

• 수학 영역 •

정답

1	③	2	②	3	④	4	④	5	⑤
6	②	7	①	8	⑤	9	⑤	10	③
11	④	12	①	13	③	14	③	15	①
16	③	17	②	18	④	19	①	20	⑤
21	②	22	32	23	24	24	6	25	4
26	42	27	49	28	11	29	72	30	59

해설

1. [출제의도] 거듭제곱근 계산하기

$$\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3 \times 3^3} = \sqrt[3]{3^4} = 3$$

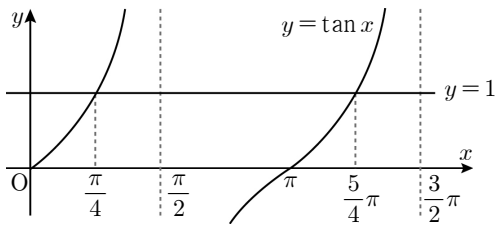
2. [출제의도] 로그 계산하기

$$\log_3 36 - \log_3 4 = \log_3 \frac{36}{4} = \log_3 9 = 2$$

3. [출제의도] 부채꼴의 중심각의 크기 계산하기

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l , 중심각의 크기를 θ 라 하면
 $r=6$, $l=4\pi$ 이고 $l=r\theta$ 이므로 $\theta = \frac{4\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi$

4. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 삼각함수가 포함된 방정식 이해하기



방정식 $\tan x = 1$ 의 해는 함수 $y = \tan x$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 이 만나는 점의 x 좌표와 같다.

$\tan \frac{\pi}{4} = 1$ 이고 함수 $y = \tan x$ 의 주기가 π 이므로

구하는 해는 $x = \frac{5}{4}\pi$

5. [출제의도] 상용로그표 이해하기

수	...	6	7	8	...
5.07042	.7050	.7059	...
5.17126	.7135	.7143	...
5.27210	.7218	.7226	...

상용로그표에서 $\log 5.17 = 0.7135$ 이므로
 $\log 517 = \log(5.17 \times 10^2) = 2 + \log 5.17 = 2.7135$

6. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

함수 $f(x) = 2^{-x} + 5 = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 5$ 의 밑이 1보다 작으므로 x 의 값이 증가하면 $f(x)$ 의 값이 감소한다. 따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 최솟값을 가지고 최솟값은 $f(-1) = 2^1 + 5 = 7$

7. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는 $y = \log_3(x-2) + 5$ 이다. 이 함수의 그래프가 점 $(5, a)$ 을 지나므로 $a = \log_3(5-2) + 5$ 에서 $a = 1 + 5$ 이다. 따라서 $a = 6$

8. [출제의도] 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 합숫값 계산하기

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \cos \theta = -\frac{2}{3} \text{ 이므로}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \text{ 이다.}$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{ 이므로 } \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

9. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

함수 $y = 3^x + a$ 의 그래프가 점 $(2, b)$ 를 지나므로 $b = 3^2 + a$ 이다.

함수 $y = 3^x + a$ 의 그래프의 점근선이 $y = a$ 이므로 $a = 5$ 이고, $b = 9 + 5 = 14$ 이다.

따라서 $a + b = 19$

10. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

주어진 삼각함수 $y = a \cos bx + c$ ($a > 0, b > 0$)의 최댓값이 $a + c$, 최솟값이 $-a + c$ 이므로 $a + c = 1, -a + c = -3$ 에서 $a = 2, c = -1$ 이다.

한편, 주어진 그래프에서 삼각함수의 주기가 $\frac{2}{3}\pi$

$$\text{이므로 } \frac{2\pi}{b} = \frac{2}{3}\pi, \text{ 즉 } b = 3 \text{ 이다.}$$

따라서 $a \times b \times c = -6$

11. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$$a = \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{9^2} = 9^{\frac{2}{3}} \text{ 이므로}$$

$$\log_9 a = \log_9 9^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

12. [출제의도] 로그함수가 포함된 부등식 이해하기

진수 조건에서 $x + 5 > 0$, 즉 $x > -5$ ㉠

$$\log_3(x+5) < 8 \log_3 2 \text{ 에서}$$

$$\log_3(x+5) < \log_3 2^4,$$

$$x+5 < 16, \text{ 즉 } x < 11 \text{ ㉡}$$

㉠, ㉡에 의하여 $-5 < x < 11$ 이므로 정수 x 의 최댓값은 10, 최솟값은 -4 이다.

따라서 정수 x 의 최댓값과 최솟값의 합은 6이다.

13. [출제의도] 지수함수가 포함된 방정식 이해하기

$$(2^x)^2 - 8 \times 2^x + 15 = 0 \text{ 에서}$$

$$2^x = t \text{ 로 놓으면 } t > 0 \text{ ㉠}$$

주어진 방정식은 $t^2 - 8t + 15 = 0$ 이다.

$$(t-3)(t-5) = 0 \text{ 에서 } t = 3 \text{ 또는 } t = 5 \text{ 이다. ㉡}$$

㉠, ㉡에 의하여 $2^x = 3$ 또는 $2^x = 5$ 이다.

$\alpha < \beta$ 이므로 $2^\alpha = 3$ 이고 $2^\beta = 5$ 이다.

$$\text{따라서 } \beta = \log_2 5 \text{ 이므로 } 2^\alpha \times \beta = 3 \log_2 5$$

14. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

점 A의 좌표를 (x_1, y_1) , 점 B의 좌표를 (x_2, y_2)

라 할 때 선분 AB의 중점을 $(0, 2)$ 이므로

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 0 \text{ 이고 } \frac{y_1 + y_2}{2} = 2 \text{ 이다.}$$

$$\text{즉 } x_1 + x_2 = 0 \text{ 이고 } y_1 + y_2 = 4 \text{ 이다.}$$

$$x_2 = -x_1 \text{ 이므로 } 3^{x_1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-x_1} - 6 = 4 \text{ 이다.}$$

따라서 $2 \times 3^{x_1} = 10$ 이고 점 A의 y 좌표 y_1 은

$$y_1 = 3^{x_1} = 5$$

15. [출제의도] 삼각함수의 정의를 이용하여 식의 값 구하는 문제 해결하기

동경 OP가 나타내는 각의 크기가 θ 이고 $\overline{OP} = r$

$$\text{이므로 } \sin \theta = \frac{a}{r} \text{ 이고 } \cos \theta = \frac{5}{r} \text{ 이다.}$$

$$\sin \theta + 2 \cos \theta = 1 \text{ 에서 } \frac{a}{r} + \frac{10}{r} = 1 \text{ 이므로}$$

$r = a + 10$ 이다. ㉢

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ 에서 } \left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{5}{r}\right)^2 = 1 \text{ 이므로}$$

$$a^2 + 25 = r^2 \text{ 이다. ㉣}$$

㉢, ㉣에 의하여 $a = -\frac{15}{4}$ 이고 $r = \frac{25}{4}$ 이다.

$$\text{따라서 } a + r = \frac{5}{2}$$

16. [출제의도] 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이 구하는 문제 해결하기

$\angle COA = \theta$ 라 하면 삼각형 COA에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{2^2 + 2^2 - 1^2}{2 \times 2 \times 2} = \frac{7}{8} \text{ 이다.}$$

삼각형 BOD에서 $\angle BOD = \frac{\pi}{2} - \theta$ 이고

삼각형 BOD의 넓이가 $\frac{7}{6}$ 이므로

$$\overline{OD} = x \text{ 라 놓으면}$$

$$\frac{1}{2} \times 2 \times x \times \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{7}{6} \text{ 이다.}$$

$$\text{한편, } \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta = \frac{7}{8} \text{ 이므로}$$

$$\frac{7}{8}x = \frac{7}{6}, \text{ 즉 } x = \frac{4}{3} \text{ 이다. 따라서 } \overline{OD} = \frac{4}{3}$$

17. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 방정식 문제 해결하기

함수 $y = |2^x - 1|$ 의 그래프와 직선 $y = t$ 가 제1사분면에서 만나는 점이 A이므로 점 A의 x 좌표는 $2^x - 1 = t$ 에서 $x = \log_2(1+t)$ 이다.

한편, 함수 $y = |2^x - 1|$ 의 그래프와 직선 $y = t$ 가 제2사분면에서 만나는 점이 B이므로 점 B의 x 좌표는 $1 - 2^x = t$ 에서 $x = \log_2(1-t)$ 이다.

$$\overline{AB} = 1 \text{ 이므로 } \log_2(1+t) - \log_2(1-t) = 1 \text{ 에서}$$

$$\log_2(1+t) = 1 + \log_2(1-t),$$

$$\log_2(1+t) = \log_2 2 + \log_2(1-t), 1+t = 2(1-t),$$

$$3t = 1 \text{ 이다. 따라서 } t = \frac{1}{3} \text{ 이고}$$

점 A의 좌표는 $\left(\log_2 \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 이다.

점 C의 x 좌표는 점 A의 x 좌표와 같고

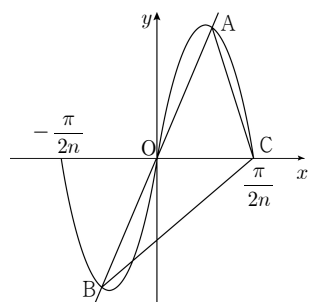
점 C는 함수 $y = -a|2^x - 1|$ 의 그래프 위의 점이므로

점 C의 좌표는 $\left(\log_2 \frac{4}{3}, -\frac{a}{3}\right)$ 이다.

한편, $\overline{AC} = 1$ 이므로 $\frac{1}{3} - \left(-\frac{a}{3}\right) = 1$ 에서 $a = 2$ 이다.

$$\text{따라서 } a + t = \frac{7}{3}$$

18. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 자연수의 최댓값 구하는 문제 해결하기



함수 $y = 3 \sin 2nx$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$ 이다.

원점을 지나고 기울기가 양수인 직선이

$-\frac{\pi}{2n} < x < \frac{\pi}{2n}$ 에서 함수 $y = 3 \sin 2nx$ 의 그래프와 만나는 원점이 아닌 두 점 A와 B는 원점에 대하

여 대칭이다. 따라서 실수 $t \left(-\frac{\pi}{2n} < t < \frac{\pi}{2n}, t \neq 0 \right)$ 에 대하여 점 A의 좌표를 $(t, 3\sin 2nt)$ 라 하면 점 B의 좌표는 $(-t, -3\sin 2nt)$ 이다. 삼각형 AOC의 넓이와 삼각형 BOC의 넓이가 같으므로 삼각형 ABC의 넓이는 $2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2n} \times 3|\sin 2nt| = \frac{\pi}{12}$ 이고 $|\sin 2nt| = \frac{n}{18}$ 이다. $0 < |\sin 2nt| \leq 1$ 이므로 $0 < \frac{n}{18} \leq 1$ 이다. 따라서 n의 최댓값은 18이다.

19. [출제의도] 삼각함수를 이용하여 도형의 넓이 추론하기
점 C가 호 AB의 삼등분점 중 점 A에 가까운 점이므로

$$\angle BOC = \frac{2}{3}\theta$$

이다. 또한, 삼각형 BOC에서 $\angle OBC = \angle OCB = \frac{1}{2} \left(\pi - \frac{2}{3}\theta \right)$

이다. 한편, 삼각형 BOD에서 $\angle BDO = \pi - \theta - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{3} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{2\theta}{3}$

이다. 따라서 삼각형 BOD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{OD}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{3}\right)} = \frac{\overline{OB}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\theta}{3}\right)}$$

$$\overline{OD} = \frac{\cos\frac{\theta}{3}}{\cos\frac{2}{3}\theta}$$

한편, 부채꼴 OAC의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{\theta}{3} = \frac{\theta}{6}$ 이다.

$S(\theta)$ 는 삼각형 COD의 넓이에서 부채꼴 OAC의 넓이를 뺀 값이므로

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\cos\frac{\theta}{3}}{\cos\frac{2}{3}\theta} \times \sin\frac{\theta}{3} - \frac{\theta}{6}$$

따라서 $f(\theta) = \frac{2}{3}\theta$, $g(\theta) = \cos\frac{2}{3}\theta$, $h(\theta) = \frac{\theta}{6}$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, h\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{48}$$

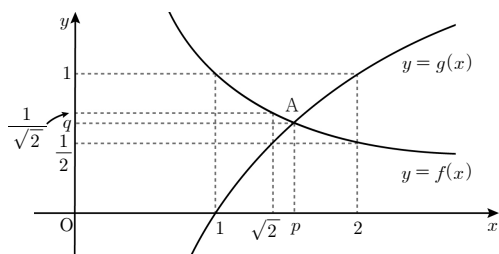
$$\text{그러므로 } \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right) \times g\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h\left(\frac{\pi}{8}\right)} = 8\sqrt{3}$$

20. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 명제 추론하기

$$f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \log_a x \text{라 하자.}$$

ㄱ. 점 A(p, q)는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점이므로 $q = \frac{1}{p}$, 즉 $pq=1$ (참)

ㄴ. $f(x) > g(x)$ 이면 $0 < x < p$ 이고 $f(x) < g(x)$ 이면 $x > p$ 이다.



$$f(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ 이고 } a=2 \text{ 이므로 } g(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \text{ 이다.}$$

$f(\sqrt{2}) > g(\sqrt{2})$ 이다.

따라서 $p > \sqrt{2}$ (참)

ㄷ. 점 B(p+q, 0)에 대하여 삼각형 AOB의 넓이 $S(p)$ 는

$$S(p) = \frac{1}{2} \times (p+q) \times q = \frac{pq}{2} + \frac{q^2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2p^2}$$

이다.

$$\text{한편, } f(\sqrt{a}) = \frac{1}{\sqrt{a}} \text{ 이고 } g(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \text{ 이다.}$$

$1 < \sqrt{a} < 2$ 이므로 $f(\sqrt{a}) > g(\sqrt{a})$ 이다.

따라서 $p > \sqrt{a}$ 이고, $\frac{1}{p} < \frac{1}{\sqrt{a}}$ 이다.

$$\text{그러므로 } S(p) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2p^2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2a} = \frac{a+1}{2a} \text{ (참)}$$

21. [출제의도] 지수함수와 삼각함수의 그래프를 이용하여 식의 값 구하는 문제 해결하기

$$0 \leq x < k \text{에서 } -\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \text{ 이고,}$$

함수 $y = \frac{1}{2} \sin \pi x$ 의 주기는 2이다.

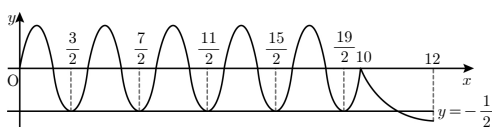
$$f(k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-k} - 1 = 0 \text{ 이므로}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(k, 0)$ 을 지난다.

방정식 $f(x)+a=0$ 의 실근은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-a$ 의 교점의 x좌표와 같다.

$0 \leq x \leq 12$ 에서 방정식 $f(x)+a=0$ 의 실근의 최댓값이 12이므로 모든 실근의 합이 46이기 위하여 실근의 개수는 4이상이어야 한다.

(i) $a = \frac{1}{2}$ 인 경우



$k=10$ 일 때 방정식 $f(x)+a=0$ 의 모든 실근의 합이 최대이다. $0 \leq x < 10$ 에서 모든 실근의 합은

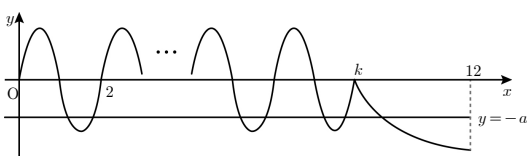
$$\frac{3}{2} + \frac{7}{2} + \frac{11}{2} + \frac{15}{2} + \frac{19}{2} = \frac{55}{2} = 27.5 \text{ 이고}$$

$$f(12) = \left(\frac{2}{3}\right)^{12-10} - 1 = \frac{4}{9} - 1 = -\frac{5}{9} < -\frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$10 \leq x \leq 12$ 에서 방정식 $f(x)+a=0$ 은 오직 하나의 실근을 갖고 그 값은 12보다 작다.

따라서 방정식 $f(x)+a=0$ 의 모든 실근의 합은 39.5보다 작으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $0 < a < \frac{1}{2}$ 인 경우



$k \leq x \leq 12$ 에서 방정식 $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-k} - 1 + a = 0$ 의 실근의 개수는 최대 1이고 그 값은 12이하이다.

$0 \leq x \leq 12$ 에서 방정식 $f(x)+a=0$ 의 모든 실근의 합이 46이기 위하여

$0 \leq x < k$ 에서 방정식 $\frac{1}{2} \sin \pi x + a = 0$ 의 모든 실근의 합이 34 이상이어야 한다.

$0 \leq x < 2$ 에서 함수 $y = \frac{1}{2} \sin \pi x$ 의 그래프와 직선 $y=-a$ 가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α_1, α_2 라 할 때, $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{3}{2}$, 즉 $\alpha_1 + \alpha_2 = 3$ 이다.

또한, 함수 $y = \frac{1}{2} \sin \pi x$ 의 주기가 2이므로

$2 \leq x < 4$ 에서 방정식 $\frac{1}{2} \sin \pi x + a = 0$ 의

모든 실근의 합은 7,

$4 \leq x < 6$ 에서 방정식 $\frac{1}{2} \sin \pi x + a = 0$ 의

모든 실근의 합은 11,

$6 \leq x < 8$ 에서 방정식 $\frac{1}{2} \sin \pi x + a = 0$ 의

모든 실근의 합은 15,

$8 \leq x < 10$ 에서 방정식 $\frac{1}{2} \sin \pi x + a = 0$ 의

모든 실근의 합은 19,

$10 \leq x < 11$ 에서 방정식 $\frac{1}{2} \sin \pi x + a = 0$ 은 실근을 갖지 않는다.

따라서 다음 세 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

① $k \leq 7$ 일 때

$0 \leq x < k$ 에서 방정식 $\frac{1}{2} \sin \pi x + a = 0$ 의

모든 실근의 합이 34 미만이므로 조건을 만족시키지 않는다.

② $k=8$ 또는 $k=9$ 일 때

$0 \leq x < k$ 에서 방정식 $\frac{1}{2} \sin \pi x + a = 0$ 의

모든 실근의 합은 $3+7+11+15=36$ 이므로

$k \leq x \leq 12$ 에서 실근이 10이면 조건을 만족시킨다.

$$k=8 \text{ 이면 } f(10)+a = \left(\frac{2}{3}\right)^{10-8} - 1 + a = 0 \text{에서}$$

$$a = \frac{5}{9} \text{ 이므로 } 0 < a < \frac{1}{2} \text{ 에 모순이다.}$$

$$k=9 \text{ 이면 } f(10)+a = \left(\frac{2}{3}\right)^{10-9} - 1 + a = 0 \text{에서}$$

$$a = \frac{1}{3} \text{ 이므로 } 0 < a < \frac{1}{2} \text{ 을 만족시킨다.}$$

③ $k=10$ 또는 $k=11$ 일 때

$0 \leq x < k$ 에서 모든 실근의 합은

$$3+7+11+15+19=55 > 46 \text{ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.}$$

(i), (ii)에 의하여 $a = \frac{1}{3}$, $k=9$ 이다.

$$\text{따라서 } \frac{k}{a} = 27$$

22. [출제의도] 지수 계산하기

$$4^{\frac{3}{2}} \times 2^2 = (2^2)^{\frac{3}{2}} \times 2^2 = 2^3 \times 2^2 = 2^5 = 32$$

23. [출제의도] 로그함수가 포함된 방정식의 해 계산하기

진수 조건에 의해 $x > -1$ 이고

$$\log_5(x+1) = 2 \text{에서 } x+1 = 5^2 \text{이므로 } x = 24$$

24. [출제의도] 지수함수가 포함된 부등식 이해하기

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} \leq 5^{7-2x} \text{에서 } 5^{1-x} \leq 5^{7-2x} \text{이므로}$$

$$1-x \leq 7-2x, \text{ 즉 } x \leq 6 \text{ 이다.}$$

따라서 모든 자연수 x의 개수는 6이다.

25. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

함수 $y = 3\sin(x+\pi) + k$ 의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{2}\right)$ 를

$$\text{지나므로 } \frac{5}{2} = 3\sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) + k = 3 \times \left(-\sin\frac{\pi}{6}\right) + k$$

$$\text{이다. 따라서 } -\frac{3}{2} + k = \frac{5}{2}, \text{ 즉 } k = 4$$

26. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여

식의 값 구하는 문제 해결하기

$$\log_{16} a \times \log_4 4 = 1 \text{에서 } \frac{1}{2} \log_4 a \times \log_4 4 = 1 \text{이므로}$$

$$\frac{\log a}{\log 4} \times \frac{\log 4}{\log b} = 2, \frac{\log a}{\log b} = 2,$$

$$\log_b a = 2, \text{ 즉 } a = b^2 \text{ 이다.}$$

한편, $\log_6 ab = 3$ 에서 $ab = 6^3$ 이므로 $b^3 = 6^3$ 이다.

따라서 $b = 6$, $a = 6^2 = 36$ 이다. 그러므로 $a+b = 42$

27. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 역함수 관계를 이용하여 식의 값 구하는 문제 해결하기

직선 $y = -x + 5$ 의 기울기가 -1 이고
곡선 $y = \log_a x$ 를 x 축의 방향으로 1만큼,
 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이
곡선 $y = \log_a(x-1) - 1$ 이므로
점 B를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로
 -1 만큼 평행이동한 점이 C이다.
 $\overline{BC} = \sqrt{2}$ 이고 $\overline{AB} : \overline{BC} = 2 : 1$ 이므로 $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$ 이다.
점 A의 x 좌표를 t 라 하면 $A(t, 5-t)$ 이고 두 함수
 $y = a^x$, $y = \log_a x$ 는 역함수 관계이므로
 $B(5-t, t)$ 이다. 그런데 $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$ 이므로 두 점
A, B의 x 좌표의 차는 2이고
 $(5-t) - t = 2$, 즉 $t = \frac{3}{2}$ 이다.

점 $A(\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$ 이 곡선 $y = a^x$ 위의 점이므로
 $a^{\frac{3}{2}} = \frac{7}{2}$, 즉 $a^3 = \frac{49}{4}$ 이다.

따라서 $4a^3 = 49$

28. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이 구하는 문제 해결하기

삼각형 ABD에서 $\angle ADB = \theta$ 라 하자.
삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{AB}}{\sin \theta} = 2r_1$
이고, 삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여
 $\frac{\overline{AC}}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{\overline{AC}}{\sin \theta} = 2r_2$
이다. $\frac{r_2}{r_1} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$ 이므로

$t > 0$ 인 실수 t 에 대하여 $\overline{AB} = 3t$, $\overline{AC} = \sqrt{13}t$ 라
하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여
 $13t^2 = 9t^2 + 36 - 2 \times 3t \times 6 \times \cos \frac{\pi}{3}$,

$2t^2 + 9t - 18 = 0$ 이므로 $t = \frac{3}{2}$ 또는 $t = -6$ 이다.

따라서 $t = \frac{3}{2}$ 이고 $\overline{AB} = 3t = \frac{9}{2}$ 이므로
 $p = 2$, $q = 9$ 이다. 그러므로 $p + q = 11$

29. [출제의도] 로그의 정의를 이용하여 집합의 원소 추론하기

$A_4 = \{\log_4 x \mid x \text{는 } 100 \text{이하의 자연수}\}$ 이고
100이하의 자연수 k 에 대하여 $b = 2^k$ 이므로
 $A_b = \{\log_2 y \mid y \text{는 } 100 \text{이하의 자연수}\}$ 이다.
집합 $A_4 \cap A_b$ 의 원소의 개수는 $\log_4 x = \log_2 y$ 가
성립하는 순서쌍 (x, y) 의 개수와 같다.
 $\log_4 x = \log_2 y$ 이면 $\frac{1}{2} \log_2 x = \frac{1}{k} \log_2 y$,

$\log_2 x^k = \log_2 y^2$ 이므로 $x^k = y^2$ 이 성립한다.
따라서 $1 \leq x \leq 100$, $1 \leq y \leq 100$ 에서 $x^k = y^2$ 이
성립하는 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구하면 된다.

① $k = 1$ 이면 $x = y^2$ 이므로
 $(x, y) = (1^2, 1), (2^2, 2), (3^2, 3), \dots, (10^2, 10)$
이고 $n(A_4 \cap A_2) = 10$

② $k = 2$ 이면 $x^2 = y^2$ 이므로
 $(x, y) = (1, 1), (2, 2), (3, 3), \dots, (10, 10)$
이고 $n(A_4 \cap A_2) = 100$

③ $k = 3$ 이면 $x^3 = y^2$ 이므로
 $(x, y) = (1^2, 1^3), (2^2, 2^3), (3^2, 3^3), (4^2, 4^3)$ 이고
 $n(A_4 \cap A_2) = 4$

④ $k = 4$ 이면 $x^4 = y^2$, 즉 $x^2 = y$ 이므로
 $(x, y) = (1, 1^2), (2, 2^2), (3, 3^2), \dots, (10, 10^2)$

이고 $n(A_4 \cap A_2) = 10$

⑤ $k = 5$ 이면 $x^5 = y^2$ 이므로
 $(x, y) = (1^2, 1^5), (2^2, 2^5)$ 이고 $n(A_4 \cap A_2) = 2$

⑥ $k = 6$ 이면 $x^6 = y^2$, 즉 $x^3 = y$ 이므로
 $(x, y) = (1, 1^3), (2, 2^3), (3, 3^3), (4, 4^3)$ 이고
 $n(A_4 \cap A_2) = 4$

⑦ $k = 7$ 이면 $x^7 = y^2$ 이므로 $(x, y) = (1^2, 1^7)$ 이고
 $n(A_4 \cap A_2) = 1$

⑧ $k = 8$ 이면 $x^8 = y^2$, 즉 $x^4 = y$ 이므로
 $(x, y) = (1, 1^4), (2, 2^4), (3, 3^4)$ 이고
 $n(A_4 \cap A_2) = 3$

⑨ $k = 9$ 이면 $x^9 = y^2$ 이므로 $(x, y) = (1^2, 1^9)$ 이고
 $n(A_4 \cap A_2) = 1$

⑩ $k = 10$ 이면 $x^{10} = y^2$, 즉 $x^5 = y$ 이므로
 $(x, y) = (1, 1^5), (2, 2^5)$ 이고 $n(A_4 \cap A_2) = 2$
그러므로 만족하는 집합 B의 원소는 $2^3, 2^6$ 이므로
모든 b의 값의 합은 $8 + 64 = 72$

30. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 삼각함수 추론하기

$f(x) = \sin x$ 이고 $g(x) = a \cos x + b$ 이다.
함수 $h(x)$ 는

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & (f(x) \leq g(x)) \\ f(x) & (f(x) > g(x)) \end{cases} \text{이다.}$$

조건 (나)에서 $0 < c < \frac{\pi}{2}$ 인 어떤 실수 c 에 대하여

$$h(c) = h(c + \pi) = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$f(c) = \frac{1}{2} \text{ 또는 } g(c) = \frac{1}{2} \text{ 이고}$$

$$f(c + \pi) = \frac{1}{2} \text{ 또는 } g(c + \pi) = \frac{1}{2} \text{ 이다.}$$

한편, $0 < c < \frac{\pi}{2}$ 이면

$$f(c + \pi) = \sin(c + \pi) = -\sin c < 0 \text{ 이므로}$$

$$f(c + \pi) \neq \frac{1}{2} \text{ 이다.}$$

따라서 $g(c + \pi) = \frac{1}{2}$ 이다. ㉠

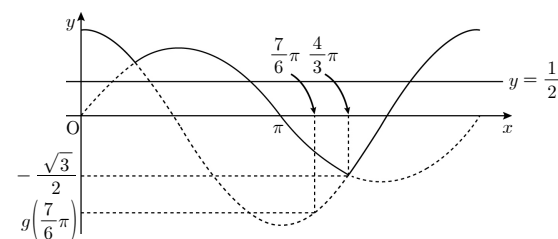
함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 직선 $x = \pi$ 에 대하여
대칭이므로 $g(\pi - c) = \frac{1}{2}$ 이다. ㉡

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 방정식 $g(x) = \frac{1}{2}$ 의 실근의 개수는
최대 2이므로 ㉠, ㉡에 의하여 $g(c) \neq \frac{1}{2}$ 이다.

따라서 $f(c) = \frac{1}{2}$ 이고 $\sin c = \frac{1}{2}$ 에서 $c = \frac{\pi}{6}$ 이다.

㉠에 의하여 $g(\frac{7\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ 이다. ㉢

(i) $a > 0$ 인 경우

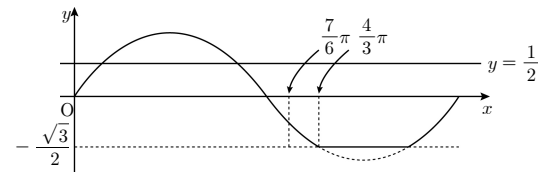


함수 $h(x)$ 의 최솟값이 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이 되기 위하여 함수
 $y = g(x)$ 의 그래프가 점 $(\frac{4}{3}\pi, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ 을 지나야
한다.

$$g(\frac{4}{3}\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 이고 } a > 0 \text{ 일 때 } g(\frac{4}{3}\pi) > g(\frac{7}{6}\pi)$$

이므로 $g(\frac{7}{6}\pi) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다. 이는 ㉢과 모순이다.

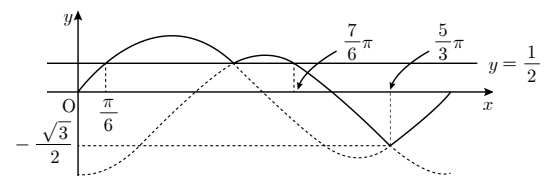
(ii) $a = 0$ 인 경우 ($g(x) = b$)



함수 $h(x)$ 의 최솟값이 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이 되기 위하여 함수
 $y = g(x)$ 의 그래프가 점 $(\frac{4}{3}\pi, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ 을 지나야

하므로 $g(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다. 함수 $g(x)$ 가 상수함수이
므로 $g(\frac{7}{6}\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다. 이는 ㉢과 모순이다.

(iii) $a < 0$ 인 경우



함수 $h(x)$ 의 최솟값이 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이 되기 위하여 함수
 $y = g(x)$ 의 그래프가 점 $(\frac{5}{3}\pi, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ 을 지나야

한다. 즉 $g(\frac{5}{3}\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다. ㉣

㉢, ㉣에 의하여 연립방정식

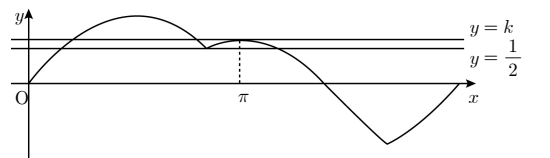
$$\begin{cases} a \cos(\frac{7\pi}{6}) + b = \frac{1}{2} \\ a \cos(\frac{5\pi}{3}) + b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

을 풀면 $a = -1$, $b = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ 이다.

따라서 $g(x) = -\cos x + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ 이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여

방정식 $h(x) = k$ ($k > \frac{1}{2}$)가 서로 다른 세 실근을
가지는 경우는 그림과 같이 직선 $y = k$ 가
점 $(\pi, g(\pi))$ 를 지날 때이다.



$$g(\pi) = -\cos \pi + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2},$$

즉 $k = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$ 이다. 따라서

$$\frac{k}{b} = \frac{\frac{3 - \sqrt{3}}{2}}{\frac{1 - \sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$$

이므로 $a + 20(\frac{k}{b})^2 = -1 + 20 \times 3 = 59$