

2024학년도 대학수학능력시험  
수학영역 정답 및 풀이

\*최근 수정일 : 2023.11.17.(금)

■ [공통: 수학 I·수학 II]

01. ① 02. ④ 03. ② 04. ① 05. ④  
 06. ④ 07. ⑤ 08. ② 09. ④ 10. ②  
 11. ① 12. ③ 13. ① 14. ① 15. ③  
 16. 2 17. 8 18. 9 19. 32  
 20. 25 21. 10 22. 483

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{24 \times 3^{\frac{2}{3}}} \\ &= (2^3 \times 3)^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} \\ &= (2^3)^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} \\ &= 2^{3 \times \frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} \\ &= 2^1 \times 3^1 \\ &= 6 \end{aligned}$$

정답 ①

2. 출제의도 : 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 - 5x^2 + 3 \text{ 에서} \\ f'(x) &= 6x^2 - 10x \text{ 이므로} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= f'(2) \\ &= 24 - 20 \\ &= 4 \end{aligned}$$

정답 ④

3. 출제의도 : 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta = \frac{1}{3} \text{ 에서}$$

$$\sin\theta = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi \text{ 이므로}$$

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

정답 ②

4. 출제의도 : 함수의 연속의 정의와 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수  $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수  $f(x)$ 는  $x=2$ 에서도 연속이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

이때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - a) \\ &= 6 - a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + a) \\ &= 4 + a \end{aligned}$$

$$f(2) = 4 + a$$

그러므로

$$6 - a = 4 + a = 4 + a$$

따라서

$$2a = 2. \quad a = 1$$

정답 ①

5. 출제의도 : 다항함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \text{ 이므로}$$

$$f(x) = \int (3x^2 - 6x) dx$$

$$= x^3 - 3x^2 + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

$$f(1) = 1 - 3 + C = 6 \text{ 에서 } C = 8$$

따라서

$$f(2) = 8 - 12 + 8 = 4$$

정답 ④

6. 출제의도 : 조건을 만족시키는 등비수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$S_4 - S_2 = a_3 + a_4 \text{ 이므로}$$

$$a_3 + a_4 = 3a_4, \quad a_3 = 2a_4$$

등비수열  $\{a_n\}$ 의 공비를  $r$ 라 하면

$$a_5 = \frac{3}{4} \text{ 에서 } r \neq 0 \text{ 이고}$$

$$a_3 = 2a_4 \text{ 에서 } r = \frac{a_4}{a_3} = \frac{1}{2}$$

$$a_5 = a_1 \times r^4 \text{ 에서}$$

$$a_1 = a_5 \times \frac{1}{r^4} = \frac{3}{4} \times 2^4 = 12$$

$$a_5 = a_2 \times r^3 \text{ 에서}$$

$$a_2 = a_5 \times \frac{1}{r^3} = \frac{3}{4} \times 2^3 = 6$$

따라서  $a_1 + a_2 = 12 + 6 = 18$

정답 ④

7. 출제의도 : 다항함수의 극댓값과 극솟값을 갖는  $x$ 의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 12x + 4 \text{ 에서}$$

$$f'(x) = x^2 - 4x - 12$$

$$= (x+2)(x-6)$$

$$f'(x) = 0 \text{ 에서}$$

$$x = -2 \text{ 또는 } x = 6$$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	-2	...	6	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수  $f(x)$ 는  $x = -2$ 에서 극대이고,  
 $x = 6$ 에서 극소이다.

따라서

$$\alpha = -2, \quad \beta = 6$$

이므로

$$\beta - \alpha = 6 - (-2) = 8$$

정답 ⑤

8. 출제의도 : 정적분의 성질을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$xf(x) - f(x) = 3x^4 - 3x \text{ 에서}$$

$$(x-1)f(x) = 3x(x-1)(x^2+x+1) \quad \text{..... } \textcircled{1}$$

$f(x)$ 가 삼차함수이고

$\textcircled{1}$ 이  $x$ 에 대한 항등식이므로

$$f(x) = 3x(x^2+x+1)$$

따라서

$$\int_{-2}^2 f(x) dx$$

$$= \int_{-2}^2 3x(x^2 + x + 1)dx$$

$$= \int_{-2}^2 (3x^3 + 3x^2 + 3x)dx$$

$$= 2 \int_0^2 3x^2 dx$$

$$= 2 \times \left[ x^3 \right]_0^2$$

$$= 2 \times 2^3$$

$$= 16$$

정답 ②

9. 출제의도 : 로그의 정의와 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

수직선 위의 두 점  $P(\log_5 3)$ ,  $Q(\log_5 12)$ 에 대하여 선분 PQ를  $m:(1-m)$ 으로 내분하는 점의 좌표가 1 이므로

$$\frac{m \times \log_5 12 + (1-m) \times \log_5 3}{m + (1-m)} = 1$$

$$m \times \log_5 12 + (1-m) \times \log_5 3 = 1$$

$$m(\log_5 12 - \log_5 3) = 1 - \log_5 3$$

$$m \times \log_5 \frac{12}{3} = \log_5 \frac{5}{3}$$

$$m \times \log_5 4 = \log_5 \frac{5}{3}$$

이때,

$$m = \frac{\log_5 \frac{5}{3}}{\log_5 4}$$

$$= \log_4 \frac{5}{3}$$

따라서,

$$4^m = 4^{\log_4 \frac{5}{3}}$$

$$= \frac{5}{3}$$

정답 ④

10. 출제의도 : 적분을 이용하여 수직선 위의 움직이는 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

시각  $t$ 에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ 라 하면

$$x_1(t) = 0 + \int_0^t (t^2 - 6t + 5)dt$$

$$= \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t,$$

$$x_2(t) = 0 + \int_0^t (2t - 7)dt$$

$$= t^2 - 7t$$

이므로

$$f(t) = |x_1(t) - x_2(t)| \\ = \left| \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 12t \right|$$

이다. 함수  $g(t)$ 를

$$g(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 12t \text{라 하면}$$

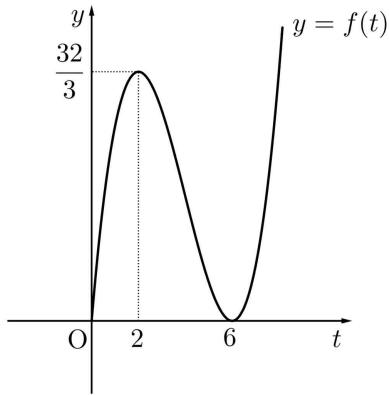
$$g'(t) = t^2 - 8t + 12 = (t-2)(t-6)$$

$$g'(t) = 0 \text{에서 } t=2 \text{ 또는 } t=6$$

$t \geq 0$ 에서 함수  $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$t$	0	...	2	...	6	...
$g'(t)$		+	0	-	0	+
$g(t)$	0	↗	$\frac{32}{3}$	↘	0	↗

$t \geq 0$ 인 모든 실수  $t$ 에 대하여  $g(t) \geq 0$ 이므로  $f(t) = g(t)$ 이고 함수  $y = f(t)$ 의 그래프는 그림과 같다.



함수  $f(t)$ 는 구간  $[0, 2]$ 에서 증가하고, 구간  $[2, 6]$ 에서 감소하고, 구간  $[6, \infty)$ 에서 증가한다. 즉,  $a=2$ ,  $b=6$ 이다.

시각  $t=2$ 에서  $t=6$ 까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_2^6 |v_2(t)| dt &= \int_2^6 |2t-7| dt \\ &= \int_2^{\frac{7}{2}} (7-2t) dt + \int_{\frac{7}{2}}^6 (2t-7) dt \\ &= \left[ 7t - t^2 \right]_2^{\frac{7}{2}} + \left[ t^2 - 7t \right]_{\frac{7}{2}}^6 \\ &= \frac{9}{4} + \frac{25}{4} = \frac{17}{2} \end{aligned}$$

정답 ②

11. 출제의도 : 등차수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$|a_6| = a_8$ 에서

$a_6 = a_8$  또는  $-a_6 = a_8$  ..... ㉠

등차수열  $\{a_n\}$ 의 공차가 0이 아니므로

$a_6 \neq a_8$  ..... ㉡

㉠, ㉡에서

$-a_6 = a_8$  즉,

$a_6 + a_8 = 0$  ..... ㉢

한편,  $|a_6| = a_8$ 에서

$a_8 \geq 0$ 이고,  $a_6 + a_8 = 0$ 이므로

$a_6 < 0 < a_8$ 이다.

즉, 등차수열  $\{a_n\}$ 의 공차는 양수이다.

등차수열  $\{a_n\}$ 의 공차를  $d(d > 0)$ 이라 하면 ㉢에서

$$(a_1 + 5d) + (a_1 + 7d) = 0$$

$$a_1 = -6d \quad \dots\dots \text{㉣}$$

한편,  $\sum_{k=1}^5 \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{5}{96}$ 에서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 \frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^5 \frac{1}{a_{k+1} - a_k} \left( \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^5 \frac{1}{d} \left( \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \\ &= \frac{1}{d} \left\{ \left( \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + \left( \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \left( \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{a_4} - \frac{1}{a_5} \right) + \left( \frac{1}{a_5} - \frac{1}{a_6} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{d} \left( \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_6} \right) \\ &= \frac{1}{d} \left( \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 + 5d} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{d} \times \frac{5d}{a_1(a_1 + 5d)}$$

$$= \frac{5}{a_1(a_1 + 5d)}$$

이므로

$$\frac{5}{a_1(a_1 + 5d)} = \frac{5}{96}$$

$$a_1(a_1 + 5d) = 96 \quad \dots\dots \text{㉤}$$

㉣을 ㉤에 대입하면

$$-6d \times (-d) = 96$$

$$d^2 = 16$$

$d > 0$ 이므로

$$d = 4$$

$d = 4$ 를 ㉠에 대입하면

$$a_1 = -6 \times 4 = -24$$

따라서

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{15} a_k \\ &= \frac{15\{2 \times (-24) + 14 \times 4\}}{2} \\ &= 60 \end{aligned}$$

정답 ①

## 12. 출제의도 :

곡선과  $x$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수  $g(x)$ 는  $x \geq t$ 일 때, 점  $(t, f(t))$ 를 지나고 기울기가  $-1$ 인 직선이므로 이 직선은  $x$ 축과 점  $(t+f(t), 0)$ 에서 만난다.

그러므로 함수  $y=g(x)$ 의 그래프와  $x$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를  $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \int_0^t f(x)dx + \frac{1}{2} \times \{f(t)\}^2$$

이때, 양변을 미분하면

$$\begin{aligned} S'(t) &= f(t) + f(t) \times f'(t) \\ &= f(t)\{1 + f'(t)\} \end{aligned}$$

한편,  $f(x) = \frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$ 이므로

$$0 < t < 6 \text{에서 } f(t) > 0$$

또,

$$\begin{aligned} & 1 + f'(t) \\ &= 1 + \frac{1}{9} \{(t-6)(t-9) + t(t-9) + t(t-6)\} \\ &= 1 + \frac{1}{9} \{(t^2 - 15t + 54) + (t^2 - 9t)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + (t^2 - 6t)\} \\ &= 1 + \frac{1}{9} (3t^2 - 30t + 54) \\ &= 1 + \frac{1}{3} (t^2 - 10t + 18) \\ &= \frac{1}{3} (t^2 - 10t + 21) \\ &= \frac{1}{3} (t-3)(t-7) \end{aligned}$$

그러므로  $0 < t < 6$ 에서  $S(t)$ 의 증가와 감소는 다음 표와 같다.

$t$	(0)	...	3	...	(6)
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		↗	(극대)	↘	

그러므로  $S(t)$ 는  $t=3$ 에서 극대이면서 최대이다.

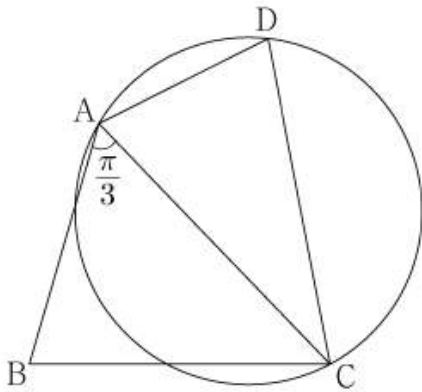
따라서, 최댓값은

$$\begin{aligned} & S(3) \\ &= \int_0^3 f(x)dx + \frac{1}{2} \{f(3)\}^2 \\ &= \frac{1}{9} \int_0^3 x(x-6)(x-9)dx \\ & \quad + \frac{1}{2} \times \left\{ \frac{1}{9} \times 3 \times (-3) \times (-6) \right\}^2 \\ &= \frac{1}{9} \int_0^3 (x^3 - 15x^2 + 54x)dx + 18 \\ &= \frac{1}{9} \left[ \frac{1}{4}x^4 - 5x^3 + 27x^2 \right]_0^3 + 18 \\ &= \frac{1}{9} \times \left( \frac{1}{4} \times 81 - 5 \times 27 + 27 \times 9 \right) + 18 \\ &= \left( \frac{9}{4} - 15 + 27 \right) + 18 \\ &= \left( \frac{9}{4} + 12 \right) + 18 \\ &= \frac{9}{4} + 30 \\ &= \frac{129}{4} \end{aligned}$$

정답 ③

13. 출제의도 : 사인법칙, 코사인법칙 및 삼각형의 넓이를 활용하여 외접원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



삼각형 ABC에서

$$\overline{AC} = a (a > 0)$$

이라 하면

코사인법칙에 의해

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos(\angle BAC)$$

$$(\sqrt{13})^2 = 3^2 + a^2 - 2 \times 3 \times a \times \cos \frac{\pi}{3}$$

$$a^2 - 3a - 4 = 0$$

$$(a+1)(a-4) = 0$$

$a > 0$ 이므로

$$a = 4$$

즉,  $\overline{AC} = 4$

삼각형 ABC의 넓이  $S_1$ 은

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin(\angle BAC)$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 3\sqrt{3}$$

$$\overline{AD} \times \overline{CD} = 9$$

이므로

삼각형 ACD의 넓이  $S_2$ 는

$$S_2 = \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{CD} \times \sin(\angle ADC)$$

$$= \frac{9}{2} \sin(\angle ADC)$$

이때,  $S_2 = \frac{5}{6} S_1$ 이므로

$$\frac{9}{2} \sin(\angle ADC) = \frac{5}{6} \times 3\sqrt{3}$$

$$\sin(\angle ADC) = \frac{5\sqrt{3}}{9}$$

삼각형 ACD에서

사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ADC)} = 2R$$

이므로

$$\frac{4}{\frac{5\sqrt{3}}{9}} = 2R$$

$$R = \frac{6\sqrt{3}}{5}$$

따라서

$$\frac{R}{\sin(\angle ADC)} = \frac{\frac{6\sqrt{3}}{5}}{\frac{5\sqrt{3}}{9}}$$

$$= \frac{54}{25}$$

정답 ①

14. 출제의도 : 새롭게 정의된 함수가 조건을 만족시키도록 하는 두 자연수의 순서쌍을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x \leq 2$  일 때,

$$f(x) = 2x^3 - 6x + 1 \text{ 에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x-1)(x+1) \text{ 이므로}$$

$$f'(x) = 0 \text{ 에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

$x \leq 2$  에서 함수  $f(x)$  의 증가와 감소를 표  
로 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	-1	...	1	...	2
$f'(x)$	+	0	-	0	+	
$f(x)$	↗	5	↘	-3	↗	5

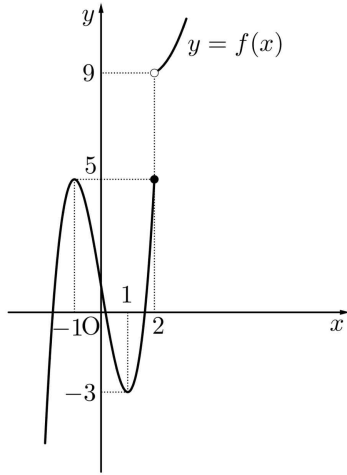
또한,  $a, b$  가 자연수이므로 곡선

$$y = a(x-2)(x-b) + 9$$

는 점  $(2, 9)$  와 점  $(b, 9)$  를 지나고 아래  
로 볼록한 포물선이다.

(i)  $b=1$  또는  $b=2$  인 경우

함수  $f(x)$  는  $x > 2$  에서 증가하고, 함수  
 $y = f(x)$  의 그래프는 그림과 같다.



이때  $-3 < k < 5$  인 모든 실수  $k$  에 대하  
여

$$g(k) = \lim_{t \rightarrow k^-} g(k) = \lim_{t \rightarrow k^+} g(k) = 3 \quad \text{..... } \textcircled{7}$$

이므로

$$g(k) + \lim_{t \rightarrow k^-} g(k) + \lim_{t \rightarrow k^+} g(k) = 9 \quad \text{..... } \textcircled{8}$$

을 만족시키는 실수  $k$  의 개수가 1 이 아  
니다.

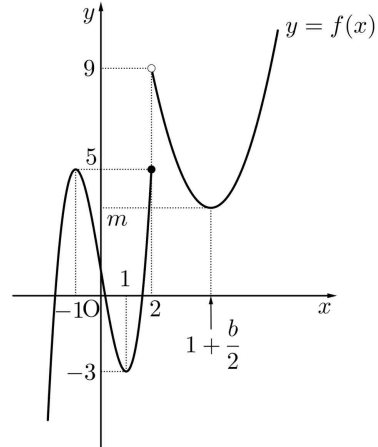
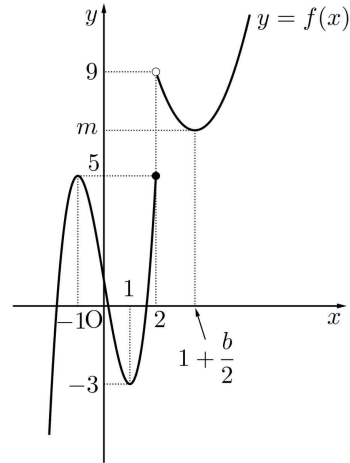
(ii)  $b \geq 3$  인 경우

곡선  $y = a(x-2)(x-b) + 9$  는 직선

$x = \frac{2+b}{2} = 1 + \frac{b}{2}$  에 대하여 대칭이므로

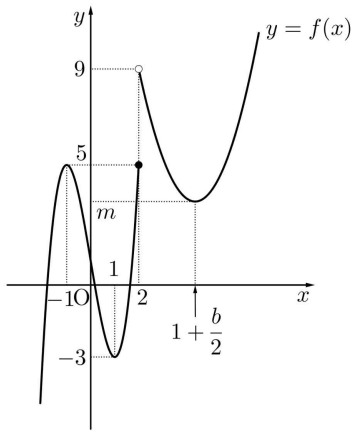
함수  $f(x)$  는  $x = 1 + \frac{b}{2}$  에서 극솟값을 갖  
는다. 이 극솟값을  $m$  이라 하자.

(ii - ①)  $m > -3$  인 경우



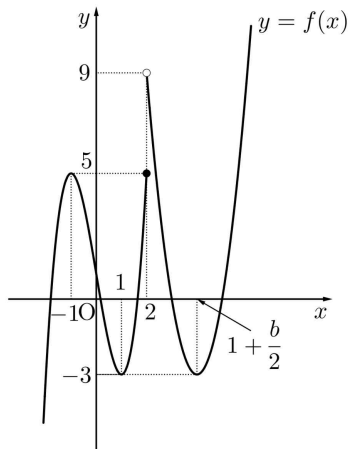
$m$  과 5 중에 크지 않은 값을  $m_1$  이라 하  
면  $-3 < k < m_1$  인 모든 실수  $k$  에 대하  
여  $\textcircled{7}$  이 성립하므로  $\textcircled{8}$  을 만족시키는 실  
수  $k$  의 개수가 1 이 아니다.

(ii - ②)  $m < -3$  인 경우



$m < k < -3$ 인 모든 실수  $k$ 에 대하여 ㉠이 성립하므로 ㉡을 만족시키는 실수  $k$ 의 개수가 1이 아니다.

(ii -㉢)  $m = -3$ 인 경우



$k$ 의 값에 따라  $g(k)$ ,  $\lim_{t \rightarrow k^-} g(k)$ ,

$\lim_{t \rightarrow k^+} g(k)$ 의 값을 구하면 다음과 같다.

	$g(k)$	$\lim_{t \rightarrow k^-} g(k)$	$\lim_{t \rightarrow k^+} g(k)$
$k < -3$	1	1	1
$k = -3$	3	1	5
$-3 < k < 5$	5	5	5
$k = 5$	4	5	2
$5 < k < 9$	2	2	2
$k = 9$	1	2	1
$k > 9$	1	1	1

즉, ㉡을 만족시키는 실수  $k$ 의 값은  $-3$  뿐이므로 문제의 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서  $b \geq 3$ ,  $m = -3$ 이다.

$$f\left(1 + \frac{b}{2}\right) = -3 \text{에서}$$

$$a\left(\frac{b}{2} - 1\right)\left(1 - \frac{b}{2}\right) + 9 = -3$$

$$a(b-2)^2 = 48$$

$48 = 2^4 \times 3$ 이므로 구하는 두 자연수  $a$ ,

$b$ 의 모든 순서쌍  $(a, b)$ 는

$(48, 3)$ ,  $(12, 4)$ ,  $(3, 6)$

이다.

따라서  $a+b$ 의 최댓값은  $48+3=51$ 이다.

정답 ①

15. 출제의도 : 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 첫째항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_n$ 이 홀수일 때

$$a_{n+1} = 2^{a_n} \text{은 자연수이고}$$

$a_n$ 이 짝수일 때

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \text{은 자연수이다.}$$

이때  $a_1$ 이 자연수이므로

수열  $\{a_n\}$ 의 모든 항은 자연수이다.

$$a_6 + a_7 = 3 \text{에서}$$

$$a_6 = 1, a_7 = 2 \text{ 또는 } a_6 = 2, a_7 = 1$$

이다.

(i)  $a_6 = 1$ 일 때,

$a_6 = 1$ 이고  $a_5$ 가 홀수인 경우

$$a_6 = 2^{a_5} \text{에서}$$

$$1 = 2^{a_5}$$

이 등식을 만족시키는 자연수  $a_5$ 의 값은



없다.

$a_6 = 1$ 이고  $a_5$ 가 짝수인 경우

$$a_6 = \frac{1}{2}a_5 \text{에서}$$

$$1 = \frac{1}{2}a_5$$

$$a_5 = 2$$

$a_4$ 를 구해보자.

$a_5 = 2$ 이고  $a_4$ 가 홀수인 경우

$$a_5 = 2^{a_4} \text{에서}$$

$$2 = 2^{a_4}$$

$$a_4 = 1$$

$a_5 = 2$ 이고  $a_4$ 가 짝수인 경우

$$a_5 = \frac{1}{2}a_4 \text{에서}$$

$$2 = \frac{1}{2}a_4$$

$$a_4 = 4$$

$a_3$ 을 구해보자.

$a_4 = 1$ 일 때

$$a_3 = 2$$

$a_4 = 4$ 이고  $a_3$ 이 홀수인 경우

$$a_4 = 2^{a_3} \text{에서}$$

$$4 = 2^{a_3}$$

$$a_3 = 2$$

이때,  $a_3$ 이 짝수이므로 모순이다.

$a_4 = 4$ 이고  $a_3$ 이 짝수인 경우

$$a_4 = \frac{1}{2}a_3 \text{에서}$$

$$4 = \frac{1}{2}a_3$$

$$a_3 = 8$$

$a_2$ 를 구해보자.

$a_3 = 2$ 일 때

$$a_2 = 1 \text{ 또는 } a_2 = 4$$

$a_3 = 8$ 이고  $a_2$ 가 홀수인 경우

$$a_3 = 2^{a_2} \text{에서}$$

$$8 = 2^{a_2}$$

$$a_2 = 3$$

$a_3 = 8$ 이고  $a_2$ 가 짝수인 경우

$$a_3 = \frac{1}{2}a_2 \text{에서}$$

$$8 = \frac{1}{2}a_2$$

$$a_2 = 16$$

$a_1$ 을 구해보자.

$a_2 = 1$ 일 때

$$a_1 = 2$$

$a_2 = 4$ 일 때

$$a_1 = 8$$

$a_2 = 3$ 이고  $a_1$ 이 홀수인 경우

$$a_2 = 2^{a_1} \text{에서}$$

$$3 = 2^{a_1}$$

이 등식을 만족시키는 자연수  $a_1$ 의 값은 없다.

$a_2 = 3$ 이고  $a_1$ 이 짝수인 경우

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 \text{에서}$$

$$3 = \frac{1}{2}a_1$$

$$a_1 = 6$$

$a_2 = 16$ 이고  $a_1$ 이 홀수인 경우

$$a_2 = 2^{a_1} \text{에서}$$

$$16 = 2^{a_1}$$

$$a_1 = 4$$

이때  $a_1$ 이 짝수이므로 모순이다.

$a_2 = 16$ 이고  $a_1$ 이 짝수인 경우

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 \text{에서}$$

$$16 = \frac{1}{2}a_1$$

$$a_1 = 32$$

따라서  $a_1$ 의 값은

2 또는 6 또는 8 또는 32이다.

(ii)  $a_6 = 2$ 일 때,

(i)의 과정을 이용하면

$a_2 = 2$  또는  $a_2 = 6$  또는  $a_2 = 8$  또는

$$a_2 = 32$$

$a_1$ 을 구해보자.

$a_2 = 2$ 이고  $a_1$ 이 홀수인 경우

$$a_2 = 2^{a_1}$$

$$2 = 2^{a_1}$$

$$a_1 = 1$$

$a_2 = 2$ 이고  $a_1$ 이 짝수인 경우

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1$$

$$2 = \frac{1}{2}a_1$$

$$a_1 = 4$$

$a_2 = 6$ 이고  $a_1$ 이 홀수인 경우

$$a_2 = 2^{a_1}$$

$$6 = 2^{a_1}$$

이 등식을 만족시키는 자연수  $a_1$ 의 값은 없다.

$a_2 = 8$ 이고  $a_1$ 이 짝수인 경우

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1$$

$$8 = \frac{1}{2}a_1$$

$$a_1 = 12$$

$a_2 = 8$ 이고  $a_1$ 이 홀수인 경우

$$a_2 = 2^{a_1}$$

$$8 = 2^{a_1}$$

$$a_1 = 3$$

$a_2 = 8$ 이고  $a_1$ 이 짝수인 경우

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1$$

$$8 = \frac{1}{2}a_1$$

$$a_1 = 16$$

$a_2 = 32$ 이고  $a_1$ 이 홀수인 경우

$$a_2 = 2^{a_1}$$

$$32 = 2^{a_1}$$

$$a_1 = 5$$

$a_2 = 32$ 이고  $a_1$ 이 짝수인 경우

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1$$

$$32 = \frac{1}{2}a_1$$

$$a_1 = 64$$

따라서  $a_1$ 의 값은

1 또는 3 또는 4 또는 5 또는 12 또는 16 또는 64이다.

(i), (ii)에서

모든  $a_1$ 의 값의 합은

$$(2+6+8+32) + (1+3+4+5+12+16+64) = 153$$

정답 ③

16. 출제의도 : 지수에 미지수가 포함된 방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

$$3^{x-8} = \left(\frac{1}{27}\right)^x$$

$$3^{x-8} = (3^{-3})^x$$

$$3^{x-8} = 3^{-3x}$$

그러므로

$$x-8 = -3x$$

$$4x = 8$$

$$x = 2$$

정답 2

17. 출제의도 : 도함수와 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = (x+1)(x^2+3) \text{이므로}$$

$$f'(x) = (x^2+3) + (x+1) \times 2x$$

따라서,

$$f'(1) = (1+3) + 2 \times 2$$

$$= 8$$

정답 8

18. 출제의도 : 수열의 합의 기호의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} (2b_k - 1)$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{10} b_k - 10 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\sum_{k=1}^{10} (3a_k + b_k) = 33 \text{에서}$$

$$3 \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k = 33$$

$$\sum_{k=1}^{10} b_k = -3 \sum_{k=1}^{10} a_k + 33 \quad \dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$\sum_{k=1}^{10} b_k = -3 \left( 2 \sum_{k=1}^{10} b_k - 10 \right) + 33$$

$$\sum_{k=1}^{10} b_k = -6 \sum_{k=1}^{10} b_k + 63$$

$$7 \sum_{k=1}^{10} b_k = 63$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10} b_k = 9$$

정답 9

19. 출제의도 : 삼각함수가 포함된 부등식을 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(2+x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}x\right) = \cos \frac{\pi}{4}x,$$

$$f(2-x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}x\right) = \cos \frac{\pi}{4}x$$

이므로 주어진 부등식은

$$\cos^2 \frac{\pi}{4}x < \frac{1}{4}$$

즉,

$$-\frac{1}{2} < \cos \frac{\pi}{4}x < \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{3}$$

이다.

$0 < x < 16$ 에서  $0 < \frac{\pi}{4}x < 4\pi$ 이므로 ③에서

$$\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{4}x < \frac{2}{3}\pi$$

$$\text{또는 } \frac{4}{3}\pi < \frac{\pi}{4}x < \frac{5}{3}\pi$$

$$\text{또는 } \frac{7}{3}\pi < \frac{\pi}{4}x < \frac{8}{3}\pi$$

$$\text{또는 } \frac{10}{3}\pi < \frac{\pi}{4}x < \frac{11}{3}\pi$$

이다. 즉,

$$\frac{4}{3} < x < \frac{8}{3} \quad \text{또는} \quad \frac{16}{3} < x < \frac{20}{3} \quad \text{또는}$$

$$\frac{28}{3} < x < \frac{32}{3} \quad \text{또는} \quad \frac{40}{3} < x < \frac{44}{3}$$

이므로 구하는 자연수  $x$ 의 값은

2, 6, 10, 14이다.

따라서 구하는 모든 자연수  $x$ 의 값의 합은

$$2+6+10+14=32$$

정답 32

20. 출제의도 : 접선의 방정식을 구하고, 이를 활용하여 두 선분의 길이의 곱을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + 2x \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax + 2$$

$$f'(0) = 2$$

곡선  $y=f(x)$  위의 점  $O(0, 0)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y = 2x$$

이다.

곡선  $y=f(x)$ 와 직선  $y=2x$ 가 만나는 점의  $x$ 좌표를 구해보자.

$$f(x) = 2x \text{에서}$$

$$-x^3 + ax^2 + 2x = 2x$$

$$x^2(x-a) = 0$$

$$x = 0 \text{ 또는 } x = a$$

점 A의  $x$ 좌표는 0이 아니므로 점 A의  $x$ 좌표는  $a$ 이다. 즉, 점 A의 좌표는

$$(a, 2a)$$

이다.

점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점이므로

$$\angle OAB = \frac{\pi}{2}$$

이다. 즉, 두 직선 OA와 AB는 서로 수직이다.

이때,

$$f'(a) = -3a^2 + 2a^2 + 2$$

$$= -a^2 + 2$$

이므로

직선 AB의 기울기는  $-a^2 + 2$ 이다.

$$2 \times (-a^2 + 2) = -1 \text{에서}$$

$$a^2 = \frac{5}{2}$$

$$a > \sqrt{2} \text{이므로}$$

$$a = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

점 A의 좌표는

$$\left( \frac{\sqrt{10}}{2}, \sqrt{10} \right)$$

이다.

곡선  $y=f(x)$  위의 점 A에서의 접선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{2} \left( x - \frac{\sqrt{10}}{2} \right) + \sqrt{10} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①에  $y=0$ 을 대입하면

$$0 = -\frac{1}{2} \left( x - \frac{\sqrt{10}}{2} \right) + \sqrt{10}$$

$$x = \frac{5\sqrt{10}}{2}$$

점 B의 좌표는

$$\left( \frac{5\sqrt{10}}{2}, 0 \right)$$

이다.

따라서

$$\overline{OA} = \sqrt{\left( \frac{\sqrt{10}}{2} \right)^2 + (\sqrt{10})^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2},$$

$$\overline{AB} = \sqrt{\left( \frac{5\sqrt{10}}{2} - \frac{\sqrt{10}}{2} \right)^2 + (0 - \sqrt{10})^2} = 5\sqrt{2}$$

이므로

$$\overline{OA} \times \overline{AB} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \times 5\sqrt{2} = 25$$

정답 25

21. 출제의도 : 로그함수의 그래프를 이해하고 함수  $g(t)$ 가 최솟값을 갖도록 하는  $a$ 의 값의 범위를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$t=0$ 일 때, 구간  $[-1, 1]$ 에서 함수  $f(x)$ 는  $x=1$ 에서 최댓값 5를 가지므로

$$g(0)=5$$

한편, 함수  $y=-x^2+6x$ 는 직선  $x=3$ 에 대하여 대칭이고  $f(5)=5$ 이므로  $1 \leq t \leq 5$ 일 때,

$$g(t) \geq 5$$

한편,

$$f(5)=5 \text{이고 } f(6)=0$$

또, 구간  $[0, \infty)$ 에서 함수  $g(t)$ 가 최솟값을 5로 갖기 위해서는  $t=6$ 일 때, 구간  $[5, 7]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 최댓값이 5 이상이어야 하므로

$$f(7) \geq 5$$

즉,

$$a \log_4(7-5) \geq 5$$

$$a \times \log_2 2 \geq 5$$

$$a \times \frac{1}{2} \geq 5$$

$$a \geq 10$$

따라서, 양수  $a$ 의 최솟값은 10이다.

정답 10

22. 출제의도 : 미분법을 이용하여 조건을 만족시키는 삼차함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

문제의 조건으로부터

함수  $f(x)$ 가 모든 정수  $k$ 에 대하여

$f(k-1)f(k+1) \geq 0$ 을 만족시켜야 한다.

..... ㉠

함수  $f(x)$ 는 삼차함수이므로 방정식  $f(x)=0$ 은 반드시 실근을 갖는다.

(i) 방정식  $f(x)=0$ 의 실근의 개수가

1인 경우

방정식  $f(x)=0$ 의 실근을  $a$ 라 할 때,  $a$ 보다 작은 정수 중 최댓값을  $m$ 이라 하면

$$f(m) < 0 < f(m+2)$$

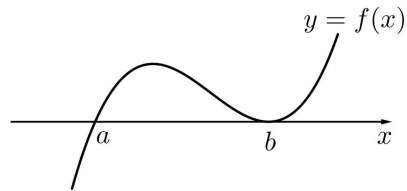
이므로  $f(m)f(m+2) < 0$ 이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) 방정식  $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우

방정식  $f(x)=0$ 의 실근을  $a, b(a < b)$ 라 할 때,  $f(x)=(x-a)(x-b)^2$

또는  $f(x)=(x-a)^2(x-b)$ 이다.

(ii-㉠)  $f(x)=(x-a)(x-b)^2$ 일 때



$a$ 보다 작은 정수 중 최댓값을  $m$ 이라 하면

$$f(m-1) < 0, f(m) < 0, f(m+1) \geq 0, f(m+2) \geq 0$$

이다. 이때 ㉠을 만족시키려면

$$f(m-1)f(m+1) \geq 0,$$

$$f(m)f(m+2) \geq 0 \text{이어야 하므로}$$

$$f(m+1)=f(m+2)=0 \text{이어야 한다.}$$

그러므로  $a=m+1, b=m+2$ 이다.

..... ㉡

$$f'\left(\frac{1}{4}\right) < 0 \text{이므로 } m+1 < \frac{1}{4} < m+2 \text{이고}$$

정수  $m$ 의 값은  $-1$ 이다.

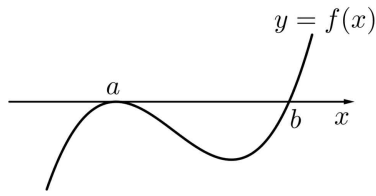
$$\text{즉, } f(x)=x(x-1)^2$$

그러나 이때 함수  $y=f(x)$ 의 그래프에

$$\text{서 } f'\left(-\frac{1}{4}\right) > 0 \text{이므로 } f'\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4} \text{을}$$

만족시키지 않는다.

(ii-㉢)  $f(x)=(x-a)^2(x-b)$ 일 때



만약  $a < n < b$ 인 정수  $n$ 이 존재한다면 그 중 가장 큰 값을  $n_1$ 이라 하자. 그러면  $f(n_1) < 0 < f(n_1 + 2)$

이므로  $f(n_1)f(n_1 + 2) < 0$ 이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다. 즉,  $a < n < b$ 인 정수  $n$ 은 존재하지 않는다. …… ㉡

그러므로  $a$ 보다 작은 정수 중 최댓값을  $m$ 이라 하면

$$f(m-1) < 0, f(m) < 0, f(m+1) \geq 0, f(m+2) \geq 0$$

이고, ㉡과 마찬가지로  $a = m+1, b = m+2$ 이다.

$f'\left(\frac{1}{4}\right) < 0$ 이므로  $m+1 < \frac{1}{4} < m+2$ 이고 정수  $m$ 의 값은  $-1$ 이다.

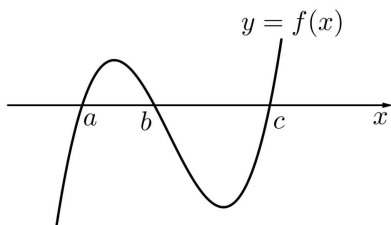
$$\text{즉, } f(x) = x^2(x-1)$$

그러나 이때 함수  $y=f(x)$ 의 그래프에서  $f'\left(-\frac{1}{4}\right) > 0$ 이므로  $f'\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$ 을 만족시키지 않는다

(iii) 방정식  $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3인 경우

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) \quad (a < b < c)$$

라 하자.



이때 ㉡과 마찬가지로  $b < n < c$ 인 정수  $n$ 은 존재하지 않는다. 그러므로  $a$ 보다 작은 정수 중 최댓값을  $m$ 이라 하면

$$f(m-1) < 0, f(m) < 0, f(m+1) \geq 0, f(m+2) \geq 0$$

이고 ㉡과 마찬가지로  $b = m+1, c = m+2$ 이다.

이때  $f'\left(\frac{1}{4}\right) < 0$ 이므로  $a < \frac{1}{4} < m+1$  또는  $m+1 < \frac{1}{4} < m+2$ 이다.

(iii-①)  $a < \frac{1}{4} < m+1$ 일 때

$m < a < \frac{1}{4} < m+1$ 이므로 정수  $m$ 의 값은  $0$ 이고,  $b = 1, c = 2$ 이다.

$$\text{즉, } f(x) = (x-a)(x-1)(x-2)$$

그러나 이때  $-\frac{1}{4} < 0 < a$ 이므로 함수

$y=f(x)$ 의 그래프에서  $f'\left(-\frac{1}{4}\right) > 0$ 이고 그

러므로  $f'\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$ 을 만족시키지 않는다.

(iii-②)  $m+1 < \frac{1}{4} < m+2$ 일 때

정수  $m$ 의 값은  $-1$ 이고  $b = 0, c = 1$ 이다.

$$\text{즉, } f(x) = (x-a)x(x-1) = (x-a)(x^2-x)$$

$$f'(x) = (x^2-x) + (x-a)(2x-1)$$

이므로

$$f'\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{16} + \left(-\frac{1}{4} - a\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{11}{16} + \frac{3}{2}a$$

$$f'\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4} \text{에서}$$

$$\frac{11}{16} + \frac{3}{2}a = -\frac{1}{4}, \quad a = -\frac{5}{8}$$

그리고  $a = -\frac{5}{8}$ 이면

$$f'\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{16} + \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{8}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{8}$$

---

이므로  $f'\left(\frac{1}{4}\right) < 0$ 도 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에서 함수  $f(x)$ 는

$$f(x) = \left(x + \frac{5}{8}\right)(x^2 - x) \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } f(8) = \frac{69}{8} \times 56 = 483$$

정답 483

■ [선택: 확률과 통계]

23. ③ 24. ④ 25. ⑤ 26. ② 27. ②  
28. ④ 29. 196 30. 673

23. 출제의도 : 같은 것이 있는 순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

문자  $x$  2개, 문자  $y$  2개, 문자  $z$  1개를 일렬로 나열하는 경우의 수이므로

$$\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$$

정답 ③

24. 출제의도 : 서로 독립인 두 사건에 대하여 주어진 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$P(A^c) = 2P(A) \text{에서}$$

$$1 - P(A) = 2P(A) \text{이므로}$$

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

두 사건  $A, B$ 가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \text{에서}$$

$$P(A)P(B) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{3} \times P(B) = \frac{1}{4}$$

따라서

$$P(B) = \frac{3}{4}$$

정답 ④

25. 출제의도 : 여사건의 확률을 이용하

여 주어진 조건을 만족시키는 사건의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 수의 합이 10 보다 큰 경우는

$$5+6=11$$

뿐이므로 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 합이 10 이하인 사건을  $A$ 라 하면

사건  $A^c$ 는 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수가 5, 6인 사건이다.

따라서

$$P(A^c) = \frac{2! \times 4!}{6!}$$

$$= \frac{1}{15}$$

이므로

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$= 1 - \frac{1}{15}$$

$$= \frac{14}{15}$$

정답 ⑤

26. 출제의도 : 이산확률변수  $Y$ 의 평균을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$P(Y=0) = P(X=0)$$

$$= {}_4C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$= \frac{1}{16}$$

$$P(Y=1) = P(X=1)$$

$$= {}_4C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$= \frac{1}{4}$$



$$\begin{aligned}
 P(Y=2) &= 1 - P(Y=0) - P(Y=1) \\
 &= 1 - \frac{1}{16} - \frac{1}{4} \\
 &= \frac{11}{16}
 \end{aligned}$$

확률변수  $Y$ 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$Y$	0	1	2	계
$P(Y=y)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{16}$	1

따라서

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= 0 \times \frac{1}{16} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{11}{16} \\
 &= \frac{13}{8}
 \end{aligned}$$

정답 ②

27. 출제의도 : 표본을 이용하여 모평균을 추정하고 표본평균을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

모표준편차가 5이고, 표본의 크기가 49, 표본평균이  $\bar{x}$ 이므로 모평균  $m$ 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{49}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{49}}$$

$$\bar{x} - 1.4 \leq m \leq \bar{x} + 1.4$$

따라서  $a = \bar{x} - 1.4$ 이고  $\frac{6}{5}a = \bar{x} + 1.4$ 이므로

로

$$\frac{a}{5} = (\bar{x} + 1.4) - (\bar{x} - 1.4) = 2.8$$

따라서

$$a = 5 \times 2.8 = 14$$

이므로

$$\bar{x} = a + 1.4 = 14 + 1.4 = 15.4$$

정답 ②

28. 출제의도 : 주어진 시행에서 조건부 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

상자 B에 들어있는 공의 개수가 8인 사건을  $E$ , 상자 B에 들어있는 검은 공의 개수가 2인 사건을  $F$ 라 하면

구하는 확률은  $P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$ 이다.

한 번의 시행에서 상자 B에 넣는 공의 개수는 1 또는 2 또는 3이므로

4번의 시행 후 상자 B에 들어있는 공의 개수가 8인 경우는

$$8 = 3 + 3 + 1 + 1$$

$$8 = 3 + 2 + 2 + 1$$

$$8 = 2 + 2 + 2 + 2$$

뿐이다.

(i)  $8 = 3 + 3 + 1 + 1$ 인 경우

상자 B에 들어있는 검은 공의 개수는 2이다.

주머니에서 숫자 1이 적힌 카드 2장, 숫자 4가 적힌 카드 2장을 꺼내야 하므로 이 경우의 확률은

$$\begin{aligned}
 &\frac{4!}{2! \times 2!} \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 \\
 &= 6 \times \left(\frac{1}{4}\right)^4
 \end{aligned}$$

(ii)  $8 = 3 + 2 + 2 + 1$ 인 경우

상자 B에 들어있는 검은 공의 개수는 3이다.

주머니에서 숫자 1이 적힌 카드 1장, 숫자 2 또는 3이 적힌 카드 2장, 숫

자 4가 적힌 카드 1장을 꺼내야 하  
므로 이 경우의 확률은

$$\frac{4!}{2!} \times \left\{ \left( \frac{1}{4} \right) \times \left( \frac{2}{4} \right)^2 \times \left( \frac{1}{4} \right) \right\}$$

$$= 48 \times \left( \frac{1}{4} \right)^4$$

(iii)  $8 = 2 + 2 + 2 + 2$ 인 경우

상자 B에 들어있는 검은 공의 개수  
는 4이다.

주머니에서 숫자 2 또는 3이 적힌  
카드 4장을 꺼내야 하므로 이 경우의  
확률은

$$\left( \frac{2}{4} \right)^4$$

$$= 16 \times \left( \frac{1}{4} \right)^4$$

(i), (ii), (iii)에서

$$P(E) = 6 \times \left( \frac{1}{4} \right)^4 + 48 \times \left( \frac{1}{4} \right)^4 + 16 \times \left( \frac{1}{4} \right)^4$$

$$= 70 \times \left( \frac{1}{4} \right)^4$$

$$P(E \cap F) = 6 \times \left( \frac{1}{4} \right)^4$$

따라서

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$$

$$= \frac{6 \times \left( \frac{1}{4} \right)^4}{70 \times \left( \frac{1}{4} \right)^4}$$

$$= \frac{3}{35}$$

정답 ④

29. 출제의도 : 중복조합을 이용하여 순  
서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(i)  $a \leq b \leq c \leq d$ 인 순서쌍의 개수

1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을  
허락하여 4개를 택한 다음 크지 않은  
순서대로  $a, b, c, d$ 의 값으로 정하는  
경우의 수와 같으므로

$${}_6H_4 = {}_{6+4-1}C_4 = {}_9C_4$$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$$

(ii)  $b \leq a \leq c \leq d$ 인 순서쌍의 개수

(i)과 마찬가지로

$${}_6H_4 = 126$$

(iii)  $a = b \leq c \leq d$ 인 순서쌍의 개수

1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을  
허락하여 3개를 택한 다음 크지 않은  
순서대로  $a (=b), c, d$ 의 값으로  
정하는 경우의 수와 같으므로

$${}_6H_3 = {}_{6+3-1}C_3 = {}_8C_3$$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍의  
개수는

$$126 + 126 - 56 = 196$$

[다른 풀이]

(i)  $a \leq b \leq c \leq d$ 인 순서쌍의 개수

1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을  
허락하여 4개를 택한 다음 크지 않은  
순서대로  $a, b, c, d$ 의 값으로 정하는  
경우의 수와 같으므로

$${}_6H_4 = {}_{6+4-1}C_4 = {}_9C_4$$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$$

(ii)  $b < a \leq c \leq d$ 인 순서쌍의 개수

①  $b = 1$ 일 때  $1 < a \leq c \leq d$ 인

순서쌍의 개수는 2, 3, 4, 5, 6

중에서 중복을 허락하여 3개를 택한

다음 크지 않은 순서대로  $a, c, d$ 의 값으로 정하는 경우의 수와 같으므로

$${}_5H_3 = {}_{5+3-1}C_3 = {}_7C_3 = 35$$

②  $b=2$ 일 때  $2 < a \leq c \leq d$ 인

순서쌍의 개수는 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 3개를 택한 다음 크지 않은 순서대로  $a, c, d$ 의 값으로 정하는 경우의 수와 같으므로

$${}_4H_3 = {}_{4+3-1}C_3 = {}_6C_3 = 20$$

③  $b=3$ 일 때  $3 < a \leq c \leq d$ 인

순서쌍의 개수는 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 3개를 택한 다음 크지 않은 순서대로  $a, c, d$ 의 값으로 정하는 경우의 수와 같으므로

$${}_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = 10$$

④  $b=4$ 일 때  $4 < a \leq c \leq d$ 인

순서쌍의 개수는 5, 6 중에서 중복을 허락하여 3개를 택한 다음 크지 않은 순서대로  $a, c, d$ 의 값으로 정하는 경우의 수와 같으므로

$${}_2H_3 = {}_{2+3-1}C_3 = {}_4C_3 = 4$$

⑤  $b=5$ 일 때  $5 < a \leq c \leq d$ 이라면

$a=c=d=6$ 이어야 하므로 순서쌍의 개수는 1

이상에서  $b < a \leq c \leq d$ 인 순서쌍의 개수는

$$35 + 20 + 10 + 4 + 1 = 70$$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는  $126 + 70 = 196$

정답 196

30. 출제의도 : 정규분포를 표준화하여 확률의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

확률변수  $X$ 의 평균이 1이므로

$$P(X \leq 5t) \geq \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$5t \geq 1, \text{ 즉 } t \geq \frac{1}{5} \dots \textcircled{A}$$

확률변수  $X$ 의 평균이 1, 표준편차가  $t$ 이므로  $Z = \frac{X-1}{t}$ 로 놓으면 확률변수  $Z$ 는 표준정규분포  $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} P(t^2 - t + 1 \leq X \leq t^2 + t + 1) \\ = P\left(\frac{t^2 - t}{t} \leq \frac{X-1}{t} \leq \frac{t^2 + t}{t}\right) \\ = P(t-1 \leq Z \leq t+1) \dots \textcircled{B} \end{aligned}$$

이때  $(t+1) - (t-1) = 2$ 로 일정하므로  $t$ 의 값이 확률변수  $Z$ 의 평균 0에 가까울수록  $\textcircled{B}$ 의 값은 증가한다.

따라서  $\textcircled{A}$ 에서  $t = \frac{1}{5}$ 일 때  $\textcircled{B}$ 의 최댓값은

$$\begin{aligned} k &= P\left(\frac{1}{5} - 1 \leq Z \leq \frac{1}{5} + 1\right) \\ &= P(-0.8 \leq Z \leq 1.2) \\ &= P(0 \leq Z \leq 0.8) + P(0 \leq Z \leq 1.2) \\ &= 0.288 + 0.385 \\ &= 0.673 \end{aligned}$$

이므로

$$1000 \times k = 673$$

정답 673