한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시

자 연 계	논 술 예 시 답 안	의예과-2번

1. 먼저 $p(0)=1$임과 $x>-\frac{1}{n}$의 범위에서 $p(x)$가 양수임은 쉽게 알 수 있다. 이제 $x=0$을 포함하는 $x>-\frac{1}{n}$의 범위로 $p(x)$의 정의역을 제한하면 아무 문제없이 $\ln p(x)$를 생각할 수 있고,

$\ln p(x)=\sum_{k=1}^{n}\ln(1+kx)$를 얻는다. 양변을 미분하면

$$\frac{p'(x)}{p(x)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{1+kx}$$

이므로 $p'(0)=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$를 얻는다.

다시 한 번 위 식에서 양변을 미분하면

$$\frac{p''(x)}{p(x)}-\frac{\{p'(x)\}^2}{\{p(x)\}^2}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(1+kx)^2}$$

이므로 $p''(0)=\{p'(0)\}^2-\sum_{k=1}^{n}k^2$을 얻는다.

따라서

$$\begin{aligned}p''(0)&=\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\&=\frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{12}\end{aligned}$$

답: $\frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{12}$

2. $q(x)=e^x+x\ln(x+1)+x^2\cos^{2022}\pi x$라 하면, 함수 $q(x)$는 닫힌구간 $[0,1]$을 포함하는 열린구간에서 연속인 도함수 $q'(x)$를 갖는다. 제시문 <가>에 의하여 $q'(x)$는 닫힌구간 $[0,1]$에서 최댓값과 최솟값을 갖는다. 이 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 하면 닫힌구간 $[0,1]$에서

$m\le q'(x)\le M$ ...... ㉠

한편 부분적분법을 적용하면

$$\begin{aligned}c_n&=(n-2022)\int_0^1 x^n q(x)\,dx\\&=\frac{n-2022}{n+1}\left(\left[x^{n+1}q(x)\right]_0^1-\int_0^1 x^{n+1}q'(x)dx\right)\\&=\frac{n-2022}{n+1}\left(q(1)-\int_0^1 x^{n+1}q'(x)dx\right)\end{aligned}$$

㉠과 제시문 <나>에 의하여

$$\frac{m}{n+2}=m\int_0^1 x^{n+1}dx\le\int_0^1 x^{n+1}q'(x)dx\le M\int_0^1 x^{n+1}dx=\frac{M}{n+2}$$

따라서

$$\frac{(n-2022)m}{(n+1)(n+2)}\le\frac{n-2022}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}q'(x)dx\le\frac{(n-2022)M}{(n+1)(n+2)}$$

이고 제시문 <다>에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-2022}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}q'(x)dx=0$$

그러므로

$$\lim_{n\to\infty}c_n=q(1)=e+\ln 2+\cos^{2022}\pi=e+\ln 2+1$$

답: $e+\ln 2+1$

3. 원 C의 방정식

$$\left(x-\frac{k^2}{4}\right)^2+(y-k)^2=\left(\frac{k^2}{4}+1\right)^2$$

에 $x=\frac{y^2}{4}$를 대입하여 정리하면

$$y^4+2(8-k^2)y^2-32ky+8(k^2-2)=0$$
$$r(y)=y^4+2(8-k^2)y^2-32ky+8(k^2-2)$$

이라고 하자. 함수 $r(y)$의 도함수를 구하면

$r'(y)=4y^3+4(8-k^2)y-32k=4(y-k)(y^2+ky+8)$ .... ㉡

k의 값에 따른 방정식 $r(y)=0$의 서로 다른 근의 개수는 다음과 같다.

경우 1) $0\le k<4\sqrt{2}$

열린구간 $(-\infty,\infty)$에서 $y^2+ky+8>0$이다. 따라서 함수 $r(y)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

y	$\cdots$	k	$\cdots$
$r'(y)$	$-$	0	$+$
$r(y)$	$\searrow$	$-(k^2+4)^2<0$	$\nearrow$

$r(y)=0$은 서로 다른 두 근을 갖는다.

경우 2) $k=4\sqrt{2}$

$r'(y)=4(y-4\sqrt{2})(y+2\sqrt{2})^2$이므로 함수 $r(y)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

y	$\cdots$	$-\frac{k}{2}=-2\sqrt{2}$	$\cdots$	$k=4\sqrt{2}$	$\cdots$
$r'(y)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$r(y)$	$\searrow$	$r\left(-\frac{k}{2}\right)>r(0)=240$	$\searrow$	$-1296<0$	$\nearrow$

$r(y)=0$은 서로 다른 두 근을 갖는다.

경우 3) $k>4\sqrt{2}$

㉡으로부터

$r'(y)=0$이면 $y=k,\ \frac{1}{2}\left(-k\pm\sqrt{k^2-32}\right)$

$c=\frac{1}{2}\left(-k-\sqrt{k^2-32}\right)$, $d=\frac{1}{2}\left(-k+\sqrt{k^2-32}\right)<0$이라 하고, 함수 $r(y)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

y	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	k	$\cdots$
$r'(y)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$r(y)$	$\searrow$	$r(c)$	$\nearrow$	$r(d)>r(0)$ $=8(k^2-2)>0$	$\searrow$	$-(k^2+4)^2<0$	$\nearrow$

또한 ㉡으로부터

$c^3=8k-(8-k^2)c,\ c^2+kc+8=0$

따라서 제시문 <라>를 이용하면

$$\begin{aligned}r(c)&=8kc-(8-k^2)(kc+8)-32kc+8(k^2-2)\\&=k(k^2-32)c+16(k^2-5)=-2h\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

한편, $r(c)>0$이면, 즉, $h\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)<0$이면, 방정식 $r(y)=0$은 서로 다른 두 개의 근을 갖고, $r(c)<0$이면, 즉 $h\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)>0$이면, 방정식 $r(y)=0$은 서로 다른 네 개의 근을 갖는다.

제시문 <라>에 의하여 $k<5\sqrt{2}$이면 $r(y)=0$은 서로 다른 두 개의 근을 갖고, $k>5\sqrt{2}$이면 $r(y)=0$은 서로 다른 네 개의 근을 갖는다.

원 C와 포물선 $y^2=4x$의 서로 다른 교점의 개수는 방정식 $r(y)=0$의 서로 다른 근의 개수와 같으므로, 구하는 양수 k_0는 $5\sqrt{2}$이다.

답: $5\sqrt{2}$