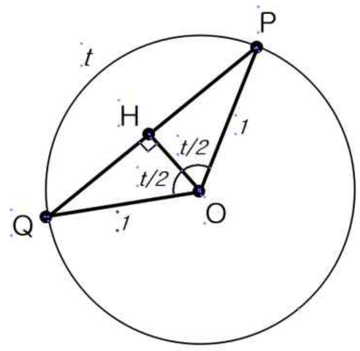
# 한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시

자 연 계

# 논 술 예 시 답 안

오후(1)-1번

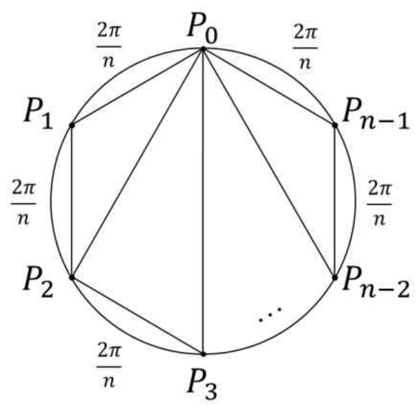
1. 오른쪽 그림에서 원의 중심 O에서 현 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하자.




$f(t) = 2\overline{\mathrm{QH}} = 2\sin\frac{t}{2}$, $g(t) = \frac{1}{2}\times 1^2 \times t - \frac{1}{2}\times 1^2 \times \sin t = \frac{1}{2}(t - \sin t)$ 이므로

$$\lim_{t\to 0+}\frac{g(t)}{f(t)} = \lim_{t\to 0+}\frac{\frac{1}{2}(t-\sin t)}{2\sin\frac{t}{2}} = \lim_{t\to 0+}\frac{1}{2}\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right) = \frac{1}{2}\times 1\times(1-1) = 0$$

2. 1번에서 구한 $f(t)$에 대하여,




$\overline{P_0P_1} = f\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, $\overline{P_0P_2} = f\left(\frac{2\pi}{n}\cdot 2\right)$, $\cdots$, $\overline{P_0P_{n-1}} = f\left(\frac{2\pi}{n}\cdot(n-1)\right)$이고,

$f\left(\frac{2\pi}{n}\cdot n\right) = f(2\pi) = 0$이므로,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{P_0P_1}+\cdots+\overline{P_0P_{n-1}}}{n}$$

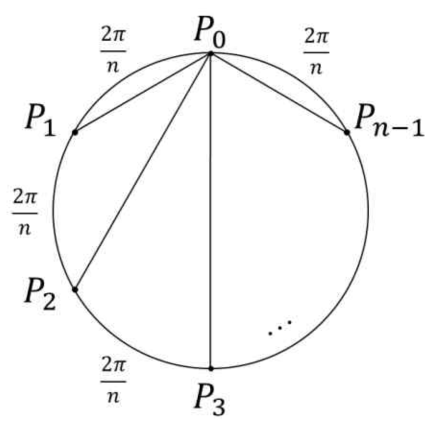
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{2\pi}{n}\cdot k\right)\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{2\pi}{n}\cdot k\right)\frac{1}{n} + f\left(\frac{2\pi}{n}\cdot n\right)\frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2\pi}{n}\cdot k\right)\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(0+\frac{2\pi-0}{n}\cdot k\right)\frac{2\pi-0}{n}\cdot\frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt$$

이고, $f(t) = 2\sin\frac{t}{2}$ 이므로, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt = \frac{4}{\pi}$.

3. 1번에서 구한 $g(t)$에 대하여,

$S_1 = g\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, $S_2 = g\left(\frac{2\pi}{n}\cdot 2\right)$, $\cdots$, $S_{n-1} = g\left(\frac{2\pi}{n}\cdot(n-1)\right)$ 이고, $g\left(\frac{2\pi}{n}\cdot n\right) = g(2\pi) = \pi$이므로,




$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_1^2+\cdots+S_{n-1}^2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(g\left(\frac{2\pi}{n}\cdot k\right)\right)^2\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(g\left(\frac{2\pi}{n}\cdot k\right)\right)^2\frac{1}{n} - \left(g\left(\frac{2\pi}{n}\cdot n\right)\right)^2\frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(g\left(0+\frac{2\pi-0}{n}\cdot k\right)\right)^2\frac{2\pi-0}{n}\cdot\frac{1}{2\pi}\right) - \lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2}{n}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(g(t))^2dt - 0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}(t-\sin t)\right)^2dt$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}(t^2 - 2t\sin t + \sin^2 t)dt \text{ 이다.}$$

부분적분에 의해 $\int t\sin t\,dt = -t\cos t + \sin t + C_1$, $\int \sin^2 t\,dt = \frac{1}{2}(t - \cos t\sin t) + C_2$ 를 구하고, 따라서

$$\frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}(t^2 - 2t\sin t + \sin^2 t)dt = \frac{1}{8\pi}\left[\frac{1}{3}t^3 - 2(-t\cos t + \sin t) + \frac{1}{2}(t - \cos t\sin t)\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{8}{3}\pi^3 + 5\pi\right) = \frac{\pi^2}{3} + \frac{5}{8}.$$

| 자 연 계 | 한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시<br>**논 술 예 시 답 안** | 오후(1)-2번 |
|---|---|---|

1. 확률변수 $X$를 진행한 시합 횟수라고 하자. 우승팀이 결정될 경우의 수는 팀 $A$의 결과가 승승승, 패패패 (시합 3회), 패승승승, 승패승승, 승승패승, 승패패패 패승패패, 패패승패 (시합 4회), 승패패승승, 승패승패승, 승승패패승, 패승패승승, 패승승패승, 패패승승승, 승승패패패, 승패승패패, 승패패승패, 패승승패패, 패승패승패, 패패승승패 (시합 5회) 총 20가지이다. 따라서 기댓값은 다음과 같다.

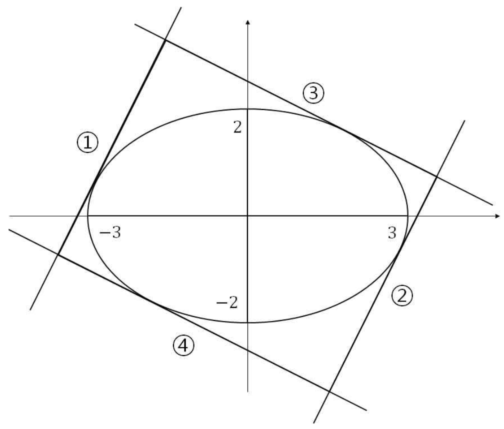
$$E(X)=3[p^3+(1-p)^3]+4[3p^3(1-p)+3p(1-p)^3]+5[6p^3(1-p)^2+6p^2(1-p)^3]$$

이 기댓값을 $p$의 함수는 $6p^4-12p^3+3p^2+3p+3$이다.

2. 타원을 좌표평면에 두어 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 이라 하자.

직사각형의 한 변을 포함하는 접선의 기울기를 $m$이라 하자.

먼저 $m=0$ 이면, 직사각형의 변의 길이는 $6$ 또는 $4$이고 $2\sqrt{5}$가 아니므로 $m\neq 0$ 임을 알 수 있다. 기울기 $m(\neq 0)$인 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{m}$ 이므로, 직사각형의 네 변은 각각 다음의 접선에 포함된다.




① $y=mx+\sqrt{9m^2+4}$

② $y=mx-\sqrt{9m^2+4}$

③ $y=-\dfrac{1}{m}x+\sqrt{\dfrac{9}{m^2}+4}$

④ $y=-\dfrac{1}{m}x-\sqrt{\dfrac{9}{m^2}+4}$

직선 ①과 ②사이의 거리를 $a$이라고 하고, 직선 ③과 ④사이의 거리를 $b$라고 하면,

$a=2\sqrt{\dfrac{9m^2+4}{m^2+1}}$, $b=2\sqrt{\dfrac{9+4m^2}{1+m^2}}$ 이고, $a$와 $b$ 둘 중 하나가 $2\sqrt{5}$이다.

$a=2\sqrt{5}$이면 $m=\pm\dfrac{1}{2}$이고 따라서 $b=4\sqrt{2}$이다. $b=2\sqrt{5}$이면 $m=\pm 2$이고 따라서 $a=4\sqrt{2}$이다.

두 경우 모두 직사각형의 넓이는 $ab=8\sqrt{10}$ 이다.

3. $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하자. 구간 $[-a,a]$를 $[-a,0]$과 $[0,a]$로 나누어 각각 부분적분하면

$$\int_0^a (a-x)f'(x)dx=\Big[(a-x)f(x)\Big]_0^a+\int_0^a f(x)dx=F(a)-F(0)-af(0),$$

$$\int_{-a}^0 (a+x)f'(x)dx=\Big[(a+x)f(x)\Big]_{-a}^0-\int_{-a}^0 f(x)dx=F(-a)-F(0)+af(0)$$

를 얻는다. 이를 합하면 $\int_{-a}^a (a-|x|)f'(x)dx=F(a)+F(-a)-2F(0)$이 되고, 따라서 주어진 조건에 의해 모든 $x\geq 0$에 대해 $F(x)=-F(-x)+2F(0)$임을 알 수 있다. 여기서 양변을 $x$에 대해 미분하면 $f(x)=f(-x)$가 모든 $x>0$에 대해 성립한다. $x=0$인 경우에는 당연히 $f(x)=f(-x)$이고, $x<0$인 경우에도 대칭성에 의해 $f(x)=f(-(-x))=f(-x)$임을 알 수 있다. 따라서 모든 $x$에 대해 $f(x)=f(-x)$가 성립한다.