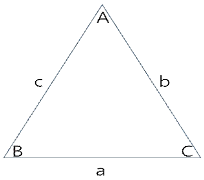
동국대학교 2022년(2023학년도 대비)
온라인 모의논술 문항카드(자연계열)

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	모의논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 I
	핵심개념 및 용어	코사인 법칙, 이차 함수의 최솟값
예상 소요 시간	30분 / 전체 90분	

2. 문항 및 제시문

【가】 $\triangle\mathrm{ABC}$ 에서



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

-『고등학교 수학I』

【나】 삼각형ABC의 넓이를 S 라고 하면

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$

-『고등학교 수학I』

【다】 x의 값의 범위가 $\alpha \le x \le \beta$일 때, 이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 최댓값과 최솟값은 이차함수의 꼭짓점의 x좌표 p가 주어진 범위에 포함되는지 조사하여 다음과 같이 구한다.

(1) $\alpha \le p \le \beta$인 경우, $f(\alpha), f(\beta), f(p)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값이고, 가장 작은 값이 최솟값이다.

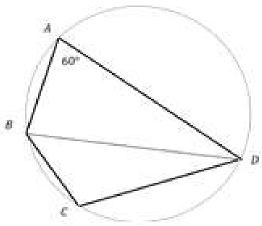
(2) $p < \alpha$ 또는 $p > \beta$인 경우, $f(\alpha), f(\beta)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값이고, 가장 작은 값이 최솟값이다.

-『고등학교 수학』

【라】 원에 내접하는 사각형의 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180° 이다.

-『고등학교 수학I』

[문제1] 원에 내접하는 사각형 ABCD의 네 변의 길이의 합이 22이고, $\angle A = 60^{\circ}$, $\overline{\mathrm{BD}} = 8$ 일 때, $\overline{\mathrm{CB}} + \overline{\mathrm{CD}}$의 범위를 구하라. 그리고, 사각형 ABCD의 넓이가 최대가 될 때 $\overline{\mathrm{CB}} + \overline{\mathrm{CD}}$ 의 길이를 구하라.



3. 출제의도

코사인 법칙을 이용하여 삼각형의 변 사이의 관계를 표현할 수 있고, 삼각형의 면적을 구할 수 있으며, 이차함수의 최솟값을 구할 수 있다.

4. 출제근거

[문제 1]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학 II (2) 삼각함수 ① 삼각함수
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	배종숙	금성출판사	2020	110

제시문 [가]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학II (2) 삼각함수 ① 삼각함수
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	황선욱	미래엔	2020	104

제시문 [나]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학II (2) 삼각함수 1 삼각함수
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	박교식	동아출판	2020	91

제시문 [다]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학 (1) 문자와 식 5 이차방정식과 이차함수
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[10수학01-11] 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	류희찬	천재교과서	2020	72

제시문 [라]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학II (2) 삼각함수 1 삼각함수
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	박교식	동아출판	2020	87

5. 문항해설

[문제 1]코사인 법칙과 삼각형의 면적을 이용하여 사각형의 면적을 표현하고, 이차함수의 최솟값을 계산할 수 있다.
제시문 [가] 코사인 법칙에 대한 설명이다.
제시문 [나] 삼각형의 면적에 대한 공식이다.
제시문 [다] 이차함수의 최대 최소에 대한 설명이다.
제시문 [라] 원에 내접하는 사각형의 마주보는 각의 합에 대한 설명이다.

6. 채점기준

	채점 기준	배점
상	[1단계]부터 [4단계]까지를 모두 보이고, 논증이 매끄럽고 설득력이 있는 경우	S
	[1단계]부터 [4단계]까지를 모두 보였으나 논증이 매끄럽지 않은 경우	A
중	[1단계]부터 [3단계]까지의 과정을 기술한 경우	B
	[1단계]부터 [2단계]까지의 과정을 기술한 경우	C
	[1단계]의 과정을 기술한 경우	D
하	위 단계 중 한 단계만 기술한 경우	E
	어느 단계도 맞게 진술하지 못한 경우, 백지인 경우	F

하위 문항	채점 기준
	$a=\overline{\mathrm{AB}},\ b=\overline{\mathrm{AD}}, c=\overline{\mathrm{CB}}, d=\overline{\mathrm{CD}}$ 라고 하자. **[제1단계] 코사인 법칙을 이용하여 변 사이의 관계를 나타낼 수 있다.** 사각형 ABCD가 원에 내접하므로 제시문 [라]에 의해 $\angle C=120^\circ$ 이고, 제시문 [가]의 코사인 법칙에 의해 $a^2+b^2-ab=64,\ \ c^2+d^2+cd=64$ 이다. **[제2단계] ab, cd를 $x=\overline{\mathrm{CB}}+\overline{\mathrm{CD}}$ 의 식으로 나타낼 수 있다.** ab, cd 를 각각 $a+b$ 와 $c+d$ 에 대한 식으로 변형하면 $ab=\dfrac{(a+b)^2-64}{3},\ cd=(c+d)^2-64$ 이다. 네 변의 길이의 합이 22 이므로, $c+d=x$ 라고 하면 $ab=\dfrac{(22-x)^2-64}{3},\ cd=x^2-64$ 로 표현할 수 있다. **[제3단계] a,b,c,d 가 양수이므로 $x=\overline{\mathrm{CB}}+\overline{\mathrm{CD}}$의 범위를 구할 수 있다.** a,b는 근과 계수와의 관계에 의해 이차 함수 $x^2-(a+b)x+ab=0$ 의 근이 된다. a,b가 양수이므로 $a+b=22-x>0,\ ab=\dfrac{(22-x)^2-64}{3}>0, D=(a+b)^2-4ab=\dfrac{-(22-x)^2+256}{3}\geq 0$ 이고 x의 범위는 $6\leq x<14$이다. 마찬가지로 두 양수 c,d 가 존재하기 위한 조건은 $c+d=x>0, cd=x^2-64>0, D=(c+d)^2-4cd=-3x^2+256\geq 0$ 이므로 x의 범위는 $8<x\leq\dfrac{16}{3}\sqrt{3}$ 이다. 따라서, 위의 두 결과를 종합하면 x의 범위는 $8<x\leq\dfrac{16}{3}\sqrt{3}$ 이다. **[제4단계] 사각형 ABCD의 넓이가 최대일 때, x의 값을 구할 수 있다.** 사각형 ABCD 의 넓이 S는 삼각형 ABD 와 삼각형 CBD 의 넓이의 합이므로 제시문 [나]에 의해 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin A+\dfrac{1}{2}cd\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(ab+cd)$ 이다. ab, cd를 x로 표현한 식을 대입해서 정리하면 $S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{(22-x)^2-64}{3}+x^2-64\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x^2-11x+57)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-\dfrac{11}{2})^2+\dfrac{107}{12}\sqrt{3}$ 이므로 사각형 면적이 최대가 될 때 $x=\overline{\mathrm{CB}}+\overline{\mathrm{CD}}$의 값은 제시문 [다]에 의해 $\dfrac{16}{3}\sqrt{3}$ 이다.

7. 예시답안

$a=\overline{\mathrm{AB}}, b=\overline{\mathrm{AD}}, c=\overline{\mathrm{CB}}, d=\overline{\mathrm{CD}}$라고 하자. 사각형 ABCD가 원에 내접하므로 제시문 [라]에 의해 , $\angle C=120^\circ$ 이고, 제시문 [가]의 코사인 법칙에 의해

$$a^2+b^2-ab=64,\quad c^2+d^2+cd=64$$

이다.

ab, cd 를 각각 $a+b$ 와 $c+d$ 에 대한 식으로 변형하면

$$ab=\frac{(a+b)^2-64}{3},\ cd=(c+d)^2-64$$

이다. 네 변의 길이의 합이 22 이므로, $c+d=x$ 라고 하면

$$ab=\frac{(22-x)^2-64}{3},\ cd=x^2-64$$

로 표현할 수 있다.

a,b는 근과 계수와의 관계에 의해 이차 함수 $x^2-(a+b)x+ab=0$의 근이 된다. a,b 가 양수이므로

$$a+b=22-x>0,\ ab=\frac{(22-x)^2-64}{3}>0,\ (a+b)^2-4ab=\frac{-(22-x)^2+256}{3}\ge 0$$

이고 x의 범위는 $6\le x<14$이다.
마찬가지로 두 양수 c,d 가 존재하기 위한 조건은

$$c+d=x>0,\ cd=x^2-64>0,\ (c+d)^2-4cd=-3x^2+256\ge 0$$

이므로 x의 범위는 $8<x\le\frac{16}{3}\sqrt{3}$ 이다. 따라서, 위의 두 결과를 종합하면 x의 범위는

$8<x\le\frac{16}{3}\sqrt{3}$ 이다.

한편 사각형 ABCD 의 넓이 S는 삼각형 ABD 와 삼각형 CBD 의 넓이의 합이므로 제시문 [나]에 의해

$$S=\frac{1}{2}ab\sin A+\frac{1}{2}cd\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}(ab+cd)$$

이다. ab, cd를 x로 표현한 식을 대입해서 정리하면

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{(22-x)^2-64}{3}+x^2-64\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}(x^2-11x+57)=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-\frac{11}{2})^2+\frac{107}{12}\sqrt{3}$$

이다. 따라서 사각형의 면적이 최대가 될 때 $x=\overline{\mathrm{CB}}+\overline{\mathrm{CD}}$ 의 값은 제시문 [다]에 의해 $\frac{16}{3}\sqrt{3}$이다.

동국대학교 2022년(2023학년도 대비)

온라인 모의논술 문항카드(자연계열)

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	모의논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	미분, 극대, 극소
예상 소요 시간	30분 / 전체 90분	

2. 문항 및 제시문

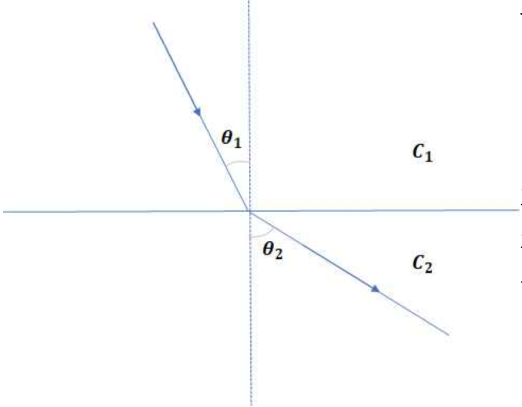
【가】 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 $x=a$ 좌우에서

① $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

② $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

-『고등학교 수학II』

【나】 두 매질 C_1, C_2에서 빛의 속도가 각각 v_1, v_2이고, 빛이 두 매질의 경계면을 통과할 때의 입사각을 θ_1, 굴절각을 θ_2라고 하면



$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2}$$

가 성립한다. 네덜란드의 수학자 스넬(Snell, 1580~1626)은 위와 같은 굴절의 법칙이 있다는 것을 발견하였는데, 두 점을 지나는 빛은 그 이동 시간이 최소가 되는 경로를 따라 이동한다는 것을 이용하여 증명할 수 있다.

-『고등학교 미적분』

[문제2] 좌표평면 상에서 움직이는 크기를 무시할 수 있는 아주 작은 물체가 $y \geq 0$인 부분에서는 1의 일정한 속력으로 이동하고, $y < 0$인 부분에서는 2의 일정한 속력으로 이동하는 성질을 가지고 있다고 하자. 그 물체가 점 $\mathrm{A}(0, \sqrt{7})$에서 점 $\mathrm{B}(2, -1)$까지 이동하는 데 걸리는 최소 시간을 구하시오.

3. 출제의도

물체가 두 점 사이를 이동하는 동안 걸리는 시간을 함수로 작성하고 미분법을 적용하여 극대와 극소를 판정한 후 최소 시간을 구할 수 있다.

4. 출제근거

[문제 2]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학 Ⅱ (2) 미분 ③ 도함수의 활용 미적분 (2) 미분 ③ 도함수의 활용
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12미적02-13] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅱ	권오남	교학사	2020	93
	미적분	고성은	좋은책 신사고	2020	122

제시문【가】

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학 Ⅱ (2) 미분 ③ 도함수의 활용
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅱ	권오남	교학사	2020	93

제시문【나】

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	미적분 (2) 미분 ③ 도함수의 활용
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12미적02-13] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	고성은	좋은책 신사고	2020	122

5. 문항해설

주어진 문제의 최소 시간을 구하기 위해 여러 가지 풀이가 있을 수 있다. 그 중 출제 의도에 가장 잘 들어맞는 답안은 먼저 물체가 두 점 사이를 이동하는 데 걸리는 시간을 함수로 작성한 후 미분법을 적용하여 극대 또는 극소가 되는 점들을 찾아 물체가 이동하는 데 걸리는 최소 시간을 계산할 수 있다.

6. 채점기준

출제 의도에 가장 잘 들어맞는 답안의 풀이 순서는 다음과 같다.

[1단계] 물체가 x축과 만나는 점을 P라 할 때, 물체가 선분 $\overline{\mathrm{AP}}$와 선분 $\overline{\mathrm{PB}}$를 따라 이동하는데 걸리는 총 시간을 구체적인 함수로 표현함. 예를 들어,

[첫 번째 풀이]에서

$$\sqrt{x^2+7}+\frac{1}{2}\sqrt{(2-x)^2+1}$$

[첫 번째 풀이]에서

$$f(x)=\sqrt{x^2+7}+\frac{1}{2}\sqrt{(2-x)^2+1}$$

[2단계] 최소 시간을 구하기 위해 함수를 미분하여 미분계수가 0이 되어야 함을 작성함. 예를 들어,

[첫 번째 풀이]에서

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+7}}=\frac{2-x}{2\sqrt{(2-x)^2+1}}$$

[두 번째 풀이]에서

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{2-x}{2\sqrt{(2-x)^2+1}}=0 \iff 2x\sqrt{(2-x)^2+1}=(2-x)\sqrt{x^2+7}$$

[3단계] [2단계]에서 구한 방정식을 변형 또는 정리하여 해를 구함.

[4단계] 그 해의 좌우에서 도함수의 부호 변화를 이용해 극소임을 판별함.

[5단계] 그 해를 [1단계]에서 구한 방정식에 대입하여 최소 시간을 구함.

	채점 기준	배점
상	[1단계]부터 [5단계]까지를 모두 보인 경우	S
	[1단계]부터 [4단계]까지를 모두 보인 경우	A
중	[1단계]부터 [3단계]까지를 모두 보인 경우	B
	[1단계]와 [2단계]를 보인 후 [3단계]를 시도만 하고 끝마치지 못한 경우	C
	[1단계]와 [2단계] 둘 다 모두 보인 경우	D
하	[1단계] 또는 [2단계]만 작성한 경우	E
	어느 단계도 맞게 진술하지 못한 경우, 백지인 경우	F

7. 예시답안

[첫 번째 풀이]

최소 시간이 걸리는 경로가 x축과 만나는 점을 $\mathrm{P}(x,0)$이라 두면 $0 \le x \le 2$가 되어야 하고, 최소 시간은

$$\sqrt{x^2+7}+\frac{1}{2}\sqrt{(2-x)^2+1}$$

이 된다. 굴절의 법칙은 이동 시간이 최소가 되는 경로를 따라 이동한다는 것을 이용하여 증명이 되므로 우리의 문제에도 적용할 수 있다. 입사각 θ_1, 굴절각 θ_2에 대해

$$\sin\theta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+7}}, \qquad \sin\theta_2 = \frac{2-x}{\sqrt{(2-x)^2+1}}$$

이므로 굴절의 법칙에 의해

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+7}} = \frac{2-x}{2\sqrt{(2-x)^2+1}}$$

이 되어 $0 \le x \le 2$가 된다. 양변을 제곱하면

$$4x^2((x-2)^2+1) = (x-2)^2(x^2+7) \iff 3x^4-12x^3+9x^2+28x-28 = 0$$

이다. 이 4차방정식은 $x=1$을 해로 가지므로 다음과 같이 $x-1$로 묶어진다.

$$(x-1)(3x^3-9x^2+28) = 0.$$

이제 $g(x) = 3x^3-9x^2+28$로 두면 $g'(x) = 9x^2-18x = 9x(x-2)$, $g(0)=28$, $g(2)=16$이므로 방정식 $g(x)=0$는 $0 \le x \le 2$에서 해를 갖지 않는다. 따라서, $x=1$이 굴절의 법칙을 만족시키는 유일한 해이고, 이때 걸리는 최소 시간은 $\frac{5}{2}\sqrt{2}$이다.

[두 번째 풀이]

물체가 x축과 만나는 점을 $\mathrm{P}(x,0)$이라 두면 점 A에서 점 P까지는 선분 $\overline{\mathrm{AP}}$를 따라 일정한 속력 1로, 점 P를 떠나 점 B까지는 선분 $\overline{\mathrm{PB}}$를 따라 일정한 속력 2로 움직여야 한다. 이때 걸린 총 시간을 $f(x)$

라 두면

$$f(x) = \sqrt{x^2+7} + \frac{1}{2}\sqrt{(2-x)^2+1}$$

이 된다. 최소 시간을 구하기 위해 $f'(x)=0$을 풀면

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+7}} - \frac{2-x}{2\sqrt{(2-x)^2+1}} = 0 \iff 2x\sqrt{(2-x)^2+1} = (2-x)\sqrt{x^2+7}$$

이여야 하므로 $0 \le x \le 2$이다. 양변을 제곱하면

$$4x^2((x-2)^2+1) = (x-2)^2(x^2+7) \iff 3x^4-12x^3+9x^2+28x-28 = 0$$

이다. 이 4차방정식은 $x=1$을 해로 가지므로 다음과 같이 $x-1$로 묶어진다.

$$(x-1)(3x^3-9x^2+28) = 0.$$

이제 $g(x) = 3x^3-9x^2+28$로 두면 $g'(x) = 9x^2-18x = 9x(x-2)$, $g(0)=28$, $g(2)=16$이므로 방정식 $g(x)=0$는 $0 \le x \le 2$에서 해를 갖지 않는다. $f'(x)$는 연속이고 $f'(1)=0$이므로 $x=1$이 $f'(x)=0$의 유일한 해이다. 이제 $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 구하면 $f'(0)<0$, $f'(2)>0$이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이다. 따라서 최소 시간이 될 x는 $x=1$이고 이때 걸리는 최소 시간은 $f(1)=\frac{5}{2}\sqrt{2}$이다.

동국대학교 2022년(2023학년도 대비)
온라인 모의논술 문항카드(자연계열)

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	모의논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	위치, 속도, 가속도, 미분
예상 소요 시간	30분 / 전체 90분	

2. 문항 및 제시문

【가】 a를 포함하는 어떤 열린구간에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

-『고등학교 수학Ⅱ』

【나】 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=f(t)$일 때, 시각 t에서의 점 P의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$라고 하면 다음이 성립함을 알고 있다.

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=f'(t), \qquad a(t)=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=f''(t)$$

-『고등학교 미적분』

[문제3] 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t \ge 0$에서의 위치를 각각 x, y라고 하면 $x=2\cos^2 t$, $y=\frac{5}{4}c-c\sin t$ $(c>0)$이다. 두 점 P, Q는 1회 이상 만나고, 만날 때마다 두 점의 속도가 일치한다고 하자. 양수 c값을 정하고 두 점 P와 Q 사이 거리가 시각 $t=0$이후 처음으로 최대가 되는 시각 t와 이때 점 Q의 속도 및 가속도를 각각 구하여라.

3. 출제의도

수직선 위를 움직이는 점의 위치와 속도 및 가속도 사이 관계를 이해하여 관련된 문제를 해결할 수 있는지 알아보려 하였다

4. 출제근거

고등학교 수학 II와 고등학교 미적분의 도함수의 활용에서 도함수는 움직이는 점의 위치와 속도 및 가속도 사이 관계를 이해하는데 필요한 개념이다. 이에 대한 이해를 바탕으로 관련된 값들을 구하는 문제이다.

[문제3]

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	미적분 (2) 미분법 ③ 도함수의 활용
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12미적02-14] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 미적분	이준열	천재교육	2020	122

제시문【가】

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학II (2) 미분 ③ 도함수의 활용
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 수학II	박교식	동아출판	2020	86

제시문【나】

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	미적분 (2) 미분법 ③ 도함수의 활용
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12미적02-14] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 미적분	이준열	천재교육	2020	122

5. 문항해설

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q가 만족해야하는 조건을 분석하여 양수 c값을 찾고 극값 개념을 활용해 두 점 P, Q사이 거리가 처음으로 최대가 되는 시각 t를 찾은 후 이때 점 Q의 속도 및 가속도를 구하여 문제에 맞는 설명을 하면 된다.

6. 채점기준

[1단계] 두 방정식 $2\cos^2 t = x = y = \frac{5}{4}c - c\sin t$, $-4\cos t \sin t = \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = -c\cos t$을 구하고 두 방정식을 동시에 만족하는 $t \geq 0$가 하나 이상 있어야 함을 기술.

[2단계] 위 [1단계]를 만족하도록 $c=2$를 구함.

[3단계] 두 점 P, Q사이 거리 $D(t) = 2(\sin t - \frac{1}{2})^2$를 구하고 최초로 $D(t)$가 최댓값을 가지는 시간 $t = \frac{3}{2}\pi$을 구함.

[4단계] 시각 $t = \frac{3}{2}\pi$에서 점 Q의 속도 0과 가속도 -2를 구함.

	채점 기준	배점
상	[1단계]부터 [4단계]까지를 모두 보이고 논증이 매끄럽고 설득력이 있는 경우	S
	[1단계]부터 [4단계]까지를 보였으나 논증이 매끄럽지 않은 경우	A
중	[1단계]부터 [3단계]까지를 모두 보이고 논증이 매끄럽고 설득력이 있는 경우	B
	[1단계]부터 [3단계]까지를 보였으나 논증이 매끄럽지 않은 경우	C
	[1단계]부터 [2단계]까지를 보이고 논증이 매끄럽고 설득력이 있는 경우	D
하	[1단계]를 보이고 논증이 매끄럽고 설득력이 있는 경우	E
	어느 단계도 맞게 진술하지 못한 경우, 백지인 경우	F

7. 예시답안

[1단계] 두 점 P, Q가 1회 이상 만나고, 만날 때 마다 두 점의 속도가 일치 하므로 두 방정식 $2\cos^2 t = x = y = \frac{5}{4}c - c\sin t$와 $-4\cos t\sin t = \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = -c\cos t$를 동시에 만족하는 $t \ge 0$가 하나 이상 있어야 한다.

[2단계] 위에서 얻은 두 방정식 중 두 번째 방정식을 정리하면 $\cos t(4\sin t - c) = 0$이다. $\cos t = 0$일 때 첫 번째 방정식에서 $0 = c(\frac{5}{4} - \sin t)$인데 $c > 0$, $\frac{5}{4} - \sin t > \frac{1}{4}$이므로 $\cos t = 0$인 경우는 두 방정식을 동시에 만족할 수 없다. $4\sin t - c = 0$일 때에는 첫 번째 방정식에서부터

$2(1 - \frac{c^2}{16}) = 2(1 - \sin^2 t) = 2\cos^2 t = \frac{5}{4}c - c\sin t = \frac{5}{4}c - \frac{c^2}{4}$, 즉 c에 대한 2차 방정식을 얻을 수 있다. 이를 정리하여 인수분해하면 $(c-2)(c-8) = 0$이므로 c는 2또는 8이고 $\frac{c}{4} = \sin t \le 1$에서 $c = 2$임을 알 수 있다. 또한 $\sin t = \frac{c}{4} = \frac{1}{2}$인 모든 $t \ge 0$에서 두 점 P, Q가 만나는 것을 알 수 있다.

[3단계] 두 점 P, Q사이 거리 $D(t)$는 $D(t) = |\frac{5}{2} - 2\sin t - 2\cos^2 t| = |2(\sin t - \frac{1}{2})^2| = 2(\sin t - \frac{1}{2})^2$이다. 이를 시각 t에 대해 미분하면 $D'(t) = 4(\sin t - \frac{1}{2})\cos t$이므로 극값은 $\sin t = \frac{1}{2}$을 만족할 때와 $\cos t = 0$을 만족할 때 나오는데 $\sin t = \frac{1}{2}$일 때에는 두 점이 만나므로 극소이다. $\cos t = 0$, 즉 $t = (n - \frac{1}{2})\pi$, $n = 1,2,3,\cdots$이면 $D(\frac{\pi}{2}) = 2(1 - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$, $D(\frac{3\pi}{2}) = 2(-1 - \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{2}$, $D(\frac{5\pi}{2}) = \frac{1}{2}$, $D(\frac{7\pi}{2}) = \frac{9}{2}$, $\cdots$가 반복되어 나타나므로 두 점 P, Q사이 거리의 최댓값은 $\frac{9}{2}$, 최초로 최댓값을 가지는 시간은 $t = \frac{3}{2}\pi$이다.

[4단계] $y' = -2\cos t$, $y'' = 2\sin t$이므로 시각 $t = \frac{3}{2}\pi$에서 점 Q의 속도와 가속도는 각각 $-2\cos\frac{3\pi}{2} = 0$, $2\sin\frac{3\pi}{2} = -2$이다.