2023학년도 모의논술고사

자연계열

성 명	
전 형	
수험번호	

표지를 제외한 페이지 수 : 3

2023학년도 아주대학교 모의논술고사 자연계열

[문항 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 논제에 답하라.

(가) 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그려보면 $f(x)$의 최댓값 또는 최솟값을 구할 수 있다. 특히 함수 $f(x)$가 미분가능하면, 도함수 $f'(x)$를 이용하여 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 알 수 있다. 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[p,q]$에서 연속이면 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가지며, 이는 극솟값, 극댓값, $f(p)$, $f(q)$의 값을 비교하여 구할 수 있다.

(나) 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,f(t))$에서 접선의 방정식은 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$이다. 이 접선이 점 (x_0, y_0)를 지나면 다음을 만족한다.

$$(y_0-f(t))=f'(t)(x_0-t)$$

(다) 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여, 곡선 $y=f(x)$ 위의 서로 다른 두 점 $(p,f(p))$와 $(q,f(q))$를 각 접점으로 가지는 두 접선이 일치하는 경우, 그 접선의 기울기를 생각하여 보면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$f'(p)=f'(q)=\frac{f(q)-f(p)}{q-p}$$

[문제 1-1] (20점) 제시문 (가)를 읽고 물음에 답하여라.

(1) 닫힌구간 $[a-2, a+2]$에서 이차함수 $y=2x^2-4x+a$가 최솟값 20을 갖도록 하는 실수 a의 값을 모두 구하여라.

(2) 닫힌구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 함수 $f(x)=x+\sin 4x-1$의 최솟값을 구하여라.

[문제 1-2] (30점) 제시문 (나)와 (다)를 읽고 물음에 답하여라.

(1) 곡선 $y=2x^2-3x-5$에 대한 서로 다른 두 접선이 모두 점 $(-1,-2)$를 지날 때, 이 곡선과 두 접선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하여라.

(2) 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$라 할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 서로 다른 두 점에서의 접선은 일치할 수 없음을 보여라.

(3) 곡선 $y=x^3-3x^2-2$에 대한 서로 다른 세 접선이 모두 점 (x_0, y_0)를 지난다. 자연수 x_0, y_0에 대하여, x_0+y_0의 최솟값을 구하여라.

[문항 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 논제에 답하라.

(가) 음이 아닌 정수 n에 대하여 n이하의 양의 정수의 집합을 P_n이라 하자. 어떤 양의 정수 k에 대하여 P_k의 원소로 이루어진 순서쌍 (a, b) (단, $1 \le a < b \le k$) 중 일부를 원소로 갖는 집합을 S라 할 때, 다음 <조건>을 만족하는 함수 $f : P_k \to P_n$의 개수를 $g(n)$이라 하자.

< 조 건 >

$(a, b) \in S$이면 $f(a) \ne f(b)$이다.

예를 들어 $k = 3$이고 $S = \{(1,2), (2,3)\}$이라면 $f(1)$이 될 수 있는 값은 n개, $f(2)$가 될 수 있는 값은 $f(1) \ne f(2)$이므로 $n-1$개, $f(3)$이 될 수 있는 값은 $f(2) \ne f(3)$이므로 $n-1$개이고, 따라서 $g(n) = n(n-1)^2$이다.

일반적으로 $g(n)$은 S와 상관없이 n에 대한 k차 다항식이 되고 최고차항의 계수가 1이라는 사실이 알려져 있다. 이 정보는 $g(n)$을 구할 때 유용하게 쓸 수 있는데, 위의 예에서 $g(0) = g(1) = 0$이고, $g(2) = 2$이므로 이를 이용하여 $g(n)$을 구할 수 있다.

(나) 필즈메달은 국제수학연맹이 4년마다 개최하는 세계 수학자 대회에서 수여하는 상으로 수학계의 가장 권위 있는 상으로 여겨진다. 2022년 열린 세계 수학자 대회에서는 허준이 교수가 한국계 최초로 이 상을 수상하였다. 허 교수는 여러 분야를 아우르는 이론을 제시하였고, 특히 이산수학의 여러 미해결 난제를 해결하였다.

허 교수의 주요 업적 중 하나는 위 제시문 (가)에서 얻어지는 k차 다항식 $g(n)$의 m차 항의 계수의 절댓값을 c_m (단, $m \le k$)라고 할 때, 다음 부등식이 항상 성립하는 것을 증명한 것이다.

$$\text{모든 } 0 < m < k \text{에 대하여 } c_{m-1}c_{m+1} \le c_m^2 \qquad \cdots \quad (*)$$

[문제 2-1] (30점) 제시문 (가)를 읽고 물음에 답하여라.

(1) $k=3$이고 S가 공집합일 때, $g(1)+g(2)+g(3)+g(4)+\cdots+g(24)$를 구하여라.

(2) $k=4$이고 $g(n)=n(n-1)(n-2)^2$이 되도록 하는 S를 하나 제시하고 그 이유를 설명하여라.

(3) 집합 S가 $\{(1,2),\ (2,3),\ (3,4)\}$일 때 <조건>을 만족하는 함수 $f_1 : P_4 \to P_4$와 집합 S가 $\{(1,2),\ (2,3),\ (3,4),\ (1,4)\}$일 때 <조건>을 만족하는 함수 $f_2 : P_4 \to P_4$가 있다. 합성함수 $F=f_1 \circ f_2 : P_4 \to P_4$가 $F(1)=F(2)=F(3)=F(4)=1$을 만족하는 순서쌍 (f_1, f_2)의 개수를 구하여라.

[문제 2-2] (20점) 제시문 (가)와 (나)를 읽고 물음에 답하여라.

(1) 초항이 a이고 공차가 d인 등차수열 $\{c_n\}$은 부등식 $(\ast)$ 를 만족함을 증명하여라.

(2) 한 고등학생이 주어진 S와 $k=4$에 대하여 함수 $g(n)$을 구한 다음 $g(0)=g(1)=0$, $g(2)=24$, $g(3)=120$이라고 주장하였다. 이 이야기를 들은 고등학생 아주는 이 학생의 계산이 잘못되었다고 예상하였다. 아주는 어떻게 이런 결론을 내릴 수 있었을까?