow r$ 또는 그 대우인 명제 $\sim r \longrightarrow \sim p$가 참인 경우

① $p \longrightarrow q$ ② $\sim p \longrightarrow \sim r$ ③ $q \longrightarrow r$

④ $r \longrightarrow q$ ⑤ $\sim r \longrightarrow \sim p$

따라서 필요한 명제로 가능한 것은 ③, ⑤이다.

답 ③, ⑤

## 457

**전략** $p \Longrightarrow q$이면 $P\subset Q$, $p \Longrightarrow r$이면 $P\subset R$임을 이용한다.

$p$는 $q$이기 위한 충분조건이므로

$p \Longrightarrow q$, 즉 $P\subset Q$

$\therefore a^2=4$ 또는 $b=4$

또 $r$는 $p$이기 위한 필요조건이므로

$p \Longrightarrow r$, 즉 $P\subset R$

$\therefore 4\in R$ $\qquad$ …… ㉠

(i) $a^2=4$일 때

$a=2$이면 $R=\{1, 2b\}$이므로 ㉠에서

$2b=4 \qquad \therefore b=2$

$\therefore a+b=4$

$a=-2$이면 $R=\{-3, -2b\}$이므로 ㉠에서

$-2b=4 \qquad \therefore b=-2$

$\therefore a+b=-4$

(ii) $b=4$일 때

$R=\{a-1, 4a\}$이므로 ㉠에서

$a-1=4$ 또는 $4a=4$

$\therefore a=5$ 또는 $a=1$

$\therefore a+b=9$ 또는 $a+b=5$

(i), (ii)에서 $a+b$의 최댓값은 9이다.

답 **9**

## 458

**전략** 모든 실수 $x$에 대하여 $x^2+mx+n\geq 0$이 성립할 조건은 $m^2-4n\leq 0$임을 이용한다.

실수 전체의 집합을 $U$라 하고 두 조건 $p$, $q$의 진리집합을 각각 $P$, $Q$라 하자.

'모든 실수 $x$에 대하여 $p$이다.'가 참인 명제가 되려면

$P=U=\{x\,|\,x$는 모든 실수$\}$

이어야 하므로 모든 실수 $x$에 대하여 $x^2+2ax+1\geq 0$이어야 한다.

이차방정식 $x^2+2ax+1=0$의 판별식을 $D_1$이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=a^2-1\leq 0, \qquad (a+1)(a-1)\leq 0$$

$\therefore -1\leq a\leq 1$

따라서 정수 $a$는 $-1$, $0$, $1$의 3개이다.

또 '$p$는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.'가 참인 명제가 되려면

$p \Longrightarrow \sim q$, 즉 $P\subset Q^C$

이때 $P=U$이므로 $\quad Q^C=U$

따라서 모든 실수 $x$에 대하여 $x^2+2bx+9>0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+2bx+9=0$의 판별식을 $D_2$라 하면

$$\frac{D_2}{4}=b^2-9<0, \qquad (b+3)(b-3)<0$$

$$\therefore\ -3<b<3$$

따라서 정수 $b$는 $-2$, $-1$, $0$, $1$, $2$의 5개이다.

즉 정수 $a$, $b$의 순서쌍 $(a, b)$의 개수는

$$3\times5=15$$

답 ①

## 06 명제의 증명

● 본책 191~193쪽

### 459

(1) 주어진 명제의 대우는

실수 $x$, $y$에 대하여 $x=0$ 또는 $y=0$이면 $xy=0$이다.

이때 $x=0$ 또는 $y=0$이면 $xy=0$이므로 주어진 명제의 대우가 참이다.

따라서 주어진 명제도 참이다.

(2) 주어진 명제의 대우는

실수 $x$, $y$에 대하여 $x<1$이고 $y<1$이면 $x+y<2$이다.

이때 $x<1$이고 $y<1$이면 $x+y<2$이므로 주어진 명제의 대우가 참이다.

따라서 주어진 명제도 참이다.

(3) 주어진 명제의 대우는

자연수 $m$에 대하여 $m$이 짝수이면 $m^2$도 짝수이다.

$m$이 짝수이면

$$m=2k\ (k\text{는 자연수})$$

로 나타낼 수 있다. 이때

$$m^2=(2k)^2=4k^2=2\times2k^2$$

이므로 $m^2$은 짝수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

답 풀이 참조

### 460

(1) $2-\sqrt{3}$이 무리수가 아니라고 가정하면 $2-\sqrt{3}$은 유리수이므로

$$2-\sqrt{3}=k\ (k\text{는 유리수})$$

로 놓을 수 있다.

이때 $2-k=\sqrt{3}$이고 유리수끼리의 뺄셈의 결과는 유리수이므로 $2-k$는 유리수이다.

그런데 $\sqrt{3}$은 유리수가 아니므로 모순이다.

따라서 $2-\sqrt{3}$은 무리수이다.

(2) $n^2$이 3의 배수일 때, $n$이 3의 배수가 아니라고 가정하자.

$n$이 3의 배수가 아니므로

$$n=3k-1 \text{ 또는 } n=3k-2\ (k\text{는 자연수})$$

로 나타낼 수 있다.

(i) $n=3k-1$일 때

$$\begin{aligned} n^2&=(3k-1)^2\\ &=9k^2-6k+1\\ &=3(3k^2-2k)+1 \end{aligned}$$

(ii) $n=3k-2$일 때

$$\begin{aligned} n^2&=(3k-2)^2\\ &=9k^2-12k+4\\ &=3(3k^2-4k+1)+1 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 $n^2$을 3으로 나누면 나머지가 1이므로 $n^2$이 3의 배수라는 가정에 모순이다.

따라서 자연수 $n$에 대하여 $n^2$이 3의 배수이면 $n$도 3의 배수이다.

(3) $a^2+b^2=0$일 때, $a\neq0$ 또는 $b\neq0$이라 가정하자.

(i) $a\neq0$일 때

$a^2>0$, $b^2\geq0$이므로

$$a^2+b^2>0,\ \text{즉 } a^2+b^2\neq0$$

(ii) $b\neq0$일 때

$a^2\geq0$, $b^2>0$이므로

$$a^2+b^2>0,\ \text{즉 } a^2+b^2\neq0$$

(i), (ii)에서 $a^2+b^2\neq0$이므로 $a^2+b^2=0$이라는 가정에 모순이다.

따라서 실수 $a$, $b$에 대하여 $a^2+b^2=0$이면 $a=0$이고 $b=0$이다.

답 풀이 참조

## 461

(1) $a^2+b^2+1-(ab+a+b)$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2-2ab-2a-2b)$

$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2a+1)$
$+(b^2-2b+1)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\}$

$a$, $b$가 실수이므로

$(a-b)^2\ge 0$, $(a-1)^2\ge 0$, $(b-1)^2\ge 0$

따라서 $a^2+b^2+1-(ab+a+b)\ge 0$이므로

$a^2+b^2+1\ge ab+a+b$

여기서 등호는 $a-b=0$, $a-1=0$, $b-1=0$, 즉 $a=b=1$일 때 성립한다.

(2) (i) $|a|\ge|b|$일 때,

$|a|-|b|\ge 0$, $|a-b|\ge 0$이므로

$(|a|-|b|)^2\le|a-b|^2$임을 보이면 된다.

$(|a|-|b|)^2-|a-b|^2$

$=a^2-2|ab|+b^2-(a^2-2ab+b^2)$

$=-2(|ab|-ab)$

그런데 $|ab|\ge ab$이므로

$-2(|ab|-ab)\le 0$

$\therefore |a|-|b|\le|a-b|$

(ii) $|a|<|b|$일 때,

$|a|-|b|<0$, $|a-b|>0$이므로

$|a|-|b|<|a-b|$

(i), (ii)에서 $|a|-|b|\le|a-b|$

여기서 등호는 $|ab|=ab$, 즉 $ab\ge 0$이고 $|a|\ge|b|$일 때 성립한다.

**답** 풀이 참조

## 462

$a>0$, $b>0$이므로

$\{\sqrt{2(a+b)}\}^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$=2(a+b)-(a+2\sqrt{ab}+b)$

$=a-2\sqrt{ab}+b$

$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

$a$, $b$가 실수이므로 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge 0$

$\therefore \{\sqrt{2(a+b)}\}^2\ge(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

이때 $\sqrt{2(a+b)}>0$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$이므로

$\sqrt{2(a+b)}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}$

여기서 등호는 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$, 즉 $a=b$일 때 성립한다.

**답** 풀이 참조

## 463

$3a>0$, $4b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$3a+4b\ge 2\sqrt{3a\times 4b}=4\sqrt{3ab}$

그런데 $ab=3$이므로 $3a+4b\ge 4\sqrt{3\times 3}=12$

따라서 $3a+4b$의 최솟값은 12이다.

여기서 등호는 $3a=4b$일 때 성립하므로 $3a+4b=12$에서 $3a=4b=6$ $\therefore a=2,\ b=\frac{3}{2}$

즉 $m=12$, $\alpha=2$, $\beta=\frac{3}{2}$이므로

$m+\alpha+\beta=\frac{31}{2}$

**답** $\frac{31}{2}$

## 464

$9a^2>0$, $b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$9a^2+b^2\ge 2\sqrt{9a^2\times b^2}=6ab$ ($\because a>0,\ b>0$)

그런데 $9a^2+b^2=36$이므로 $36\ge 6ab$

$\therefore ab\le 6$

(단, 등호는 $9a^2=b^2$, 즉 $3a=b$일 때 성립)

따라서 $ab$의 최댓값은 6이다.

**답** 6

## 465

$\frac{1}{x}+\frac{3}{y}=\frac{3x+y}{xy}=\frac{6}{xy}$ …… ㉠

$3x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 $3x+y\ge 2\sqrt{3xy}$

그런데 $3x+y=6$이므로 $6\ge 2\sqrt{3xy}$

$\therefore 3\ge\sqrt{3xy}$ (단, 등호는 $3x=y$일 때 성립)

양변을 제곱하면 $9\ge 3xy$ $\therefore xy\le 3$

$\therefore \frac{6}{xy}\ge\frac{6}{3}=2$

따라서 ㉠에서 $\frac{1}{x}+\frac{3}{y}$의 최솟값은 2이다.

**답** 2

## 466

$$(3a+4b)\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}\right)=9+\frac{3a}{b}+\frac{12b}{a}+4$$
$$=\frac{3a}{b}+\frac{12b}{a}+13$$

$\frac{3a}{b}>0$, $\frac{12b}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{3a}{b}+\frac{12b}{a}+13\geq 2\sqrt{\frac{3a}{b}\times\frac{12b}{a}}+13$$
$$=2\times 6+13=25$$
$$\left(\text{단, 등호는 } \frac{3a}{b}=\frac{12b}{a}\text{, 즉 } a=2b\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 구하는 최솟값은 25이다. **답 25**

## 467

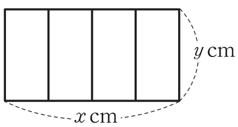
$$3x+5+\frac{3}{x+2}=3(x+2)+\frac{3}{x+2}-1$$

$x>-2$에서 $x+2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3(x+2)+\frac{3}{x+2}-1$$
$$\geq 2\sqrt{3(x+2)\times\frac{3}{x+2}}-1$$
$$=2\times 3-1=5$$
$$\left(\text{단, 등호는 } 3(x+2)=\frac{3}{x+2}\text{, 즉 } x=-1\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 구하는 최솟값은 5이다. **답 5**

## 468




오른쪽 그림과 같이 바깥쪽 직사각형의 가로의 길이를 $x$ cm, 세로의 길이를 $y$ cm라 하면

$$2x+5y=40$$

$x>0$, $y>0$에서 $2x>0$, $5y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2x+5y\geq 2\sqrt{2x\times 5y}=2\sqrt{10xy}$$

그런데 $2x+5y=40$이므로 $\quad 40\geq 2\sqrt{10xy}$

$$\sqrt{10xy}\leq 20,\qquad 10xy\leq 400$$
$$\therefore\ xy\leq 40$$

이때 바깥쪽 직사각형의 넓이는 $xy$ cm$^2$이므로 넓이의 최댓값은 40 cm$^2$이다.

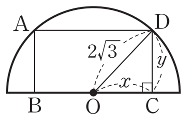
여기서 등호는 $2x=5y$일 때 성립하므로 $2x+5y=40$에서

$$2x+2x=40 \qquad \therefore\ x=10$$

따라서 구하는 가로의 길이는 10 cm이다.

**답 40 cm$^2$, 10 cm**

## 469




오른쪽 그림과 같이 $\overline{OC}=x$, $\overline{CD}=y$라 하면 직각삼각형 OCD에서

$$x^2+y^2=(2\sqrt{3})^2=12$$

$x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+y^2\geq 2\sqrt{x^2\times y^2}=2xy\ (\because x>0,\ y>0)$$

그런데 $x^2+y^2=12$이므로 $\quad 12\geq 2xy$

이때 직사각형 ABCD의 넓이는 $2xy$이므로 넓이의 최댓값은 12이다.

여기서 등호는 $x^2=y^2$일 때 성립하므로 $x^2+y^2=12$에서 $\quad x^2=y^2=6$

$$\therefore\ x=\sqrt{6},\ y=\sqrt{6}\ (\because x>0,\ y>0)$$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이가 최대일 때의 둘레의 길이는

$$4x+2y=4\sqrt{6}+2\sqrt{6}=6\sqrt{6}$$

**답 $6\sqrt{6}$**

## 470

(1) $a$, $b$가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여 $\quad (2^2+4^2)(a^2+b^2)\geq(2a+4b)^2$

그런데 $a^2+b^2=10$이므로

$$20\times 10\geq(2a+4b)^2$$
$$\therefore\ -10\sqrt{2}\leq 2a+4b\leq 10\sqrt{2}$$
$$(\text{단, 등호는 } b=2a\text{일 때 성립})$$

따라서 $2a+4b$의 최댓값은 $10\sqrt{2}$이다.

(2) $a$, $b$가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여 $\quad (2^2+5^2)(a^2+b^2)\geq(2a+5b)^2$

그런데 $2a+5b=29$이므로 $\quad 29(a^2+b^2)\geq 29^2$

$$\therefore\ a^2+b^2\geq 29$$
$$(\text{단, 등호는 } 2b=5a\text{일 때 성립})$$

따라서 $a^2+b^2$의 최솟값은 29이다.

**답 (1) $10\sqrt{2}$ (2) 29**

## 471

직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 $x$, $y$라 하면 원의 지름이 직사각형의 대각선이므로

$$x^2+y^2=4^2=16$$

직사각형의 둘레의 길이는 $2x+2y$이고 $x$, $y$가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(2^2+2^2)(x^2+y^2)\ge(2x+2y)^2$$

그런데 $x^2+y^2=16$이므로

$$8\times16\ge(2x+2y)^2$$

이때 $x>0$, $y>0$이므로

$$0<2x+2y\le8\sqrt{2}$$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

따라서 구하는 최댓값은 $8\sqrt{2}$이다.

답 $8\sqrt{2}$

**연습 문제** 본책 202~203쪽

## 472

**전략** 결론을 부정하여 모순이 생김을 보인다.

$mn$이 $\boxed{\text{(가) 홀수}}$라 가정하면 $m$, $n$은 모두 $\boxed{\text{(나) 홀수}}$이어야 하므로

$$m=2k-1,\ n=2l-1$$ ($k$, $l$은 자연수)

로 나타낼 수 있다. 이때

$$\begin{aligned}m^2+n^2&=(2k-1)^2+(2l-1)^2\\&=4k^2-4k+1+4l^2-4l+1\\&=2(2k^2-2k+2l^2-2l+1)\end{aligned}$$

이므로 $m^2+n^2$은 $\boxed{\text{(다) 짝수}}$이다.

그런데 이것은 $m^2+n^2$이 $\boxed{\text{(라) 홀수}}$라는 가정에 모순이다.

따라서 자연수 $m$, $n$에 대하여 $m^2+n^2$이 홀수이면 $mn$은 짝수이다.

답 (가) 홀수 (나) 홀수 (다) 짝수 (라) 홀수

## 473

**전략** 두 식의 차 또는 제곱의 차를 이용하여 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2-(\sqrt{a-b})^2$

$$\begin{aligned}&=a-2\sqrt{ab}+b-(a-b)\\&=2(b-\sqrt{ab})\\&=2\sqrt{b}(\sqrt{b}-\sqrt{a})\end{aligned}$$

그런데 $\sqrt{b}>0$, $\sqrt{b}-\sqrt{a}<0$이므로

$$2\sqrt{b}(\sqrt{b}-\sqrt{a})<0$$

$$\therefore (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2<(\sqrt{a-b})^2$$

이때 $\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$, $\sqrt{a-b}>0$이므로

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$$ (거짓)

ㄴ. $a^3+b^3+c^3-3abc$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

그런데 $a+b+c>0$이고

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\\&=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)\\&=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\ge0\end{aligned}$$

이므로

$$a^3+b^3+c^3-3abc\ge0$$

$$\therefore a^3+b^3+c^3\ge3abc$$

여기서 등호는 $a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$, 즉 $a=b=c$일 때 성립한다. (참)

ㄷ. $(|a|+|b|)^2-|a-b|^2$

$$\begin{aligned}&=a^2+2|ab|+b^2-(a^2-2ab+b^2)\\&=2(|ab|+ab)\ge0\ (\because |ab|\ge-ab)\end{aligned}$$

$$\therefore (|a|+|b|)^2\ge|a-b|^2$$

이때 $|a|+|b|\ge0$, $|a-b|\ge0$이므로

$$|a|+|b|\ge|a-b|$$

여기서 등호는 $|ab|=-ab$, 즉 $ab\le0$일 때 성립한다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

## 474

**전략** 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

$2x>0$, $5y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2x+5y\ge2\sqrt{2x\times5y}=2\sqrt{10xy}$$

그런데 $2x+5y=10$이므로

$$10\ge2\sqrt{10xy}\qquad\therefore 5\ge\sqrt{10xy}$$

양변을 제곱하면

$$25\ge10xy\qquad\therefore xy\le\frac{5}{2}$$

따라서 $xy$의 최댓값은 $\frac{5}{2}$이다.

여기서 등호는 $2x=5y$일 때 성립하므로 $2x+5y=10$에서

$$2x=5y=5 \qquad \therefore x=\frac{5}{2},\ y=1$$

즉 $a=\frac{5}{2}$, $b=\frac{5}{2}$, $c=1$이므로

$$a+b+c=6$$

답 6

## 475

**전략** $\overline{AC}=x$, $\overline{BC}=y$로 놓고 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 $\overline{AB}^2$의 최솟값을 구한다.

$\angle C=90°$인 직각삼각형 ABC에 대하여 $\overline{AC}=x$, $\overline{BC}=y$라 하면 직각삼각형 ABC의 넓이가 16이므로

$$\frac{1}{2}xy=16$$

$$\therefore xy=32 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2 =x^2+y^2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

이때 $x>0$, $y>0$에서 $x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+y^2\ge 2\sqrt{x^2y^2}$$
$$=2xy=2\times 32\,(\because ㉠)$$
$$=64 \text{ (단, 등호는 } x=y\text{일 때 성립)}$$

따라서 ㉡에서 $\overline{AB}^2$의 최솟값은 64이다.

답 ③

## 476

**전략** 주어진 명제의 대우가 참임을 증명한다.

주어진 명제의 대우는

세 자연수 $a$, $b$, $c$에 대하여 $a$, $b$, $c$가 모두 홀수이면 $a^2+b^2\ne c^2$이다.

자연수 $l$, $m$, $n$에 대하여

$$a=2l-1,\ b=2m-1,\ c=2n-1$$

이라 하면

$$a^2+b^2=(2l-1)^2+(2m-1)^2$$
$$=4l^2-4l+1+4m^2-4m+1$$
$$=2(2l^2-2l+2m^2-2m+1)$$
$$c^2=(2n-1)^2$$
$$=4n^2-4n+1$$
$$=2(2n^2-2n)+1$$

따라서 $a^2+b^2$은 짝수이고 $c^2$은 홀수이므로

$$a^2+b^2\ne c^2$$

즉 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

답 풀이 참조

## 477

**전략** 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

$3x>0$, $2y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3x+2y\ge 2\sqrt{3x\times 2y}=2\sqrt{6xy}$$

그런데 $3x+2y=16$이므로

$$2\sqrt{6xy}\le 16 \text{ (단, 등호는 } 3x=2y\text{일 때 성립)}$$

이때

$$(\sqrt{3x}+\sqrt{2y})^2=3x+2y+2\sqrt{6xy}$$
$$=16+2\sqrt{6xy}$$
$$\le 16+16=32$$

이므로

$$0<\sqrt{3x}+\sqrt{2y}\le 4\sqrt{2}$$

따라서 $\sqrt{3x}+\sqrt{2y}$의 최댓값은 $4\sqrt{2}$이다.

답 $4\sqrt{2}$

## 478

**전략** 주어진 식을 전개한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

$a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(1+\frac{2b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{2c}\right)$$
$$=\left(1+\frac{c}{b}+\frac{2b}{a}+\frac{2c}{a}\right)\left(1+\frac{a}{2c}\right)$$
$$=1+\frac{c}{b}+\frac{2b}{a}+\frac{2c}{a}+\frac{a}{2c}+\frac{a}{2b}+\frac{b}{c}+1$$
$$=\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{2b}{a}+\frac{a}{2b}\right)+\left(\frac{2c}{a}+\frac{a}{2c}\right)+2$$
$$\ge 2\sqrt{\frac{c}{b}\times\frac{b}{c}}+2\sqrt{\frac{2b}{a}\times\frac{a}{2b}}+2\sqrt{\frac{2c}{a}\times\frac{a}{2c}}+2$$
$$=2+2+2+2=8$$

(단, 등호는 $a^2=4b^2=4c^2$, 즉 $a=2b=2c$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 8이다.

답 8

## 479

**전략** 이차방정식의 판별식을 이용하여 실수 $a$의 값의 범위를 구하고, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

이차방정식 $x^2-2x+a=0$이 허근을 가지므로 판별식을 $D$라 하면

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-a<0 \qquad \therefore a>1$$

즉 $a-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} a+\frac{4}{a-1} &=(a-1)+\frac{4}{a-1}+1 \\ &\geq 2\sqrt{(a-1)\times\frac{4}{a-1}}+1 \\ &=2\times 2+1=5 \end{aligned}$$

따라서 $a+\frac{4}{a-1}$의 최솟값은 5이다.

여기서 등호는 $a-1=\frac{4}{a-1}$일 때 성립하므로

$$(a-1)^2=4, \qquad a-1=2\ (\because a-1>0)$$

$$\therefore a=3$$

즉 $m=5$, $n=3$이므로 $\quad m+n=8$

**답** 8

## 480

**전략** 산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

$$\begin{aligned} \left(4-\frac{9b}{a}\right)\left(1-\frac{a}{b}\right) &=4-\frac{4a}{b}-\frac{9b}{a}+9 \\ &=13-\left(\frac{4a}{b}+\frac{9b}{a}\right) \end{aligned}$$

이때 $\frac{4a}{b}>0$, $\frac{9b}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{4a}{b}+\frac{9b}{a} &\geq 2\sqrt{\frac{4a}{b}\times\frac{9b}{a}} \\ &=2\times 6=12 \end{aligned}$$

$$\left(\text{단, 등호는 } \frac{4a}{b}=\frac{9b}{a}\text{, 즉 } 2a=3b\text{일 때 성립}\right)$$

$$\begin{aligned} \therefore \left(4-\frac{9b}{a}\right)\left(1-\frac{a}{b}\right) &=13-\left(\frac{4a}{b}+\frac{9b}{a}\right) \\ &\leq 13-12=1 \end{aligned}$$

따라서 $\left(4-\frac{9b}{a}\right)\left(1-\frac{a}{b}\right)$의 최댓값이 1이므로 부등식 $\left(4-\frac{9b}{a}\right)\left(1-\frac{a}{b}\right)\leq m$이 항상 성립하려면

$$m\geq 1$$

**답** $m\geq 1$

## 481

**전략** 점 Q의 좌표를 이용하여 삼각형 OQR의 넓이를 $a$, $b$에 대한 식으로 나타낸다.

직선 OP의 기울기가 $\frac{b}{a}$이므로 직선 OP에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{a}{b}$이다.

따라서 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$를 지나고 직선 OP에 수직인 직선의 방정식은

$$y-b=-\frac{a}{b}(x-a)$$

$$\therefore y=-\frac{a}{b}x+\frac{a^2}{b}+b$$

$x=0$을 대입하면 $y=\frac{a^2}{b}+b$이므로

$$\mathrm{Q}\left(0,\ \frac{a^2}{b}+b\right)$$

따라서 $\overline{\mathrm{OQ}}=\frac{a^2}{b}+b$, $\overline{\mathrm{OR}}=\frac{1}{a}$이므로

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{OQR} &=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OQ}}\times\overline{\mathrm{OR}} \\ &=\frac{1}{2}\times\left(\frac{a^2}{b}+b\right)\times\frac{1}{a} \\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) \qquad \cdots\cdots \text{㉠} \end{aligned}$$

이때 $\frac{a}{b}>0$, $\frac{b}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}}=2$$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

따라서 ㉠에서

$$\triangle\mathrm{OQR}\geq\frac{1}{2}\times 2=1$$

즉 삼각형 OQR의 넓이의 최솟값은 1이다.

**답** ②

**개념 노트**

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$에 대하여
① 두 직선이 수직이면 $\quad mm'=-1$
② $mm'=-1$이면 두 직선은 수직이다.

## 1 함수

Ⅲ. 함수

### 01 함수

● 본책 206~214쪽

## 482

(1) 집합 $X$의 원소 1에 대응하는 집합 $Y$의 원소가 $a$, $b$의 2개이므로 함수가 아니다.

(2) 집합 $X$의 원소 4에 대응하는 집합 $Y$의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

(3), (4) 집합 $X$의 각 원소에 집합 $Y$의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.

**답** **함수:** (3), (4)

(3) **정의역:** $\{1, 2, 3\}$, **공역:** $\{a, b, c\}$, **치역:** $\{a, b, c\}$

(4) **정의역:** $\{1, 2, 3, 4\}$, **공역:** $\{a, b, c\}$, **치역:** $\{a, b\}$

## 483

(1) 함수 $f(x)=-x+1$에 대하여 집합 $X$의 각 원소의 함숫값을 구하면

$$f(-1)=2,\ f(0)=1,\ f(1)=0$$

따라서 함수 $f$의 치역은 $\{0, 1, 2\}$이다.

(2) 함수 $f(x)=x^3+x+1$에 대하여 집합 $X$의 각 원소의 함숫값을 구하면

$$f(-1)=-1,\ f(0)=1,\ f(1)=3$$

따라서 함수 $f$의 치역은 $\{-1, 1, 3\}$이다.

(3) 함수 $f(x)=|x|-1$에 대하여 집합 $X$의 각 원소의 함숫값을 구하면

$$f(-1)=0,\ f(0)=-1,\ f(1)=0$$

따라서 함수 $f$의 치역은 $\{-1, 0\}$이다.

**답** (1) $\{0, 1, 2\}$ (2) $\{-1, 1, 3\}$ (3) $\{-1, 0\}$

## 484

ㄱ. $f(-1)=0$, $g(-1)=-2$이므로

$$f(-1)\neq g(-1) \qquad \therefore f\neq g$$

ㄴ. $f(-1)=1$, $g(-1)=-1$이므로

$$f(-1)\neq g(-1) \qquad \therefore f\neq g$$

ㄷ. $f(-1)=g(-1)=-1$, $f(1)=g(1)=1$이므로

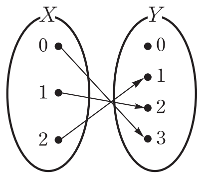
$$f=g$$

이상에서 두 함수 $f$와 $g$가 서로 같은 함수인 것은 ㄷ뿐이다.

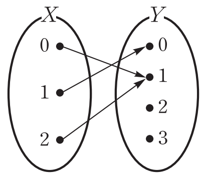
**답** ㄷ

## 485

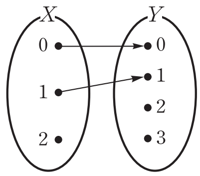
ㄱ.




ㄴ.




ㄷ.



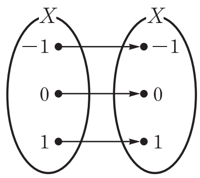

ㄷ. 집합 $X$의 원소 2에 대응하는 집합 $Y$의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

이상에서 함수인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

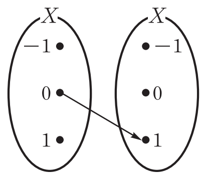
**답** ㄱ, ㄴ

## 486

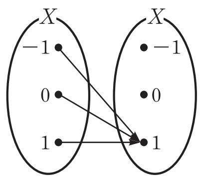
①



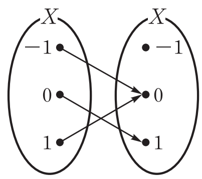

②



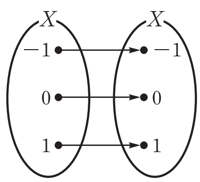

③




④




⑤




② 집합 $X$의 원소 $-1$, 1에 대응하는 집합 $X$의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

**답** ②

## 487

$1-\sqrt{2}<0$이므로

$f(1-\sqrt{2})=3(1-\sqrt{2})+4=7-3\sqrt{2}$

$3-2\sqrt{2}>0$이므로

$f(3-2\sqrt{2})=-3(3-2\sqrt{2})+2=6\sqrt{2}-7$

$\therefore f(1-\sqrt{2})+f(3-2\sqrt{2})$

$=(7-3\sqrt{2})+(6\sqrt{2}-7)$

$=3\sqrt{2}$

답 $\mathbf{3\sqrt{2}}$

## 488

정의역이 $X=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$이므로

$f(-2)=|-2+1|=1$

$f(-1)=|-1+1|=0$

$f(0)=|0+1|=1$

$f(1)=|1+1|=2$

$f(2)=|2+1|=3$

따라서 함수 $f$의 치역은

$\{0, 1, 2, 3\}$

이므로 구하는 원소의 합은

$0+1+2+3=6$

답 **6**

## 489

정의역이 $X=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$이므로

$f(0)=0,\ f(1)=1,\ f(2)=4,$

$f(3)=4,\ f(4)=1,\ f(5)=0$

따라서 함수 $f$의 치역은

$\{0, 1, 4\}$

답 $\mathbf{\{0, 1, 4\}}$

## 490

ㄱ. $f(-1)=g(-1)=-1,\ f(0)=g(0)=0,$

$f(1)=g(1)=1$이므로

$f=g$

ㄴ. $f(-1)=-1,\ h(-1)=1$이므로

$f(-1)\neq h(-1)$

$\therefore f\neq h$

ㄷ. $f(-1)=-1,\ p(-1)=\sqrt{(-1)^2}=1$이므로

$f(-1)\neq p(-1)$

$\therefore f\neq p$

이상에서 함수 $f$와 서로 같은 함수인 것은 ㄱ뿐이다.

답 **ㄱ**

## 491

$f(0)=g(0)$에서 $\quad b=-3$

$f(1)=g(1)$에서

$2+a-3=1+b \quad \therefore a=b+2$

위의 식에 $b=-3$을 대입하면

$a=-1$

$\therefore ab=-1\times(-3)=3$

답 **3**

## 492

$f(x)=g(x)$에서

$x^3+3x=6x^2-8x+6$

$x^3-6x^2+11x-6=0$

$(x-1)(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 집합 $X$는 집합 $\{1, 2, 3\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로

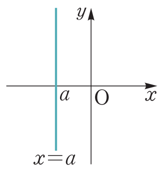
$\mathbf{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\},}$

$\mathbf{\{1, 2, 3\}}$

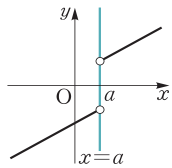
답 **풀이 참조**

## 493

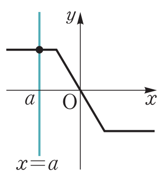
ㄱ.



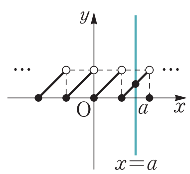

ㄴ.




ㄷ.




ㄹ.




ㄱ. 실수 $a$에 대하여 직선 $x=a$와 만나지 않거나 무수히 많은 점에서 만나므로 함수의 그래프가 아니다.

ㄴ. 실수 $a$에 대하여 직선 $x=a$와 만나지 않기도 하므로 함수의 그래프가 아니다.

ㄷ, ㄹ. 실수 $a$에 대하여 직선 $x=a$와 오직 한 점에서 만나므로 함수의 그래프이다.

이상에서 함수의 그래프인 것은 ㄷ, ㄹ이다.

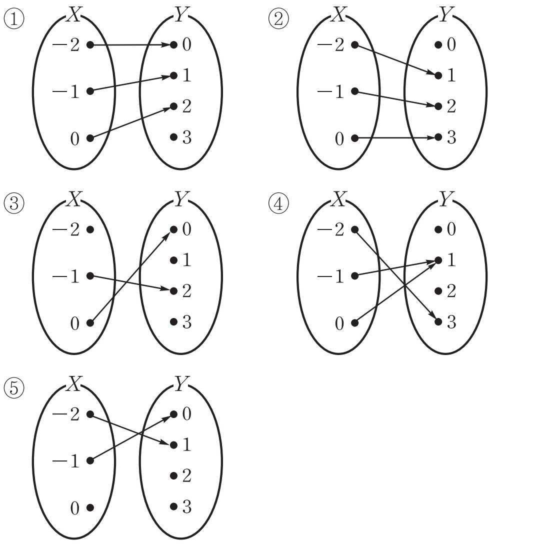
답 **ㄷ, ㄹ**

## 연습 문제

● 본책 215~216쪽

### 494

**전략** 집합 $X$의 각 원소에 집합 $Y$의 원소가 오직 하나씩 대응하는지 확인한다.



③ 집합 $X$의 원소 $-2$에 대응하는 집합 $Y$의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

⑤ 집합 $X$의 원소 0에 대응하는 집합 $Y$의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

**답** ③, ⑤

### 495

**전략** 2, $\sqrt{3}+2$가 각각 유리수인지 무리수인지 판단하여 $f(2)$, $f(\sqrt{3}+2)$의 값을 구한다.

2는 유리수이므로

$f(2)=-2\times2=-4$

$\sqrt{3}+2$는 무리수이므로

$f(\sqrt{3}+2)=(\sqrt{3}+2)-3=\sqrt{3}-1$

$\therefore f(2)+\sqrt{3}f(\sqrt{3}+2)=-4+\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$

$=-1-\sqrt{3}$

**답** $-1-\sqrt{3}$

### 496

**전략** $x=15$, 16, 17, 18, 19일 때, 함숫값을 구한다.

$15=3\times5$이므로 $f(15)=2\times2=4$

$16=2^4$이므로 $f(16)=5$

17은 소수이므로 $f(17)=2$

$18=2\times3^2$이므로 $f(18)=2\times3=6$

19는 소수이므로 $f(19)=2$

따라서 함수 $f$의 치역은 $\{2, 4, 5, 6\}$

이므로 구하는 원소의 합은

$2+4+5+6=17$

**답** 17

**개념 노트**

$N=p^a\times q^b$ ($p$, $q$는 서로 다른 소수, $a$, $b$는 자연수)일 때, 자연수 $N$의 양의 약수의 개수는

$(a+1)\times(b+1)$

### 497

**전략** $f(1)=g(1)$, $f(3)=g(3)$임을 이용한다.

$f(1)=g(1)$에서

$1+7a+2b=3a+b$

$\therefore 4a+b=-1$ ······ ㉠

$f(3)=g(3)$에서

$9+21a+2b=9a+b$

$\therefore 12a+b=-9$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=3$

$\therefore f(x)=x^2-7x+6$, $g(x)=-3x+3$

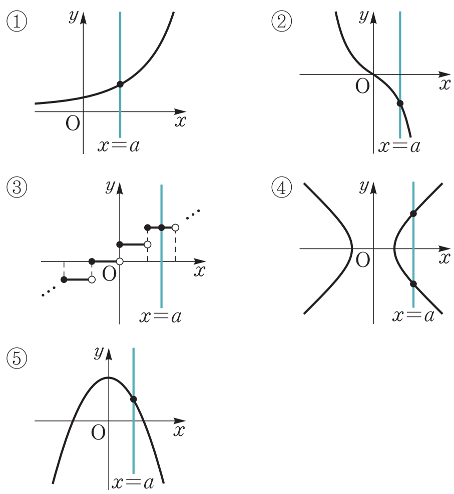
따라서 $g(1)=0$, $g(3)=-6$이므로 함수 $g$의 치역은

$\{-6, 0\}$

**답** $\{-6, 0\}$

### 498

**전략** 실수 $a$에 대하여 직선 $x=a$와 오직 한 점에서 만나야 함수의 그래프이다.



④ 실수 $a$에 대하여 직선 $x=a$와 만나지 않거나 두 점에서 만나기도 하므로 함수의 그래프가 아니다.

답 ④

## 499

**전략** $f$가 $X$에서 $Y$로의 함수이면 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$의 값이 집합 $Y$의 원소임을 이용한다.

집합 $X$의 각 원소의 함숫값을 구하면

$$f(-1)=a-(a+1)+2=1,$$
$$f(0)=2,$$
$$f(1)=a+(a+1)+2=2a+3$$

이때 $f(1)$의 값은 1, 2, 3 중 하나이어야 한다.

(i) $f(1)=1$일 때, $2a+3=1$에서 $\quad a=-1$

(ii) $f(1)=2$일 때, $2a+3=2$에서 $\quad a=-\frac{1}{2}$

(iii) $f(1)=3$일 때, $2a+3=3$에서 $\quad a=0$

이상에서 모든 $a$의 값의 합은

$$-1+\left(-\frac{1}{2}\right)+0=-\frac{3}{2}$$

답 $-\frac{3}{2}$

## 500

**전략** $a<0$인 경우와 $a\geq 0$인 경우로 나누어 생각한다.

(i) $a<0$일 때

$f(a)=|a|+2=8$에서

$|a|=6 \quad \therefore a=-6 \ (\because a<0)$

(ii) $a\geq 0$일 때

$f(a)=a^2-3a-2=8$에서

$a^2-3a-10=0, \quad (a+2)(a-5)=0$

$\therefore a=5 \ (\because a\geq 0)$

(i), (ii)에서 모든 실수 $a$의 값의 곱은

$-6\times 5=-30$

답 $-30$

## 501

**전략** $f(0)$의 값을 먼저 구한다.

$f(a+b)=f(a)+f(b)+4 \quad \cdots\cdots ㉠$

㉠에 $a=0$, $b=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+4 \quad \therefore f(0)=-4$

㉠에 $a=4$, $b=-4$를 대입하면

$f(0)=f(4)+f(-4)+4$

$\therefore f(4)+f(-4)=f(0)-4=-8$

답 $-8$

## 502

**전략** $f(-2)=g(-2)$, $f(a)=g(a)$임을 이용한다.

$f(-2)=g(-2)$에서

$0=-8-2b \quad \therefore b=-4$

$\therefore g(x)=x^3-4x$

또 $f(a)=g(a)$에서

$a^2+2a=a^3-4a, \quad a^3-a^2-6a=0$

$a(a+2)(a-3)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=-2$ 또는 $a=3$

그런데 $a\neq -2$, $a\neq 0$이므로 $\quad a=3$

답 $a=3$, $b=-4$

## 503

**전략** 조건 (가)를 이용하여 $f(2025)$의 값을 $1\leq x<4$에서의 함숫값으로 나타낸다.

조건 (가)에 의하여

$$f(2025)=f\left(4\times\frac{2025}{4}\right)=4f\left(\frac{2025}{4}\right)$$
$$=4f\left(4\times\frac{2025}{4^2}\right)=4^2f\left(\frac{2025}{4^2}\right)$$
$$\vdots$$
$$=4^5f\left(\frac{2025}{4^5}\right)$$

이때 $1<\frac{2025}{4^5}<2$이므로 조건 (나)에 의하여

$$f\left(\frac{2025}{4^5}\right)=\left|3-\frac{2025}{4^5}\right|-1=2-\frac{2025}{4^5}$$

$$\therefore f(2025)=4^5f\left(\frac{2025}{4^5}\right)=4^5\times\left(2-\frac{2025}{4^5}\right)$$
$$=4^5\times 2-2025$$
$$=2048-2025=23$$

답 23

## 504

**전략** 삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 커야 함을 이용하여 $a$의 값의 범위를 구한다.

(i) 가장 긴 변의 길이가 $a$일 때

$a>10$이고 $a<6+10=16$이므로

$10<a<16$

(ii) 가장 긴 변의 길이가 10일 때

$a\leq 10$이고 $10<a+6$이므로

$4<a\leq 10$

(i), (ii)에서 $\quad 4<a<16$

이때 $f(a)=a+6+10=a+16$에서

$20<a+16<32$이므로

$$20<f(a)<32$$

따라서 $p=20$, $q=32$이므로

$$pq=640$$

답 **640**

## 505

**전략** $f(x)=3$을 만족시키는 $x$의 값의 조건을 구한다.

$f(x)=3$이려면

$$x=4k+3\,(k\text{는 음이 아닌 정수})$$

의 꼴이어야 한다.

따라서 함수 $f$의 정의역 $X$는 집합

$$\{x\,|\,x=4k+3,\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 6\},$$

즉 $\{3,\ 7,\ 11,\ 15,\ 19,\ 23,\ 27\}$

의 공집합이 아닌 부분집합이므로 구하는 정의역 $X$의 개수는

$$2^7-1=127$$

답 **127**

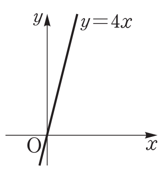
# 02 여러 가지 함수

• 본책 217~221쪽

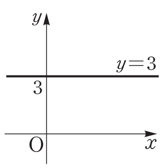
## 506

**보기**의 함수의 그래프를 각각 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다.

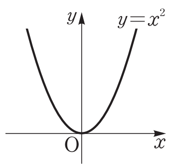
ㄱ.



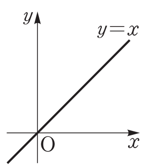

ㄴ.




ㄷ.




ㄹ.




(1) 일대일대응은 그 그래프가 치역의 각 원소 $k$에 대하여 직선 $y=k$와 오직 한 점에서 만나고 치역과 공역이 같은 함수이므로 ㄱ, ㄹ이다.

(2) 상수함수는 그 그래프가 $x$축에 평행한 직선이므로 ㄴ이다.

(3) 항등함수는 그 그래프가 직선 $y=x$인 함수이므로 ㄹ이다.

답 (1) ㄱ, ㄹ (2) ㄴ (3) ㄹ

**다른 풀이** (1) ㄱ. $f(x)=4x$라 하면 두 실수 $x_1$, $x_2$에 대하여 $f(x_1)=4x_1$, $f(x_2)=4x_2$이므로

$$x_1\neq x_2\text{이면 } f(x_1)\neq f(x_2)$$

이다.

또 치역은 실수 전체의 집합이므로 $y=4x$는 일대일대응이다.

ㄷ. $f(x)=x^2$이라 하면

$$f(-1)=f(1)=1$$

즉 $-1\neq 1$이어도 $f(-1)=f(1)$이므로 일대일함수가 아니다.

따라서 일대일대응이 아니다.

ㄹ. $f(x)=x$라 하면 두 실수 $x_1$, $x_2$에 대하여 $f(x_1)=x_1$, $f(x_2)=x_2$이므로

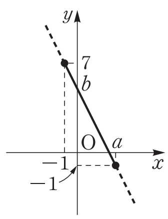
$$x_1\neq x_2\text{이면 } f(x_1)\neq f(x_2)$$

이다.

또 치역은 실수 전체의 집합이므로 $y=x$는 일대일대응이다.

## 507

함수 $f$가 일대일대응이므로 $f(x)=-2x+b$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(-1,\ 7)$, $(a,\ -1)$을 지나야 한다.




$f(-1)=7$에서 $\quad 2+b=7$

$$\therefore b=5$$

$f(a)=-1$에서 $\quad -2a+b=-1$

$$-2a+5=-1 \qquad \therefore a=3$$

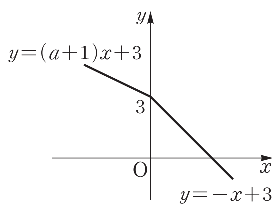
$$\therefore a-b=3-5=-2$$

답 **−2**

## 508

$x\geq 0$에서

$f(x)=-x+3$이므로 함수 $f$가 일대일대응이 되려면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $x<0$에서 직선 $y=(a+1)x+3$의 기울기가 음수이어야 하므로

$a+1<0 \qquad \therefore a<-1$

답 $a<-1$

## 509

함수 $f$는 항등함수이므로

$f(5)=5,\ f(7)=7$

함수 $g$는 상수함수이고 $g(5)=f(5)=5$이므로

$g(x)=5 \qquad \therefore g(7)=5$

$\therefore f(7)+g(7)=7+5=12$

답 **12**

## 510

집합 $X$의 각 원소에 대응할 수 있는 집합 $X$의 원소는 $-1,\ 0,\ 1$의 3개이므로 함수의 개수는

$a=3^3=27$

일대일대응의 개수는 집합 $X$의 원소 $-1,\ 0,\ 1$에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$b={}_3P_3=6$

상수함수의 개수는 집합 $X$의 원소 $-1,\ 0,\ 1$에서 1개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$c=3$

$\therefore a+b+c=27+6+3=36$

답 **36**

## 511

(1) $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$를 만족시키는 $f(x)$는 일대일함수이다.
따라서 이를 만족시키는 함수 $f(x)$의 개수는 집합 $Y$의 5개의 원소 중에서 2개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_5P_2=20$

(2) 함수 $f(x)$가 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$를 만족시키려면 집합 $Y$의 5개의 원소 중에서 2개를 택하여 큰 수부터 차례대로 집합 $X$의 원소 3, 5에 대응시키면 된다.
따라서 구하는 함수 $f(x)$의 개수는 집합 $Y$의 5개의 원소 중에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_5C_2=10$

답 (1) **20** (2) **10**

연습 문제

본책 222~223쪽

## 512

전략 치역의 각 원소 $k$에 대하여 직선 $y=k$와 오직 한 점에서 만나야 일대일함수임을 이용한다.

ㄱ. 치역의 각 원소 $k$에 대하여 주어진 그래프와 직선 $y=k$가 오직 한 점에서 만나고 (치역)=(공역)이므로 일대일대응이다.

ㄴ. 치역의 각 원소 $k$에 대하여 주어진 그래프와 직선 $y=k$가 오직 한 점에서 만나므로 일대일함수이지만 치역이 $\{y|y<0\}$이므로 일대일대응이 아니다.

ㄷ. 치역의 각 원소 $k$에 대하여 주어진 그래프와 직선 $y=k$가 2개 이상의 점에서 만나므로 일대일함수가 아니다.

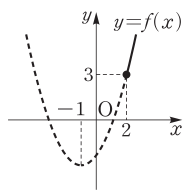
이상에서 일대일함수이지만 일대일대응이 아닌 것은 ㄴ뿐이다.

답 ㄴ

## 513

전략 일대응대응이 되도록 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

$f(x)=x^2+2x+a$
$\quad=(x+1)^2+a-1$




이므로 $x \geq 2$일 때 함수 $f$가 일대일대응이 되려면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 점 $(2,\ 3)$을 지나야 한다.

즉 $f(2)=3$에서

$4+4+a=3$

$\therefore a=-5$

답 **$-5$**

## 514

전략 $x$의 값의 범위를 나누어 $f(x)$의 식을 정리하고 함수 $f$가 일대일대응일 조건을 이용한다.

(i) $x \geq \dfrac{5}{2}$일 때, $2x-5 \geq 0$이므로

$f(x)=(2x-5)+kx-3$
$\quad=(k+2)x-8$

(ii) $x<\dfrac{5}{2}$일 때, $2x-5<0$이므로

$f(x)=-(2x-5)+kx-3$
$\quad=(k-2)x+2$

(i), (ii)에서

$$f(x)=\begin{cases}(k+2)x-8 & \left(x\geq\dfrac{5}{2}\right)\\(k-2)x+2 & \left(x<\dfrac{5}{2}\right)\end{cases}$$

이때 함수 $f(x)$가 일대일대응이려면 $k+2\neq0$, $k-2\neq0$이고 두 직선 $y=(k+2)x-8$, $y=(k-2)x+2$의 기울기의 부호가 같아야 하므로

$(k+2)(k-2)>0$

$\therefore$ $k<-2$ 또는 $k>2$ 답 $\boldsymbol{k<-2}$ **또는** $\boldsymbol{k>2}$

## 515

**전략** 각 함수에서 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$의 값을 구하여 항등함수인지 확인한다.

함수 $f$가 항등함수이려면

$f(-1)=-1$, $f(0)=0$, $f(1)=1$

이어야 한다.

④ $f(-1)=1$이므로 항등함수가 아니다.

답 ④

## 516

**전략** $f(1)=f(2)=f(3)$임을 이용한다.

함수 $f$가 상수함수이므로

$f(1)=f(2)=f(3)=a$ $(a\in Y)$

라 하면 $f(1)+f(2)+f(3)=3a$

이때 $a$의 최댓값은 8이므로 $f(1)+f(2)+f(3)$의 최댓값은

$3\times8=24$

또 $a$의 최솟값은 4이므로 $f(1)+f(2)+f(3)$의 최솟값은

$3\times4=12$

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$24+12=36$ 답 **36**

## 517

**전략** $X$에서 $Y$로의 함수에서 치역과 공역이 다른 함수를 제외한다.

집합 $X$의 각 원소에 대응할 수 있는 집합 $Y$의 원소는 $d$, $e$의 2개씩이므로 $X$에서 $Y$로의 함수의 개수는

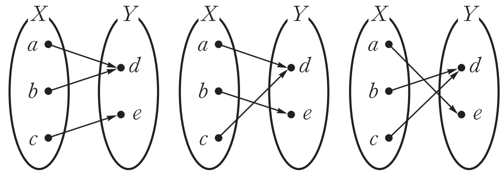
$2^3=8$

이때 치역이 $\{d\}$ 또는 $\{e\}$인 함수의 개수는 2이므로 치역과 공역이 같은 함수의 개수는

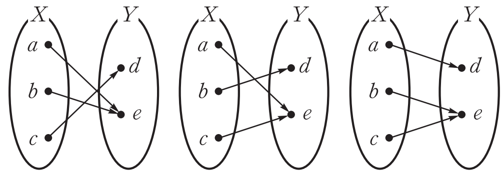
$8-2=6$ 답 **6**

다른 풀이 정의역의 원소는 3개이고 치역의 원소는 2개이므로 집합 $X$의 원소 중 2개는 집합 $Y$의 같은 원소에 대응해야 한다.

(i) $Y$의 원소 $d$에 $X$의 원소가 2개 대응하는 경우




(ii) $Y$의 원소 $e$에 $X$의 원소가 2개 대응하는 경우




(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$3+3=6$

## 518

**전략** $b$를 $a$에 대한 식으로 나타낸다.

$f(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$이므로 $x\geq a$에서 함수 $f(x)$가 일대일대응이 되려면

$a\geq2$

이때 함수 $f(x)$의 치역은 $\{y\,|\,y\geq f(a)\}$이므로

$b=f(a)=a^2-4a+3$

$\therefore a-b=a-(a^2-4a+3)$

$=-a^2+5a-3$

$=-\left(a-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{13}{4}$

즉 $a\geq2$에서 $a-b$의 최댓값은 $\dfrac{13}{4}$이다.

따라서 $p=4$, $q=13$이므로

$p+q=17$ 답 **17**

## 519

**전략** $f(a)=a$를 만족시키는 $a$의 값을 구한다.

$f(x)=x^3+x^2-x$가 항등함수가 되려면 정의역의 각 원소 $x$에 대하여 $f(x)=x$를 만족시켜야 한다.

$x^3+x^2-x=x$에서

$x^3+x^2-2x=0,\quad x(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 집합 $X$는 집합 $\{-2, 0, 1\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로 구하는 집합 $X$의 개수는

$2^3-1=7$

답 **7**

## 520

**전략** 일대일대응, 항등함수, 상수함수의 정의를 이용한다.

함수 $g(x)$가 항등함수이므로

$g(-1)=-1,\ g(0)=0,\ g(1)=1$

따라서 조건 ㈎에서

$f(0)=h(1)=g(-1)=-1$

이때 $h(x)$가 상수함수이므로

$h(-1)=h(0)=h(1)=-1$

조건 ㈏에서

$f(1)=h(0)+g(1)=-1+1=0$

즉 $f(0)=-1,\ f(1)=0$이고 $f(x)$는 일대일대응이므로

$f(-1)=1$

$\therefore f(-1)-g(1)+h(0)$

$=1-1+(-1)=-1$

답 **−1**

## 521

**전략** 함숫값의 대소 관계가 정해진 함수의 개수는 조합의 수를 이용하여 구한다.

$f(1)<f(2)<f(3)<f(4)=6<f(5)$에서

$f(1)<f(2)<f(3)<6$이므로 집합 $Y$의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중 3개를 택한 후 작은 수부터 차례대로 집합 $X$의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 된다.

즉 $f(1),\ f(2),\ f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=10$

또 $6<f(5)$이므로 집합 $Y$의 원소 7, 8 중 하나를 택한 후 집합 $X$의 원소 5에 대응시키면 된다.

즉 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

따라서 구하는 함수 $f$의 개수는

$10\times2=20$

답 **20**

### 해설 Focus

두 집합 $X$, $Y$의 원소의 개수가 각각 $n$, $m$ $(m\ge n)$이고, $X$에서 $Y$로의 함수 $f$가 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$를 만족시킬 때, 함수 $f$의 개수

⇨ 서로 다른 $m$개에서 $n$개를 택하는 조합의 수

⇨ ${}_mC_n$

## 522

**전략** $f(a)=a,\ f(b)=b,\ f(c)=c$임을 이용한다.

함수 $f$가 항등함수이므로 정의역의 각 원소 $x$에 대하여 $f(x)=x$이어야 한다.

(i) $x<-2$일 때

$f(x)=-4$이므로 $\quad x=-4$

(ii) $-2\le x\le1$일 때

$f(x)=x$에서 $\quad 2x+1=x \quad \therefore x=-1$

(iii) $x>1$일 때

$f(x)=3$이므로 $\quad x=3$

이상에서 $\quad X=\{-4, -1, 3\}$

$\therefore a+b+c=-4+(-1)+3=-2$

답 **−2**

## 523

**전략** 주어진 조건을 파악하여 집합 $X$의 각 원소에 대응될 수 있는 공역의 원소의 개수를 구한다.

$f(x)=f(-x)$이므로

$f(-3)=f(3),\ f(-1)=f(1)$

$f(-3),\ f(-1),\ f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 각각 $-3,\ -1,\ 0,\ 1,\ 3$의 5개씩이므로 $f(-3),\ f(-1),\ f(0)$의 값을 정하는 경우의 수는

$5^3=125$

$f(3),\ f(1)$의 값은 각각 $f(-3),\ f(-1)$의 값과 같아야 하므로 구하는 함수 $f$의 개수는

$125\times1\times1=125$

답 **125**

# 03 합성함수

● 본책 224~231쪽

## 524

(1) $(g\circ f)(5)=g(f(5))=g(c)=4$

(2) $(g\circ f)(6)=g(f(6))=g(d)=7$

(3) $(g\circ f)(7)=g(f(7))=g(b)=4$

(4) $(f\circ g)(a)=f(g(a))=f(5)=c$

(5) $(f\circ g)(b)=f(g(b))=f(4)=a$

(6) $(f\circ g)(c)=f(g(c))=f(4)=a$

답 (1) **4** (2) **7** (3) **4** (4) $\boldsymbol{c}$ (5) $\boldsymbol{a}$ (6) $\boldsymbol{a}$

## 525

(1) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+3)$

$=-(2x+3)^2$

$=-4x^2-12x-9$

(2) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-x^2)$

$=2\times(-x^2)+3=-2x^2+3$

(3) $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(2x+3)$

$=2(2x+3)+3=4x+9$

(4) $(g\circ g)(x)=g(g(x))=g(-x^2)$

$=-(-x^2)^2=-x^4$

답 (1) $\boldsymbol{(g\circ f)(x)=-4x^2-12x-9}$

(2) $\boldsymbol{(f\circ g)(x)=-2x^2+3}$

(3) $\boldsymbol{(f\circ f)(x)=4x+9}$

(4) $\boldsymbol{(g\circ g)(x)=-x^4}$

## 526

(1) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-x+5)$

$=(-x+5)^2-2$

$=x^2-10x+23$

이므로

$((f\circ g)\circ h)(x)$

$=(f\circ g)(h(x))$

$=(f\circ g)(2x-1)$

$=(2x-1)^2-10(2x-1)+23$

$=4x^2-24x+34$

(2) $(g\circ h)(x)=g(h(x))=g(2x-1)$

$=-(2x-1)+5$

$=-2x+6$

이므로

$(f\circ(g\circ h))(x)=f((g\circ h)(x))$

$=f(-2x+6)$

$=(-2x+6)^2-2$

$=4x^2-24x+34$

(3) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2-2)$

$=-(x^2-2)+5$

$=-x^2+7$

이므로

$((g\circ f)\circ h)(x)=(g\circ f)(h(x))$

$=(g\circ f)(2x-1)$

$=-(2x-1)^2+7$

$=-4x^2+4x+6$

(4) $(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(-x+5)$

$=2(-x+5)-1$

$=-2x+9$

이므로

$(f\circ(h\circ g))(x)=f((h\circ g)(x))$

$=f(-2x+9)$

$=(-2x+9)^2-2$

$=4x^2-36x+79$

답 (1) $\boldsymbol{((f\circ g)\circ h)(x)=4x^2-24x+34}$

(2) $\boldsymbol{(f\circ(g\circ h))(x)=4x^2-24x+34}$

(3) $\boldsymbol{((g\circ f)\circ h)(x)=-4x^2+4x+6}$

(4) $\boldsymbol{(f\circ(h\circ g))(x)=4x^2-36x+79}$

## 527

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=3$

이때 $g(b)=3$이므로 $f(x)=b$에서

$x=-1$

답 **−1**

## 528

$g(2)=-2+3=1,\ f(-1)=2\times(-1)-1=-3$

이므로

$(f\circ g)(2)+(g\circ f)(-1)$

$=f(g(2))+g(f(-1))$

$=f(1)+g(-3)$

$=(2\times1-1)+5=6$

답 **6**

## 529

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(3)$이므로

$g(3)=1$

$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(3)$이므로

$f(3)=1$

이때 두 함수 $f$, $g$는 모두 일대일대응이므로

$f(1)=2$, $g(2)=2$

$\therefore (f\circ f)(3)+(g\circ f)(1)$

$=f(f(3))+g(f(1))$

$=f(1)+g(2)$

$=2+2$

$=4$

답 4

## 530

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-x+k)$

$=2(-x+k)+3$

$=-2x+2k+3$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+3)$

$=-(2x+3)+k$

$=-2x-3+k$

$f\circ g=g\circ f$이므로

$-2x+2k+3=-2x-3+k$

$2k+3=-3+k$

$\therefore k=-6$

따라서 $g(x)=-x-6$이므로

$g(-2)=-(-2)-6=-4$

답 $-4$

다른 풀이 $f\circ g=g\circ f$에서 $(f\circ g)(0)=(g\circ f)(0)$이므로

$f(g(0))=g(f(0))$

$f(k)=g(3)$, $\quad 2k+3=-3+k$

$\therefore k=-6$

## 531

$g(3)=-1$에서

$3b+2=-1 \quad \therefore b=-1$

따라서 $f(x)=ax-1$, $g(x)=-x+2$에서

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-x+2)$

$=a(-x+2)-1$

$=-ax+2a-1$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax-1)$

$=-(ax-1)+2$

$=-ax+3$

$f\circ g=g\circ f$이므로

$-ax+2a-1=-ax+3$

$2a-1=3 \quad \therefore a=2$

$\therefore ab=2\times(-1)=-2$

답 $-2$

## 532

주어진 대응에 의하여

$f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=4$, $f(4)=1$

$f\circ g=g\circ f$이므로

$f(g(x))=g(f(x)) \quad \cdots\cdots ㉠$

㉠에 $x=1$을 대입하면

$f(g(1))=g(f(1))$

$g(1)=3$이므로 $\quad f(3)=g(2)$

$\therefore g(2)=4$

㉠에 $x=2$를 대입하면

$f(g(2))=g(f(2))$

$f(4)=g(3) \quad \therefore g(3)=1$

㉠에 $x=3$을 대입하면

$f(g(3))=g(f(3))$

$f(1)=g(4) \quad \therefore g(4)=2$

$\therefore g(2)-g(4)=4-2=2$

답 2

## 533

(1) $(f\circ h)(x)=f(h(x))=2h(x)-1$이므로

$(f\circ h)(x)=g(x)$에서

$2h(x)-1=-3x+4$

$\therefore \boldsymbol{h(x)=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}}$

(2) $(h\circ f)(x)=h(f(x))=h(2x-1)$이므로

$(h\circ f)(x)=g(x)$에서

$h(2x-1)=-3x+4$

$2x-1=t$라 하면 $x=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$이므로

$h(t)=-3\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)+4=-\frac{3}{2}t+\frac{5}{2}$

$\therefore \boldsymbol{h(x)=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}}$

(3) $(h\circ g\circ f)(x)=h(g(f(x)))$

$=h(g(2x-1))$

$=h(-6x+7)$

$g(2x-1)$
$=-3(2x-1)+4$
$=-6x+7$

$(h\circ g\circ f)(x)=g(x)$에서

$h(-6x+7)=-3x+4$

$-6x+7=t$라 하면 $x=-\frac{1}{6}t+\frac{7}{6}$이므로

$h(t)=-3\left(-\frac{1}{6}t+\frac{7}{6}\right)+4=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$

$\therefore\ \boldsymbol{h(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}$

답 **풀이 참조**

## 534

$\frac{x+1}{2}=t$라 하면 $\quad x=2t-1$

$\therefore\ f(t)=3(2t-1)+2=6t-1$

여기서 $t$ 대신 $\frac{1-2x}{3}$를 대입하면

$f\left(\frac{1-2x}{3}\right)=6\times\frac{1-2x}{3}-1$

$=-4x+1$

답 $\boldsymbol{f\left(\frac{1-2x}{3}\right)=-4x+1}$

## 535

$f^1(x)=f(x)=x+2$

$f^2(x)=(f\circ f^1)(x)=f(f^1(x))=f(x+2)=x+4$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f(x+4)=x+6$

$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=f(f^3(x))=f(x+6)=x+8$

$\vdots$

$\therefore\ f^n(x)=x+2n$

따라서 $f^{2025}(x)=x+2\times2025=x+4050$이므로

$f^{2025}(1)=1+4050=4051$ 답 **4051**

## 536

$f^1(x)=f(x)=\frac{x}{3}$

$f^2(x)=(f\circ f^1)(x)=f(f^1(x))=f\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{x}{3^2}$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f\left(\frac{x}{3^2}\right)=\frac{x}{3^3}$

$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=f(f^3(x))=f\left(\frac{x}{3^3}\right)=\frac{x}{3^4}$

$\vdots$

$\therefore\ f^n(x)=\frac{x}{3^n}$

$\therefore\ f^5(729)+f^4(243)=\frac{729}{3^5}+\frac{243}{3^4}$

$=\frac{3^6}{3^5}+\frac{3^5}{3^4}$

$=3+3=6$ 답 **6**

## 537

$f(1)=5,\ f(5)=1$이므로

$f^2(1)=(f\circ f^1)(1)=f(f(1))=f(5)=1$

$f^3(1)=(f\circ f^2)(1)=f(f^2(1))=f(1)=5$

$f^4(1)=(f\circ f^3)(1)=f(f^3(1))=f(5)=1$

$\vdots$

즉 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$일 때, $f^n(1)$의 값은 5, 1이 이 순서대로 반복된다.

$\therefore\ f^{100}(1)=1$

또 $f(3)=7,\ f(7)=3$이므로

$f^2(3)=(f\circ f^1)(3)=f(f(3))=f(7)=3$

$f^3(3)=(f\circ f^2)(3)=f(f^2(3))=f(3)=7$

$f^4(3)=(f\circ f^3)(3)=f(f^3(3))=f(7)=3$

$\vdots$

즉 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$일 때, $f^n(3)$의 값은 7, 3이 이 순서대로 반복된다.

$\therefore\ f^{101}(3)=7$

$\therefore\ f^{100}(1)+f^{101}(3)=1+7=8$

답 **8**

## 538

주어진 그래프에서

$f(x)=x-1\ (0\le x\le 2)$,

$g(x)=\begin{cases}-x & (-1\le x\le 0)\\ x & (0\le x\le 1)\end{cases}$

$\therefore\ (g\circ f)(x)$

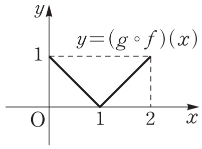
$=g(f(x))$

$=\begin{cases}-f(x) & (-1\le f(x)\le 0)\\ f(x) & (0\le f(x)\le 1)\end{cases}$

$=\begin{cases}-(x-1) & (-1\le x-1\le 0)\\ x-1 & (0\le x-1\le 1)\end{cases}$

$=\begin{cases}-x+1 & (0\le x\le 1)\\ x-1 & (1\le x\le 2)\end{cases}$

따라서 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




답 풀이 참조

**연습 문제** ● 본책 232~233쪽

## 539

전략 $(f\circ g)(k)=f(g(k))$임을 이용하여 함숫값을 구한다.

$(f\circ f\circ g\circ g)(\sqrt{2})$

$=f(f(g(g(\sqrt{2}))))$

$=f(f(g(-\sqrt{2})))$ ← $g(\sqrt{2})=-\sqrt{2}$

$=f(f(\sqrt{2}))$ ← $g(-\sqrt{2})=\sqrt{2}$

$=f(-2)$ ← $f(\sqrt{2})=-(\sqrt{2})^2=-2$

$=(-2)^2=4$

답 **4**

## 540

전략 집합 $X$의 각 원소 $x$에 대하여 $(g\circ f)(x)=x$임을 이용한다.

정의역이 $X=\{2, 3\}$인 함수 $g\circ f$가 항등함수이므로

$(g\circ f)(2)=2$, $(g\circ f)(3)=3$

$(g\circ f)(2)=2$에서

$g(f(2))=2$, $\quad g(-a)=2$

$\therefore a^2-2a+b=2$ ...... ㉠

$(g\circ f)(3)=3$에서

$g(f(3))=3$, $\quad g(0)=3$

$\therefore b=3$

㉠에 $b=3$을 대입하면

$a^2-2a+3=2$, $\quad a^2-2a+1=0$

$(a-1)^2=0 \quad \therefore a=1$ (중근)

$\therefore a+b=1+3=4$

답 **4**

## 541

전략 $f(x)=ax+b$로 놓고 $f\circ f$를 구한다.

$f(x)=ax+b$ ($a$, $b$는 상수, $a\neq0$)라 하면

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(ax+b)$

$=a(ax+b)+b$

$=a^2x+ab+b$

이때 $a^2x+ab+b=9x-4$이므로

$a^2=9$, $ab+b=-4$

$a^2=9$에서 $\quad a=\pm3$

(i) $a=-3$일 때, $ab+b=-4$에서

$-3b+b=-4 \quad \therefore b=2$

$\therefore f(x)=-3x+2$

(ii) $a=3$일 때, $ab+b=-4$에서

$3b+b=-4 \quad \therefore b=-1$

$\therefore f(x)=3x-1$

(i), (ii)에서

$f(x)=-3x+2$ 또는 $f(x)=3x-1$

답 $\boldsymbol{f(x)=-3x+2,\ f(x)=3x-1}$

## 542

전략 합성함수의 성질을 이용하여 $(f\circ(g\circ h))(x)$를 구한다.

$(f\circ(g\circ h))(x)=((f\circ g)\circ h)(x)$

$=(f\circ g)(h(x))$

$=(f\circ g)(x-1)$

$=(x-1)^2+4$

$(f\circ(g\circ h))(x)=20$에서

$(x-1)^2+4=20$, $\quad x^2-2x-15=0$

$(x+3)(x-5)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=5$

따라서 구하는 $x$의 값의 곱은

$-3\times5=-15$

답 **−15**

## 543

전략 $h(x)=ax+b$로 놓고 $h\circ g\circ f=f$를 만족시키는 $a$, $b$의 값을 구한다.

$h(x)=ax+b$ ($a$, $b$는 상수, $a\neq0$)라 하면

$(h\circ g\circ f)(x)=h(g(f(x)))=h(g(-x))$

$=h(-2x-1)$

$=a(-2x-1)+b$

$=-2ax-a+b$

$h\circ g\circ f=f$이므로 $\quad -2ax-a+b=-x$

즉 $-2a=-1$, $-a+b=0$이므로

$$a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2} \qquad \therefore\ h(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

따라서 $h(k)=4$에서

$$\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}=4 \qquad \therefore\ k=7$$

답 7

다른 풀이 $(h\circ g\circ f)(x)=f(x)$에서

$h(-2x-1)=-x$

양변에 $x=-4$를 대입하면

$h(7)=4 \qquad \therefore\ k=7$

## 544

전략 $f(n)$의 값이 짝수인 경우와 홀수인 경우로 나누어 생각한다.

$(f\circ f)(n)=f(f(n))=5$

(i) $f(n)$의 값이 홀수일 때

$f(f(n))=f(n)+1=5$이므로

$f(n)=4$

이는 $f(n)$의 값이 홀수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(n)$의 값이 짝수일 때

$f(f(n))=\frac{f(n)}{2}+1=5$이므로

$f(n)=8$

$n$이 홀수이면 $\quad f(n)=n+1=8$

$\therefore\ n=7$

$n$이 짝수이면 $\quad f(n)=\frac{n}{2}+1=8$

$\therefore\ n=14$

(i), (ii)에서 $\quad n=7$ 또는 $n=14$

따라서 구하는 자연수 $n$의 값의 합은

$7+14=21$

답 21

다른 풀이 음이 아닌 정수 $k$에 대하여

(i) $n=4k+1$일 때

$n$이 홀수이므로 $\quad f(n)=n+1=4k+2$

$f(n)$의 값이 짝수이므로

$$(f\circ f)(n)=f(f(n))=f(4k+2)$$
$$=\frac{4k+2}{2}+1=2k+2$$

따라서 $2k+2=5$이므로 $\quad k=\frac{3}{2}$

이때 $k$가 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $n=4k+2$일 때

$n$이 짝수이므로 $\quad f(n)=\frac{n}{2}+1=2k+2$

$f(n)$의 값이 짝수이므로

$$(f\circ f)(n)=f(f(n))=f(2k+2)$$
$$=\frac{2k+2}{2}+1=k+2$$

따라서 $k+2=5$이므로 $\quad k=3$

$\therefore\ n=4\times3+2=14$

(iii) $n=4k+3$일 때

$n$이 홀수이므로 $\quad f(n)=n+1=4k+4$

$f(n)$의 값이 짝수이므로

$$(f\circ f)(n)=f(f(n))=f(4k+4)$$
$$=\frac{4k+4}{2}+1=2k+3$$

따라서 $2k+3=5$이므로 $\quad k=1$

$\therefore\ n=4\times1+3=7$

(iv) $n=4k+4$일 때

$n$이 짝수이므로 $\quad f(n)=\frac{n}{2}+1=2k+3$

$f(n)$의 값이 홀수이므로

$$(f\circ f)(n)=f(f(n))=f(2k+3)$$
$$=2k+3+1=2k+4$$

따라서 $2k+4=5$이므로 $\quad k=\frac{1}{2}$

이때 $k$가 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

이상에서 $\quad n=7$ 또는 $n=14$

## 545

전략 주어진 조건을 만족시키는 $f(2)$, $f(3)$의 값을 구한다.

함수 $f$가 일대일대응이고 $f(1)=3$이므로

$f(2)=4$, $f(3)=5$ 또는 $f(2)=5$, $f(3)=4$

(i) $f(2)=4$, $f(3)=5$일 때

$(g\circ f)(3)=g(f(3))=5$이므로 $\quad g(5)=5$

그런데 $g(5)=6$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(2)=5$, $f(3)=4$일 때

$(g\circ f)(3)=g(f(3))=5$이므로 $\quad g(4)=5$

이때 함수 $g$는 일대일대응이므로

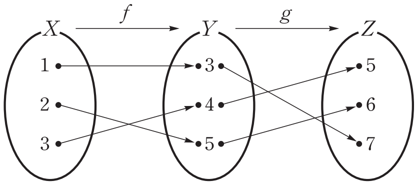
$g(3)=7$

(i), (ii)에서 $\quad g(3)=7$

$\therefore\ (g\circ f)(1)=g(f(1))=g(3)=7$

답 7

참고 주어진 조건을 만족시키는 두 함수 $f$, $g$는 다음과 같다.




## 546

**전략** 주어진 조건을 만족시키는 $a$, $b$ 사이의 관계식을 구한다.

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(3x+4)$$
$$=-a(3x+4)+b$$
$$=-3ax-4a+b$$
$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(-ax+b)$$
$$=3(-ax+b)+4$$
$$=-3ax+3b+4$$

$f\circ g=g\circ f$이므로

$$-3ax-4a+b=-3ax+3b+4$$
$$-4a+b=3b+4,\qquad -2b=4a+4$$
$$\therefore\ b=-2a-2$$
$$\therefore\ f(x)=-ax+b=-ax-2a-2$$
$$=(-x-2)a-2$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $a$의 값에 관계없이 점 $(-2,\ -2)$를 지나므로

$$m=-2,\ n=-2$$
$$\therefore\ m+n=-4$$

답 **$-4$**

## 547

**전략** $f^n(3)$ ($n$은 자연수)의 값의 규칙성을 파악한다.

$f^1(3)=f(3)=2$

$f^2(3)=(f\circ f^1)(3)=f(f^1(3))=f(2)=1$

$f^3(3)=(f\circ f^2)(3)=f(f^2(3))=f(1)=5$

$f^4(3)=(f\circ f^3)(3)=f(f^3(3))=f(5)=4$

$f^5(3)=(f\circ f^4)(3)=f(f^4(3))=f(4)=3$

$f^6(3)=(f\circ f^5)(3)=f(f^5(3))=f(3)=2$

$\vdots$

즉 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$일 때, $f^n(3)$의 값은 $2,\ 1,\ 5,\ 4,\ 3$이 이 순서대로 반복된다.

이때 $2024=5\times404+4$이므로

$$f^{2024}(3)=f^4(3)=4$$

답 **4**

## 548

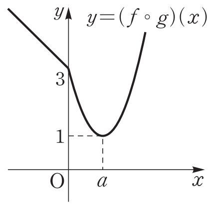
**전략** 구간을 나누어 $f\circ g$를 구한다.

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$
$$=\begin{cases}(-x+7)-4 & (x<0)\\ (2x^2-4ax+7)-4 & (x\ge0)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}-x+3 & (x<0)\\ 2x^2-4ax+3 & (x\ge0)\end{cases}$$

$y=2x^2-4ax+3=2(x-a)^2-2a^2+3$이므로 $a\le0$이면 $f\circ g$의 치역이 $\{y\,|\,y\ge3\}$이다.

$$\therefore\ a>0$$

따라서 함수 $y=(f\circ g)(x)$의 치역이 $\{y\,|\,y\ge1\}$이려면 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=2(x-a)^2-2a^2+3$의 그래프의 꼭짓점의 $y$좌표가 1이어야 하므로




$$-2a^2+3=1,\qquad a^2=1$$
$$\therefore\ a=1\ (\because\ a>0)$$

답 **1**

## 549

**전략** 주어진 그래프를 이용하여 $f^n(1)$ ($n$은 자연수)의 값의 규칙성을 파악한다.

$f(x)=\begin{cases}-2x+4 & (0\le x<2)\\ x-2 & (2\le x\le4)\end{cases}$이므로

$f^1(1)=f(1)=2$

$f^2(1)=(f\circ f^1)(1)=f(f^1(1))=f(2)=0$

$f^3(1)=(f\circ f^2)(1)=f(f^2(1))=f(0)=4$

$f^4(1)=(f\circ f^3)(1)=f(f^3(1))=f(4)=2$

$\vdots$

즉 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$일 때, $f^n(1)$의 값은 $2,\ 0,\ 4$가 이 순서대로 반복된다.

이때 $100=3\times33+1$이므로

$$f^1(1)+f^2(1)+f^3(1)+\cdots+f^{100}(1)$$
$$=33\times(2+0+4)+2$$
$$=200$$

답 **200**

## 550

**전략** 주어진 그래프에서 함수 $f(x)$의 식을 구한다.

$f(x)=\begin{cases} 2x & \left(0\le x\le \dfrac{1}{2}\right) \\ 2-2x & \left(\dfrac{1}{2}\le x\le 1\right)\end{cases}$이므로

$(f\circ f)(x)=f(f(x))$

$=\begin{cases} 2f(x) & \left(0\le f(x)\le \dfrac{1}{2}\right) \\ 2-2f(x) & \left(\dfrac{1}{2}\le f(x)\le 1\right)\end{cases}$

(i) $0\le x\le \frac{1}{4}$일 때, $0\le f(x)\le \frac{1}{2}$이므로

$(f\circ f)(x)=2f(x)=2\times 2x=4x$

(ii) $\frac{1}{4}\le x\le \frac{1}{2}$일 때, $\frac{1}{2}\le f(x)\le 1$이므로

$(f\circ f)(x)=2-2f(x)=2-2\times 2x$

$=2-4x$

(iii) $\frac{1}{2}\le x\le \frac{3}{4}$일 때, $\frac{1}{2}\le f(x)\le 1$이므로

$(f\circ f)(x)=2-2f(x)=2-2(2-2x)$

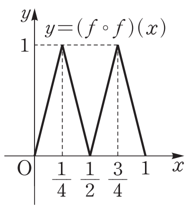
$=4x-2$

(iv) $\frac{3}{4}\le x\le 1$일 때, $0\le f(x)\le \frac{1}{2}$이므로

$(f\circ f)(x)=2f(x)=2(2-2x)$

$=4-4x$

이상에서 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




답 풀이 참조

## 04 역함수

● 본책 234~243쪽

### 551

ㄴ. 집합 $X$의 원소 1, 2가 모두 집합 $Y$의 원소 $b$에 대응하므로 일대일대응이 아니다.
따라서 역함수가 존재하지 않는다.

ㄹ. 집합 $X$의 원소 1, 3이 모두 집합 $Y$의 원소 $a$에 대응하므로 일대일대응이 아니다.
따라서 역함수가 존재하지 않는다.

이상에서 역함수가 존재하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 **ㄱ, ㄷ**

### 552

(1) $f^{-1}(5)=a$에서 $f(a)=5$이므로

$-2a+3=5 \qquad \therefore a=-1$

(2) $f^{-1}(a)=-2$에서 $f(-2)=a$이므로

$a=-2\times(-2)+3=7$

답 (1) $\mathbf{-1}$ (2) $\mathbf{7}$

### 553

(1) 함수 $y=4x-2$는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=4x-2$를 $x$에 대하여 풀면

$4x=y+2 \qquad \therefore x=\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$

(2) 함수 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$은 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$을 $x$에 대하여 풀면

$\frac{1}{2}x=-y+\frac{3}{2} \qquad \therefore x=-2y+3$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=-2x+3$

답 (1) $\boldsymbol{y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}}$ (2) $\boldsymbol{y=-2x+3}$

### 554

(1) $f(1)=b$이므로 $\quad f^{-1}(b)=1$

(2) $(f^{-1})^{-1}(2)=f(2)=c$

(3) $(f^{-1}\circ f)(x)=x$이므로 $\quad (f^{-1}\circ f)(4)=4$

(4) $(f\circ f^{-1})(x)=x$이므로 $\quad (f\circ f^{-1})(a)=a$

답 (1) **1** (2) $\boldsymbol{c}$ (3) **4** (4) $\boldsymbol{a}$

다른 풀이 (3) $(f^{-1}\circ f)(4)=f^{-1}(f(4))=f^{-1}(d)=4$

(4) $(f\circ f^{-1})(a)=f(f^{-1}(a))=f(3)=a$

## 555

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$$f^{-1}(x)=g(x) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$g(8)=k$라 하면 $f(k)=8$이므로

$$-2k+6=8 \qquad \therefore k=-1$$

$$\therefore g(8)=-1$$

한편 ㉠에서 $g^{-1}(x)=f(x)$이므로

$$g^{-1}(3)=f(3)=-2\times3+6=0$$

$$\therefore g(8)+g^{-1}(3)=-1+0=-1$$

답 **−1**

## 556

$f(x)=ax+b$ ($a$, $b$는 상수, $a\neq0$)라 하자.

$f^{-1}(1)=3$에서 $f(3)=1$이므로

$$3a+b=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 $(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(1)=-2$이므로

$$a+b=-2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=\frac{3}{2},\ b=-\frac{7}{2}$$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x-\frac{7}{2}$이므로

$$f(-1)=-\frac{3}{2}-\frac{7}{2}=-5$$

답 **−5**

## 557

$2x+3=t$라 하면 $x=\frac{t-3}{2}$이므로

$$f(t)=-3\times\frac{t-3}{2}+4=-\frac{3}{2}t+\frac{17}{2}$$

즉 $f(x)=-\frac{3}{2}x+\frac{17}{2}$이므로

$$f(7)=-\frac{21}{2}+\frac{17}{2}=-2$$

$f^{-1}(7)=k$라 하면 $f(k)=7$이므로

$$-\frac{3}{2}k+\frac{17}{2}=7, \qquad -\frac{3}{2}k=-\frac{3}{2}$$

$$\therefore k=1 \qquad \therefore f^{-1}(7)=1$$

$$\therefore f(7)+f^{-1}(7)=-2+1=-1$$

답 **−1**

다른 풀이 $f(2x+3)=-3x+4 \qquad \cdots\cdots ㉠$

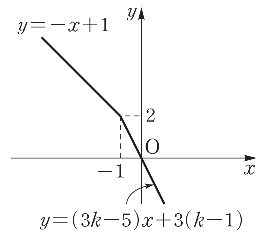
㉠에 $x=2$를 대입하면 $\qquad f(7)=-2$

㉠에 $x=-1$을 대입하면 $\qquad f(1)=7$

$$\therefore f^{-1}(7)=1$$

## 558

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.




즉 $x\geq-1$에서 $y=(3k-5)x+3(k-1)$의 그래프의 기울기가 음수이어야 하므로

$$3k-5<0 \qquad \therefore k<\frac{5}{3}$$

따라서 정수 $k$의 최댓값은 1이다.

답 **1**

## 559

함수 $f(x)=3x+2$의 역함수가 존재하므로 $f(x)$는 일대일대응이다.

이때 직선 $y=f(x)$의 기울기가 양수이므로

$$f(0)=b,\ f(a)=5$$

$f(0)=b$에서 $\qquad b=2$

$f(a)=5$에서 $\qquad 3a+2=5 \qquad \therefore a=1$

$$\therefore a+b=1+2=3$$

답 **3**

## 560

$f(x)=ax+|x-2|+3-2a$에서

(i) $x\geq2$일 때

$$f(x)=ax+(x-2)+3-2a$$
$$=(a+1)x+1-2a$$

(ii) $x<2$일 때

$$f(x)=ax-(x-2)+3-2a$$
$$=(a-1)x+5-2a$$

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 $a+1\neq0$, $a-1\neq0$이고 두 직선 $y=(a+1)x+1-2a$와 $y=(a-1)x+5-2a$의 기울기의 부호가 같아야 한다.

따라서 $(a+1)(a-1)>0$이므로

$$a<-1 \text{ 또는 } a>1$$

답 $\boldsymbol{a<-1}$ **또는** $\boldsymbol{a>1}$

## 561

$y=\frac{1}{3}x+2$를 $x$에 대하여 풀면

$\frac{1}{3}x=y-2 \qquad \therefore x=3y-6$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 $\quad y=3x-6$

따라서 $3x-6=ax+b$이므로

$a=3,\ b=-6$

$\therefore ab=-18$

답 $\mathbf{-18}$

## 562

$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$=g(-3x+1)$

$=(-3x+1)-2$

$=-3x-1$

$y=-3x-1$로 놓고 $x$에 대하여 풀면

$3x=-y-1 \qquad \therefore x=-\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 $\quad y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

$\therefore h^{-1}(x)=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

답 $\boldsymbol{h^{-1}(x)=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}}$

## 563

$3x-2=t$라 하면 $x=\frac{1}{3}t+\frac{2}{3}$이므로

$f(t)=6\left(\frac{1}{3}t+\frac{2}{3}\right)+1=2t+5$

$\therefore f(x)=2x+5$

$y=2x+5$로 놓고 $x$에 대하여 풀면

$2x=y-5 \qquad \therefore x=\frac{1}{2}y-\frac{5}{2}$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 $\quad y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

즉 $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$이므로

$a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{5}{2}$

답 $\boldsymbol{a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{5}{2}}$

## 564

$(f^{-1}\circ g)^{-1}(3)=(g^{-1}\circ f)(3)=g^{-1}(f(3))$

$=g^{-1}(5) \quad \leftarrow f(3)=2\times3-1=5$

$g^{-1}(5)=k$라 하면 $g(k)=5$이므로

$\frac{1}{2}k-1=5 \qquad \therefore k=12$

즉 $g^{-1}(5)=12$이므로

$(f^{-1}\circ g)^{-1}(3)=g^{-1}(5)=12$

답 $\mathbf{12}$

## 565

$(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(x)$

$=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(x) \quad \leftarrow (g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$

$=(g^{-1}\circ f)(x) \quad \leftarrow f\circ f^{-1}=I$

$g(x)=x+4$에서 $y=x+4$로 놓고 $x$에 대하여 풀면

$x=y-4$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 $\quad y=x-4$

$\therefore g^{-1}(x)=x-4$

$\therefore (g^{-1}\circ f)(x)=g^{-1}(f(x))$

$=g^{-1}(-2x+1)$

$=(-2x+1)-4$

$=-2x-3$

따라서 $-2x-3=ax+b$이므로

$a=-2,\ b=-3$

답 $\boldsymbol{a=-2,\ b=-3}$

## 566

$((f^{-1}\circ g^{-1})\circ f)(a)=(f^{-1}\circ g^{-1})(f(a))$

$=(g\circ f)^{-1}(f(a))$

$=(g\circ f)^{-1}(2a+1)=1$

따라서 $(g\circ f)(1)=2a+1$이므로

$g(f(1))=g(3)=2a+1$

$-\frac{1}{3}\times3+4=2a+1$

$\therefore a=1$

답 $\mathbf{1}$

다른 풀이 $((f^{-1}\circ g^{-1})\circ f)(a)$

$=(f^{-1}\circ g^{-1})(f(a))$

$=f^{-1}(g^{-1}(f(a)))=1$

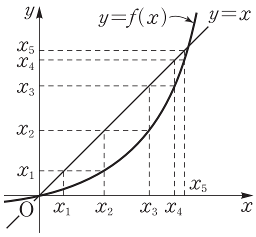
이므로

$g^{-1}(f(a))=f(1)=2\times1+1=3$

따라서 $f(a)=g(3)$이므로

$2a+1=3 \qquad \therefore a=1$

## 567




직선 $y=x$를 이용하여 $y$축과 점선이 만나는 점의 $y$좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.

$f^{-1}(x_3)=k$라 하면 $f(k)=x_3$이므로

$k=x_4$

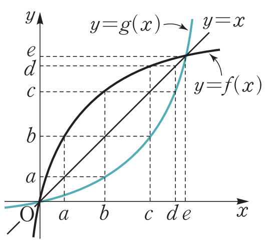
$\therefore (f\circ f)^{-1}(x_3)=(f^{-1}\circ f^{-1})(x_3)$

$=f^{-1}(f^{-1}(x_3))=f^{-1}(x_4)$

$f^{-1}(x_4)=l$이라 하면 $f(l)=x_4$이므로 $\quad l=x_5$

$\therefore (f\circ f)^{-1}(x_3)=f^{-1}(x_4)=x_5$ **답** $x_5$

## 568




직선 $y=x$를 이용하여 $y$축과 점선이 만나는 점의 $y$좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.

$(f\circ f\circ g)^{-1}(c)$

$=(g^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(c)$

$=g^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(c)))$

에서 $f^{-1}(c)=k$라 하면 $f(k)=c$이므로

$k=b$

$\therefore (f\circ f\circ g)^{-1}(c)=g^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(c)))$

$=g^{-1}(f^{-1}(b))$

$f^{-1}(b)=l$이라 하면 $f(l)=b$이므로

$l=a$

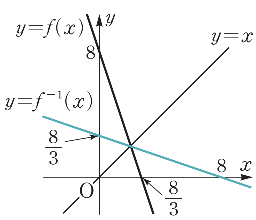
$\therefore (f\circ f\circ g)^{-1}(c)=g^{-1}(f^{-1}(b))=g^{-1}(a)$

$g^{-1}(a)=m$이라 하면 $g(m)=a$이므로

$m=b$

$\therefore (f\circ f\circ g)^{-1}(c)=g^{-1}(a)=b$ **답** $b$

## 569




함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

$-3x+8=x$에서

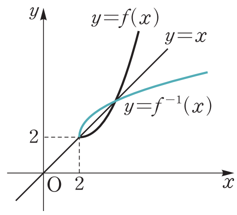
$-4x=-8 \qquad \therefore x=2$

따라서 교점의 좌표는 $(2,\ 2)$이므로

$p=2,\ q=2$

$\therefore pq=4$ **답** 4

## 570




함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

$\frac{1}{2}(x-2)^2+2=x$에서

$x^2-6x+8=0, \qquad (x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$

따라서 두 교점의 좌표는 $(2,\ 2),\ (4,\ 4)$이므로 구하는 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{(4-2)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{2}$ **답** $2\sqrt{2}$

### 연습 문제

본책 244~246쪽

## 571

**전략** $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 $(p,\ q)$를 지나면 $f(q)=p$임을 이용한다.

$f(x)=ax+b$ ($a$, $b$는 상수, $a\neq 0$)라 하자.

$y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 모두 점 $(-2,\ 5)$를 지나므로

$f(-2)=5,\ f^{-1}(-2)=5$

$f(-2)=5$에서 $\quad -2a+b=5 \quad\cdots\cdots$ ㉠
$f^{-1}(-2)=5$에서 $f(5)=-2$이므로
$\quad 5a+b=-2 \quad\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$\quad a=-1,\ b=3$
따라서 $f(x)=-x+3$이므로
$\quad f(1)=2$
$f^{-1}(-1)=k$라 하면 $f(k)=-1$이므로
$\quad -k+3=-1 \qquad \therefore k=4$
즉 $f^{-1}(-1)=4$이므로
$\quad f(1)+f^{-1}(-1)=2+4=6$ 답 **6**

## 572

전략 $f^{-1}$를 직접 구하여 $f$와 비교한다.

$y=ax+1$로 놓고 $x$에 대하여 풀면
$\quad ax=y-1 \qquad \therefore x=\dfrac{1}{a}y-\dfrac{1}{a}\ (\because a\neq 0)$
$x$와 $y$를 서로 바꾸면
$\quad y=\dfrac{1}{a}x-\dfrac{1}{a}$
즉 $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{a}x-\dfrac{1}{a}$이므로 $f=f^{-1}$에서
$\quad ax+1=\dfrac{1}{a}x-\dfrac{1}{a}$
$\quad a=\dfrac{1}{a},\ 1=-\dfrac{1}{a} \qquad \therefore a=-1$ 답 **−1**

다른 풀이 $f=f^{-1}$이므로
$\quad (f\circ f)(x)=x$
$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(ax+1)$
$\qquad =a(ax+1)+1$
$\qquad =a^2x+a+1$
이므로 $\quad a^2x+a+1=x$
$\quad a^2=1,\ a+1=0$
$\quad \therefore a=-1$

## 573

전략 주어진 함숫값을 이용하여 $k$의 값을 구하고 역함수의 성질을 이용한다.

$f^{-1}(2)=1$에서 $f(1)=2$이므로
$\quad 4+k=2 \qquad \therefore k=-2$
$\quad \therefore f(x)=4x-2$

$(f\circ(f\circ f)^{-1})(4)=(f\circ(f^{-1}\circ f^{-1}))(4)$
$\qquad =((f\circ f^{-1})\circ f^{-1})(4)$
$\qquad =f^{-1}(4)$
에서 $f^{-1}(4)=p$라 하면 $f(p)=4$이므로
$\quad 4p-2=4 \qquad \therefore p=\dfrac{3}{2}$
즉 $f^{-1}(4)=\dfrac{3}{2}$이므로
$\quad (f\circ(f\circ f)^{-1})(4)=f^{-1}(4)=\dfrac{3}{2}$ 답 $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

## 574

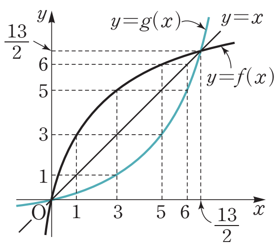
전략 역함수의 성질을 이용하여 $((f^{-1}\circ g)^{-1}\circ f)(-2)$를 간단히 한다.

$((f^{-1}\circ g)^{-1}\circ f)(-2)$
$=(g^{-1}\circ f\circ f)(-2)$
$=g^{-1}(f(f(-2)))$
$=g^{-1}(f(-1)) \qquad \leftarrow f(-2)=-2+1=-1$
$=g^{-1}(0) \qquad \leftarrow f(-1)=-1+1=0$
이때 $g^{-1}(0)=k$라 하면 $g(k)=0$이므로
$\quad k+1=0 \qquad \therefore k=-1$
즉 $g^{-1}(0)=-1$이므로
$\quad ((f^{-1}\circ g)^{-1}\circ f)(-2)=g^{-1}(0)=-1$
답 **−1**

## 575

전략 주어진 그래프를 이용하여 $f(x)$와 $g(x)$의 함숫값을 구한다.

직선 $y=x$를 이용하여 $y$축과 점선이 만나는 점의 $y$좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.




$f^{-1}(6)=k$라 하면
$f(k)=6$이므로
$\quad k=5$
$\quad \therefore (g\circ f^{-1})(6)=g(f^{-1}(6))=g(5)=3$
또 $(f^{-1}\circ g)(5)=f^{-1}(g(5))=f^{-1}(3)$에서
$f^{-1}(3)=l$이라 하면 $f(l)=3$이므로 $\quad l=1$
$\quad \therefore (f^{-1}\circ g)(5)=f^{-1}(3)=1$
$\quad \therefore (g\circ f^{-1})(6)+(f^{-1}\circ g)(5)=3+1=4$
답 **4**

## 576

**전략** $f^{-1}(6)=a$로 놓고 $a\geq 2$인 경우와 $a<2$인 경우로 나누어 생각한다.

$(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(9)$ ← $f(3)=3\times 3=9$

$=3\times 9=27$

한편 $f^{-1}(-6)=a$라 하면 $f(a)=-6$

(i) $a\geq 2$일 때

$f(a)=3a$이므로

$3a=-6 \quad \therefore a=-2$

그런데 $a\geq 2$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a<2$일 때

$f(a)=-a^2+5a$이므로

$-a^2+5a=-6, \quad a^2-5a-6=0$

$(a+1)(a-6)=0$

$\therefore a=-1$ ($\because a<2$)

(i), (ii)에서 $a=-1$

즉 $f^{-1}(-6)=-1$이므로

$(f\circ f)(3)+f^{-1}(-6)=26$

**답 26**

## 577

**전략** 주어진 조건을 이용하여 함숫값을 구한다.

$f(1)+2f(3)=12$에서

$f(1)=2,\ f(3)=5$ 또는 $f(1)=4,\ f(3)=4$

그런데 함수 $f$의 역함수가 존재하므로 함수 $f$는 일대일대응이다.

$\therefore f(1)=2, f(3)=5$ …… ㉠

또 $f^{-1}(1)-f^{-1}(3)=2$에서

$f^{-1}(1)=3,\ f^{-1}(3)=1$

또는 $f^{-1}(1)=4,\ f^{-1}(3)=2$

또는 $f^{-1}(1)=5,\ f^{-1}(3)=3$

그런데 ㉠에서 $f^{-1}(2)=1,\ f^{-1}(5)=3$이므로

$f^{-1}(1)=4,\ f^{-1}(3)=2$

즉 $f(1)=2,\ f(2)=3,\ f(3)=5,\ f(4)=1$이므로

$f(5)=4$

$\therefore f(4)+f^{-1}(4)=1+5=6$

**답 ②**

## 578

**전략** 주어진 조건에서 $f(-1)=3$, $(f\circ g)(x)=2x+1$임을 이용한다.

$f^{-1}(3)=-1$에서 $f(-1)=3$이므로

$-a+b=3$ …… ㉠

$(f\circ g)^{-1}(2x+1)=x$에서

$(f\circ g)(x)=2x+1$

$f(g(x))=f(x+c)=a(x+c)+b$

$=ax+ac+b$

이므로 $ax+ac+b=2x+1$

$\therefore a=2,\ ac+b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2,\ b=5,\ c=-2$

$\therefore a+b+c=5$

**답 5**

## 579

**전략** 역함수의 성질을 이용하여 $h^{-1}\circ g^{-1}\circ f^{-1}$를 $f\circ g$와 $h$로 나타낸다.

$(h^{-1}\circ g^{-1}\circ f^{-1})(1)=(h^{-1}\circ(f\circ g)^{-1})(1)$

$=h^{-1}((f\circ g)^{-1}(1))$

$(f\circ g)^{-1}(1)=k$라 하면 $(f\circ g)(k)=1$이므로

$2k-3=1 \quad \therefore k=2$

$\therefore (h^{-1}\circ g^{-1}\circ f^{-1})(1)=h^{-1}((f\circ g)^{-1}(1))$

$=h^{-1}(2)$

$h^{-1}(2)=l$이라 하면 $h(l)=2$이므로

$l+1=2 \quad \therefore l=1$

$\therefore (h^{-1}\circ g^{-1}\circ f^{-1})(1)=h^{-1}(2)=1$

**답 1**

**다른 풀이** $h^{-1}\circ g^{-1}\circ f^{-1}=(f\circ g\circ h)^{-1}$이고

$(f\circ g\circ h)(x)=(f\circ g)(h(x))$

$=(f\circ g)(x+1)$

$=2(x+1)-3=2x-1$

이때 $(f\circ g\circ h)^{-1}(1)=k$라 하면 $(f\circ g\circ h)(k)=1$이므로 $2k-1=1$

$\therefore k=1$

즉 $(f\circ g\circ h)^{-1}(1)=1$이므로

$(h^{-1}\circ g^{-1}\circ f^{-1})(1)=(f\circ g\circ h)^{-1}(1)=1$

## 580

**전략** 역함수의 성질을 이용한다.

$f^{-1}(2)=1$에서 $f(1)=2$이므로

$-1+k=2 \quad \therefore k=3$

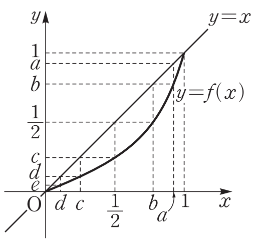
$\therefore f(x)=-x|x|+3$

$(g^{-1}\circ f)^{-1}(2)=(f^{-1}\circ g)(2)=f^{-1}(g(2))$
$=f^{-1}(5)$ $\leftarrow g(2)=2\times2+1=5$
에서 $f^{-1}(5)=a$라 하면 $f(a)=5$이므로
$-a|a|+3=5$ $\therefore a|a|=-2$
(i) $a\geq0$일 때
$|a|=a$이므로 $a^2=-2$
이때 $a\geq0$인 $a$는 존재하지 않는다.
(ii) $a<0$일 때
$|a|=-a$이므로 $-a^2=-2$
$a^2=2$ $\therefore a=-\sqrt{2}$ ($\because a<0$)
(i), (ii)에서 $a=-\sqrt{2}$
즉 $f^{-1}(5)=-\sqrt{2}$이므로
$(g^{-1}\circ f)^{-1}(2)=f^{-1}(5)=-\sqrt{2}$ 답 $-\sqrt{2}$

## 581

**전략** 점선과 $x$축이 만나는 점의 $x$좌표를 구한다.

직선 $y=x$를 이용하여 $x$축과 점선이 만나는 점의 $x$좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.




$g\left(\frac{1}{2}\right)=f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=k$라 하면 $f(k)=\frac{1}{2}$이므로
$k=b$
$\therefore (g\circ g)\left(\frac{1}{2}\right)=g\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)=g(b)$
$g(b)=f^{-1}(b)=l$이라 하면 $f(l)=b$이므로
$l=a$
$\therefore (g\circ g)\left(\frac{1}{2}\right)=g(b)=a$ 답 $a$

## 582

**전략** 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 만나려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나야 함을 이용한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 방정식 $f(x)=g(x)$가 실근을 가지려면 방정식 $f(x)=x$가 실근을 가져야 한다.
$\frac{1}{2}x^2+a=x$에서 $x^2-2x+2a=0$
이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-2a\geq0$
$\therefore a\leq\frac{1}{2}$ 답 $a\leq\frac{1}{2}$

## 583

**전략** $h(x)=3x+1$로 놓고 $f(h(x))$의 역함수를 구한다.

$h(x)=3x+1$이라 하자.
$y=3x+1$로 놓고 $x$에 대하여 풀면
$3x=y-1$ $\therefore x=\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}$
$x$와 $y$를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$
$\therefore h^{-1}(x)=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$
$f(3x+1)=f(h(x))=(f\circ h)(x)$이므로
$f^{-1}(3x+1)=(f\circ h)^{-1}(x)=(h^{-1}\circ f^{-1})(x)$
$=h^{-1}(f^{-1}(x))=h^{-1}(g(x))$
$=\frac{1}{3}g(x)-\frac{1}{3}$
따라서 $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$이므로
$ab=-\frac{1}{9}$ 답 $-\frac{1}{9}$

**다른 풀이** $y=f(3x+1)$로 놓으면
$f^{-1}(y)=3x+1$ $\therefore x=\frac{f^{-1}(y)-1}{3}$
$x$와 $y$를 서로 바꾸면
$y=\frac{f^{-1}(x)-1}{3}=\frac{g(x)-1}{3}$
따라서 함수 $f(3x+1)$의 역함수는
$\frac{1}{3}g(x)-\frac{1}{3}$

## 584

**전략** 조건을 만족시키는 함수 $f$, $g$를 구한다.

ㄱ. $X\cap Y=\{2, 3, 4\}$이므로 조건 (나)에서
$g(2)-f(2)=1$,
$g(3)-f(3)=1$,
$g(4)-f(4)=1$
이때 $g(x)$의 최댓값이 5이므로
$f(2)\leq4$, $f(3)\leq4$, $f(4)\leq4$

조건 ㈎에서 함수 $f$가 일대일대응이므로

$$\{f(2), f(3), f(4)\}=\{2, 3, 4\}$$

이때 $g(x)=f(x)+1\ (x=2, 3, 4)$이므로

$$\{g(2), g(3), g(4)\}=\{3, 4, 5\}=Z \text{ (참)}$$

ㄴ. ㄱ에서 $\{f(2), f(3), f(4)\}=\{2, 3, 4\}$이고

함수 $f$는 일대일대응이므로 $\quad f(1)=5$

$$\therefore f^{-1}(5)=1 \text{ (거짓)}$$

ㄷ. ㄴ에서 $f(1)=5$이므로 $f(3)<g(2)<f(1)$에서

$$f(3)<g(2)<5 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(i) $g(2)=3$인 경우

$f(2)=g(2)-1=2$이고 함수 $f$는 일대일대응이므로

$$f(3)=3 \text{ 또는 } f(3)=4$$

이는 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $g(2)=4$인 경우

$f(2)=g(2)-1=3$이고 함수 $f$는 일대일대응이므로

$$f(3)=2 \text{ 또는 } f(3)=4$$

그런데 ㉠에서 $f(3)<4$이므로

$$f(3)=2$$

$$\therefore f(4)=4$$

(i), (ii)에서

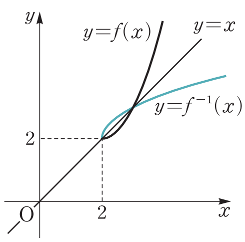
$$f(4)+g(2)=4+4=8 \text{ (거짓)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. **답** ①

## 585

**전략** 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점이 직선 $y=x$ 위에 존재함을 이용한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.




이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 두 교점이 직선 $y=x$ 위에 있으므로 두 교점의 좌표를 $(\alpha, \alpha)$, $(\beta, \beta)$라 하면 $\alpha$, $\beta$는 이차방정식

$$x^2-4x+a=x, \text{ 즉 } x^2-5x+a=0$$

의 두 실근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=5, \ \alpha\beta=a$$

한편 두 교점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이므로

$$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{2}$$

$$(\alpha-\beta)^2=1, \qquad (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1$$

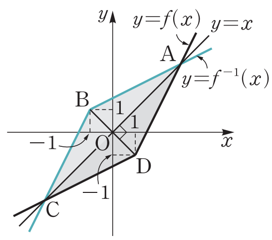
$$25-4a=1 \qquad \therefore a=6$$

**답** 6

## 586

**전략** 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점을 이용한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.




이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

두 교점을 각각 A, C라 하면

(i) $x\ge1$일 때

$$2x-3=x\text{에서} \qquad x=3$$

(ii) $x<1$일 때

$$\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=x\text{에서} \qquad x=-3$$

(i), (ii)에서 $\quad A(3, 3), C(-3, -3)$

$$\therefore \overline{AC}=\sqrt{(3+3)^2+(3+3)^2}=6\sqrt{2}$$

또 위의 그림에서 $B(-1, 1)$, $D(1, -1)$이므로

$$\overline{BD}=\sqrt{(1+1)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{2}$$

이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프로 둘러싸인 사각형 ABCD는 마름모이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}=\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=12$$

**답** 12

**참고** $\overline{AC}\perp\overline{BD}$이고 $\overline{OA}=\overline{OC}$, $\overline{OB}=\overline{OD}$이므로 사각형 ABCD의 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분한다.
따라서 사각형 ABCD는 마름모이다.

# 2 유리함수

Ⅲ. 함수

## 01 유리식

● 본책 248~257쪽

### 587

$\dfrac{2x+y}{5}=\dfrac{x+2y}{7}=k\ (k\neq 0)$로 놓으면

$2x+y=5k,\ x+2y=7k$

두 식을 연립하여 풀면 $x=k,\ y=3k$

$\therefore \dfrac{xy-x^2}{xy+y^2}=\dfrac{k\times 3k-k^2}{k\times 3k+(3k)^2}=\dfrac{2k^2}{12k^2}=\dfrac{1}{6}$

답 $\dfrac{1}{6}$

다른 풀이 $\dfrac{2x+y}{5}=\dfrac{x+2y}{7}$에서

$7(2x+y)=5(x+2y),\quad 14x+7y=5x+10y$

$9x=3y \quad \therefore y=3x$

주어진 식에 $y=3x$를 대입하면

$$\begin{aligned}\frac{xy-x^2}{xy+y^2}&=\frac{x\times 3x-x^2}{x\times 3x+(3x)^2}\\&=\frac{2x^2}{12x^2}=\frac{1}{6}\ (\because x\neq 0)\end{aligned}$$

### 588

(1) $(x+y):(y+z):(z+x)=3:4:5$이므로 0이 아닌 상수 $k$에 대하여

$x+y=3k$ …… ㉠

$y+z=4k$ …… ㉡

$z+x=5k$ …… ㉢

로 놓을 수 있다.

㉠+㉡+㉢을 하면

$2(x+y+z)=12k$

$\therefore x+y+z=6k$ …… ㉣

㉣에 ㉠, ㉡, ㉢을 각각 대입하여 정리하면

$x=2k,\ y=k,\ z=3k$

$\therefore x:y:z=2k:k:3k=2:1:3$

(2) $$\begin{aligned}\frac{xy-yz+zx}{x^2+y^2+z^2}&=\frac{2k\times k-k\times 3k+3k\times 2k}{(2k)^2+k^2+(3k)^2}\\&=\frac{5k^2}{14k^2}=\frac{5}{14}\end{aligned}$$

답 (1) **2 : 1 : 3** (2) $\dfrac{5}{14}$

### 589

답 (1) ㄷ, ㄹ (2) ㄱ, ㄴ, ㅁ, ㅂ

### 590

(1) $\dfrac{1}{x^2-3x}=\dfrac{1}{x(x-3)}$이므로 두 식을 통분하면

$\dfrac{1}{x(x-3)},\ \dfrac{x}{x(x-3)}$

(2) $\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}$,

$\dfrac{3}{x^2+4x+3}=\dfrac{3}{(x+3)(x+1)}$이므로 두 식을 통분하면

$\dfrac{2(x+3)}{(x+3)(x+1)(x-1)}$,

$\dfrac{3(x-1)}{(x+3)(x+1)(x-1)}$

답 풀이 참조

### 591

(1) $$\begin{aligned}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}&=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x-4)}\\&=\frac{x-2}{x-4}\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}&\frac{x^4-y^4}{(x+y)(x^3-y^3)}\\&=\frac{(x^2+y^2)(x+y)(x-y)}{(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)}\\&=\frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}\end{aligned}$$

답 (1) $\dfrac{x-2}{x-4}$ (2) $\dfrac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}$

### 592

(1) $$\begin{aligned}\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x+3}&=\frac{2(x+3)+3(x+2)}{(x+2)(x+3)}\\&=\frac{5x+12}{(x+2)(x+3)}\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\frac{1}{x-1}-\frac{6}{2x+1}&=\frac{2x+1-6(x-1)}{(x-1)(2x+1)}\\&=\frac{-4x+7}{(x-1)(2x+1)}\end{aligned}$$

(3) $\dfrac{x+2}{x^2+3x}\times\dfrac{x+3}{2x}=\dfrac{x+2}{x(x+3)}\times\dfrac{x+3}{2x}$

$=\dfrac{x+2}{2x^2}$

(4) $\dfrac{x^2-1}{x+2}\div\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x+2}\times\dfrac{x}{x+1}$

$=\dfrac{x(x-1)}{x+2}$

답 (1) $\dfrac{5x+12}{(x+2)(x+3)}$　(2) $\dfrac{-4x+7}{(x-1)(2x+1)}$

(3) $\dfrac{x+2}{2x^2}$　(4) $\dfrac{x(x-1)}{x+2}$

## 593

(1) $\dfrac{3x+1}{x^2-1}-\dfrac{2x+3}{x^2+3x+2}+\dfrac{x-2}{x^2+x-2}$

$=\dfrac{3x+1}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{2x+3}{(x+2)(x+1)}$

$+\dfrac{x-2}{(x+2)(x-1)}$

$=\dfrac{(3x+1)(x+2)-(2x+3)(x-1)+(x-2)(x+1)}{(x+2)(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{3x^2+7x+2-(2x^2+x-3)+x^2-x-2}{(x+2)(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{2x^2+5x+3}{(x+2)(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{(2x+3)(x+1)}{(x+2)(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{2x+3}{(x+2)(x-1)}$

(2) $\dfrac{6x^2-x-1}{x^2-9}\times\dfrac{x^2-x-6}{3x^2-2x-1}\div\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2+2x-3}$

$=\dfrac{(3x+1)(2x-1)}{(x+3)(x-3)}\times\dfrac{(x+2)(x-3)}{(3x+1)(x-1)}$

$\div\dfrac{(x+2)(2x-1)}{(x+3)(x-1)}$

$=\dfrac{(3x+1)(2x-1)}{(x+3)(x-3)}\times\dfrac{(x+2)(x-3)}{(3x+1)(x-1)}$

$\times\dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+2)(2x-1)}$

$=1$

답 (1) $\dfrac{2x+3}{(x+2)(x-1)}$　(2) **1**

## 594

주어진 식의 우변을 통분하여 정리하면

$\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+a}{x^2+x+1}$

$=\dfrac{a(x^2+x+1)+(bx+a)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\dfrac{(a+b)x^2+(2a-b)x}{x^3-1}$

즉 $\dfrac{3x}{x^3-1}=\dfrac{(a+b)x^2+(2a-b)x}{x^3-1}$가 $x$에 대한 항등식이므로

$a+b=0,\ 2a-b=3$

두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-1$

$\therefore\ ab=-1$　답 **−1**

다른 풀이 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$이므로 주어진 식의 양변에 $(x-1)(x^2+x+1)$을 곱하면

$3x=a(x^2+x+1)+(bx+a)(x-1)$

$\therefore\ 3x=(a+b)x^2+(2a-b)x$

이 식이 $x$에 대한 항등식이므로

$a+b=0,\ 2a-b=3$

두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-1$

**개념 노트**

**항등식의 성질**

① $ax^2+bx+c=0$이 $x$에 대한 항등식

$\iff a=0,\ b=0,\ c=0$

② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 $x$에 대한 항등식

$\iff a=a',\ b=b',\ c=c'$

## 595

주어진 식의 좌변을 통분하여 정리하면

$\dfrac{2}{x}+\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x-2}$

$=\dfrac{2(x-1)(x-2)+ax(x-2)+bx(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$

$=\dfrac{2x^2-6x+4+ax^2-2ax+bx^2-bx}{x(x-1)(x-2)}$

$=\dfrac{(2+a+b)x^2+(-6-2a-b)x+4}{x(x-1)(x-2)}$

즉

$$\frac{(2+a+b)x^2+(-6-2a-b)x+4}{x(x-1)(x-2)}$$
$$=\frac{-x+4}{x(x-1)(x-2)}$$

가 $x$에 대한 항등식이므로

$2+a+b=0,\ -6-2a-b=-1$

$\therefore\ a+b=-2,\ 2a+b=-5$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=1$

$\therefore\ a-b=-4$

답 **$-4$**

## 596

(1) $\dfrac{x^2-x-3}{x+1}-\dfrac{x^2-4x+6}{x-2}$

$$=\frac{(x+1)(x-2)-1}{x+1}-\frac{(x-2)^2+2}{x-2}$$
$$=\left(x-2-\frac{1}{x+1}\right)-\left(x-2+\frac{2}{x-2}\right)$$
$$=-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x-2}=\frac{-(x-2)-2(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$
$$=\boldsymbol{\frac{-3x}{(x+1)(x-2)}}$$

(2) $\dfrac{x+3}{x+4}+\dfrac{x+7}{x+8}-\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{x+5}{x+6}$

$$=\frac{(x+4)-1}{x+4}+\frac{(x+8)-1}{x+8}$$
$$-\frac{(x+2)-1}{x+2}-\frac{(x+6)-1}{x+6}$$
$$=\left(1-\frac{1}{x+4}\right)+\left(1-\frac{1}{x+8}\right)$$
$$-\left(1-\frac{1}{x+2}\right)-\left(1-\frac{1}{x+6}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)+\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+8}\right)$$
$$=\frac{x+4-(x+2)}{(x+2)(x+4)}+\frac{x+8-(x+6)}{(x+6)(x+8)}$$
$$=\frac{2}{(x+2)(x+4)}+\frac{2}{(x+6)(x+8)}$$
$$=\frac{2(x+6)(x+8)+2(x+2)(x+4)}{(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)}$$
$$=\boldsymbol{\frac{4(x^2+10x+28)}{(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)}}$$

답 **풀이 참조**

## 597

(1) $\dfrac{1}{x^2+x}+\dfrac{2}{x^2+4x+3}+\dfrac{3}{x^2+9x+18}-\dfrac{6}{x^2+6x}$

$$=\frac{1}{x(x+1)}+\frac{2}{(x+1)(x+3)}$$
$$+\frac{3}{(x+3)(x+6)}-\frac{6}{x(x+6)}$$
$$=\left(\cancel{\frac{1}{x}}-\cancel{\frac{1}{x+1}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{x+1}}-\cancel{\frac{1}{x+3}}\right)$$
$$+\left(\cancel{\frac{1}{x+3}}-\cancel{\frac{1}{x+6}}\right)-\left(\cancel{\frac{1}{x}}-\cancel{\frac{1}{x+6}}\right)$$
$$=0$$

(2) $\dfrac{1}{1\times3}+\dfrac{1}{3\times5}+\dfrac{1}{5\times7}+\dfrac{1}{7\times9}+\dfrac{1}{9\times11}$

$$=\frac{1}{3-1}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{5-3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$$
$$+\frac{1}{7-5}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{9-7}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)$$
$$+\frac{1}{11-9}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\cancel{\frac{1}{7}}-\cancel{\frac{1}{9}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{9}}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{5}{11}$$

답 (1) **0** (2) $\boldsymbol{\frac{5}{11}}$

## 598

$$\frac{2}{x(x-2)}+\frac{4}{x(x+4)}+\frac{6}{(x+4)(x+10)}$$
$$=\left(\frac{1}{x-2}-\cancel{\frac{1}{x}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{x}}-\cancel{\frac{1}{x+4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{x+4}}-\frac{1}{x+10}\right)$$
$$=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+10}=\frac{x+10-(x-2)}{(x-2)(x+10)}$$
$$=\frac{12}{(x-2)(x+10)}$$

즉 $\dfrac{12}{(x-2)(x+10)}=\dfrac{a}{(x+b)(x+c)}$가 $x$에 대한 항등식이므로

$a=12,\ b=-2,\ c=10$ 또는

$a=12,\ b=10,\ c=-2$

$\therefore\ a+b+c=20$

답 **20**

## 599

(1) $\dfrac{\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}}{\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+4}}=\dfrac{\dfrac{x+3-(x+2)}{(x+2)(x+3)}}{\dfrac{x+4-(x+3)}{(x+3)(x+4)}}$

$=\dfrac{\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}}{\dfrac{1}{(x+3)(x+4)}}$

$=\dfrac{(x+3)(x+4)}{(x+2)(x+3)}$

$=\dfrac{x+4}{x+2}$

(2) $\dfrac{1-\dfrac{2x-y}{x+y}}{\dfrac{y}{x+y}-1}=\dfrac{\dfrac{x+y-(2x-y)}{x+y}}{\dfrac{y-(x+y)}{x+y}}$

$=\dfrac{\dfrac{-x+2y}{x+y}}{\dfrac{-x}{x+y}}$

$=\dfrac{(-x+2y)(x+y)}{-x(x+y)}$

$=\dfrac{x-2y}{x}$

(3) $\dfrac{1+\dfrac{2}{x}}{x-3-\dfrac{5}{x+1}}=\dfrac{\dfrac{x+2}{x}}{\dfrac{(x-3)(x+1)-5}{x+1}}$

$=\dfrac{\dfrac{x+2}{x}}{\dfrac{x^2-2x-8}{x+1}}$

$=\dfrac{(x+2)(x+1)}{x(x+2)(x-4)}$

$=\dfrac{x+1}{x(x-4)}$

답 (1) $\boldsymbol{\dfrac{x+4}{x+2}}$ (2) $\boldsymbol{\dfrac{x-2y}{x}}$ (3) $\boldsymbol{\dfrac{x+1}{x(x-4)}}$

다른 풀이 (2) (주어진 식) $=\dfrac{\left(1-\dfrac{2x-y}{x+y}\right)\times(x+y)}{\left(\dfrac{y}{x+y}-1\right)\times(x+y)}$

$=\dfrac{x+y-(2x-y)}{y-(x+y)}$

$=\dfrac{x-2y}{x}$

## 600

$\dfrac{17}{72}=\dfrac{1}{\dfrac{72}{17}}=\dfrac{1}{4+\dfrac{4}{17}}$

$=\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{\dfrac{17}{4}}}=\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{4}}}$

따라서 $a=4$, $b=4$, $c=4$이므로

$a+b+c=12$

답 **12**

## 601

(1) $2x^2-5x-2=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 $x$로 나누면

$2x-5-\dfrac{2}{x}=0,\qquad 2x-\dfrac{2}{x}=5$

$\therefore\ x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$

$\therefore\ 8x^3-4x^2-\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{8}{x^3}$

$=8\left(x^3-\dfrac{1}{x^3}\right)-4\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)$

$=8\left\{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\right\}$

$-4\left\{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2\right\}$

$=8\times\left\{\left(\dfrac{5}{2}\right)^3+3\times\dfrac{5}{2}\right\}-4\times\left\{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2+2\right\}$

$=185-33$

$=152$

(2) (주어진 식)

$=\dfrac{x+y}{(1+x)(1+y)(x+y)}$

$+\dfrac{x(1+y)}{(1+x)(x+y)(1+y)}$

$+\dfrac{y(1+x)}{(1+y)(x+y)(1+x)}$

$=\dfrac{x+y+x(1+y)+y(1+x)}{(1+x)(1+y)(x+y)}$

$=\dfrac{2x+2y+2xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$

$=\dfrac{2(x+y+xy)}{(1+x)(1+y)(x+y)}$

$=0$

답 (1) **152** (2) **0**

## 연습 문제

● 본책 258쪽

### 602

**전략** 주어진 식을 통분하여 계산한다.

(주어진 식)

$$=\frac{2+x+2-x}{(2-x)(2+x)}+\frac{4}{4+x^2}+\frac{32}{16+x^4}$$

$$=\frac{4}{4-x^2}+\frac{4}{4+x^2}+\frac{32}{16+x^4}$$

$$=\frac{4(4+x^2)+4(4-x^2)}{(4-x^2)(4+x^2)}+\frac{32}{16+x^4}$$

$$=\frac{32}{16-x^4}+\frac{32}{16+x^4}$$

$$=\frac{32(16+x^4)+32(16-x^4)}{(16-x^4)(16+x^4)}$$

$$=\frac{1024}{256-x^8}$$

답 $\mathbf{\dfrac{1024}{256-x^8}}$

### 603

**전략** 분자를 분모로 나누어 다항식과 분자가 상수인 분수식의 합으로 변형한다.

주어진 식의 좌변을 정리하면

$$\frac{2x+3}{x+1}-\frac{3x+7}{x+2}+\frac{3x+10}{x+3}-\frac{2x+9}{x+4}$$

$$=\frac{2(x+1)+1}{x+1}-\frac{3(x+2)+1}{x+2}$$

$$+\frac{3(x+3)+1}{x+3}-\frac{2(x+4)+1}{x+4}$$

$$=\left(2+\frac{1}{x+1}\right)-\left(3+\frac{1}{x+2}\right)$$

$$+\left(3+\frac{1}{x+3}\right)-\left(2+\frac{1}{x+4}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}\right)$$

$$=\frac{x+2-(x+1)}{(x+1)(x+2)}+\frac{x+4-(x+3)}{(x+3)(x+4)}$$

$$=\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}$$

$$=\frac{(x+3)(x+4)+(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

$$=\frac{2x^2+10x+14}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

즉

$$\frac{2x^2+10x+14}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

$$=\frac{ax^2+bx+c}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

가 $x$에 대한 항등식이므로

$a=2,\ b=10,\ c=14$

$\therefore\ abc=280$

답 **280**

### 604

**전략** 분모와 분자를 각각 통분하여 간단히 한다.

$$\frac{\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+3}}{\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+3}}+\frac{\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-3}}{\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-3}}$$

$$=\frac{\frac{x+3-(x-2)}{(x-2)(x+3)}}{\frac{x+3+x-2}{(x-2)(x+3)}}+\frac{\frac{x-3-(x+2)}{(x+2)(x-3)}}{\frac{x-3+x+2}{(x+2)(x-3)}}$$

$$=\frac{5(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+3)(2x+1)}$$

$$+\frac{-5(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-3)(2x-1)}$$

$$=\frac{5}{2x+1}+\frac{-5}{2x-1}=\frac{5(2x-1)-5(2x+1)}{(2x+1)(2x-1)}$$

$$=\frac{-10}{(2x+1)(2x-1)}$$

답 $\mathbf{\dfrac{-10}{(2x+1)(2x-1)}}$

### 605

**전략** $\frac{1}{f(x)}$을 부분분수로 변형한다.

$f(x)=\frac{4x^2-1}{3}=\frac{(2x-1)(2x+1)}{3}$이므로

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{3}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}\right)$$

$$\therefore\ \frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(20)}$$

$$=\frac{3}{2}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.+\left(\cancel{\frac{1}{39}}-\frac{1}{41}\right)\right\}$$

$$=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{41}\right)=\frac{60}{41}$$

답 $\mathbf{\dfrac{60}{41}}$

## 606

**전략** $x^2-3x+1=0$을 변형하여 $\frac{1}{3-x}=x$임을 이용한다.

$x^2-3x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 $x$로 나누면

$$x-3+\frac{1}{x}=0,\qquad 3-x=\frac{1}{x}$$

$$\therefore\ \frac{1}{3-x}=x$$

$$\therefore\ 3-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{3-x}}}=3-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{3-x}}$$

$$=3-\frac{1}{3-x}$$

$$=3-x$$

$$=\frac{1}{x}$$

**답** ④

## 607

**전략** 주어진 유리식을 통분한 후 분자를 인수분해한다.

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$에서 $\frac{ab+bc+ca}{abc}=0$

$\therefore\ ab+bc+ca=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+a)(b+c)}+\frac{c^2}{(c+b)(c+a)}+\frac{3abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{a^2(b+c)}{(a+b)(a+c)(b+c)}+\frac{b^2(c+a)}{(b+a)(b+c)(c+a)}+\frac{c^2(a+b)}{(c+b)(c+a)(a+b)}+\frac{3abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

이때

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$$

$$=a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b+3abc$$

$$=(a^2b+b^2a+abc)+(b^2c+c^2b+abc)+(a^2c+c^2a+abc)$$

$$=ab(a+b+c)+bc(a+b+c)+ca(a+b+c)$$

$$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

이므로

$$(\text{주어진 식})=\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=0\ (\because\ ㉠)$$

**답** **0**

## 02 유리함수

● 본책 259~270쪽

## 608

(1) $\{x\,|\,x\neq0$인 실수$\}$

(2) $x+3=0$에서 $x=-3$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x\,|\,x\neq-3$인 실수$\}$

(3) $3x-5=0$에서 $x=\frac{5}{3}$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{5}{3}\text{인 실수}\right\}$

(4) $x^2-4=0$에서 $x=\pm2$

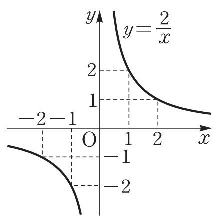
따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x\,|\,x\neq\pm2$인 실수$\}$

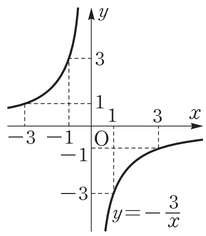
**답** 풀이 참조

## 609

(1) $y=\frac{2}{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, **점근선의 방정식은 $x=0$, $y=0$**이다.

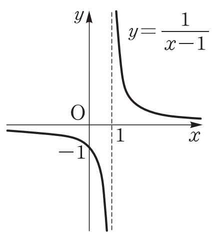



(2) $y=-\frac{3}{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, **점근선의 방정식은 $x=0$, $y=0$**이다.

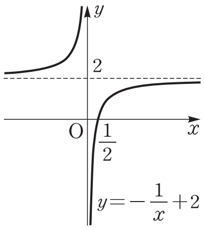



(3) $y=\frac{1}{x-1}$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, **점근선의 방정식은 $x=1$, $y=0$**이다.



(4) $y=-\dfrac{1}{x}+2$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.




따라서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, **점근선의 방정식은 $\boldsymbol{x=0}$, $\boldsymbol{y=2}$**이다.

**답** 풀이 참조

## 610

(1) $y=\dfrac{4x-15}{x-3}=\dfrac{4(x-3)-3}{x-3}$

$=-\dfrac{3}{x-3}+4$

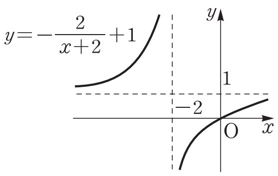
(2) $y=\dfrac{-5x-7}{x+2}=\dfrac{-5(x+2)+3}{x+2}$

$=\dfrac{3}{x+2}-5$

**답** (1) $\boldsymbol{y=-\dfrac{3}{x-3}+4}$ (2) $\boldsymbol{y=\dfrac{3}{x+2}-5}$

## 611

(1) $y=-\dfrac{2}{x+2}+1$의 그래프는 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-2$만큼, $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.




따라서 그래프는 위의 그림과 같고,

**정의역은** $\{x|x\neq-2$**인 실수**$\}$

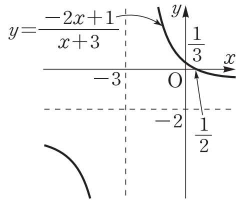
**치역은** $\{y|y\neq1$**인 실수**$\}$

**점근선의 방정식은** $\boldsymbol{x=-2,\ y=1}$

(2) $y=\dfrac{-2x+1}{x+3}=\dfrac{-2(x+3)+7}{x+3}=\dfrac{7}{x+3}-2$

이므로 주어진 유리함수의 그래프는 $y=\dfrac{7}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-3$만큼, $y$축의 방향으로 $-2$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고,




**정의역은**

$\{x|x\neq-3$**인 실수**$\}$

**치역은**

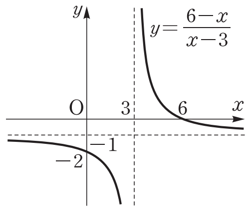
$\{y|y\neq-2$**인 실수**$\}$

**점근선의 방정식은** $\boldsymbol{x=-3,\ y=-2}$

(3) $y=\dfrac{6-x}{x-3}=\dfrac{-(x-3)+3}{x-3}=\dfrac{3}{x-3}-1$

이므로 주어진 유리함수의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 3만큼, $y$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고,




**정의역은**

$\{x|x\neq3$**인 실수**$\}$

**치역은**

$\{y|y\neq-1$**인 실수**$\}$

**점근선의 방정식은** $\boldsymbol{x=3,\ y=-1}$

**답** 풀이 참조

## 612

$y=-\dfrac{3}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 3만큼, $y$축의 방향으로 $-2$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\dfrac{3}{x-3}-2=\dfrac{-2x+3}{x-3}$

이 식이 $y=\dfrac{ax+b}{x-c}$와 같아야 하므로

$a=-2,\ b=3,\ c=3$

$\therefore\ abc=-18$

**답** $\boldsymbol{-18}$

## 613

ㄱ. $y=\dfrac{x-1}{x-3}=\dfrac{(x-3)+2}{x-3}=\dfrac{2}{x-3}+1$

이므로 $y=\dfrac{x-1}{x-3}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-3$만큼, $y$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동하면 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프와 겹쳐진다.

ㄴ. $y=\dfrac{2x+2}{x+2}=\dfrac{2(x+2)-2}{x+2}=-\dfrac{2}{x+2}+2$

이므로 $y=\dfrac{2x+2}{x+2}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 2만큼, $y$축의 방향으로 $-2$만큼 평행이동하면 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프와 겹쳐진다.

ㄷ. $y=\dfrac{-4x-2}{x+1}=\dfrac{-4(x+1)+2}{x+1}=\dfrac{2}{x+1}-4$

이므로 $y=\dfrac{-4x-2}{x+1}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 1만큼, $y$축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프와 겹쳐진다.

이상에서 평행이동에 의하여 그 그래프가 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

## 614

$y=\dfrac{4x+3}{x+1}=\dfrac{4(x+1)-1}{x+1}$

$=-\dfrac{1}{x+1}+4$

이므로 이 함수의 그래프를 $x$축의 방향으로 $a$만큼, $y$축의 방향으로 $b$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\dfrac{1}{x-a+1}+b+4$ …… ㉠

이때 $y=\dfrac{3x-4}{x-1}=\dfrac{3(x-1)-1}{x-1}=-\dfrac{1}{x-1}+3$이고, 이 함수의 그래프와 ㉠의 그래프가 일치하므로

$-a+1=-1,\ b+4=3$

$\therefore\ a=2,\ b=-1$

$\therefore\ a+b=1$

답 1

다른 풀이 $y=\dfrac{4x+3}{x+1}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $a$만큼, $y$축의 방향으로 $b$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\frac{4(x-a)+3}{(x-a)+1}+b$$
$$=\frac{4x-4a+3+b(x-a+1)}{x-a+1}$$
$$=\frac{(4+b)x-ab-4a+b+3}{x-a+1}$$

이 함수의 그래프가 함수 $y=\dfrac{3x-4}{x-1}$의 그래프와 일치하므로

$-a+1=-1,\ 4+b=3,$

$-ab-4a+b+3=-4$

$\therefore\ a=2,\ b=-1$

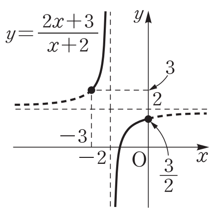
## 615

$y=\dfrac{2x+3}{x+2}=\dfrac{2(x+2)-1}{x+2}$

$=-\dfrac{1}{x+2}+2$

이므로 $y=\dfrac{2x+3}{x+2}$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-2$만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$y=\dfrac{3}{2}$일 때 $x=0$, $y=3$일 때 $x=-3$이므로 오른쪽 그림에서 치역이 $\left\{y\,\middle|\,y\le\dfrac{3}{2}\text{ 또는 }y\ge3\right\}$일 때, 정의역은




$\{x\,|\,-3\le x<-2\text{ 또는 }-2<x\le0\}$

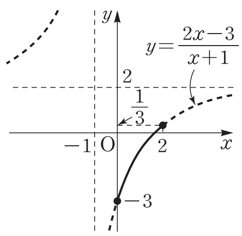
답 $\{x\,|\,-3\le x<-2\text{ 또는 }-2<x\le0\}$

## 616

$y=\dfrac{2x-3}{x+1}=\dfrac{2(x+1)-5}{x+1}=-\dfrac{5}{x+1}+2$

이므로 $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$의 그래프는 $y=-\dfrac{5}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-1$만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $0\le x\le2$에서 $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로




$x=2$일 때 최댓값 $\dfrac{1}{3}$,

$x=0$일 때 최솟값 $-3$

을 갖는다.

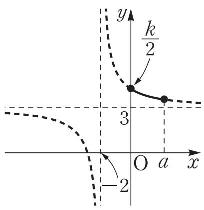
답 최댓값: $\dfrac{1}{3}$, 최솟값: $-3$

## 617

$$y=\frac{3x+k}{x+2}=\frac{3(x+2)+k-6}{x+2}=\frac{k-6}{x+2}+3$$

이므로 $y=\frac{3x+k}{x+2}$의 그래프는 $y=\frac{k-6}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-2$만큼, $y$축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

이때 $k>6$에서 $k-6>0$이므로 $0\le x\le a$에서 주어진 유리함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




따라서 $x=0$일 때 최댓값 5를 가지므로

$\frac{k}{2}=5$　　$\therefore k=10$

$x=a$일 때 최솟값 4를 가지므로

$\frac{3a+10}{a+2}=4$,　　$3a+10=4a+8$

$\therefore a=2$

$\therefore a+k=2+10=12$

답 **12**

## 618

$$y=\frac{5x+6}{2x+3}=\frac{\frac{5}{2}(2x+3)-\frac{3}{2}}{2x+3}=\frac{-\frac{3}{2}}{2x+3}+\frac{5}{2}$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\frac{3}{2}$, $y=\frac{5}{2}$

따라서 주어진 유리함수의 그래프는 두 점근선의 교점 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$에 대하여 대칭이므로

$a=-\frac{3}{2}$, $b=\frac{5}{2}$

$\therefore a+b=1$

답 **1**

## 619

$$y=\frac{3x+4}{x+2}=\frac{3(x+2)-2}{x+2}=-\frac{2}{x+2}+3$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-2$, $y=3$

이때 주어진 유리함수의 그래프가 직선 $y=-x+k$에 대하여 대칭이므로 직선 $y=-x+k$는 두 점근선의 교점 $(-2, 3)$을 지난다.

즉 $3=-(-2)+k$이므로

$k=1$

답 **1**

## 620

$$y=\frac{bx+3}{x+a}=\frac{b(x+a)-ab+3}{x+a}=\frac{-ab+3}{x+a}+b$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-a$, $y=b$

이때 주어진 유리함수의 그래프가 두 직선 $y=x+6$, $y=-x-2$에 대하여 대칭이므로 두 직선은 각각 두 점근선의 교점 $(-a, b)$를 지난다.

즉 $b=-a+6$, $b=a-2$이므로

$a=4$, $b=2$

$\therefore ab=8$

답 **8**

다른 풀이 $y=\frac{bx+3}{x+a}$의 그래프는 두 직선 $y=x+6$, $y=-x-2$에 대하여 대칭이므로 두 직선의 교점 $(-4, 2)$에 대하여 대칭이다.

즉 점근선의 방정식은 $x=-4$, $y=2$이므로 함수의 식을 $y=\frac{k}{x+4}+2$ $(k\ne0)$로 놓으면

$$y=\frac{k}{x+4}+2=\frac{k+2(x+4)}{x+4}=\frac{2x+8+k}{x+4}$$

따라서 $\frac{2x+8+k}{x+4}=\frac{bx+3}{x+a}$이므로

$a=4$, $b=2$, $k=-5$

## 621

$y=\frac{k}{x+a}+b$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=3$, $y=2$이므로　　$a=-3$, $b=2$

따라서 함수 $y=\frac{k}{x-3}+2$의 그래프가 점 $(2, 0)$을 지나므로

$0=-k+2$　　$\therefore k=2$

$\therefore a+b+k=-3+2+2=1$

답 **1**

## 622

점근선의 방정식이 $x=2$, $y=3$이므로 함수의 식을

$y=\frac{k}{x-2}+3$ $(k\ne0)$　　…… ㉠

으로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(3,\ 1)$을 지나므로

$1=k+3 \qquad \therefore k=-2$

㉠에 $k=-2$를 대입하면

$$y=\frac{-2}{x-2}+3=\frac{-2+3(x-2)}{x-2}=\frac{3x-8}{x-2}$$

$\therefore a=-2,\ b=3,\ c=-8$

답 $\boldsymbol{a=-2,\ b=3,\ c=-8}$

## 623

$y=\dfrac{bx-7}{x+a}$의 정의역이 $\{x\,|\,x\neq-2$인 실수$\}$, 치역이 $\{y\,|\,y\neq4$인 실수$\}$이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-2,\ y=4$

따라서 함수의 식을 $y=\dfrac{k}{x+2}+4\ (k\neq0)$로 놓으면

$$y=\frac{k}{x+2}+4=\frac{k+4(x+2)}{x+2}=\frac{4x+8+k}{x+2}$$

즉 $\dfrac{bx-7}{x+a}=\dfrac{4x+8+k}{x+2}$이므로

$a=2,\ b=4,\ k=-15$

$\therefore ab=8$

답 **8**

## 624

유리함수 $y=-\dfrac{3}{x}+3$의 그래프와 직선 $y=3x+a$가 한 점에서 만나려면 방정식

$-\dfrac{3}{x}+3=3x+a$, 즉 $3x^2+(a-3)x+3=0$

이 중근을 가져야 한다.

이차방정식 $3x^2+(a-3)x+3=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=(a-3)^2-4\times3\times3=0$

$a^2-6a-27=0, \qquad (a+3)(a-9)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=9$

따라서 모든 실수 $a$의 값의 합은

$-3+9=6$

답 **6**

## 625

유리함수 $y=\dfrac{2}{x-1}+2$의 그래프와 직선 $mx-y-2m=0$, 즉 $y=m(x-2)$가 만나려면 방정식

$\dfrac{2}{x-1}+2=m(x-2)$, 즉

$mx^2-(3m+2)x+2m=0$

이 실근을 가져야 한다.

(i) $m=0$일 때

$-2x=0$에서 $\qquad x=0$

따라서 방정식의 실근이 존재하므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $m\neq0$일 때

이차방정식 $mx^2-(3m+2)x+2m=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=(3m+2)^2-4\times m\times 2m\geq0$

$\therefore m^2+12m+4\geq0$

이때 이차방정식 $m^2+12m+4=0$의 두 근이 $m=-6\pm4\sqrt{2}$이므로 부등식의 해는

$m\leq-6-4\sqrt{2}$ 또는 $-6+4\sqrt{2}\leq m<0$

또는 $m>0$

(i), (ii)에서 구하는 $m$의 값의 범위는

$m\leq-6-4\sqrt{2}$ 또는 $m\geq-6+4\sqrt{2}$

답 $\boldsymbol{m\leq-6-4\sqrt{2}}$ **또는** $\boldsymbol{m\geq-6+4\sqrt{2}}$

## 626

$f(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$에 대하여

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$$
$$=1-\frac{1}{\frac{x-1}{x}}=1-\frac{x}{x-1}=-\frac{1}{x-1}$$

$$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))$$
$$=1-\frac{1}{-\frac{1}{x-1}}=1+x-1=x$$

$$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=f(f^3(x))=f(x)$$
$$=1-\frac{1}{x}$$

$$f^5(x)=(f\circ f^4)(x)=f(f^4(x))=f(f(x))$$
$$=-\frac{1}{x-1}$$

$$f^6(x)=(f\circ f^5)(x)=f(f^5(x))=f(f^2(x))$$
$$=x$$

$\vdots$

따라서 자연수 $k$에 대하여

$$f^n(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{1}{x} & (n=3k-2) \\ -\dfrac{1}{x-1} & (n=3k-1) \\ x & (n=3k) \end{cases}$$

$$\therefore f^{200}(x)=f^{3\times 67-1}(x)=-\frac{1}{x-1}$$

답 $\boldsymbol{f^{200}(x)=-\dfrac{1}{x-1}}$

**해설 Focus**

함수 $f$를 $n$번 합성하는 문제는 $f^1$, $f^2$, $f^3$, …을 직접 구한 다음 $f^n$을 추론하여 해결할 수 있다.
특히 $f^n(x)=x$를 만족시키는 자연수 $n$이 존재하면 $f^n$이 반복되는 규칙을 이용한다.

## 627

주어진 그래프에서

$$f(1)=0,\ f(0)=1$$

이므로

$$f^1(1)=f(1)=0$$
$$f^2(1)=(f\circ f^1)(1)=f(f^1(1))=f(0)=1$$
$$f^3(1)=(f\circ f^2)(1)=f(f^2(1))=f(1)=0$$
$$f^4(1)=(f\circ f^3)(1)=f(f^3(1))=f(0)=1$$
$$\vdots$$

따라서 자연수 $n$에 대하여

$$f^n(1)=\begin{cases} 0 & (n\text{은 홀수}) \\ 1 & (n\text{은 짝수}) \end{cases}$$

$$\therefore f^{500}(1)=1$$

답 **1**

다른 풀이 주어진 유리함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=-1$이므로

$$f(x)=\frac{k}{x+1}-1\ (k>0) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

로 놓을 수 있다.
㉠의 그래프가 점 $(1, 0)$을 지나므로

$$0=\frac{k}{2}-1 \qquad \therefore k=2$$

㉠에 $k=2$를 대입하면

$$f(x)=\frac{2}{x+1}-1=\frac{-x+1}{x+1}$$

$f(x)=\dfrac{-x+1}{x+1}$에서

$$f^2(x)=(f\circ f^1)(x)=f(f(x))$$
$$=\frac{-\dfrac{-x+1}{x+1}+1}{\dfrac{-x+1}{x+1}+1}=\frac{\dfrac{2x}{x+1}}{\dfrac{2}{x+1}}$$
$$=\frac{2x}{2}=x$$
$$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f(x)$$
$$=\frac{-x+1}{x+1}$$
$$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=f(f^3(x))=f(f(x))$$
$$=x$$
$$\vdots$$

따라서 자연수 $n$에 대하여

$$f^n(x)=\begin{cases} \dfrac{-x+1}{x+1} & (n\text{은 홀수}) \\ x & (n\text{은 짝수}) \end{cases}$$

즉 $f^{500}(x)=x$이므로 $\qquad f^{500}(1)=1$

## 628

$y=\dfrac{ax+b}{2x+c}$로 놓고 $x$에 대하여 풀면

$$y(2x+c)=ax+b, \qquad (2y-a)x=-cy+b$$
$$\therefore x=\frac{-cy+b}{2y-a}$$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 $\qquad y=\dfrac{-cx+b}{2x-a}$

따라서 $\dfrac{-cx+b}{2x-a}=\dfrac{-x+3}{2x-1}$이므로

$$a=1,\ b=3,\ c=1$$

답 $\boldsymbol{a=1,\ b=3,\ c=1}$

다른 풀이 $(f^{-1})^{-1}=f$이므로 $f^{-1}(x)$의 역함수는 $f(x)$이다.

$y=\dfrac{-x+3}{2x-1}$으로 놓고 $x$에 대하여 풀면

$$y(2x-1)=-x+3, \qquad (2y+1)x=y+3$$
$$\therefore x=\frac{y+3}{2y+1}$$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 $\qquad y=\dfrac{x+3}{2x+1}$

따라서 $\dfrac{x+3}{2x+1}=\dfrac{ax+b}{2x+c}$이므로

$$a=1,\ b=3,\ c=1$$

## 629

$(f\circ g)(x)=x$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

$y=\dfrac{2x+1}{x-2}$로 놓고 $x$에 대하여 풀면

$$y(x-2)=2x+1, \qquad (y-2)x=2y+1$$

$$\therefore\ x=\frac{2y+1}{y-2}$$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 $\quad y=\dfrac{2x+1}{x-2}$

$$\therefore\ g(x)=\frac{2x+1}{x-2}$$

$$\therefore\ (g\circ g)(3)=g(g(3)) \quad \leftarrow g(3)=\frac{2\times3+1}{3-2}=7$$

$$=g(7)=\frac{2\times7+1}{7-2}$$

$$=3$$

답 **3**

다른 풀이 $g(3)=k$라 하면 $f(k)=3$이므로

$$\frac{2k+1}{k-2}=3, \qquad 2k+1=3k-6$$

$$\therefore\ k=7 \qquad \therefore\ g(3)=7$$

$g(7)=l$이라 하면 $f(l)=7$이므로

$$\frac{2l+1}{l-2}=7, \qquad 2l+1=7l-14$$

$$\therefore\ l=3 \qquad \therefore\ g(7)=3$$

$$\therefore\ (g\circ g)(3)=g(g(3))=g(7)=3$$

## 630

$f(x)=\dfrac{ax+b}{-x+2}$의 그래프가 점 $(3,\ -9)$를 지나므로

$$-9=\frac{3a+b}{-3+2} \qquad \therefore\ 3a+b=9 \quad \cdots\cdots\ ㉠$$

또 함수 $f(x)$의 역함수를 $f^{-1}(x)$라 하면 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 $(3,\ -9)$를 지나므로

$$f^{-1}(3)=-9 \qquad \therefore\ f(-9)=3$$

즉 $3=\dfrac{-9a+b}{9+2}$이므로

$$-9a+b=33 \quad \cdots\cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-2,\ b=15$$

답 $\boldsymbol{a=-2,\ b=15}$

**개념 노트**

함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$가 존재할 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(a,\ b)$를 지나면

$$f(a)=b \Longleftrightarrow f^{-1}(b)=a$$

## 연습 문제

본책 271~273쪽

## 631

**전략** 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=p$, $y=q$임을 이용한다.

$$y=\frac{ax+3}{2x+1}=\frac{\frac{a}{2}(2x+1)-\frac{a}{2}+3}{2x+1}$$

$$=\frac{-\frac{a}{2}+3}{2x+1}+\frac{a}{2}$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=-\frac{1}{2},\ y=\frac{a}{2}$$

$$y=\frac{x-2}{3x+b}=\frac{\frac{1}{3}(3x+b)-\frac{b}{3}-2}{3x+b}$$

$$=-\frac{\frac{b}{3}+2}{3x+b}+\frac{1}{3}$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=-\frac{b}{3},\ y=\frac{1}{3}$$

따라서 $-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{b}{3}$, $\dfrac{a}{2}=\dfrac{1}{3}$이므로

$$a=\frac{2}{3},\ b=\frac{3}{2} \qquad \therefore\ ab=1$$

답 **1**

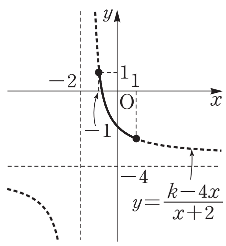
## 632

**전략** $y=\dfrac{k-4x}{x+2}$를 $y=\dfrac{m}{x-p}+q$의 꼴로 변형하고 주어진 범위에서 그래프를 그려 본다.

$$y=\frac{k-4x}{x+2}=\frac{-4(x+2)+k+8}{x+2}=\frac{k+8}{x+2}-4$$

이므로 $y=\dfrac{k-4x}{x+2}$의 그래프는 $y=\dfrac{k+8}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-2$만큼, $y$축의 방향으로 $-4$만큼 평행이동한 것이다.

이때 $k>-8$에서 $k+8>0$이므로 $-1\le x\le1$에서 $y=\dfrac{k-4x}{x+2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




따라서 $x=-1$일 때 최댓값 1을 가지므로

$$\frac{k+4}{-1+2}=1 \qquad \therefore k=-3$$

또 $x=1$일 때 최솟값 $m$을 가지므로

$$m=\frac{-3-4}{1+2}=-\frac{7}{3}$$

$$\therefore k+m=-\frac{16}{3}$$

답 $-\frac{16}{3}$

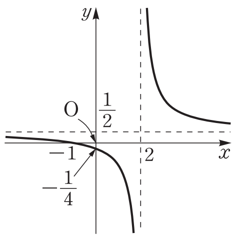
## 633

**전략** $y=\frac{x+1}{2x-4}$을 $y=\frac{k}{x-p}+q$의 꼴로 변형하여 그래프를 그려 본다.

$$y=\frac{x+1}{2x-4}=\frac{\frac{1}{2}(2x-4)+3}{2x-4}=\frac{3}{2x-4}+\frac{1}{2}$$

이므로 $y=\frac{x+1}{2x-4}$의 그래프는 $y=\frac{3}{2x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 2만큼, $y$축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

③ 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 모든 사분면을 지난다.




④ 그래프는 두 점근선의 교점 $\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$을 지나고 기울기가 $\pm1$인 두 직선에 대하여 대칭이다.

점 $\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$을 지나고 기울기가 $\pm1$인 직선의 방정식은 $\quad y-\frac{1}{2}=\pm(x-2)$

$$\therefore y=x-\frac{3}{2},\ y=-x+\frac{5}{2}$$

즉 두 직선 $y=x-\frac{3}{2}$, $y=-x+\frac{5}{2}$에 대하여 대칭이다.

답 ④

## 634

**전략** $f^n(6)$의 값의 규칙성을 파악한다.

$f^1(6)=f(6)=5$

$f^2(6)=(f\circ f^1)(6)=f(f^1(6))=f(5)=6$

$f^3(6)=(f\circ f^2)(6)=f(f^2(6))=f(6)=5$

$f^4(6)=(f\circ f^3)(6)=f(f^3(6))=f(5)=6$

$\vdots$

따라서 자연수 $n$에 대하여

$$f^n(6)=\begin{cases}5 & (n\text{은 홀수})\\ 6 & (n\text{은 짝수})\end{cases}$$

$$\therefore f^{2024}(6)=6$$

답 6

**다른 풀이** $f^1(x)=f(x)=\frac{3x-3}{x-3}$이므로

$$f^2(x)=(f\circ f^1)(x)=f(f(x))$$

$$=\frac{3\times\frac{3x-3}{x-3}-3}{\frac{3x-3}{x-3}-3}=\frac{\frac{6x}{x-3}}{\frac{6}{x-3}}=x$$

$\vdots$

따라서 자연수 $n$에 대하여

$$f^n(x)=\begin{cases}\frac{3x-3}{x-3} & (n\text{은 홀수})\\ x & (n\text{은 짝수})\end{cases}$$

즉 $f^{2024}(x)=x$이므로 $\quad f^{2024}(6)=6$

## 635

**전략** 역함수의 성질을 이용한다.

$$(g^{-1}\circ f)^{-1}(2)=(f^{-1}\circ g)(2)$$
$$=f^{-1}(g(2))$$
$$=f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) \qquad \leftarrow g(2)=\frac{3\times2-1}{2}=\frac{5}{2}$$

$f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)=k$라 하면 $f(k)=\frac{5}{2}$이므로

$$\frac{2k}{k+1}=\frac{5}{2}, \qquad 4k=5k+5 \qquad \therefore k=-5$$

즉 $f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)=-5$이므로

$$(g^{-1}\circ f)^{-1}(2)=f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)=-5$$

답 $-5$

## 636

**전략** 주어진 두 함수가 역함수 관계임을 이용한다.

주어진 두 함수의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수는 역함수 관계이다.

$y=-\frac{2x+3}{2x+5}$을 $x$에 대하여 풀면

$$y(2x+5)=-2x-3$$
$$(2y+2)x=-5y-3$$
$$\therefore x=\frac{-5y-3}{2y+2}$$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 $\quad y=\dfrac{-5x-3}{2x+2}$

따라서 $\dfrac{-5x-3}{2x+2}=\dfrac{ax-3}{2x+b}$이므로

$a=-5,\ b=2$

$\therefore\ b-a=7$

답 **7**

## 637

**전략** 주어진 함수식을 이용하여 세 점 A, B, C의 좌표를 구한다.

$y=\dfrac{k}{x-2}+1$에서 $y=0$이면 $\quad 0=\dfrac{k}{x-2}+1$

$-1=\dfrac{k}{x-2}, \quad -x+2=k$

$\therefore\ x=2-k \quad \therefore\ \mathrm{A}(2-k,\ 0)$

$y=\dfrac{k}{x-2}+1$에서 $x=0$이면 $\quad y=-\dfrac{k}{2}+1$

$\therefore\ \mathrm{B}\left(0,\ -\dfrac{k}{2}+1\right)$

곡선 $y=\dfrac{k}{x-2}+1$의 두 점근선의 방정식은

$x=2,\ y=1$이므로 $\quad \mathrm{C}(2,\ 1)$

이때 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으면

(직선 AB의 기울기)=(직선 AC의 기울기)이다.

직선 AB의 기울기는 $\quad \dfrac{-\dfrac{k}{2}+1-0}{0-(2-k)}=-\dfrac{1}{2}$

직선 AC의 기울기는 $\quad \dfrac{1-0}{2-(2-k)}=\dfrac{1}{k}$

즉 $-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{k}$이므로 $\quad k=-2$

답 ④

## 638

**전략** 주어진 두 유리함수를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 꼴로 변형하여 그래프의 점근선의 방정식을 구한다.

$y=\dfrac{2x-3}{x-a}=\dfrac{2(x-a)+2a-3}{x-a}=\dfrac{2a-3}{x-a}+2$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$x=a,\ y=2$

$y=\dfrac{-ax+2}{x-2}=\dfrac{-a(x-2)-2a+2}{x-2}$

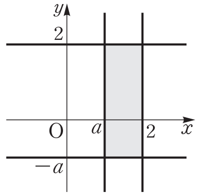
$=\dfrac{-2a+2}{x-2}-a$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$x=2,\ y=-a$

(i) $0<a<2$일 때

점근선으로 둘러싸인 직사각형의 넓이가 3이므로



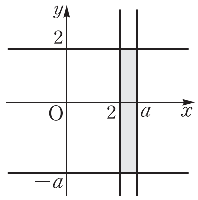

$(2-a)(2+a)=3$

$4-a^2=3, \quad a^2=1$

$\therefore\ a=1\ (\because\ 0<a<2)$

(ii) $a>2$일 때

점근선으로 둘러싸인 직사각형의 넓이가 3이므로




$(a-2)(2+a)=3$

$a^2-4=3, \quad a^2=7$

$\therefore\ a=\sqrt{7}\ (\because\ a>2)$

(i), (ii)에서 $\quad a=1$ 또는 $a=\sqrt{7}$

따라서 모든 $a$의 값의 곱은

$1\times\sqrt{7}=\sqrt{7}$

답 $\sqrt{7}$

## 639

**전략** $y=\dfrac{bx+c}{ax-1}$를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 꼴로 변형하여 그래프의 점근선의 방정식을 구한다.

$y=\dfrac{bx+c}{ax-1}=\dfrac{\dfrac{b}{a}(ax-1)+\dfrac{b}{a}+c}{ax-1}$

$=\dfrac{\dfrac{b}{a}+c}{ax-1}+\dfrac{b}{a}$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$x=\dfrac{1}{a},\ y=\dfrac{b}{a}$

주어진 그래프에서 $\dfrac{1}{a}>0,\ \dfrac{b}{a}>0$이므로

$a>0,\ b>0$

또 $x=0$일 때 $y$의 값이 0보다 크므로

$-c>0 \quad \therefore\ c<0$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

## 640

**전략** 방정식 $\dfrac{2x-4}{x-1}=kx+1$의 실근이 존재하지 않음을 이용한다.

$A\cap B=\varnothing$이므로 유리함수 $y=\dfrac{2x-4}{x-1}$의 그래프와 직선 $y=kx+1$은 만나지 않는다.

따라서 방정식

$$\frac{2x-4}{x-1}=kx+1,\ \text{즉}\ kx^2-(k+1)x+3=0$$

이 실근을 갖지 않아야 한다.

(i) $k=0$일 때

$-x+3=0$에서 $\quad x=3$

따라서 방정식의 실근이 존재하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $k\neq0$일 때

이차방정식 $kx^2-(k+1)x+3=0$의 판별식을 $D$라 하면

$$D=\{-(k+1)\}^2-4\times k\times3<0$$

$$\therefore k^2-10k+1<0$$

이때 이차방정식 $k^2-10k+1=0$의 두 근이 $k=5\pm2\sqrt{6}$이므로 부등식의 해는

$$5-2\sqrt{6}<k<5+2\sqrt{6}$$

(i), (ii)에서 구하는 $k$의 값의 범위는

$$5-2\sqrt{6}<k<5+2\sqrt{6}$$

답 $\mathbf{5-2\sqrt{6}<k<5+2\sqrt{6}}$

## 641

**전략** $y=f(x)$로 놓고 $x$에 대하여 푼 다음 $x$와 $y$를 서로 바꾸어 $g(x)$를 구한다.

$y=\frac{4x+1}{x-1}$로 놓고 $x$에 대하여 풀면

$$y(x-1)=4x+1$$

$$(y-4)x=y+1$$

$$\therefore x=\frac{y+1}{y-4}$$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면

$$y=\frac{x+1}{x-4}$$

$$\therefore g(x)=\frac{x+1}{x-4}=\frac{(x-4)+5}{x-4}=\frac{5}{x-4}+1$$

이때 $y=g(x)$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $m$만큼, $y$축의 방향으로 $n$만큼 평행이동하면

$$y=\frac{5}{x-m-4}+n+1$$

$$f(x)=\frac{4x+1}{x-1}=\frac{4(x-1)+5}{x-1}=\frac{5}{x-1}+4$$

에서 $\frac{5}{x-m-4}+n+1=\frac{5}{x-1}+4$이므로

$$-m-4=-1,\ n+1=4$$

$$\therefore m=-3,\ n=3$$

$$\therefore n-m=6$$

답 **6**

## 642

**전략** $\overline{AB}$, $\overline{AC}$의 길이를 이용하여 $\triangle ABC$의 넓이를 $k$에 대한 식으로 나타낸다.

점 A의 좌표를 $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ $(a>0)$이라 하면 점 B의 $y$좌표는 $\frac{1}{a}$이므로 $\frac{k}{x}=\frac{1}{a}$에서

$$x=ak \qquad \therefore \mathrm{B}\left(ak, \frac{1}{a}\right)$$

점 C의 $x$좌표는 $a$이므로

$$\mathrm{C}\left(a, \frac{k}{a}\right)$$

이때 $k>1$이므로

$$\overline{AB}=ak-a=a(k-1),$$

$$\overline{AC}=\frac{k}{a}-\frac{1}{a}=\frac{k-1}{a}$$

$$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}\times a(k-1)\times\frac{k-1}{a}=\frac{1}{2}(k-1)^2$$

즉 $\frac{1}{2}(k-1)^2=50$이므로

$$(k-1)^2=100,\qquad k-1=\pm10$$

$$\therefore k=11\ (\because k>1)$$

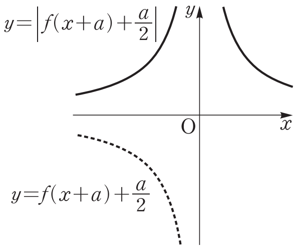
답 **11**

## 643

**전략** $y=\left|f(x+a)+\frac{a}{2}\right|$의 그래프가 $y$축에 대하여 대칭일 조건을 파악한다.

함수 $y=\left|f(x+a)+\frac{a}{2}\right|$의 그래프는 함수 $y=f(x+a)+\frac{a}{2}$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 $x$축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 $y=\left|f(x+a)+\frac{a}{2}\right|$의 그래프가 $y$축에 대하여 대칭이려면 함수 $y=f(x+a)+\frac{a}{2}$의 그래프의 점근선의 방정식이 다음 그림과 같이 $x=0$, $y=0$이어야 한다.




$f(x)=\frac{a}{x-6}+b$에서

$$f(x+a)+\frac{a}{2}=\frac{a}{x+a-6}+b+\frac{a}{2}$$

이므로 $y=f(x+a)+\frac{a}{2}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=6-a,\ y=b+\frac{a}{2}$$

이 점근선의 방정식이 $x=0$, $y=0$이어야 하므로

$$6-a=0,\ b+\frac{a}{2}=0$$

$$\therefore a=6,\ b=-3$$

따라서 $f(x)=\frac{6}{x-6}-3$이므로

$$f(b)=f(-3)=\frac{6}{-3-6}-3$$

$$=-\frac{11}{3}$$

답 ④

## 644

**전략** 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

점 P의 좌표를 $\left(a,\ \frac{2a-3}{a-2}\right)$ $(a>2)$이라 하면

$$\overline{\mathrm{PA}}=\frac{2a-3}{a-2},\ \overline{\mathrm{PB}}=a$$

$$\therefore \overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=\frac{2a-3}{a-2}+a$$

$$=\frac{2(a-2)+1}{a-2}+a$$

$$=\frac{1}{a-2}+a+2$$

이때 $a>2$이므로 $a-2>0$

따라서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{a-2}+a+2=\frac{1}{a-2}+a-2+4$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{1}{a-2}\times(a-2)}+4$$

$$=2+4$$

$$=6$$

여기서 등호는 $\frac{1}{a-2}=a-2$일 때 성립하므로

$$(a-2)^2=1$$

$$a-2=\pm 1$$

$$\therefore a=3\ (\because a>2)$$

따라서 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$는 $a=3$일 때 최솟값 6을 가지므로

$$m=6,\ p=3$$

$$\therefore m+p=9$$

답 9

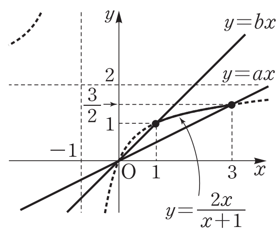
## 645

**전략** 주어진 부등식을 $y=\frac{2x}{x+1}$의 그래프와 두 직선 $y=ax$, $y=bx$의 위치 관계로 생각한다.

$$y=\frac{2x}{x+1}=\frac{2(x+1)-2}{x+1}$$

$$=-\frac{2}{x+1}+2$$

이므로 $y=\frac{2x}{x+1}$의 그래프는 $y=-\frac{2}{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-1$만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.




따라서 $1\leq x\leq 3$에서 $y=\frac{2x}{x+1}$의 그래프는 위의 그림과 같다.

이때 두 직선 $y=ax$, $y=bx$는 $a$, $b$의 값에 관계없이 항상 원점을 지난다.

(i) 직선 $y=ax$가 점 $\left(3,\ \frac{3}{2}\right)$을 지날 때

$$\frac{3}{2}=3a\text{에서}\qquad a=\frac{1}{2}$$

$ax \le \frac{2x}{x+1}$이려면 직선 $y=ax$가 $y=\frac{2x}{x+1}$의 그래프와 만나거나 그래프보다 아래쪽에 있어야 하므로 $a \le \frac{1}{2}$

(ii) 직선 $y=bx$가 점 $(1, 1)$을 지날 때

$b=1$

$\frac{2x}{x+1} \le bx$이려면 직선 $y=bx$가 $y=\frac{2x}{x+1}$의 그래프와 만나거나 그래프보다 위쪽에 있어야 하므로 $b \ge 1$

(i), (ii)에서 $b-a \ge \frac{1}{2}$

따라서 $b-a$의 최솟값은 $\frac{1}{2}$이다. 답 $\frac{1}{2}$

## 646

**전략** 먼저 조건 (가)에서 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 조건을 파악한다.

조건 (가)에서 방정식 $|f(x)|=2$는 오직 하나의 실근을 가져야 한다.

$|f(x)|=2$에서 $f(x)=2$ 또는 $f(x)=-2$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=2$와 한 점에서 만나고 직선 $y=-2$와 만나지 않거나 직선 $y=-2$와 한 점에서 만나고 직선 $y=2$와 만나지 않아야 한다.

함수 $y=f(x)$의 치역은 $\{y|y \ne b인\ 실수\}$이고 $f(x)$는 일대일함수이므로 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$ ($k$는 실수)의 교점의 개수는 $k=b$이면 0이고, $k \ne b$이면 1이다.

즉 두 직선 $y=2$, $y=-2$ 중 하나는 곡선 $y=f(x)$의 점근선이어야 한다.

이때 곡선 $y=f(x)$의 점근선의 방정식은 $x=0$, $y=b$이므로

$b=2$ 또는 $b=-2$

한편 $f^{-1}(2)=k$라 하면 $f(k)=2$이므로

$\frac{a}{k}+b=2$, $\frac{a}{k}=2-b$

$\therefore k=\frac{a}{2-b}$

$\therefore f^{-1}(2)=\frac{a}{2-b}$

조건 (나)에서 $f^{-1}(2)=f(2)-1$이므로

$\frac{a}{2-b}=\frac{a}{2}+b-1$ ······ ㉠

이때 $b \ne 2$이므로

$b=-2$

㉠에 $b=-2$를 대입하면

$\frac{a}{2-(-2)}=\frac{a}{2}-2-1$

$\frac{a}{4}=\frac{a}{2}-3$, $-\frac{a}{4}=-3$

$\therefore a=12$

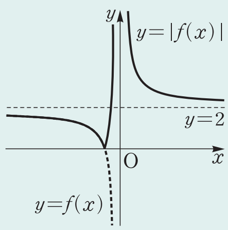
따라서 $f(x)=\frac{12}{x}-2$이므로

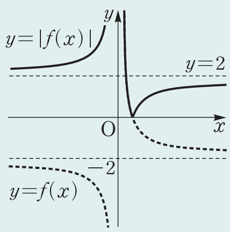
$f(8)=\frac{12}{8}-2=-\frac{1}{2}$

답 ①

**해설 Focus**

$f(x)=\frac{a}{x}+b$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=0$, $y=b$이므로 조건 (가)를 만족시키도록 $y=|f(x)|$의 그래프를 그려 보면 다음 그림과 같다.




위의 그림에서 $b=2$ 또는 $b=-2$임을 알 수 있다.

## 01 무리식

● 본책 276~278쪽

### 647

(1) $\sqrt{x+1}$에서 $\quad x+1\geq 0$

$\therefore x\geq -1$

(2) $\sqrt{x-1}$에서 $\quad x-1\geq 0$

$\therefore x\geq 1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\sqrt{2x-4}$에서 $\quad 2x-4\geq 0$

$\therefore x\geq 2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은

$x\geq 2$

(3) $\sqrt{x+3}$에서 $\quad x+3\geq 0$

$\therefore x\geq -3 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$에서 $\quad 2-x>0$

$\therefore x<2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은

$-3\leq x<2$

(4) $\sqrt{2x-1}$에서 $\quad 2x-1\geq 0$

$\therefore x\geq \dfrac{1}{2} \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\sqrt{4-x}$에서 $\quad 4-x>0$

$\therefore x<4 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은

$\dfrac{1}{2}\leq x<4$

답 (1) $\boldsymbol{x\geq -1}$
(2) $\boldsymbol{x\geq 2}$
(3) $\boldsymbol{-3\leq x<2}$
(4) $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\leq x<4}$

### 648

(1) $\dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}=\dfrac{x(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}$

$=\dfrac{x(\sqrt{x+4}+2)}{x+4-4}$

$=\sqrt{x+4}+2$

(2) $\dfrac{6}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}}$

$=\dfrac{6(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3})}{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3})}$

$=\dfrac{6(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3})}{x+3-(x-3)}$

$=\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3}$

(3) $\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{x-2}+1}=\dfrac{(\sqrt{x-2}-1)^2}{(\sqrt{x-2}+1)(\sqrt{x-2}-1)}$

$=\dfrac{x-2-2\sqrt{x-2}+1}{x-2-1}$

$=\dfrac{x-1-2\sqrt{x-2}}{x-3}$

답 (1) $\boldsymbol{\sqrt{x+4}+2}$ (2) $\boldsymbol{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3}}$
(3) $\boldsymbol{\dfrac{x-1-2\sqrt{x-2}}{x-3}}$

### 649

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

$=\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})-(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$

$=\dfrac{-2\sqrt{y}}{x-y}$

(2) $\dfrac{2x}{2-\sqrt{x+1}}+\dfrac{2x}{2+\sqrt{x+1}}$

$=\dfrac{2x(2+\sqrt{x+1})+2x(2-\sqrt{x+1})}{(2-\sqrt{x+1})(2+\sqrt{x+1})}$

$=\dfrac{4x+2x\sqrt{x+1}+4x-2x\sqrt{x+1}}{4-(x+1)}$

$=\dfrac{8x}{3-x}$

답 (1) $\boldsymbol{\dfrac{-2\sqrt{y}}{x-y}}$ (2) $\boldsymbol{\dfrac{8x}{3-x}}$

### 650

(1) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$

$=\dfrac{(x-\sqrt{x^2-1})+(x+\sqrt{x^2-1})}{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}$

$=\dfrac{2x}{x^2-(x^2-1)}=2x$

(2) $\dfrac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}-\dfrac{x}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}$

$=\dfrac{x(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})-x(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})}$

$=\dfrac{x\sqrt{x}-x\sqrt{x-1}-x\sqrt{x}-x\sqrt{x-1}}{x-(x-1)}$

$=-2x\sqrt{x-1}$

답 (1) $\mathbf{2x}$ (2) $\mathbf{-2x\sqrt{x-1}}$

## 651

$\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$

$=\dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$ ← $x>0$, $y>0$이므로 $\sqrt{x}\sqrt{y}=\sqrt{xy}$

이때 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$에서

$x+y=(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}$,

$x-y=(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}-1)=2$,

$xy=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$

$\therefore \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{2\sqrt{2}+2}{2}=\sqrt{2}+1$ 답 $\mathbf{\sqrt{2}+1}$

## 652

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}$

$=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{x-(x+1)}$

$=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(99)$

$=(\cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{1})+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+(\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}})$

$+\cdots+(\cancel{\sqrt{99}}-\cancel{\sqrt{98}})+(\sqrt{100}-\cancel{\sqrt{99}})$

$=-1+10$

$=9$ 답 **9**

# 02 무리함수

● 본책 279~288쪽

## 653

ㄴ. $y=-\sqrt{5}x$는 다항함수이다.

ㄷ. $x\le 2$이면 $y=\sqrt{(2-x)^2}=2-x$

$x>2$이면 $y=\sqrt{(2-x)^2}=x-2$

따라서 무리함수가 아니다.

이상에서 무리함수는 ㄱ, ㄹ, ㅁ이다. 답 **ㄱ, ㄹ, ㅁ**

## 654

(1) $-3-x\ge 0$에서 $x\le -3$이므로 정의역은

$\{x\,|\,x\le -3\}$

(2) $x+2\ge 0$에서 $x\ge -2$이므로 정의역은

$\{x\,|\,x\ge -2\}$

(3) $2x-4\ge 0$에서 $x\ge 2$이므로 정의역은

$\{x\,|\,x\ge 2\}$

(4) $1-x^2\ge 0$에서

$x^2-1\le 0$, $(x+1)(x-1)\le 0$

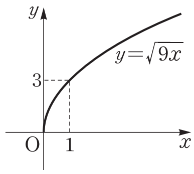
$\therefore -1\le x\le 1$

따라서 정의역은 $\{x\,|\,-1\le x\le 1\}$

답 (1) $\{x\,|\,x\le -3\}$
(2) $\{x\,|\,x\ge -2\}$
(3) $\{x\,|\,x\ge 2\}$
(4) $\{x\,|\,-1\le x\le 1\}$

## 655

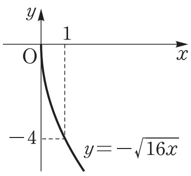
(1) $y=\sqrt{9x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,




**정의역은** $\{x\,|\,x\ge 0\}$

**치역은** $\{y\,|\,y\ge 0\}$

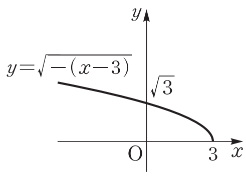
(2) $y=-\sqrt{16x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,




**정의역은** $\{x\,|\,x\ge 0\}$

**치역은** $\{y\,|\,y\le 0\}$

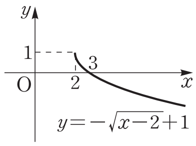
(3) $y=\sqrt{-(x-3)}$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고,




**정의역은** $\{x\,|\,x\le 3\}$

**치역은** $\{y\,|\,y\ge 0\}$

(4) $y=-\sqrt{x-2}+1$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 2만큼, $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고,




**정의역은** $\{x|x\geq 2\}$

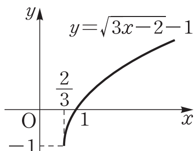
**치역은** $\{y|y\leq 1\}$

**답** 풀이 참조

## 656

(1) $y=\sqrt{3x-2}-1=\sqrt{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}-1$

따라서 $y=\sqrt{3x-2}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $\frac{2}{3}$만큼, $y$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고,

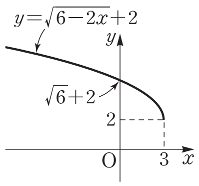



**정의역은** $\left\{x \middle| x\geq \frac{2}{3}\right\}$

**치역은** $\{y|y\geq -1\}$

(2) $y=\sqrt{6-2x}+2=\sqrt{-2(x-3)}+2$

따라서 $y=\sqrt{6-2x}+2$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 3만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고,

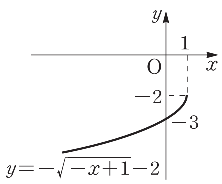



**정의역은** $\{x|x\leq 3\}$

**치역은** $\{y|y\geq 2\}$

(3) $y=-\sqrt{-x+1}-2=-\sqrt{-(x-1)}-2$

따라서 $y=-\sqrt{-x+1}-2$의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 1만큼, $y$축의 방향으로 $-2$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고,

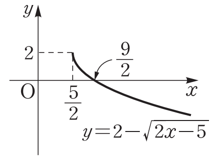



**정의역은** $\{x|x\leq 1\}$

**치역은** $\{y|y\leq -2\}$

(4) $y=2-\sqrt{2x-5}=-\sqrt{2\left(x-\frac{5}{2}\right)}+2$

따라서 $y=2-\sqrt{2x-5}$의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $\frac{5}{2}$만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 위의 그림과 같고,




**정의역은** $\left\{x \middle| x\geq \frac{5}{2}\right\}$

**치역은** $\{y|y\leq 2\}$

**답** 풀이 참조

## 657

ㄱ. $a>0$이면 치역이 $\{y|y\geq 0\}$이므로 그래프가 제3사분면과 제4사분면을 지나지 않는다. (참)

ㄴ. $b<0$이면 정의역이 $\{x|x\leq 0\}$이므로 $a>0$이면 그래프가 제2사분면을 지난다. (거짓)

ㄷ. $ab>0$이면 $\quad a>0,\ b>0$ 또는 $a<0,\ b<0$

이때 $a<0,\ b<0$이면 그래프가 제3사분면을 지난다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. **답** ㄱ

## 658

$y=\sqrt{ax-3}+2$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $b$만큼, $y$축의 방향으로 $c$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\sqrt{a(x-b)-3}+2+c$$

$$\therefore\ y=\sqrt{ax-ab-3}+2+c$$

이 함수의 그래프가 $y=\sqrt{5x}+2$의 그래프와 일치하므로 $\quad a=5,\ -ab-3=2,\ 2+c=0$

$$\therefore\ a=5,\ b=-1,\ c=-2$$

$$\therefore\ abc=10$$

**답** 10

## 659

ㄱ. $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동하면 $y=\sqrt{-x}$의 그래프와 겹쳐진다.

ㄴ. $y=\sqrt{-2x+6}=\sqrt{-2(x-3)}$

따라서 $y=\sqrt{-2x+6}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-3$만큼 평행이동하면 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프와 겹쳐진다.

ㄷ. $y=-\sqrt{4-x}+7=-\sqrt{-(x-4)}+7$

따라서 $y=-\sqrt{4-x}+7$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-4$만큼, $y$축의 방향으로 $-7$만큼 평행이동한 후 $x$축에 대하여 대칭이동하면 $y=\sqrt{-x}$의 그래프와 겹쳐진다.

이상에서 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 무리함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

**개념 노트**

**도형의 대칭이동**

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 $x$축, $y$축, 원점, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 다음과 같다.

① $x$축에 대한 대칭이동 ⇨ $y$ 대신 $-y$를 대입
⇨ $f(x, -y)=0$

② $y$축에 대한 대칭이동 ⇨ $x$ 대신 $-x$를 대입
⇨ $f(-x, y)=0$

③ 원점에 대한 대칭이동
⇨ $x$ 대신 $-x$, $y$ 대신 $-y$를 대입
⇨ $f(-x, -y)=0$

④ 직선 $y=x$에 대한 대칭이동
⇨ $x$ 대신 $y$, $y$ 대신 $x$를 대입
⇨ $f(y, x)=0$

## 660

$y=\sqrt{-x+2}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 1만큼, $y$축의 방향으로 $-2$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{-(x-1)+2}-2$

$\therefore y=\sqrt{-x+3}-2$

$y=\sqrt{-x+3}-2$의 그래프를 $y$축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{-(-x)+3}-2$

$\therefore y=\sqrt{x+3}-2$

따라서 $a=1$, $b=3$, $c=-2$이므로

$a+b+c=2$

답 2

## 661

$y=-\sqrt{4x-4}+3=-\sqrt{4(x-1)}+3$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{4x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 1만큼, $y$축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

$y=-1$일 때, $-1=-\sqrt{4x-4}+3$에서

$\sqrt{4x-4}=4,\quad 4x-4=16$

$\therefore x=5$

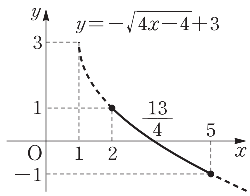
$y=1$일 때, $1=-\sqrt{4x-4}+3$에서

$\sqrt{4x-4}=2,\quad 4x-4=4$

$\therefore x=2$

따라서 오른쪽 그림에서 치역이 $\{y|-1\le y\le 1\}$일 때, 정의역은

$\{x|2\le x\le 5\}$



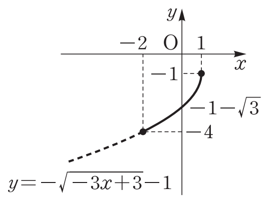

답 $\{x|2\le x\le 5\}$

## 662

$y=-\sqrt{-3x+3}-1=-\sqrt{-3(x-1)}-1$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{-3x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 1만큼, $y$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-2\le x\le 1$에서 $y=-\sqrt{-3x+3}-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로




$x=1$일 때 최댓값

$a=-\sqrt{-3+3}-1=-1$,

$x=-2$일 때 최솟값

$b=-\sqrt{6+3}-1=-4$

를 갖는다.

$\therefore a-b=3$

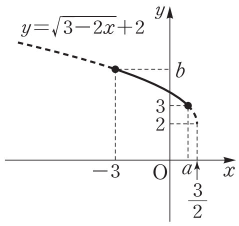
답 3

## 663

$y=\sqrt{3-2x}+2=\sqrt{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)}+2$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-3\le x\le a$에서 $y=\sqrt{3-2x}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로




$x=-3$일 때 최댓값

$b=\sqrt{3+6}+2=5$,

$x=a$일 때 최솟값

$\sqrt{3-2a}+2$

를 갖는다.

즉 $\sqrt{3-2a}+2=3$이므로 $\quad \sqrt{3-2a}=1$

$3-2a=1 \qquad \therefore a=1$

$\therefore b-a=5-1=4$

답 **4**

## 664

주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-ax}\ (a>0)$의 그래프를 $x$축의 방향으로 4만큼, $y$축의 방향으로 $-1$만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=\sqrt{-a(x-4)}-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

로 놓을 수 있다.

이때 ㉠의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$1=\sqrt{4a}-1, \qquad \sqrt{4a}=2$

$4a=4 \qquad \therefore a=1$

㉠에 $a=1$을 대입하면

$y=\sqrt{-(x-4)}-1=\sqrt{-x+4}-1$

따라서 $a=1$, $b=4$, $c=-1$이므로

$a+b+c=4$

답 **4**

## 665

주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}\ (a<0)$의 그래프를 $x$축의 방향으로 1만큼, $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=-\sqrt{a(x-1)}+1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

로 놓을 수 있다.

이때 ㉠의 그래프가 점 $(0, 0)$을 지나므로

$0=-\sqrt{-a}+1, \qquad \sqrt{-a}=1$

$-a=1 \qquad \therefore a=-1$

㉠에 $a=-1$을 대입하면

$y=-\sqrt{-(x-1)}+1=-\sqrt{-x+1}+1$

$\therefore f(x)=-\sqrt{-x+1}+1$

$f(k)=-1$에서

$-1=-\sqrt{-k+1}+1$

$\sqrt{-k+1}=2, \qquad -k+1=4$

$\therefore k=-3$

답 **$-3$**

## 666

$ax+9\ge 0$에서 $\qquad ax\ge -9$

이때 주어진 함수의 정의역이 $\{x\,|\,x\ge -3\}$이므로

$a>0$

따라서 $ax\ge -9$에서 $x\ge -\frac{9}{a}$이므로

$-\frac{9}{a}=-3 \qquad \therefore a=3$

또 주어진 함수의 치역이 $\{y\,|\,y\le b\}$이므로

$b=2$

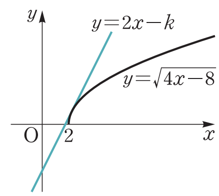
$\therefore ab=6$

답 **6**

## 667

$y=\sqrt{4x-8}=\sqrt{4(x-2)}$

이므로 주어진 무리함수의 그래프는 $y=\sqrt{4x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.




또 $y=2x-k$는 기울기가 2이고 $y$절편이 $-k$인 직선이다.

무리함수 $y=\sqrt{4x-8}$의 그래프와 직선 $y=2x-k$가 접할 때, $\sqrt{4x-8}=2x-k$에서 양변을 제곱하면

$4x-8=(2x-k)^2$

$4x-8=4x^2-4kx+k^2$

$\therefore 4x^2-4(k+1)x+k^2+8=0$

이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=\{-2(k+1)\}^2-4(k^2+8)=0$

$8k-28=0 \qquad \therefore k=\frac{7}{2}$

따라서 무리함수 $y=\sqrt{4x-8}$의 그래프와 직선 $y=2x-k$가 만나지 않으려면

$-k>-\frac{7}{2} \qquad \therefore k<\frac{7}{2}$

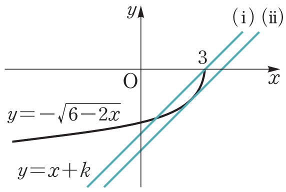
답 **$k<\frac{7}{2}$**

# 668

$y=-\sqrt{6-2x}=-\sqrt{-2(x-3)}$

이므로 주어진 무리함수의 그래프는 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

또 $y=x+k$는 기울기가 1이고 $y$절편이 $k$인 직선이다.




(i) 직선 $y=x+k$가 점 $(3,\ 0)$을 지날 때

$0=3+k$

$\therefore\ k=-3$

(ii) 무리함수 $y=-\sqrt{6-2x}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때

$-\sqrt{6-2x}=x+k$의 양변을 제곱하면

$6-2x=(x+k)^2$

$6-2x=x^2+2kx+k^2$

$\therefore\ x^2+2(k+1)x+k^2-6=0$

이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=(k+1)^2-(k^2-6)=0$

$2k+7=0$

$\therefore\ k=-\frac{7}{2}$

따라서 주어진 무리함수의 그래프와 직선이 한 점에서 만나려면 직선이 (i)보다 위쪽에 있거나 (ii)이어야 하므로

$k>-3$ 또는 $k=-\frac{7}{2}$

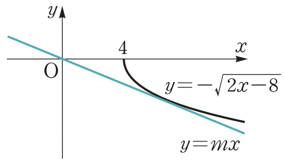
답 $\boldsymbol{k>-3}$ **또는** $\boldsymbol{k=-\frac{7}{2}}$

# 669

$y=-\sqrt{2x-8}=-\sqrt{2(x-4)}$

이므로 주어진 무리함수의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

또 직선 $y=mx$는 $m$의 값에 관계없이 항상 원점을 지난다.




무리함수 $y=-\sqrt{2x-8}$의 그래프와 직선 $y=mx$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 위의 그림에서

$m<0$

무리함수 $y=-\sqrt{2x-8}$의 그래프와 직선 $y=mx$가 접할 때, $-\sqrt{2x-8}=mx$에서 양변을 제곱하면

$2x-8=m^2x^2$

$\therefore\ m^2x^2-2x+8=0$

이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-m^2\times 8=0$

$1-8m^2=0,\qquad m^2=\frac{1}{8}$

$\therefore\ m=-\frac{\sqrt{2}}{4}\ (\because\ m<0)$

따라서 무리함수 $y=-\sqrt{2x-8}$의 그래프와 직선 $y=mx$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$-\frac{\sqrt{2}}{4}<m<0$

답 $\boldsymbol{-\frac{\sqrt{2}}{4}<m<0}$

# 670

$y=x^2-8x+10\ (x\le 4)$이라 하면

$y=(x-4)^2-6$

에서 치역이 $\{y\,|\,y\ge -6\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge -6\}$이다.

$y=(x-4)^2-6$에서

$y+6=(x-4)^2$

$\therefore\ x-4=\pm\sqrt{y+6}$

그런데 $x\le 4$에서 $x-4\le 0$이므로

$x-4=-\sqrt{y+6}$

$\therefore\ x=-\sqrt{y+6}+4$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면

$y=-\sqrt{x+6}+4$

$\therefore\ f^{-1}(x)=-\sqrt{x+6}+4\ (x\ge -6)$

따라서 $a=1,\ b=6,\ c=4,\ d=-6$이므로

$ab-cd=1\times 6-4\times(-6)=30$

답 **30**

## 671

$(g^{-1}\circ f)^{-1}(2)=(f^{-1}\circ g)(2)$

$=f^{-1}(g(2))$

$=f^{-1}(4)$ $\leftarrow g(2)=\sqrt{4+5}+1=4$

$f^{-1}(4)=k$라 하면 $f(k)=4$이므로

$\sqrt{k+3}=4,\qquad k+3=16$

$\therefore k=13$

$\therefore (g^{-1}\circ f)^{-1}(2)=f^{-1}(4)=13$ 　　**답 13**

## 672

$f(x)=\sqrt{ax+b}$의 그래프가 점 $(2, 5)$를 지나므로

$\sqrt{2a+b}=5$

$\therefore 2a+b=25$ 　　$\cdots\cdots$ ㉠

또 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 $(2, 5)$를 지나므로

$f^{-1}(2)=5$에서 　　$f(5)=2$

$\sqrt{5a+b}=2$

$\therefore 5a+b=4$ 　　$\cdots\cdots$ ㉡

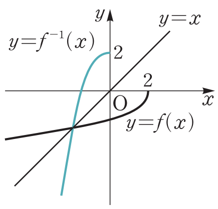
㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-7,\ b=39$

따라서 $f(x)=\sqrt{-7x+39}$이므로

$f(1)=\sqrt{-7+39}=4\sqrt{2}$ 　　**답 $4\sqrt{2}$**

## 673




함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로 $-\sqrt{2-x}=x$에서 양변을 제곱하면

$2-x=x^2,\qquad x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

그런데 $x\le 0$이므로 　　$x=-2$

따라서 교점의 좌표는 $(-2, -2)$이므로

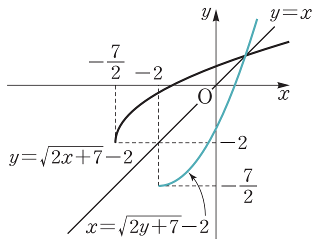
$a=-2,\ b=-2$

$\therefore a+b=-4$ 　　**답 $-4$**

## 674

함수 $y=\sqrt{2x+7}-2$에서 $x$와 $y$를 서로 바꾸면 $x=\sqrt{2y+7}-2$이므로 두 함수는 서로 역함수이다.

따라서 두 함수 $y=\sqrt{2x+7}-2$와 $x=\sqrt{2y+7}-2$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 다음 그림과 같다.




즉 두 함수의 그래프의 교점은 $y=\sqrt{2x+7}-2$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$\sqrt{2x+7}-2=x$에서 　　$\sqrt{2x+7}=x+2$

양변을 제곱하면

$2x+7=x^2+4x+4$

$x^2+2x-3=0,\qquad (x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

그런데 $x\ge -2$이므로

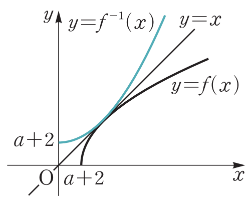
$x=1$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(1, 1)$이다. 　　**답 $(1, 1)$**

## 675

함수 $y=2\sqrt{x-2}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $a$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=2\sqrt{x-a-2}$




즉 $f(x)=2\sqrt{x-a-2}$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같이 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 접하면 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$도 접한다.

$2\sqrt{x-a-2}=x$에서 양변을 제곱하면

$4(x-a-2)=x^2$

$\therefore x^2-4x+4a+8=0$

이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-(4a+8)=0$$

$$-4a-4=0 \qquad \therefore a=-1$$

답 $-1$

## 연습 문제

• 본책 289~291쪽

## 676

**전략** 분모의 유리화를 이용하여 $\frac{1}{f(x)}$을 간단히 한다.

$f(x)=\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}$에서

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(x)}&=\frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}\\&=\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}{(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1})(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})}\\&=\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}{2x+1-(2x-1)}\\&=\frac{1}{2}(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(24)}&=\frac{1}{2}\{(\cancel{\sqrt{3}}-\sqrt{1})+(\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{\sqrt{3}})+(\cancel{\sqrt{7}}-\cancel{\sqrt{5}})\\&\quad+\cdots+(\sqrt{49}-\cancel{\sqrt{47}})\}\\&=\frac{1}{2}\times(-1+7)=3\end{aligned}$$

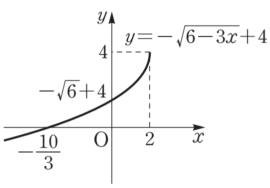
답 3

## 677

**전략** 주어진 무리함수를 $y=-\sqrt{a(x-p)}+q$의 꼴로 변형하여 그래프를 그린다.

$$y=-\sqrt{6-3x}+4=-\sqrt{-3(x-2)}+4$$

따라서 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{-3x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 2만큼, $y$축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.




ㄱ. 함수의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-2$만큼, $y$축의 방향으로 $-4$만큼 평행이동하면 $y=-\sqrt{-3x}$의 그래프와 일치한다. (참)

ㄴ. 정의역은 $\{x|x\le 2\}$, 치역은 $\{y|y\le 4\}$이다. (참)

ㄷ. 주어진 무리함수의 그래프는 제1, 2, 3사분면을 지난다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

## 678

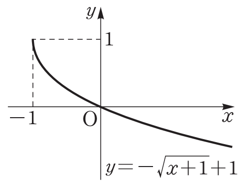
**전략** 그래프가 지나는 점의 좌표를 대입하여 $a$의 값을 구한다.

함수 $y=-\sqrt{x-a}+a+2$의 그래프가 점 $(a, -a)$를 지나므로

$$-a=-\sqrt{a-a}+a+2$$

$$2a=-2 \qquad \therefore a=-1$$

함수 $y=-\sqrt{x+1}+1$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-1$만큼, $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.




따라서 함수 $y=-\sqrt{x+1}+1$의 치역은

$$\{y|y\le 1\}$$

답 ①

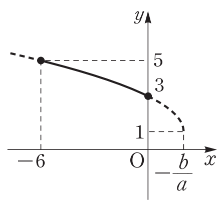
## 679

**전략** $y=\sqrt{ax+b}+1$의 그래프의 개형을 이용한다.

$$y=\sqrt{ax+b}+1=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+1$$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$만큼, $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a<0$이므로 $-6\le x\le 0$에서 $y=\sqrt{ax+b}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




즉 $x=-6$일 때 최댓값 5, $x=0$일 때 최솟값 3을 가지므로

$$\sqrt{-6a+b}+1=5 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\sqrt{b}+1=3 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡에서 $\sqrt{b}=2 \qquad \therefore b=4$

㉠에 $b=4$를 대입하면

$\sqrt{-6a+4}+1=5$

$\sqrt{-6a+4}=4,\qquad -6a+4=16$

$\therefore\ a=-2$

$\therefore\ ab=-2\times4=-8$ 　　답 $-8$

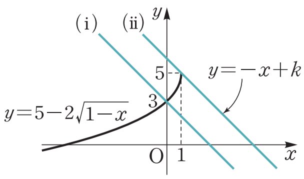
## 680

**전략** 주어진 무리함수의 그래프를 그리고 무리함수의 그래프와 직선이 제1사분면에서 만나기 위한 $k$의 값의 범위를 구한다.

$y=5-2\sqrt{1-x}=-2\sqrt{-(x-1)}+5$

이므로 주어진 무리함수의 그래프는 $y=-2\sqrt{-x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 1만큼, $y$축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

또 직선 $y=-x+k$는 기울기가 $-1$이고 $y$절편이 $k$인 직선이다.




(i) 직선 $y=-x+k$가 점 $(0,\ 3)$을 지날 때

$3=0+k\qquad \therefore\ k=3$

(ii) 직선 $y=-x+k$가 점 $(1,\ 5)$를 지날 때

$5=-1+k\qquad \therefore\ k=6$

주어진 무리함수의 그래프와 직선이 제1사분면에서 만나려면 직선이 (ii)이거나 (i)과 (ii) 사이에 있어야 하므로

$3<k\le6$

따라서 정수 $k$는 4, 5, 6이므로 구하는 합은

$4+5+6=15$ 　　답 ③

## 681

**전략** $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$, $f\circ f^{-1}=I$임을 이용한다.

$$\begin{aligned}(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(4)&=(f\circ(f^{-1}\circ g^{-1})\circ f)(4)\\&=(g^{-1}\circ f)(4)\\&=g^{-1}(f(4))\\&=g^{-1}(2)\qquad \leftarrow f(4)=\frac{4+2}{4-1}=2\end{aligned}$$

$g^{-1}(2)=k$라 하면 $g(k)=2$이므로

$\sqrt{2k-1}=2$

양변을 제곱하면 　$2k-1=4$

$\therefore\ k=\dfrac{5}{2}$

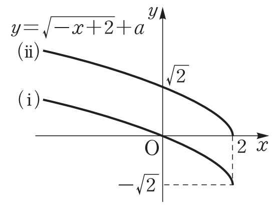
$\therefore\ (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(4)=g^{-1}(2)=\dfrac{5}{2}$ 　　답 $\dfrac{5}{2}$

## 682

**전략** $y=\sqrt{k(x-p)}+q$의 꼴로 변형하여 무리함수의 그래프를 그려 본다.

$y=\sqrt{-x+2}+a=\sqrt{-(x-2)}+a$

따라서 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 2만큼, $y$축의 방향으로 $a$만큼 평행이동한 것이다.




(i) $y=\sqrt{-x+2}+a$의 그래프가 점 $(0,\ 0)$을 지날 때

$0=\sqrt{2}+a$

$\therefore\ a=-\sqrt{2}$

(ii) $y=\sqrt{-x+2}+a$의 그래프가 점 $(2,\ 0)$을 지날 때

$0=\sqrt{-2+2}+a$

$\therefore\ a=0$

주어진 무리함수의 그래프가 제4사분면은 지나고 제3사분면은 지나지 않으려면 그래프가 (i)이거나 (i)과 (ii) 사이에 있어야 하므로

$-\sqrt{2}\le a<0$ 　　답 $-\sqrt{2}\le a<0$

## 683

**전략** 주어진 유리함수의 그래프에서 $a$, $b$, $c$의 부호를 알아낸다.

주어진 유리함수의 그래프에서

$b<0$

유리함수 $y=\dfrac{b}{x+a}+c$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-a$, $y=c$이므로

$-a>0,\ c>0\qquad \therefore\ a<0,\ c>0$

$y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}+c$이므로 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-\dfrac{b}{a}$만큼, $y$축의 방향으로 $c$만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a<0$, $-\dfrac{b}{a}<0$, $c>0$이므로 함수

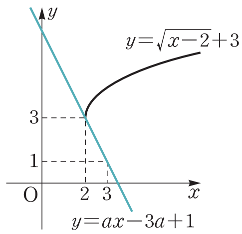
$y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ④이다.

답 ④

## 684

**전략** 무리함수 $y=\sqrt{x-2}+3$의 그래프와 직선 $y=ax-3a+1$이 만나도록 하는 $a$의 값의 범위를 구한다.

무리함수 $y=\sqrt{x-2}+3$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 2만큼, $y$축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.




또 $y=ax-3a+1$에서

$$y=a(x-3)+1$$

따라서 직선 $y=ax-3a+1$은 $a$의 값에 관계없이 항상 점 $(3, 1)$을 지난다.

이때 $A\cap B\neq\varnothing$이므로 무리함수 $y=\sqrt{x-2}+3$의 그래프와 직선 $y=ax-3a+1$이 만나야 한다.

직선 $y=ax-3a+1$이 점 $(2, 3)$을 지날 때,

$$3=2a-3a+1$$

$$\therefore a=-2$$

무리함수 $y=\sqrt{x-2}+3$의 그래프와 직선 $y=ax-3a+1$이 만나려면 직선의 기울기가 양수이거나 점 $(2, 3)$을 지날 때보다 작거나 같아야 하므로

$$a\le-2 \text{ 또는 } a>0$$

답 **$a\le-2$ 또는 $a>0$**

## 685

**전략** $f^{-1}(a)=b$이면 $f(b)=a$임을 이용한다.

$f^{-1}(g(x))=2x$의 양변에 $x=3$을 대입하면

$$f^{-1}(g(3))=6$$

$$\therefore g(3)=f(6)=\sqrt{18-12}=\sqrt{6}$$

답 ③

**다른 풀이** $y=\sqrt{3x-12}$라 하면

$$y^2=3x-12 \qquad \therefore x=\frac{1}{3}y^2+4$$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면

$$y=\frac{1}{3}x^2+4$$

이때 함수 $y=\sqrt{3x-12}$의 치역은 $\{y\,|\,y\ge0\}$이므로 $f^{-1}(x)$의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge0\}$이다.

$$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x^2+4\ (x\ge0)$$

따라서 $f^{-1}(g(x))=2x$에서

$$\frac{1}{3}\{g(x)\}^2+4=2x, \qquad \{g(x)\}^2=6x-12$$

$$\therefore g(x)=\sqrt{6x-12}\ (\because g(x)\ge0)$$

$$\therefore g(3)=\sqrt{18-12}=\sqrt{6}$$

## 686

**전략** $f^{-1}(m)=n$이면 $f(n)=m$임을 이용한다.

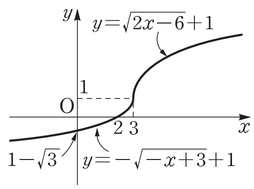
$x\ge3$에서

$$y=\sqrt{2x-6}+1=\sqrt{2(x-3)}+1$$

$x<3$에서

$$y=-\sqrt{-x+3}+1=-\sqrt{-(x-3)}+1$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




$f^{-1}(3)=a$라 하면

$$f(a)=3$$

$f(a)\ge1$에서 $a>3$이므로

$$\sqrt{2a-6}+1=3 \qquad \therefore \sqrt{2a-6}=2$$

양변을 제곱하면 $\quad 2a-6=4$

$$\therefore a=5 \qquad \therefore f^{-1}(3)=5$$

$f^{-1}(-2)=b$라 하면 $\quad f(b)=-2$

$f(b)<1$에서 $b<3$이므로

$$-\sqrt{-b+3}+1=-2 \qquad \therefore \sqrt{-b+3}=3$$

양변을 제곱하면 $\quad -b+3=9$

$$\therefore b=-6 \qquad \therefore f^{-1}(-2)=-6$$

$$\therefore f^{-1}(3)+f^{-1}(-2)=5+(-6)=-1$$

답 **$-1$**

## 687

**전략** 주어진 이차함수의 그래프의 식을 구하여 역함수를 구한다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(2, 3)$이므로

$$f(x)=a(x-2)^2+3\ (a>0)$$

으로 놓을 수 있다.

$y=f(x)$의 그래프가 점 $(3, 4)$를 지나므로

$4=a+3 \qquad \therefore a=1$

$\therefore f(x)=(x-2)^2+3 \ (x\ge 2)$

$y=(x-2)^2+3\ (x\ge 2)$이라 하면

$(x-2)^2=y-3$

$\therefore x-2=\pm\sqrt{y-3}$

그런데 $x\ge 2$에서 $x-2\ge 0$이므로

$x-2=\sqrt{y-3}$

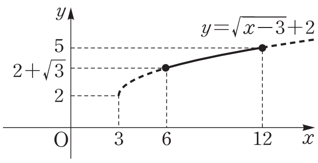
$\therefore x=\sqrt{y-3}+2$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 $\qquad y=\sqrt{x-3}+2$

이때 함수 $y=f(x)$의 치역은 $\{y|y\ge 3\}$이므로 $f^{-1}(x)$의 정의역은 $\{x|x\ge 3\}$이다.

$\therefore f^{-1}(x)=\sqrt{x-3}+2\ (x\ge 3)$

$y=f^{-1}(x)$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 3만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.




따라서 $6\le x\le 12$에서 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 위의 그림과 같으므로 $x=12$일 때 최댓값 $\sqrt{12-3}+2=5$를 갖는다. **답 5**

다른 풀이 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $x$의 값이 증가할 때 $y$의 값도 증가한다.

즉 $6\le x\le 12$에서 $f^{-1}(x)$는 $x=12$일 때 최대이므로 구하는 최댓값은

$f^{-1}(12)$

$f^{-1}(12)=k$라 하면 $f(k)=12$이므로

$(k-2)^2+3=12, \qquad (k-2)^2=9$

$k-2=\pm 3 \qquad \therefore k=5\ (\because k\ge 2)$

## 688

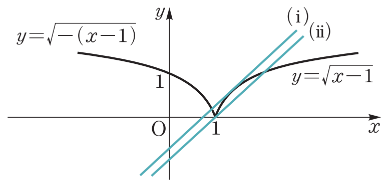
**전략** $x\ge 1$인 경우와 $x<1$인 경우로 나누어 그래프를 그린다.

$y=\sqrt{|x-1|}$에서

$x\ge 1$일 때, $\qquad y=\sqrt{x-1}$

$x<1$일 때, $\qquad y=\sqrt{-(x-1)}$

따라서 $y=\sqrt{|x-1|}$의 그래프는 다음 그림과 같다.




(i) 무리함수 $y=\sqrt{x-1}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때

$\sqrt{x-1}=x+k$의 양변을 제곱하면

$x-1=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+(2k-1)x+k^2+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$D=(2k-1)^2-4(k^2+1)=0$

$-4k-3=0$

$\therefore k=-\frac{3}{4}$

(ii) 직선 $y=x+k$가 점 $(1, 0)$을 지날 때

$0=1+k \qquad \therefore k=-1$

따라서 함수 $y=\sqrt{|x-1|}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 직선이 (i)과 (ii) 사이에 있어야 하므로

$-1<k<-\frac{3}{4}$ **답** $\boldsymbol{-1<k<-\frac{3}{4}}$

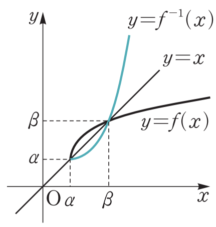
## 689

**전략** $y=f(x)$와 그 역함수의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 일치함을 이용한다.

$y=\sqrt{2x-a}+2=\sqrt{2\left(x-\frac{a}{2}\right)}+2$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $\frac{a}{2}$만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같이 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\sqrt{2x-a}+2=x$에서

$\sqrt{2x-a}=x-2$

양변을 제곱하면 $2x-a=x^2-4x+4$

$\therefore x^2-6x+4+a=0$ …… ㉠

이차방정식 ㉠의 두 근을 $\alpha$, $\beta$ $(\alpha<\beta)$라 하면 두 교점의 좌표는 $(\alpha, \alpha)$, $(\beta, \beta)$이고 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2}=2\sqrt{2}$

$2(\alpha-\beta)^2=8$ $\therefore (\alpha-\beta)^2=4$

이차방정식 ㉠에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=4+a$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$4=36-4(4+a)$, $4=-4a+20$

$\therefore a=4$ 답 **4**

## 690

전략 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 서로 역함수 관계임을 이용한다.

$y=\sqrt{4x+5}$ $(y\geq 0)$라 하면

$y^2=4x+5$ $\therefore x=\frac{1}{4}y^2-\frac{5}{4}$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{4}$ $(x\geq 0)$

즉 함수 $g(x)=\frac{1}{4}(x^2-5)$ $(x\geq 0)$는 함수 $f(x)$의 역함수이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$\sqrt{4x+5}=x$에서 $4x+5=x^2$

$x^2-4x-5=0$, $(x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=5$ $(\because x\geq 0)$

$\therefore A(5, 5)$

점 B와 점 C는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$C(3, 1)$

$\therefore \overline{BC}=\sqrt{(3-1)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{2}$

직선 $l$은 기울기가 $-1$이고 점 B를 지나므로 직선 $l$의 방정식은

$y=-(x-1)+3$ $\therefore x+y-4=0$

점 $A(5, 5)$와 직선 $l$ 사이의 거리는

$\frac{|5+5-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}=6$ 답 **6**

Ⅲ-3 무리함수

MEMO