전라북도교육청 주관 2014년 5월 고3 수능모의고사 문제지

제 2 교시

수학 영역 B형

전라북도교육청

1. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A^2-2BA의 모든 성분의 합은? [2점]

① -18 ② -16
③ -14 ④ -12
⑤ -10

2. 무리방정식 $x-\sqrt{x-2}=4$의 실근을 $x=\alpha$라 할 때, 다음 중 α가 속하는 집합은? [2점]

① $\{x|1<x<3\}$ ② $\{x|2<x<4\}$
③ $\{x|3<x<5\}$ ④ $\{x|4<x<6\}$
⑤ $\{x|5<x<7\}$

3. $\cos\alpha=\frac{1}{3}$일 때, $\cos 2\alpha$의 값은? (단, α는 예각이다.) [2점]

① $-\frac{7}{9}$ ② $-\frac{2}{3}$
③ $-\frac{5}{9}$ ④ $-\frac{4}{9}$
⑤ $-\frac{1}{3}$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sin 2x\,dx$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{12}$
③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{7}{12}$
⑤ $\frac{2}{3}$

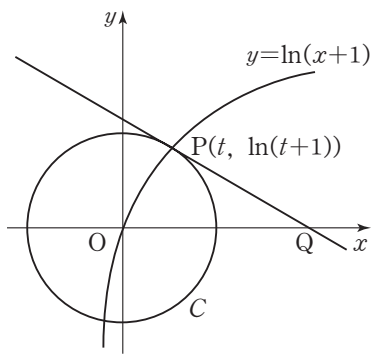
5. 부등식 $(\log_2 x)^2-\log_2 x^2-8<0$을 만족시키는 자연수 x의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [3점]

① 22 ② 20
③ 18 ④ 16
⑤ 14

6. 집합 $A=\left\{x \middle| \frac{(x-10)(x+3)}{x-m}\le 0,\ x\text{는 자연수}\right\}$라 할 때, $n(A)=5$가 되도록 하는 모든 정수 m의 값의 합은? (단, $n(X)$는 집합 X의 원소의 개수이다.) [3점]

① 5 ② 10
③ 15 ④ 20
⑤ 25

7. 그림과 같이 좌표평면에 곡선 $y=\ln(x+1)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ \ln(t+1))$이 있다. 원점 O를 중심으로 하고 선분 OP를 반지름으로 하는 원을 C, 점 P를 지나고 원 C에 접하는 직선이 x축과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t\to+0}\frac{\overline{\mathrm{OQ}}}{t}$의 값은? (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.) [3점]



① 0 ② $\frac{1}{2}$
③ 1 ④ $\sqrt{2}$
⑤ 2

8. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x-1$에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) $a_1=1$
(나) $a_{n+1}=f(f(a_n))\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

$\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은? [3점]

① -3 ② $-\frac{5}{2}$
③ -2 ④ $-\frac{3}{2}$
⑤ -1

9. 이차정사각행렬 A가 $A^2-A-2E=O$를 만족시킬 때, 등식

$A^{n+1}=a_nA+b_nE\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

가 성립하도록 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을 정의하자. 다음은 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_{n+1}=2a_n+$ (가) 가 성립함을 보이는 과정이다.

$A^{n+1}=a_nA+b_nE$에서
$A^{n+2}=a_nA^2+b_nA$
$=a_n(A+2E)+b_nA$
$=(a_n+b_n)A+2a_nE$
$\therefore a_{n+1}=a_n+b_n,\ b_{n+1}=2a_n$
이때, $a_{n+2}=a_{n+1}+b_{n+1}$이므로
$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$
$a_{n+2}-$ (나) $a_{n+1}=-(a_{n+1}-$ (나) $a_n)$
$\therefore a_{n+1}=2a_n+$ (가)

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(n)$, (나)에 알맞은 수를 k라 할 때, $f(4)+k$의 값은? (단, $A\neq xE$ (x는 실수), E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.) [3점]

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

10. 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 할 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) $a_1=5,\ a_3=9,\ a_4=14$
(나) $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2}(b_{n+2}-b_n)\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

a_{10}의 값은? [3점]

① 86 ② 92
③ 98 ④ 104
⑤ 110

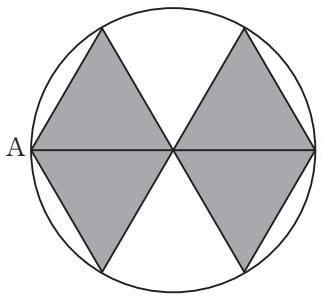
11. 함수 $f(x)=x^4-6x^2+8x+1$과 실수 a에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\le a) \\ f(-x+2a) & (x>a) \end{cases}$$

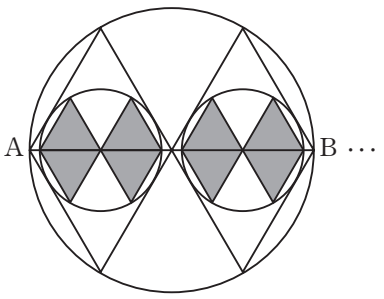
로 정의할 때, 함수 $g(x)$가 실수 전체집합에서 미분가능하도록 하는 서로 다른 실수 a의 값들의 합은? [3점]

① -2 ② -1
③ 1 ④ 2
⑤ 3

12. [그림 1]과 같이 지름 AB의 길이가 2인 원에서 원의 중심을 한 꼭짓점으로 하고 나머지 세 꼭짓점은 원주 위에 있는 합동인 2개의 마름모를 그린다. [그림 2]와 같이 [그림 1]에서 그려진 마름모에 내접하는 두 원을 그린 후 [그림 2]에서 그려진 2개의 원 안에 원의 중심을 한 꼭짓점으로 하고 나머지 세 꼭짓점은 원주 위에 있는 합동인 2개의 마름모를 각각 그린다. 이와 같은 과정을 계속하여 마름모와 원을 그릴 때, [그림 1]에서 그려진 2개의 마름모의 넓이의 합을 S_1, [그림 2]에서 그려진 2^2개의 마름모의 넓이의 합을 S_2, …, [그림 n]에서 그려진 2^n개의 마름모의 넓이의 합을 S_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [3점]



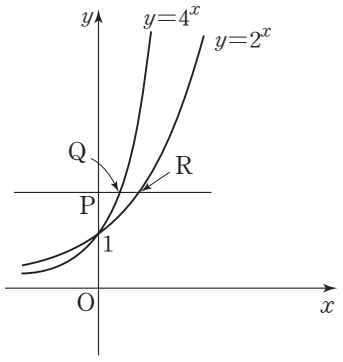
[그림 1]



[그림 2]

① $\frac{6\sqrt{3}}{5}$ ② $\frac{7\sqrt{3}}{5}$
③ $\frac{8\sqrt{3}}{5}$ ④ $\frac{9\sqrt{3}}{5}$
⑤ $2\sqrt{3}$

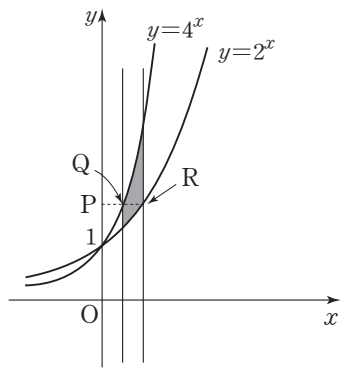
〔13~14〕 그림과 같이 좌표평면에 두 곡선 $y=4^x$, $y=2^x$과 점 $P(0, a)(a\geq 1)$가 있다. 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 두 곡선 $y=4^x$, $y=2^x$과 만나는 점을 각각 Q, R라 하자. 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



13. $\overline{QR}=2$일 때, a의 값은? 〔3점〕

① 4 ② 8
③ 12 ④ 16
⑤ 20

14. 점 P가 점 $(0, 1)$을 출발하여 y축을 따라 y축의 양의 방향으로 매초 1의 일정한 속도로 움직인다. 그림과 같이 점 Q를 지나고 y축에 평행한 직선과 점 R를 지나고 y축에 평행한 직선 및 두 곡선 $y=2^x$, $y=4^x$으로 둘러싸인 영역(어두운 부분)의 넓이를 S라 하자. 점 P가 점 $(0, 4)$를 지나는 순간, 넓이 S의 시간(초)에 대한 변화율은? 〔4점〕



① $\frac{9}{4\ln 2}$ ② $\frac{11}{4\ln 2}$
③ $\frac{13}{4\ln 2}$ ④ $\frac{15}{4\ln 2}$
⑤ $\frac{17}{4\ln 2}$

15. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) $f(0)=0$
(나) $0<x<1$인 모든 실수 x에 대하여 $0<f(x)<1$, $f''(x)>0$ 이다.

이때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $f(a)=a$인 실수 a가 열린 구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

ㄴ. $0<x<1$인 모든 실수 x에 대하여 $f\left(\frac{x}{2}\right)<\frac{f(x)}{2}$이다.

ㄷ. $0<f'(b)\le 1$인 실수 b가 열린 구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ
③ ㄷ ④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $A^2=2A$, $B=A^2-E$일 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.) [4점]

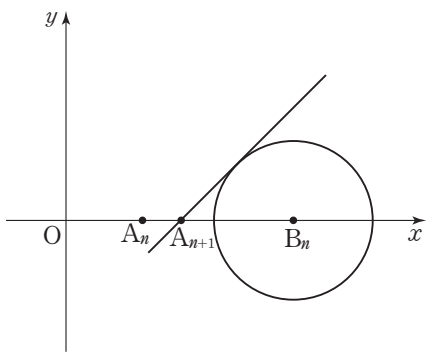
〈보 기〉

ㄱ. $AB=BA$
ㄴ. $(A-B)^5=A-B$
ㄷ. $A\neq O$이면 행렬 $\frac{1}{6}(AB)^2-E$의 역행렬이 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 좌표평면에서 점 A_1의 좌표가 $(1, 0)$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 점 A_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

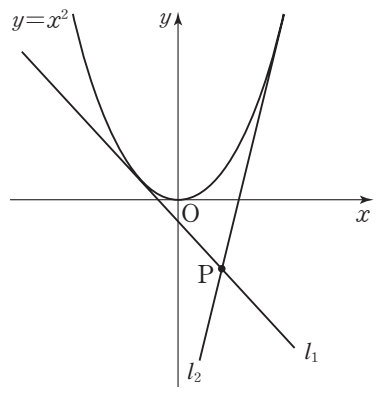
(가) 점 A_n을 x축의 방향으로 $2n$만큼 평행이동시킨 점을 B_n이라 한다.
(나) 점 B_n을 중심으로 하고 반지름의 길이가 n인 원을 그린다.
(다) 그림과 같이 (나)에서 그려진 원에 접하고 기울기가 $\frac{4}{3}$인 직선이 x축과 만나는 점을 A_{n+1}이라 한다.



점 A_n의 x좌표를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값은? (단, 점 A_{n+1}의 x좌표는 점 B_n의 x좌표보다 작다.) [4점]

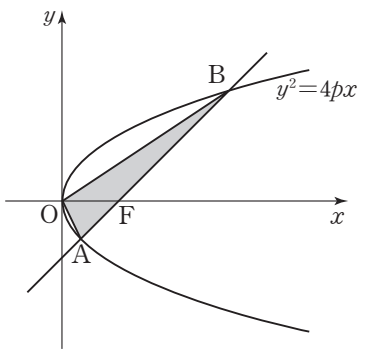
① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$
③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$
⑤ $\frac{3}{4}$

18. 그림과 같이 좌표평면 위의 점 $P(k, -2)$에서 곡선 $y=x^2$에 그은 두 접선을 각각 l_1, l_2라 하자. 두 직선 l_1, l_2가 이루는 예각의 크기가 45°일 때, 양수 k의 값은? [4점]



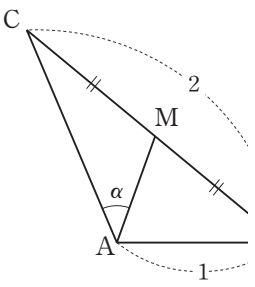
① $\frac{\sqrt{13}}{4}$
② $\frac{\sqrt{15}}{4}$
③ $\frac{\sqrt{17}}{4}$
④ $\frac{\sqrt{19}}{4}$
⑤ $\frac{\sqrt{21}}{4}$

19. 그림과 같이 좌표평면에서 포물선 $y^2=4px(p>0)$의 초점 F를 지나고 기울기가 1인 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{AB}=8$일 때, 삼각형 ABO의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\sqrt{2}$
② 2
③ $2\sqrt{2}$
④ 4
⑤ $4\sqrt{2}$

20. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$인 삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점을 M이라 하고, $\angle CAM=\alpha$라 하자. $\sin\alpha=\frac{1}{3}$일 때, 선분 AC의 길이는? (단, α는 예각이다.) [4점]



① $\frac{7\sqrt{17}}{17}$
② $\frac{9\sqrt{17}}{17}$
③ $\frac{11\sqrt{17}}{17}$
④ $\frac{7\sqrt{19}}{19}$
⑤ $\frac{9\sqrt{19}}{19}$

21. 실수 m에 대하여 x에 대한 방정식 $x^2e^{-x}-mx=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $f(m)$이라 하자. 함수 $g(m)=f(m)(m^2+am+b)$가 모든 실수 m에서 연속이 되도록 하는 두 실수 a, b의 합 $a+b$의 값은? $\left(\text{단, } e\text{는 자연로그의 밑이고, } \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=0\text{이다.}\right)$ [4점]

① $-\frac{2}{e}$ ② $-\frac{1}{e}$

③ 0 ④ $\frac{1}{e}$

⑤ $\frac{2}{e}$

단 답 형

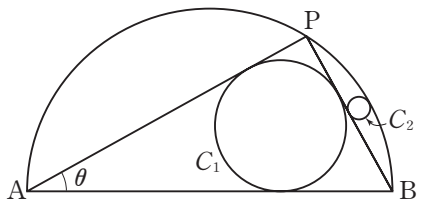
22. 함수 $f(x)=3x^2\ln(2x-3)$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하시오. [3점]

23. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+a}{x^2-4}=b$일 때, $4(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [3점]

24. 희준이는 전체 거리가 21 km인 하프마라톤 대회에 참가하여 처음 15 km의 구간은 시속 x km의 일정한 속력으로 달린 후, 나머지 6 km의 구간은 시속 $(x+2)$km의 일정한 속력으로 달렸다. 희준이가 21 km 전체 거리를 달리는 데 모두 2시간이 걸렸을 때, 양수 x의 값을 구하시오. [3점]

25. 좌표평면에서 일차변환 f에 의하여 점 $(2, -1)$은 점 $(3, 1)$로 옮겨지고, 합성변환 $f \circ f$에 의하여 점 $(-2, 1)$은 점 $(-2, -9)$로 옮겨진다. 일차변환 f에 의하여 점 $(2, 3)$이 점 (a, b)로 옮겨질 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

26. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위를 움직이는 점 P가 있다. $\angle PAB=\theta$, 삼각형 APB에 내접하는 원을 C_1, 선분 PB와 호 PB에 모두 접하는 원 중에서 반지름의 길이가 가장 긴 원을 C_2라 하자. 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이를 각각 $r_1(\theta)$, $r_2(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to +0} \frac{\theta r_1(\theta)}{r_2(\theta)}$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ [4점]



27. 어떤 장치를 이용하여 처음 농도가 8 %인 용액 A의 농도를 x %$(8 \le x < 100)$로 만드는 데 걸린 시간을 T분이라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$T = p\log_a \frac{8x}{100-x} + C$$

(단, p와 C는 양의 상수이고, a는 1보다 큰 상수이다.)

이 장치를 이용하여 처음 농도가 8 %인 용액 A의 농도를 50 %로 만드는 데 걸린 시간은 처음 농도가 8 %인 용액 A의 농도를 20 %로 만드는 데 걸린 시간의 4배이다. 또한, 이 장치를 이용하여 처음 농도가 8%인 용액 A의 농도를 80 %로 만드는 데 걸린 시간은 처음 농도가 8%인 용액 A의 농도를 20 %로 만드는 데 걸린 시간의 k배이다. k의 값을 구하시오. [4점]

28. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 다음 등식이 성립한다.

$$4S_n = a_n^{\,2} + 2a_n - 3 \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

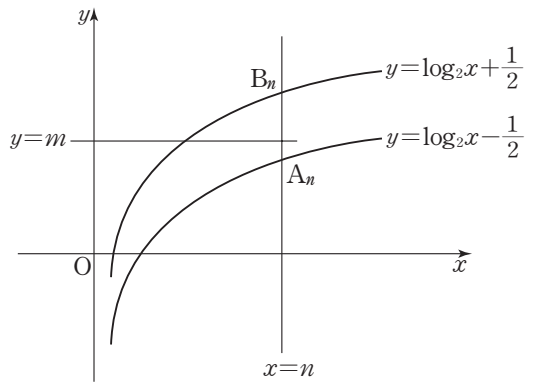
$\sum_{n=1}^{20} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

29. 좌표평면 위의 점의 집합

$A=\{(x, y) \mid 1 \le x \le 10,\ 1 \le y \le 10,\ x, y$는 자연수$\}$

에 대하여 집합 A의 원소인 점 (x, y)를 행렬 $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$로 나타내어지는 일차변환에 의하여 옮겨진 점을 (x', y')이라 할 때, $(x', y') \in A$를 만족시키는 집합 A의 원소의 개수를 구하시오. [4점]

30. 그림과 같이 좌표평면에서 두 곡선 $y=\log_2 x-\frac{1}{2}$, $y=\log_2 x+\frac{1}{2}$과 직선 $x=n$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)이 만나는 점을 각각 A_n, B_n이라 하자. 자연수 n과 정수 m에 대하여 선분 A_nB_n과 직선 $y=m$이 만나는 점의 y좌표를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{20} a_n$의 값을 구하시오. [4점]



♣ 확인 사항

답안지에 필요한 사항을 정확히 기입(표기)하였는지 확인하시오.