2022학년도 논술 모의평가
자연계열 [문제 1] 해설 및 모범답안

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. (사잇값의 정리) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$일 때, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 열린구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

2. (평균값 정리) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린구간 (a,b)에서 미분가능하면
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$
인 c가 열린구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

3. 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x에 대하여
   (i) $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.
   (ii) $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

4. 연속인 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$에 대하여 어떤 구간에서
   (i) $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다.
   (ii) $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다.

5. 두 평면벡터 $\vec{a}, \vec{b}$가 이루는 각의 크기를 $\theta\ (0^\circ \le \theta \le 180^\circ)$라고 할 때,
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{cases} |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta & (0^\circ \le \theta \le 90^\circ) \\ -|\vec{a}||\vec{b}|\cos(180^\circ-\theta) & (90^\circ < \theta \le 180^\circ) \end{cases}$$

6. (사인법칙) 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

[1] 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 $a \le x \le b$일 때 $a \le g(x) \le b$가 성립한다. 함수 $g(x)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 방정식 $g(x)=x$는 닫힌구간 $[a,b]$에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보이시오. [8점]

(2) 함수 $g(x)$가 열린구간 (a,b)에서 미분가능하며 이 구간의 모든 x에서 $|g'(x)|<1$이 성립할 때, 열린구간 (a,b)에서 방정식 $g(x)=x$의 실근이 존재하면 오직 하나임을 보이시오. [5점]

[2] 다음 조건을 모두 만족시키게 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오. [10점]

(a) 모든 실수 x에 대하여 $\cos^2 x+(k+2)\sin x-2k-1>0$이 성립한다.

(b) 방정식 $\sqrt{2x+1}-2x+k=0$이 서로 다른 두 실근을 가진다.

[3] 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(\sqrt{3}, 1)$, $\mathrm{B}(-1, -\sqrt{3})$과 원점 O에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 내적을 이용하여 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$가 이루는 각의 크기를 구하고, 삼각형 OAB의 넓이를 구하시오. [6점]

(2) 삼각형 OAB의 외접원 위의 한 점을 P라고 할 때, 사각형 OAPB의 넓이의 최댓값을 구하시오. [9점]

[4] 함수 $h(x) = x\ln x - x$에 대하여 다음을 모두 만족시키는 양수 α와 β를 구하고, 닫힌구간 $[\alpha, \beta]$에서 부등식 $px - 2 \le h(x) \le qx - 2$가 성립하도록 하는 실수 p의 최댓값과 실수 q의 최솟값을 구하시오. [12점]

(a) 함수 $h(x)$는 $x = \alpha$에서 극소이다.

(b) 곡선 $y = h(x)$ 위의 점 $(\beta, h(\beta))$에서 접선의 기울기가 1이다.

■ 출제 의도

[1] (1) 연속함수의 성질을 이해하고 이를 활용할 수 있는 능력을 평가한다.

(2) 명제의 증명 방법인 귀류법을 이용하여 명제를 증명할 수 있는 능력을 평가한다.

[2] 삼각함수와 무리함수의 그래프의 성질을 이해하고 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가한다.

[3] (1) 벡터의 내적을 이용하여 두 벡터가 이루는 각과 삼각형의 넓이를 계산할 수 있는 능력을 평가한다.

(2) 사인법칙을 이해하고 이를 활용하여 사각형의 넓이의 최댓값을 계산할 수 있는 능력을 평가한다.

[4] 극대, 극소를 판정하는 능력과 로그함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가한다.

■ 문항 해설

명제, 연속함수, 삼각함수, 로그함수, 도함수, 방정식과 부등식, 벡터의 내적 등의 개념은 다양한 분야에서 유용하게 활용되는 중요한 수학적 개념이다. 각 문항들은 이러한 개념들을 정확히 이해하고 기본적인 논리력을 갖추고 있다면 다음과 같은 간단한 과정을 통해서 해결할 수 있다.

[1] (1) 연속함수에 대한 사잇값의 정리를 적용하면 해결할 수 있는 문항이다.

(2) 평균값의 정리를 이해하고 귀류법으로 명제를 증명하면 해결할 수 있는 문항이다.

[2] 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 부등식 문제를 해결하고 무리함수의 그래프를 활용하면 해결할 수 있는 문항이다.

[3] (1) 벡터의 내적을 활용하여 해결할 수 있는 문항이다.

(2) 사인법칙을 활용하여 외접원의 반지름을 구함으로써 해결할 수 있는 문항이다.

[4] 로그함수의 도함수와 로그함수의 그래프를 활용하면 해결할 수 있는 문항이다.

■ 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
1-1	$g(a)=a$ 또는 $g(b)=b$일 때 실근이 존재함을 보였으면	2
	$g(a)\neq a$ 또는 $g(b)\neq b$일 때 $g(b)-b<0<g(a)-a$임을 보였으면	2
	사잇값의 정리를 이용하여 $g(c)=c$인 c가 (a,b)에 존재함을 보였으면	4
1-2	귀류법으로 증명했으면	2
	평균값정리를 이용하여 $g'(c)=1$인 $c\in(a,b)$가 존재함을 보였으면	3
2	(a)로부터 $k<-1$를 구했으면	3
	(b)로부터 $-\frac{5}{4}<k\leq-1$을 구했으면	5
	k의 값의 범위 $-\frac{5}{4}<k<-1$을 구했으면	2
3-1	$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-2\sqrt{3}$을 구했으면	2
	$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$가 이루는 각 $150°$를 구했으면	2
	삼각형 OAB의 넓이 1을 구했으면	2
3-2	$\lvert\overrightarrow{\mathrm{AB}}\rvert=\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$을 구했으면	2
	외접원의 반지름 $R=\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$을 구했으면	2
	$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점을 지나고 $\lvert\overrightarrow{\mathrm{OP}}\rvert=2R$일 때 사각형 OAPB의 넓이가 최대임을 설명했으면	2
	사각형 OAPB의 최대 넓이 $4(2+\sqrt{3})$을 구했으면	3
4	$\alpha=1$, $\beta=e$를 구했으면	4
	직선 $y=kx-2$가 점 $(1,-1)$을 지날 때 $k=1$을 구했으면	2
	직선 $y=kx-2$가 곡선과 접할 때 $k=\ln 2$를 구했으면	2
	점 $(e,0)$을 지날 때 직선의 기울기 k를 구해서 $p\leq\ln 2$, $q\geq 1$임을 설명했으면	4

■ 예시 답안

[1]

(1) (ⅰ) $g(a)=a$이면 주어진 방정식의 실근 $x=a$가 존재하고, $g(b)=b$이면 실근 $x=b$가 존재한다.

(ⅱ) $g(a)\neq a$이고 $g(b)\neq b$라고 가정하자.

함수 $f(x)=g(x)-x$라고 하면, 연속함수의 차는 연속함수이므로 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이다.

$a\le x\le b$일 때 $a\le g(x)\le b$이므로 다음이 성립한다.

$$f(a)=g(a)-a>0,\ f(b)=g(b)-b<0$$

따라서 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다. 즉, $g(c)=c$인 c가 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

(ⅰ), (ⅱ)로부터 방정식 $g(x)=x$는 닫힌구간 $[a,b]$에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

(2) 방정식 $g(x)=x$의 서로 다른 근 α와 $\beta(\alpha<\beta)$가 (a,b)에 존재한다고 가정하자. 그러면 $g(\alpha)=\alpha$, $g(\beta)=\beta$이다. 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린구간 (a,b)에서 미분가능하므로 평균값정리에 의하여

$$g'(c)=\frac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}=1$$

가 성립하는 $c\in(\alpha,\beta)$가 존재한다. 조건에서 $|g'(c)|<1$이므로 모순이다.

따라서 $\alpha=\beta$ 즉, 방정식 $g(x)=x$의 근이 존재하면 오직 하나이다.

[2]

(a)에서 $\cos^2 x+(k+2)\sin x-2k-1>0$은 $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ 이므로 $\sin^2 x-(k+2)\sin x+2k<0$

따라서 $(\sin x-2)(\sin x-k)<0$

$\sin x-2<0$이므로 $\sin x-k>0$에서 $k<\sin x$

이것이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 $k<-1$ ……①

(b)에서 방정식 $\sqrt{2x+1}-2x+k=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

곡선 $y=\sqrt{2x+1}$과 직선 $y=2x-k$의 그래프가 두 개의 교점을 가져야 한다.

곡선과 직선이 접할 때, $\sqrt{2x+1}=2x-k$를 제곱하여 정리한 이차방정식 $4x^2-2(2k+1)x+k^2-1=0$에서 판별식을 D라고 하면 $\frac{D}{4}=(2k+1)^2-4(k^2-1)=4k+5=0$ 즉, $k=-\frac{5}{4}$

직선이 점 $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$을 지날 때 $1+k=0$에서 $k=-1$

그러므로 방정식 $\sqrt{2x+1}-2x+k=0$이 서로 다른 두 실근을 가지는 k의 값의 범위는 $-\frac{5}{4}<k\le-1$ ……②

따라서 ①,②를 동시에 만족하는 k의 값의 범위는 $-\frac{5}{4}<k<-1$

[3]

(1) 두 점 $\mathrm{A,B}$의 위치벡터를 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(\sqrt{3},1)$ $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-1,-\sqrt{3})$라고 하면, 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적은 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2\sqrt{3}<0$

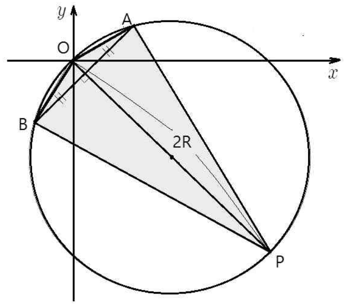
그러므로 두 벡터가 이루는 각을 θ라고 하면 $90^\circ<\theta\le180^\circ$

$|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=2$이고 $\cos(180^\circ-\theta)=-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $180^\circ-\theta=30^\circ$

따라서 $\theta=150^\circ$

$\sin150^\circ=\frac{1}{2}$이므로 삼각형 OAB의 넓이는 $S=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=1$

(2) 삼각형 OAB에서 $\angle \mathrm{AOB} = 150^\circ$ 이고, $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$이므로 외접원의 반지름 R은 사인법칙에서 $R = \dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}{2\sin 150^\circ} = \sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$이다.



사각형 OAPB의 넓이는 삼각형 OAB의 넓이와 삼각형 APB의 넓이의 합이고, 삼각형 OAB의 넓이는 일정하므로 삼각형 APB의 넓이가 최대일 때 사각형의 넓이가 최대이다.

오른쪽 그림과 같이 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$의 중점을 지나고 그 길이가 외접원의 지름일 때, 삼각형 APB의 넓이가 최대이다.

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = 2R$이므로 사각형 OAPB의 최대 넓이는 $\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 4(2+\sqrt{3})$

[4] 함수 $h(x) = x\ln x - x$라고 하면 함수 $h(x)$는 미분가능하고 $h'(x) = \ln x$이다.

$h'(x) = 0$에서 $x = 1$이고 $0 < x < 1$일 때 $h'(x) < 0$이므로 $h(x)$는 감소하고, $x > 1$일 때 $h'(x) > 0$이므로 $h(x)$는 증가한다. 그러므로 $x = 1$에서 $h(x)$는 극소이다. 따라서 $\alpha = 1$

점 $(\beta, h(\beta))$에서 접선의 기울기는 $h'(\beta) = \ln\beta = 1$이므로 $\beta = e$

$(1, e)$에서 $h''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$이므로 곡선 $y = h(x)$는 아래로 볼록하다.

(i) 직선 $y = kx - 2$가 점 $(1, -1)$을 지날 때 $k = 1$

(ii) 직선 $y = kx - 2$가 곡선 $y = h(x)$와 접할 때, 접점의 x좌표를 t라고 하면 $\ln t = k$ 즉, $t = e^k$

곡선과 접선의 y좌표는 같으므로 $t\ln t - t = kt - 2$ 즉, $k = \ln 2$

(iii) 직선 $y = kx - 2$가 점 $(e, 0)$을 지날 때 $k = \dfrac{2}{e}$

함수 $h(x)$는 $[1, e]$에서 증가하고 곡선 $y = h(x)$는 아래로 볼록하므로 (i), (ii), (iii)에서 구한 k의 값을 비교하면 $\ln 2 < \dfrac{2}{e} < 1$

그러므로 $px - 2 \le h(x) \le qx - 2$가 성립하려면 $p \le \ln 2$, $q \ge 1$

따라서 p의 최댓값은 $\ln 2$, q의 최솟값은 1