

수학 영역 (가형)

시간 : 100분

점수 : 100점



5지선다형

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\sin 2x}$ 의 값은?

[2점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
- ④ 2 ⑤ 4

2. 두 벡터 $\vec{a} = (k, 2)$, $\vec{b} = (-1, k+1)$ 이 서로 수직일 때, 상수 k 의 값은?

[2점]

- ① -2 ② -1 ③ 0
- ④ 1 ⑤ 2

3. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin x dx$ 의 값은?

[2점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
- ④ 2 ⑤ 3

4. 두 사건 A, B 에 대하여

$$P(A) = \frac{5}{8}, P(B|A) = \frac{1}{5}$$

일 때, $P(A \cap B^c)$ 의 값은? (단, B^c 은 B 의 여사건이다.)

[3점]

- ① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$
- ④ $\frac{3}{8}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

5. 좌표공간 위의 두 점 $A(1, 2, 3)$, $B(4, -1, 2)$ 에 대하여 선분 AB 를 1:2로 내분하는 점을 C 라 하자. 점 C 에서 x 축에 내린 수선의 발의 x 좌표는? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

7. $\int_1^{e^2} \frac{1}{x(1+\ln x)^2} dx$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$
 ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

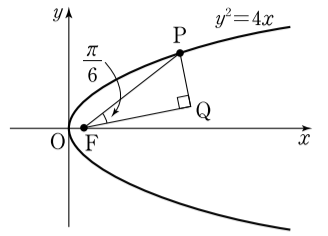
6. 1부터 9까지의 숫자가 하나씩 적힌 공 9개가 있다. 이 공 중 짝수가 적힌 공이 2개가 되도록 서로 다른 공 5개를 택하여 원형으로 나열하는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 경우는 같은 것으로 본다.) [3점]

- ① 1410 ② 1420 ③ 1430
 ④ 1440 ⑤ 1450

8. 좌표공간에서 직선 $\frac{x}{2}=1-y=\frac{z-3}{2}$ 과 xy 평면 위의 직선 $x+2y+3=0, z=0$ 이 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos\theta$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{3}$

9. 그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 P와 이 포물선 위에 있지 않은 점 Q에 대하여 $\angle PFQ=\frac{\pi}{6}, \angle FQP=\frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 PFQ의 넓이는 $2\sqrt{3}$ 이다. 점 P의 x 좌표는? [3점]

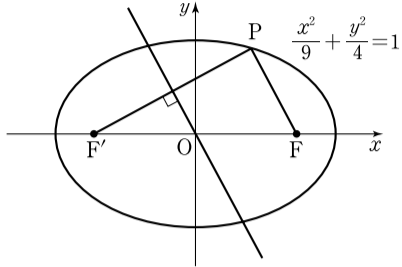


- ① 2 ② 3 ③ 4
- ④ 5 ⑤ 6

10. 500원짜리 동전 16개를 던져 앞면이 나오는 동전의 금액의 합계를 확률변수 X 라 할 때, $E(X)+\sigma(X)$ 의 값은? [3점]

- ① 3500 ② 4000 ③ 4500
- ④ 5000 ⑤ 5500

14. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 의 두 초점을 F, F'이라 하자. 타원 위의 점 중 제1사분면 위에 있는 점 P에 대하여 선분 PF'을 수직이등분하는 직선이 원점 O를 지날 때, 선분 PF의 길이는? (단, 점 F의 x좌표는 양수이다.) [4점]



- ① 2
- ② $\frac{7}{3}$
- ③ $\frac{5}{2}$
- ④ $\frac{8}{3}$
- ⑤ 3

15. 함수 $f(x) = e^{2x} + ke^x + 2x$ 의 극댓값과 극솟값의 합이 -11 이 되도록 하는 상수 k 의 값은? [4점]

- ① -9
- ② -8
- ③ -7
- ④ -6
- ⑤ -5

16. 다음은 1부터 n 까지의 자연수가 하나씩 적힌 $n(n \geq 3)$ 장의 카드에서 임의로 세 장의 카드를 동시에 뽑을 때, 세 장의 카드에 적힌 수 중 어느 두 수도 연속되지 않을 확률을 구하는 과정이다.

n 장의 카드에서 동시에 3장의 카드를 뽑는 경우의 수는

$${}_n C_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

이다.

- (i) 3개의 수가 연속이 되는 경우

$$(1, 2, 3), (2, 3, 4), \dots, (n-2, n-1, n)$$

따라서 3개의 수가 연속이 되는 경우의 수는 $n-2$ (가지)이다.

- (ii) 2개의 수만 연속이 되는 경우

뽑은 3장의 카드에 적힌 수를 a_1, a_2, a_3 ($a_1 < a_2 < a_3$)라 하자.

a_1, a_2 가 연속인 경우에 $a_1 = k$ 라 하면 $a_2 = k+1$ 이고

a_3 은 $k+3$ 부터 n 이하의 값이어야 한다.

또한 a_2, a_3 이 연속인 경우도 같은 방법으로 구한다.

따라서 2개의 수만 연속인 경우의 수는 $\boxed{(가)}$ (가지)이다.

- (i), (ii)에 의하여 구하는 확률은

$$1 - \frac{(n-2) + \boxed{(가)}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} = \boxed{(나)}$$

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n), g(n)$ 이라 할 때,

$f(10) + 5g(6)$ 의 값은?

[4점]

- ① 43 ② 57 ③ 73
 ④ 91 ⑤ 98

17. $x > 1$ 일 때, 함수 $f(x) = \frac{x^k}{x-1}$ ($k > 1$)의 최솟값을 $g(k)$ 라 하자.

이때 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{g(k)}{k}$ 의 값은?

[4점]

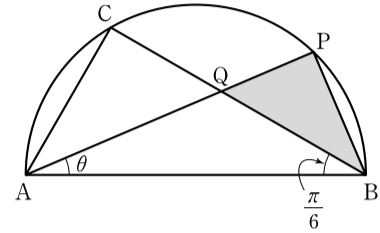
- ① $\frac{1}{e}$ ② 1 ③ e
 ④ $2e$ ⑤ e^2

18. 주머니에 1부터 7까지의 숫자가 하나씩 적힌 공 7개가 들어 있다. 갑은 이 주머니에서 1개의 공을 꺼낸 다음 꺼낸 공을 넣지 않고 1개의 공을 더 꺼낸다. 을은 갑이 꺼내고 남은 5개의 공 중 1개의 공을 꺼낸 다음 꺼낸 공을 넣지 않고 1개의 공을 더 꺼낸다. 다음 조건을 모두 만족시킬 확률은? [4점]

(가) 갑이 첫 번째로 꺼낸 공과 을이 첫 번째로 꺼낸 공에 적힌 두 수의 합은 짝수이다.
 (나) 갑이 두 번째로 꺼낸 공과 을이 두 번째로 꺼낸 공에 적힌 두 수의 곱은 짝수이다.

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{9}{35}$ ③ $\frac{11}{35}$
 ④ $\frac{13}{35}$ ⑤ $\frac{3}{7}$

19. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$ 인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 $\angle ABC = \frac{\pi}{6}$ 인 점 C가 있다. 호 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여 선분 AP와 선분 BC가 만나는 점을 Q라 하고 $\angle PAB = \theta$ 라 하자. 삼각형 BPQ의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^2}$ 의 값은? [4점]

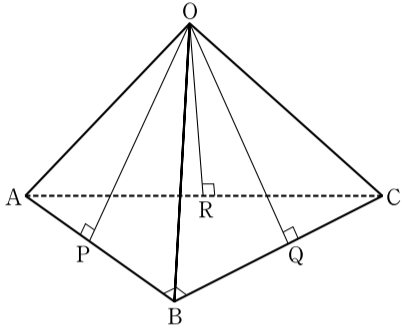


- ① $4\sqrt{3}$ ② $5\sqrt{3}$ ③ $6\sqrt{3}$
 ④ $8\sqrt{3}$ ⑤ $10\sqrt{3}$

20. $\overline{AB}=3, \overline{BC}=4, \overline{CA}=5$ 인 사면체 OABC의 꼭짓점 O에서 세 변 AB, BC, CA에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, R라 하고, 네 삼각형 OAB, OBC, OCA, ABC의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3, S 라 할 때, 사면체 OABC는 다음 조건을 만족시킨다.

- (㉠) $\overline{OP}=\overline{OQ}=\overline{OR}$
 (㉡) $S_1+S_2+S_3=2S$

이때 점 O와 평면 ABC 사이의 거리는? [4점]



- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$
 ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

21. 함수 $f(x)=\sin x \cos x + \sin x$ 에 대하여 닫힌 구간 $[t, t+\pi]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값을 $g(t)$ 라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, t 는 실수이다.) [4점]

- <보기>
 ㄱ. $g(0)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$
 ㄴ. $\frac{\pi}{3} < t < \frac{4}{3}\pi$ 에서 $g'(t) < 0$ 이다.
 ㄷ. $\int_0^{2\pi} g(t)dt = \frac{3\sqrt{3}}{4}\pi + 2$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. 부등식 $\log_2(x-5) < \log_4(x-2) + 1$ 을 만족시키는 모든 정수 x 의 값의 합을 구하시오. [3점]

23. 다항식 $(x+1)^{10}(x^2-x+1)^{10}$ 의 전개식에서 x^6 의 계수를 구하시오. [3점]

24. 방정식 $2\sin^2 x + 3\cos x = 2 - k$ 의 실근이 존재하도록 하는 모든 정수 k 의 개수를 구하시오. [3점]

25. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = x - \int_0^{\pi} f(t) \cos t \, dt$$

를 만족시킬 때, $f(10)$ 의 값을 구하시오.

[3점]

26. 두 집합 $X = \{a, b, c, d, e\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여

$$\{f(a) + f(b) + f(c)\} \times \{f(d) + f(e)\} = 5$$

를 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 개수를 구하시오.

[4점]

27. 좌표평면에서 곡선 $y = \ln x$ 위의 두 점 $P(t, \ln t)$, $Q(t+1, \ln(t+1))$ 과 y 축 위의 점 $R(0, \ln(t+1))$ 에 대하여 곡선 $y = \ln x$ 및 선분 PR , 선분 QR 로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(t)$ 라 할 때, $100 \lim_{t \rightarrow \infty} S(t)$ 의 값을 구하시오. [4점]

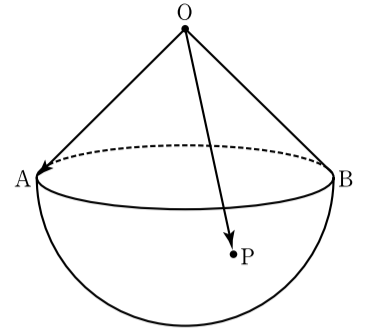
28. 좌표공간에 평면 $\alpha: x+y+z=1$ 위의 점 $A(0, 0, 1)$ 과 평면 α 위에 있지 않은 점 $B(2, 4, 1)$ 이 있다. 평면 α 위의 점 P 에 대하여 $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}|$ 의 값이 최소일 때, $|\overrightarrow{BP}|^2$ 의 값을 구하시오. [4점]

29. 숫자 1, 3, 6 중 어느 하나의 숫자가 적힌 여러 개의 공이 들어 있는 주머니에서 한 개의 공을 꺼내어 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 3번 할 때, 확인한 세 수의 표본평균 \bar{X} 가 다음 조건을 만족시킨다.

$(가) P(\bar{X}=1) = \frac{1}{8}$ $(나) P(\bar{X}=6) = \frac{1}{27}$
--

$E(\bar{X}^2) = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, 주머니에는 숫자 1, 3, 6이 적힌 공은 각각 한 개 이상 들어 있고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 그림과 같이 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 선분 AB를 지름으로 하는 원이 있다. 이 원을 밑면으로 하고 모선의 길이가 2인 원뿔과 이 원을 밑면으로 하는 반구로 이루어진 입체도형이 있다. 원뿔의 꼭짓점을 O라 할 때, 이 입체도형의 내부 또는 표면 위에 있는 점 P가



$\vec{OA} \cdot \vec{OP} = 2$ 를 만족시킨다. 내적 $\vec{AB} \cdot \vec{AP}$ 의 최솟값을 m , 최댓값을 M 이라 할 때, $m+M = a+b\sqrt{2}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 자연수이다.) [4점]

※ 확인 사항
 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.