2023학년도 논술 모의평가
자연계열 [문제 1] 해설 및 모범답안

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 등차수열
첫째항부터 차례로 일정한 수를 더하여 얻은 수열을 등차수열이라고 하며, 그 일정한 수를 공차라고 한다.

2. 등비수열
첫째항부터 차례로 일정한 수를 곱하여 얻은 수열을 등비수열이라고 하며, 그 일정한 수를 공비라고 한다.

3. 켤레복소수
복소수 $a+bi$(a, b는 실수)에 대하여 허수부분의 부호를 바꾼 복소수 $a-bi$를 $a+bi$의 켤레복소수라고 한다.

4. 함수의 연속
함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여
(ⅰ) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되고
(ⅱ) 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재하며
(ⅲ) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다. 한편 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 아닐 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이라고 한다. 즉, 함수 $f(x)$가 위의 세 조건 중 어느 하나라도 만족시키지 않으면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

[1] 실수 x에 대하여 세 수가 아래와 같이 주어졌을 때, 다음을 구하시오.(단, $0 \le x < 2\pi$)

$$\cos(2\pi\cos x) - 2, \quad \sin(2\pi\cos x), \quad -\cos(2\pi\cos x)$$

(1) 세 수가 순서대로 등차수열이 되게 하는 실수 x의 개수와 공차 d [4점]
(2) 세 수가 순서대로 등비수열이 되게 하는 실수 x의 개수와 공비 r [6점]

[2] $x>0$인 실수 x와 실수 y에 대하여 복소수 $z=x+yi$가 다음 두 조건을 만족시킬 때, 점 $\mathrm{P}(x, y)$가 좌표평면에 나타내는 곡선을 그리시오. [7점]

(가) $z+\dfrac{1}{z}=\overline{z}+\dfrac{1}{\overline{z}}$ (단, 복소수 $\overline{z}$는 z의 켤레복소수)
(나) $1 \le z+\dfrac{1}{z} \le 2$

[3] 함수 $f(x)=x+\frac{1}{x}$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $f(x)=\sqrt{2}$일 때, $x^{2023}+\frac{1}{x^{2023}}$의 값 [5점]

(2) $g(f(x)+2)=3x^2+\frac{3}{x^2}-10$을 만족시키는 이차함수 $g(x)$ [5점]

[4] 다음 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만난다고 할 때, 실수 a의 범위를 구하시오. [8점]

$$y=\sqrt{x+2}, \qquad y=|x-a|+x$$

[5] 다음 두 함수에 대하여 물음에 답하시오.

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}}{\sin(x^{2n}\pi)+x^{2n}}, \qquad g(x)=x^2$$

(1) 함수 $f(x)$의 연속성을 조사하시오. [9점]

(2) 곡선 $y=g(x)$를 y축으로 k만큼 평행이동한 곡선과 곡선 $y=f(x)$가 서로 다른 네 점에서 만날 때, 실수 k의 범위를 구하시오. [6점]

■ 출제 의도

[1] (1) 등차수열의 성질을 이해하고 삼각방정식을 해결할 수 있는 능력을 평가한다.
(2) 등비수열의 성질을 이해하고 삼각방정식을 해결할 수 있는 능력을 평가한다.

[2] 복소수가 실수가 되는 조건을 이해하고 이를 활용하여 부등식 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가한다.

[3] (1) 방정식의 제곱을 이용하여 고차식의 값을 계산할 수 있는 능력을 평가한다.
(2) 합성된 함수식으로부터 이차함수를 찾아내는 수식 활용능력을 평가한다.

[4] 무리함수와 절대값이 있는 일차함수의 그래프의 성질을 이해하고 이를 활용할 수 있는 능력을 평가한다.

[5] (1) 등비수열의 수렴과 발산을 이해하고 이를 활용하여 함수의 연속성을 조사할 수 있는 능력을 평가한다.
(2) 한 곡선의 평행이동으로 두 곡선의 위치 관계를 이해하고 활용하는 기하학적 능력을 평가한다.

■ 문항 해설

수열, 복소수, 이차함수, 무리함수, 삼각함수, 함수의 연속성 등의 개념은 다양한 분야에서 유용하게 활용되는 중요한 수학적 개념이다. 각 문항들은 이러한 개념들을 정확히 이해하고 기본적인 논리력을 바탕으로 정확한 계산력을 갖추고 있다면 다음과 같은 간단한 과정을 통해서 해결할 수 있다.

[1] (1) 등차수열 정의와 삼각함수의 성질과 그래프를 활용하면 해결할 수 있는 문항이다.
(2) 등비수열 정의와 삼각함수의 성질과 그래프를 활용하면 해결할 수 있는 문항이다.

[2] 복소수가 실수가 되는 조건을 활용하여 등식으로 나타나는 도형의 방정식과 부등식을 만족하는 범위를 구해내면 해결할 수 있는 문항이다.

[3] (1) 방정식의 제곱을 활용하여 해결할 수 있는 문항이다.
(2) 조건식에서 수식을 변형시켜 이차함수를 만들어냄으로서 해결할 수 있는 문항이다.

[4] 무리함수와 절대값이 있는 일차함수의 그래프를 활용하면 해결할 수 있는 문항이다.

[5] (1) 등비수열의 수렴과 발산 조건을 활용하여 극한을 계산하면 해결할 수 있는 문항이다.
(2) 평행이동을 통해 두 곡선간의 위치 관계를 파악하면 해결할 수 있는 문항이다.

■ 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
1-1	$\cos x = -\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}$을 구했으면	2
	x의 개수가 4개임을 보였으면	1
	공차 1을 구했으면	1
1-2	$\cos x = -\frac{5}{6},\ -\frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{5}{6}$를 구했으면	3
	x의 개수가 8개임을 보였으면	1
	공비 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$와 $\frac{\sqrt{3}}{3}$을 구했으면	2
2	(가)로부터 $y=0$ 또는 $x^2+y^2=1$을 구했으면	2
	$y=0$일 때 $(x,y)=(1,0)$를 구했으면	2
	$x^2+y^2=1$일 때 $\frac{1}{2} \le x \le 1$을 구했으면	2
	점 $\mathrm{P}(x,y)$가 나타내는 곡선을 그렸으면	1
3-1	$x^4=-1$을 구했으면	2
	$x^{2023}+\frac{1}{x^{2023}}=\sqrt{2}$를 구했으면	3
3-2	$x+\frac{1}{x}+2=t$라 두고 $t^2=x^2+\frac{1}{x^2}+4t-2$를 구했으면	2
	$g(t)=3t^2-12t-4$를 구했으면	3
4	$y=\sqrt{x+2}$와 $y=\lvert x-a\rvert+x$의 그래프를 구했으면	2
	$a \ge 0$일 때 $0 \le a < 2$를 구했으면	2
	$a<0$일 때 $-\frac{33}{8} < a \le -4$를 구했으면	4
5-1	$x=0$일 때 $f(0)$가 존재하지 않음을 언급했으면	2
	$\lvert x\rvert<1,\ x\ne 0$일 때 $f(x)=\frac{1}{\pi+1}$을 구했으면	2
	$\lvert x\rvert>1$일 때 $f(x)=1$을 구했으면	2
	$x=\pm 1$일 때 $f(\pm 1)=1$을 구했으면	2
	$x=0,\ \pm 1$에서 불연속임을 언급했으면	1
5-2	$h(x)=x^2+k$를 구했으면	2
	$h(\pm 1)=1+k=\frac{1}{\pi+1}$로부터 $k=-\frac{\pi}{\pi+1}$를 구했으면	2
	$-\frac{\pi}{\pi+1}<k\le 0$을 구했으면	2

■ 예시 답안

[1]

(1) 세 수가 등차수열을 이루면 $2\sin(2\pi\cos x)=\cos(2\pi\cos x)-2-\cos(2\pi\cos x)$,

즉 $\sin(2\pi\cos x)=-1$

$|\cos x|\le 1$이므로 $-2\pi\le 2\pi\cos x\le 2\pi$이고 $2\pi\cos x=-\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}$ 즉 $\cos x=-\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}$

$0\le x<2\pi$에서 $y=\cos x$의 그래프를 고려하면 x의 개수는 4개이다.

$\cos x=-\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}$을 세 수에 대입하면 $-2,\ -1,\ 0$이므로 공차는 1

(2) 세 수가 등비수열을 이루면 $\sin^2(2\pi\cos x)=\{(\cos(2\pi\cos x)-2\}\{-\cos(2\pi\cos x)\}$,

정리하면 $\sin^2(2\pi\cos x)+\cos^2(2\pi\cos x)=2\cos(2\pi\cos x)$

즉 $\cos(2\pi\cos x)=\frac{1}{2}$

$|\cos x|\le 1$이므로 $-2\pi\le 2\pi\cos x\le 2\pi$이고 $2\pi\cos x=-\frac{5\pi}{3},\ -\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3}$

즉, $\cos x=-\frac{5}{6},\ -\frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{5}{6}$

$0\le x<2\pi$에서 $y=\cos x$의 그래프를 고려하면 x의 개수는 8개이다.

$\cos x=-\frac{5}{6},\ \frac{1}{6}$을 세 수에 대입하면 $-\frac{3}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}$이므로 공비는 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cos x=-\frac{1}{6},\ \frac{5}{6}$를 세 수에 대입하면 $-\frac{3}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}$이므로 공비는 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

[2] $z+\frac{1}{z}=x+yi+\frac{1}{x+yi}=\frac{x(x^2+y^2+1)}{x^2+y^2}+\frac{y(x^2+y^2-1)i}{x^2+y^2}$

조건 (가)로부터 $z+\frac{1}{z}$는 실수이므로 $y=0$ 또는 $x^2+y^2=1$

(i) $y=0$일 때

조건 (나)로부터 $1\le\frac{x(x^2+1)}{x^2}\le 2$이다. $x>0$이므로 $\begin{cases}x^2-x+1\ge 0 \cdots\cdots ①\\ x^2-2x+1=(x-1)^2\le 0 \cdots\cdots ②\end{cases}$

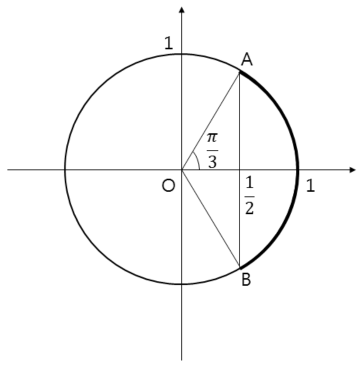
①에서 판별식 $D=1-4=-3<0$이므로 모든 실수 x가 ①을 만족한다.

②로부터 $x=1$이므로 $(x,y)=(1,0)$

(ii) $x^2+y^2=1$일 때

조건 (나)로부터 $1\le 2x\le 2$이다. 따라서 $\frac{1}{2}\le x\le 1$

(i)과 (ii)로부터 점 (x,y)가 나타내는 곡선은 오른쪽 그림에서 중심각이 $\frac{2\pi}{3}$인 호 AB이다.



[3]

(1) $f(x)=\sqrt{2}\ \Leftrightarrow\ x+\frac{1}{x}=\sqrt{2}$

이것을 제곱하면 $x^2+\frac{1}{x^2}=0$, 즉 $x^4=-1$

$x^{2023}=x^{4\times 505+3}=(-1)^{505}\cdot x^3=-x^3$이므로 $x^{2023}+\dfrac{1}{x^{2023}}=-\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)$

$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=-\sqrt{2}$이므로 $x^{2023}+\dfrac{1}{x^{2023}}=\sqrt{2}$

(다른 풀이)

$x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2-\sqrt{2}x+1=0$으로부터

$x^3=x(\sqrt{2}x-1)=\sqrt{2}(\sqrt{2}x-1)-x=x-\sqrt{2}$, $x^4=x^2-\sqrt{2}x=-1$

$x^{2023}+\dfrac{1}{x^{2023}}=-\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)=-\left(x-\sqrt{2}+\dfrac{1}{x-\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$

(2) $x+\dfrac{1}{x}+2=t$라고 하면

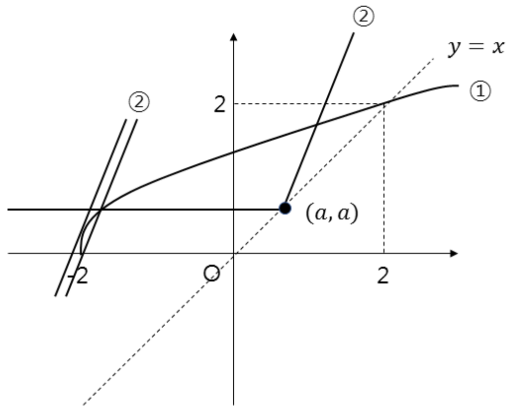
$t^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+4+2\left(2x+\dfrac{2}{x}+1\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}+4+2\left(2x+\dfrac{2}{x}+4-4+1\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}+4t-2$

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-4t+2$이므로 $3x^2+\dfrac{3}{x^2}-10=3(t^2-4t+2)-10=3t^2-12t-4$

따라서 $g(t)=3t^2-12t-4$

[4] 다음 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나게 하는 a의 범위는 오른쪽 그림을 참고하여 아래와 같이 나눌 수 있다.

$\begin{cases} y=\sqrt{x+2} & \cdots\cdots ① \\ y=|x-a|+x & \cdots\cdots ② \end{cases}$



(ⅰ) $a\ge 0$일 때, $0\le a<2$

(ⅱ) $a<0$라고 하자.

$x\ge a$일 때 ②는 $y=2x-a$

이것이 ①과 접하면 $(2x-a)^2=x+2$

즉 $4x^2-(4a+1)x+a^2-2=0$은 중근을 가지므로

판별식 $D=16a^2+8a+1-16a^2+32=0$, 즉 $a=-\dfrac{33}{8}$ $\cdots\cdots$ ③

$y=2x-a$가 $(-2,0)$을 지나면 $a=-4$ $\cdots\cdots$ ④

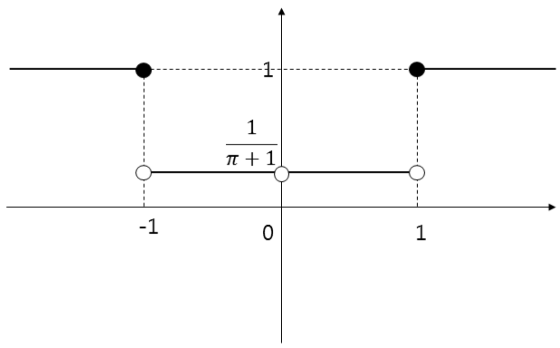
③과 ④로부터 $-\dfrac{33}{8}<a\le -4$

(ⅰ)과 (ⅱ)로부터 $-\dfrac{33}{8}<a\le -4$, $0\le a<2$

[5]

(1) (ⅰ) $x=0$일 때, $f(0)$은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $|x|<1$, $x\ne 0$일 때,



$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$이므로

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\dfrac{\sin(x^{2n}\pi)}{x^{2n}\pi}\pi+1}=\dfrac{1}{\pi+1}$

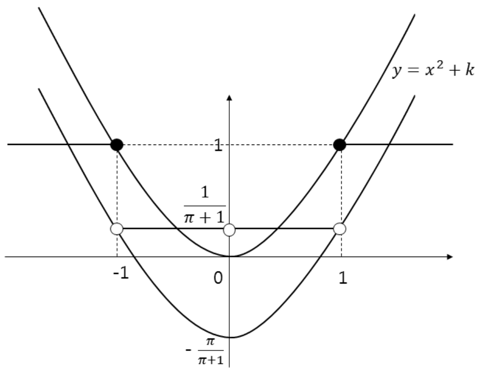
(iii) $|x| > 1$일 때,

$\lim_{n\to\infty} x^{2n} = \infty$ 이므로 $f(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\dfrac{\sin(x^{2n}\pi)}{x^{2n}} + 1} = 1$

(iv) $x = \pm 1$일 때, $f(\pm 1) = 1$

(i)~(iv)로부터 함수 $f(x)$는 $x \neq 0$, $x \neq \pm 1$인 모든 실수 x에서 연속이다.

(2) 곡선 $y = g(x)$를 y축으로 k만큼 평행이동한 곡선을 $y = h(x)$라고 하면 $h(x) = x^2 + k$



곡선 $y = h(x)$가 점 $\left(\pm 1, \dfrac{1}{\pi + 1}\right)$을 지나면

$h(\pm 1) = 1 + k = \dfrac{1}{\pi + 1}$ 로부터 $k = -\dfrac{\pi}{\pi + 1}$

곡선 $y = h(x)$가 점 $(\pm 1, 1)$을 지나면 $h(\pm 1) = 1 + k = 1$, 즉 $k = 0$

두 곡선이 서로 다른 네 점에서 만날 k의 범위는 오른쪽 그림으로부터 $-\dfrac{\pi}{\pi + 1} < k \leq 0$