

수학 영역

정답

1	⑤	2	④	3	①	4	③	5	④
6	④	7	②	8	④	9	②	10	②
11	①	12	②	13	⑤	14	③	15	①
16	①	17	③	18	②	19	③	20	④
21	③	22	2	23	12	24	385	25	20
26	36	27	271	28	40	29	11	30	28

해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$$2^{-1} \times 8^{\frac{5}{3}} = 2^{-1} \times (2^3)^{\frac{5}{3}} = 2^{-1} \times 2^5 = 2^4 = 16$$

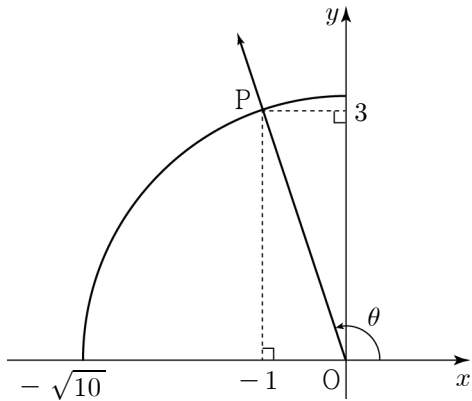
2. [출제의도] 함수의 극한 계산하기

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^2}{x^2+4x+5} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2+4x+1}{x^2+4x+5} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} = 4 \end{aligned}$$

3. [출제의도] 등차수열 계산하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면
 $a_7 - a_5 = (a_1 + 6d) - (a_1 + 4d) = 2d = 6, d = 3$
 $a_4 = a_1 + 3d = a_1 + 9 = 10$
 따라서 $a_1 = 1$

4. [출제의도] 삼각함수 이해하기



$$\sin \theta = -3 \cos \theta \text{ 에서 } \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -3, \tan \theta = -3$$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이므로 중심이 원점이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 인 원과 각 θ 를 나타내는 동경이 만나는 점을 P 라 하면 $P(-1, 3)$

$$\text{따라서 } \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

5. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 + 2 = 1$$

6. [출제의도] 로그 계산하기

$$\begin{aligned} \log_2 5 \times \log_3 3 + \log_2 \frac{16}{3} \\ = \log_2 5 \times \frac{\log_2 3}{\log_2 5} + \log_2 \frac{16}{3} = \log_2 3 + \log_2 \frac{16}{3} \\ = \log_2 \left(3 \times \frac{16}{3} \right) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \end{aligned}$$

7. [출제의도] 일반각과 호도법 이해하기

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 중심각의 크기를 θ 라 하자.
 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 이므로 부채꼴의 넓이는
 $\frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} r^2 \times \frac{\pi}{4} = 18\pi, r = 12$
 따라서 부채꼴의 호의 길이는
 $r\theta = 12 \times \frac{\pi}{4} = 3\pi$

8. [출제의도] 삼각함수가 포함된 방정식 이해하기

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 이므로
 $\cos^2 x - 1 = 2 \sin x$ 에서
 $(1 - \sin^2 x) - 1 = 2 \sin x$
 $\sin^2 x + 2 \sin x = 0, \sin x(\sin x + 2) = 0$
 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로 $\sin x = 0$
 $0 < x \leq 2\pi$ 에서 $x = \pi$ 또는 $x = 2\pi$
 따라서 모든 해의 합은 3π

9. [출제의도] 지수함수와 로그함수 이해하기

함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+m)$ 은
 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소하므로
 $x = -3$ 에서 최댓값 -2 를 갖는다.
 $\log_{\frac{1}{3}}(-3+m) = -2, m-3=9$
 따라서 $m = 12$

10. [출제의도] 등비수열의 합 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r ($r > 0$) 이라 하자.
 (i) $r = 1$ 인 경우
 $a_2 = ar = a = 2$
 $S_6 = 6a = 12$
 $S_3 = 3a = 6$
 $S_6 \neq 9S_3$
 (ii) $r \neq 1$ 인 경우
 $S_6 = 9S_3, \frac{a(r^6-1)}{r-1} = 9 \times \frac{a(r^3-1)}{r-1}$
 $(r^3+1)(r^3-1) = 9(r^3-1)$
 $r^3+1=9, r^3=8, r=2$
 따라서 $a_4 = a_2 \times r^2 = 2 \times 2^2 = 8$

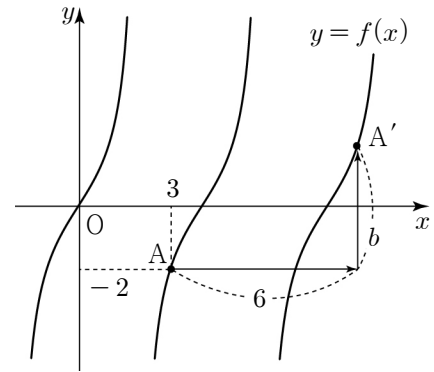
11. [출제의도] 지수함수와 로그함수 이해하기

$4^x - 2^x - 2 < 0$ 에서 $2^x = t$ ($t > 0$) 이라 하면
 $t^2 - t - 2 < 0, (t+1)(t-2) < 0$
 $-1 < t < 2$ 에서 $0 < t < 2$
 $0 < 2^x < 2, x < 1$
 $\log_a x + 1 > 0$ 에서 $a > 1$ 이므로 $x > \frac{1}{a}$



연립부등식을 만족시키는 모든 x 의 값의 범위가 $\frac{1}{5} < x < 1$ 이므로 $a = 5, b = 1$
 따라서 $a+b = 5+1 = 6$

12. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제 해결하기



점 $A(3, -2)$ 는 함수 $f(x) = a \tan \frac{\pi}{4} x$ 의 그래프 위의 점이므로
 $f(3) = a \tan \frac{3}{4} \pi = -a = -2, a = 2$
 점 $A(3, -2)$ 를 x 축의 방향으로 6만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 점 $A'(9, -2+b)$ 는 함수 $f(x) = 2 \tan \frac{\pi}{4} x$ 의 그래프 위의 점이므로
 $f(9) = 2 \tan \frac{9}{4} \pi = 2 \tan \left(2\pi + \frac{\pi}{4} \right)$
 $= 2 \tan \frac{\pi}{4} = 2 \times 1 = 2 = -2 + b, b = 4$
 따라서 $a+b = 2+4 = 6$

13. [출제의도] 등비수열 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a ($a < 0$), 공비를 r ($r \neq 0$) 이라 하자.
 $a_3 a_5 = 8a_8$ 에서 $ar^2 \times ar^4 = 8ar^7$
 $a = 8r < 0, r < 0$
 모든 자연수 n 에 대하여
 $a_n = 8r \times r^{n-1} = 8r^n$
 $a_2 = 8r^2 > 0, a_3 = 8r^3 < 0$ 이므로
 $a_1 + |a_2| + |2a_3| = a_1 + a_2 - 2a_3$
 $= 8r + 8r^2 - 16r^3 = 0$
 $2r^2 - r - 1 = 0, (2r+1)(r-1) = 0$
 $r = -\frac{1}{2}$ 또는 $r = 1$
 $r < 0$ 이므로 $r = -\frac{1}{2}$
 따라서 $a_2 = 8r^2 = 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 2$

14. [출제의도] 거듭제곱근 이해하기

$2 \leq n \leq 10$ 인 자연수 n 에 대하여 $n^2 + 1 > 0$ 이므로
 $f(n) = \begin{cases} 1 & (n = 3, 5, 7, 9) \\ 2 & (n = 2, 4, 6, 8, 10) \end{cases}$

$n^2 - 8n + 12 = (n-2)(n-6)$ 에서

$$g(n) = \begin{cases} 0 & (n=4) \\ 1 & (n=2, 3, 5, 6, 7, 9) \\ 2 & (n=8, 10) \end{cases}$$

$f(n) = 2g(n)$ 이므로 $f(n) = 2$ 이고 $g(n) = 1$ 따라서 $n=2$ 또는 $n=6$ 이고 그 합은 8

15. [출제의도] 지수함수를 활용하여 문제 해결하기

$$\begin{aligned} \text{함수 } f(x) &= 4^{x-a} - 8 \times 2^{x-a} \\ &= 2^{-2a} \times 2^{2x} - 2^3 \times 2^{-a} \times 2^x \\ &= 2^{-2a} \times (2^x)^2 - 2^{3-a} \times 2^x \end{aligned}$$

$2^x = t$ ($t > 0$) 이라 하면

$$\begin{aligned} g(t) &= 2^{-2a} \times t^2 - 2^{3-a} \times t \\ &= 2^{-2a} (t^2 - 2^{a+3} \times t) \\ &= 2^{-2a} (t - 2^{a+2})^2 - 16 \end{aligned}$$

$2^{a+2} = 2^5, a+2=5, a=3$

$b = -16$

따라서 $a+b = 3 + (-16) = -13$

16. [출제의도] 상용로그 이해하기

조건 (가)에서 $a < b < 10a$

조건 (나)에서 $0 < \log b < 9 - 2a$ 이므로

$1 \leq a \leq 4$ 이고 $1 < b < 10^{9-2a}$

(i) $a=1, 2, 3$ 인 경우

$10a < 10^{9-2a}$ 이므로 $a < b < 10a$

(b의 개수) = $9a - 1$

(ii) $a=4$ 인 경우

$4 < b < 40$ 이고 $1 < b < 10$ 이므로

$4 < b < 10$

(b의 개수) = 5

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는

두 자연수 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$\sum_{k=1}^3 (9k-1) + 5 = 51 + 5 = 56$$

17. [출제의도] \sum 의 성질을 활용하여 문제

해결하기

$n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{2k} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k} \\ = \left(\sum_{k=1}^n a_{2k-1} + n^2 \right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_{2k-1} + (n-1)^2 \right) \end{aligned}$$

$a_{2n} = a_{2n-1} + 2n - 1$

$n=6$ 일 때, $a_{12} = a_{11} + 11$

$n=5$ 일 때, $a_{10} = a_9 + 9$

$a_{12} - a_{10} = a_{11} - a_9 + 2$

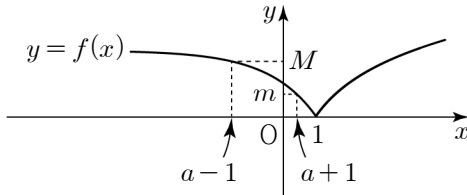
$5 = a_{11} - 16 + 2$

따라서 $a_{11} = 19$

18. [출제의도] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제 해결하기

$a-1 \leq x \leq a+1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자.

(i) $a < 0$ 인 경우



$a-1 < a+1 < 1$ 이므로

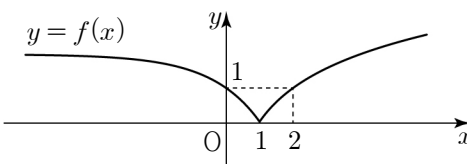
$M = f(a-1) = -2^{a-1} + 2$

$m = f(a+1) = -2^{a+1} + 2$

$$\begin{aligned} M - m &= (-2^{a-1} + 2) - (-2^{a+1} + 2) \\ &= \frac{3}{2} \times 2^a = 1 \end{aligned}$$

$a = \log_2 \frac{2}{3}$

(ii) $0 \leq a \leq 2$ 인 경우



$a-1 \leq 1 \leq a+1$ 이므로

① 최댓값이 $f(a-1)$ 인 경우

$M = f(a-1) = -2^{a-1} + 2$

$m = f(1) = \log_2 1 = 0$

$M - m = (-2^{a-1} + 2) - 0 = 1$

$a = 1$

② 최댓값이 $f(a+1)$ 인 경우

$M = f(a+1) = \log_2 (a+1)$

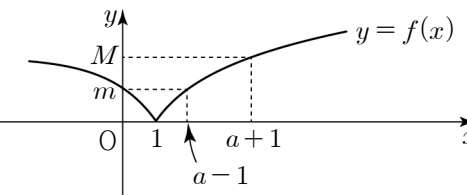
$m = f(1) = \log_2 1 = 0$

$M - m = \log_2 (a+1) - 0 = 1$

$a = 1$

①, ②에 의하여 $a = 1$

(iii) $a > 2$ 인 경우



$1 < a-1 < a+1$ 이므로

$M = f(a+1) = \log_2 (a+1)$

$m = f(a-1) = \log_2 (a-1)$

$M - m = \log_2 (a+1) - \log_2 (a-1) = 1$

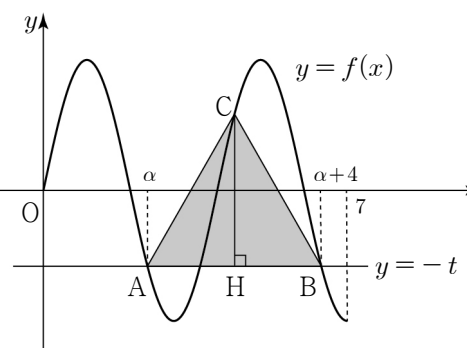
$a = 3$

(i) ~ (iii)에 의하여 모든 실수 a 의 값은

$\log_2 \frac{2}{3}, 1, 3$ 이고

그 합은 $\log_2 \frac{2}{3} + 1 + 3 = \log_2 \frac{32}{3}$

19. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제 해결하기



함수 $f(x) = 3 \sin \frac{\pi}{2} x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=-t$ 가 만나는 점의 x 좌표 중 가장 작은 값을 α ($2 < \alpha < 3$)이라 할 때, 두 점 A, B를

$A(\alpha, -t), B(\alpha+4, -t)$ 라 하자.

점 C의 x 좌표는

$$\frac{\alpha + (\alpha+4)}{2} = \alpha + 2$$

점 C의 y 좌표는

$$\begin{aligned} f(\alpha+2) &= 3 \sin \left\{ \frac{\pi}{2} \times (\alpha+2) \right\} \\ &= 3 \sin \left(\frac{\pi}{2} \alpha + \pi \right) = -3 \sin \frac{\pi}{2} \alpha \\ &= -f(\alpha) = t \end{aligned}$$

이므로 점 $C(\alpha+2, t)$

삼각형 ABC는 한 변의 길이가 4인

정삼각형이므로 점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{CH} = f(\alpha+2) - (-t) = t - (-t) = 2\sqrt{3}$

따라서 $t = \sqrt{3}$

20. [출제의도] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제 해결하기

함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x) = 2^x + k$ 의

그래프에 대하여 함수 $g(x) = 2^{x+1} + k + 1$ 의

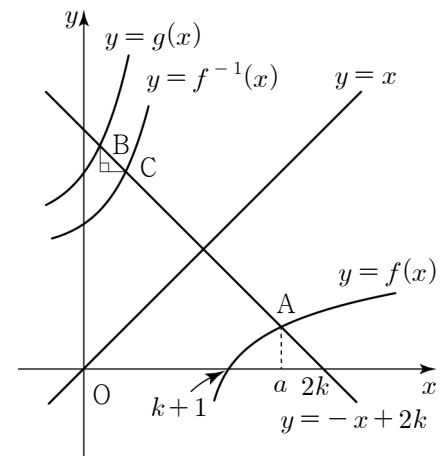
그래프는 함수 $f^{-1}(x)$ 의 그래프를 x 축의

방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼

평행이동한 그래프와 일치한다.

함수 $f^{-1}(x)$ 의 그래프와 직선 $y = -x + 2k$ 가

만나는 점을 C라 하자.



점 B는 점 C를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 점이므로

$\overline{BC} = \sqrt{2}$

$\overline{AB} = 7\sqrt{2}$ 에서 $\overline{AC} = 6\sqrt{2}$

점 C는 점 A를 직선 $y=x$ 에 대하여

대칭이동한 점과 일치하므로

점 $A(a, -a+2k)$ 라 하면 점 $C(-a+2k, a)$

$a > k+1$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \sqrt{\{(-a+2k)-a\}^2 + \{a-(-a+2k)\}^2} \\ &= 2(a-k)\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

$a-k=3, a=k+3$

점 $A(a, -a+2k)$ 는 함수 $f(x)$ 의 그래프 위의

점이므로

$-a+2k = \log_2 (a-k)$

$k-3 = \log_2 3$

따라서 $k = \log_2 24$

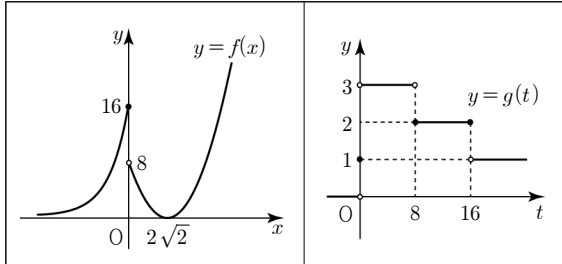
21. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 추론하기

$\lim_{t \rightarrow 16^-} g(t) \times \lim_{t \rightarrow 16^+} g(t) = 2$ 를 만족시키는 경우는

$2^a = 16$ 또는 $b^2 = 16$

(i) $2^a = 16, b^2 = 8$ 인 경우

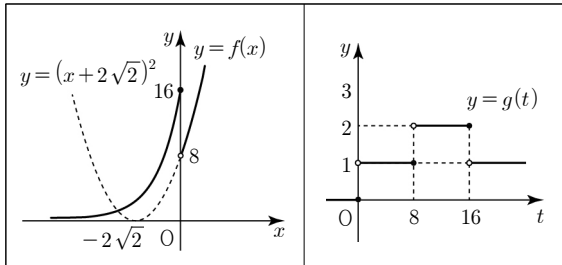
① $a = 4, b = -2\sqrt{2}$ 인 경우



$k = 8, \lim_{t \rightarrow 16^-} g(t) \times \lim_{t \rightarrow 16^+} g(t) = 2 \times 1 = 2$

이므로 조건을 만족시킨다.

② $a = 4, b = 2\sqrt{2}$ 인 경우

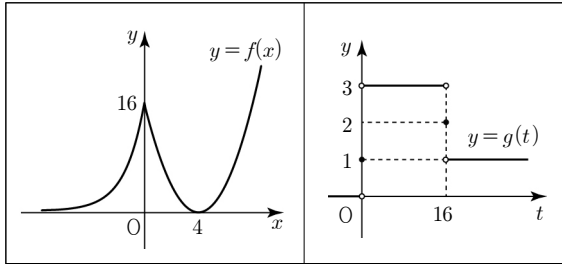


$k = 8, \lim_{t \rightarrow 16^-} g(t) \times \lim_{t \rightarrow 16^+} g(t) = 2 \times 1 = 2$

이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $2^a = 16, b^2 = 16$ 인 경우

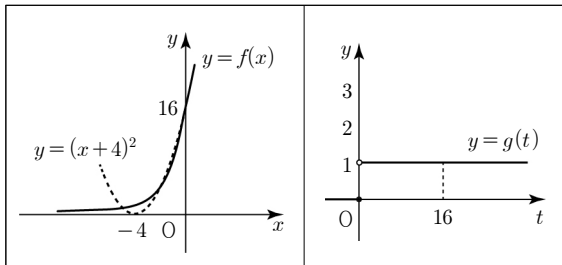
① $a = 4, b = -4$ 인 경우



$\lim_{t \rightarrow 16^-} g(t) \times \lim_{t \rightarrow 16^+} g(t) = 3 \times 1 = 3 \neq 2$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

② $a = 4, b = 4$ 인 경우

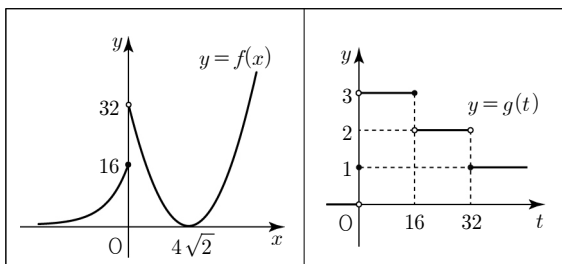


$\lim_{t \rightarrow 16^-} g(t) \times \lim_{t \rightarrow 16^+} g(t) = 1 \times 1 = 1 \neq 2$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $2^a = 16, b^2 = 32$ 인 경우

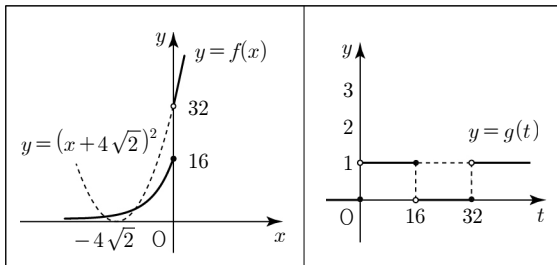
① $a = 4, b = -4\sqrt{2}$ 인 경우



$\lim_{t \rightarrow 16^-} g(t) \times \lim_{t \rightarrow 16^+} g(t) = 3 \times 2 = 6 \neq 2$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

② $a = 4, b = 4\sqrt{2}$ 인 경우

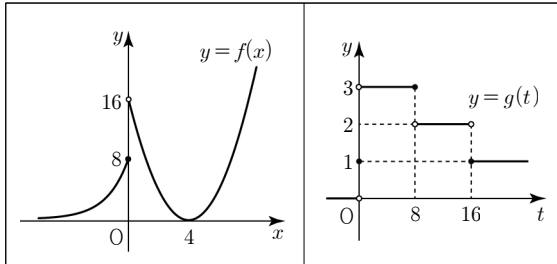


$\lim_{t \rightarrow 16^-} g(t) \times \lim_{t \rightarrow 16^+} g(t) = 1 \times 0 = 0 \neq 2$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iv) $2^a = 8, b^2 = 16$ 인 경우

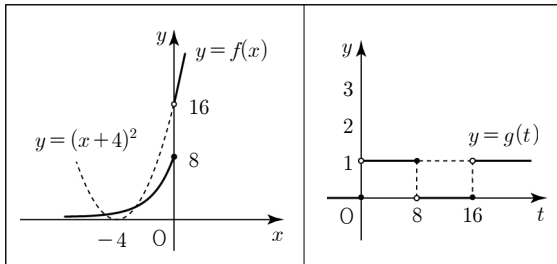
① $a = 3, b = -4$ 인 경우



$k = 8, \lim_{t \rightarrow 16^-} g(t) \times \lim_{t \rightarrow 16^+} g(t) = 2 \times 1 = 2$

이므로 조건을 만족시킨다.

② $a = 3, b = 4$ 인 경우

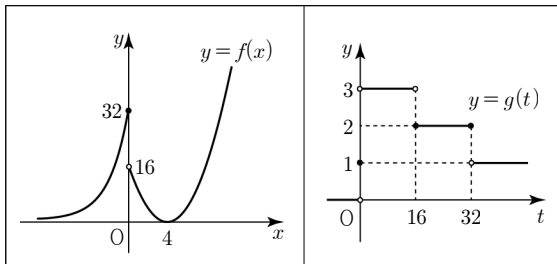


$\lim_{t \rightarrow 16^-} g(t) \times \lim_{t \rightarrow 16^+} g(t) = 0 \times 1 = 0 \neq 2$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(v) $2^a = 32, b^2 = 16$ 인 경우

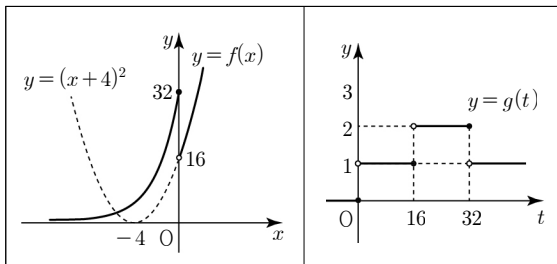
① $a = 5, b = -4$ 인 경우



$\lim_{t \rightarrow 16^-} g(t) \times \lim_{t \rightarrow 16^+} g(t) = 3 \times 2 = 6 \neq 2$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

② $a = 5, b = 4$ 인 경우



$k = 16, \lim_{t \rightarrow 16^-} g(t) \times \lim_{t \rightarrow 16^+} g(t) = 1 \times 2 = 2$

이므로 조건을 만족시킨다.

(i) ~ (v)에 의하여 두 실수 a, b 의 순서쌍은

$(4, -2\sqrt{2}), (4, 2\sqrt{2}), (3, -4), (5, 4)$

이고 $a+b$ 의 값은

$4-2\sqrt{2}, 4+2\sqrt{2}, -1, 9$ 이므로

최댓값과 최솟값의 곱은 $9 \times (-1) = -9$

22. [출제의도] 지수가 포함된 방정식 계산하기

$3^{2x-1} = 27, 3^{2x-1} = 3^3, 2x-1 = 3$

따라서 $x = 2$

23. [출제의도] 등차수열 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$\begin{aligned} a_3 + a_5 + a_7 &= (a+2d) + (a+4d) + (a+6d) \\ &= 3a + 12d = 18 \end{aligned}$$

이므로 $a+4d = 6$

따라서

$$a_4 + a_6 = (a+3d) + (a+5d) = 2a + 8d = 12$$

[다른 풀이]

세 항 a_3, a_5, a_7 은 이 순서대로 등차수열을

이루므로 $a_3 + a_5 + a_7 = 3a_5 = 18, a_5 = 6$

a_5 는 두 항 a_4, a_6 의 등차중항이므로

$$a_5 = \frac{a_4 + a_6}{2}$$

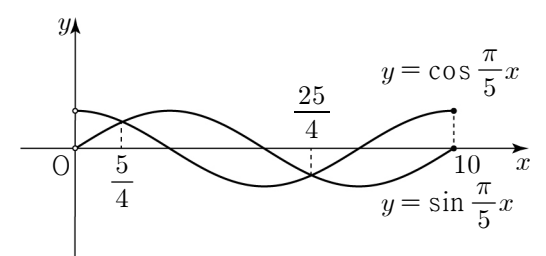
따라서 $a_4 + a_6 = 2a_5 = 12$

24. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 이해하기

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_k &= (1^2 - 1) + (2^2 + 1) + \dots + (10^2 + 1) \\ &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 \\ &= \sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385 \end{aligned}$$

따라서 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 385$

25. [출제의도] 삼각함수가 포함된 부등식 이해하기



$0 < x \leq 10$ 에서 두 곡선

$y = \cos \frac{\pi}{5} x, y = \sin \frac{\pi}{5} x$ 가 만나는 점의

x 좌표가 $\frac{5}{4}, \frac{25}{4}$ 이므로

부등식 $\cos \frac{\pi}{5} x < \sin \frac{\pi}{5} x$ 를 만족시키는

x 의 값의 범위는 $\frac{5}{4} < x < \frac{25}{4}$

따라서 모든 자연수 x 의 값은

2, 3, 4, 5, 6 이고 그 합은 20

26. [출제의도] 로그의 성질을 활용하여 추론하기

$10 < a < 100$ 인 실수 a 에 대하여

$1 < \log a < 2$

$$\log_a 10 = \frac{1}{\log a} \text{이므로 } \frac{1}{2} < \log_a 10 < 1$$

$\log 10a = \log 10 + \log a = 1 + \log a$ 이므로

$2 < \log 10a < 3 \dots \textcircled{1}$

$\log \frac{10}{a} = \log 10 - \log a = 1 - \log a$ 이므로

$$-1 < \log \frac{10}{a} < 0 \dots \text{㉔}$$

$$\log_a 10a = \log_a 10 + \log_a a = \log_a 10 + 1 \text{ 이므로}$$

$$\frac{3}{2} < \log_a 10a < 2 \dots \text{㉕}$$

$$\log_a \frac{a}{10} = \log_a a - \log_a 10 = 1 - \log_a 10 \text{ 이므로}$$

$$0 < \log_a \frac{a}{10} < \frac{1}{2} \dots \text{㉖}$$

㉑ ~ ㉖ 에 의하여

$$\log \frac{10}{a} < \log_a \frac{a}{10} < \log_a 10a < \log 10a \text{ 이므로}$$

$$p = \log \frac{10}{a}, q = \log_a \frac{a}{10}, r = \log_a 10a,$$

$$s = \log 10a$$

$$\overline{PS} = s - p = \log 10a - \log \frac{10}{a}$$

$$= (1 + \log a) - (1 - \log a) = 2 \log a$$

$$= \frac{10}{3}$$

$$\log a = \frac{5}{3}$$

$$\overline{QR} = r - q = \log_a 10a - \log_a \frac{a}{10}$$

$$= (\log_a 10 + 1) - (1 - \log_a 10)$$

$$= 2 \log_a 10 = \frac{2}{\log a} = \frac{6}{5}$$

$$\text{따라서 } 30 \times \overline{QR} = 30 \times \frac{6}{5} = 36$$

27. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제 해결하기

$\angle ABC = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) 라 하면

$$\cos \theta = \frac{1}{4} \text{ 이므로 } \sin \theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 $\frac{32}{3}\pi$ 이므로

이 외접원의 반지름의 길이를 R_1 이라 하면

$$R_1 = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \theta} = 2R_1 \text{ 에서 } \overline{AC} = 2\sqrt{10}$$

평행사변형 ABCD의 둘레의 길이가 20 이므로

$\overline{AB} = a$ ($0 < a < 5$) 라 하면

$$\overline{AD} = \overline{BC} = 10 - a$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$40 = a^2 + (10 - a)^2 - 2a(10 - a)\cos \theta$$

$$= a^2 + (10 - a)^2 - 2a(10 - a) \times \frac{1}{4}$$

$$a^2 - 10a + 24 = 0, (a - 4)(a - 6) = 0$$

$a = 4$ 또는 $a = 6$ 에서 $0 < a < 5$ 이므로

$$\overline{AB} = 4, \overline{AD} = 6$$

$\angle BAD = \pi - \theta$ 이므로

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta = -\frac{1}{4}$$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \times 6 \times 4 \times \cos(\pi - \theta)$$

$$= 6^2 + 4^2 - 2 \times 6 \times 4 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = 64$$

$$\overline{BD} = 8$$

삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R_2 라 하면 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin(\pi - \theta)} = 2R_2 \text{ 에서 } R_2 = \frac{16\sqrt{15}}{15}$$

삼각형 ABD의 외접원의 넓이는 $\frac{256}{15}\pi$

$$p = 15, q = 256$$

$$\text{따라서 } p + q = 15 + 256 = 271$$

28. [출제의도] 함수의 극한에 대한 성질을 활용하여 문제 해결하기

조건 (가)에서

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2} - f(x)}{x + f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\{x + f(x)\}}{x + f(x)} = -1$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2} - f(x)}{x + f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - f(x)}{x + f(x)} = 2$$

세 상수 p, q, r 에 대하여

$f(x) = px^2 + qx + r$ ($p > 0$) 이라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-px^2 - (q-1)x - r}{px^2 + (q+1)x + r} = 2 \text{ 이므로}$$

$$r = 0, q \neq -1$$

$$\frac{-(q-1)}{q+1} = 2, q = -\frac{1}{3}$$

$$f(x) = px^2 - \frac{1}{3}x = x\left(px - \frac{1}{3}\right)$$

조건 (나)에서

$$\lim_{x \rightarrow a} (\sqrt{x^2} - 3) \neq 0 \text{ 이면}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x-4)f(x+1)}{\sqrt{x^2} - 3} \text{의 값이 존재하므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (\sqrt{x^2} - 3) = \sqrt{a^2} - 3 = 0, |a| = 3$$

$$a = -3 \text{ 또는 } a = 3$$

(i) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x-4)f(x+1)}{\sqrt{x^2} - 3}$ 의 값이 존재하지

않는 실수 a 의 값이 -3 인 경우

$x = 3$ 에서 극한값이 존재하고

$$\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x^2} - 3) = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x-4)f(x+1) = f(-1) \times f(4) = 0$$

$$-\left(-p - \frac{1}{3}\right) \times 4\left(4p - \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$\left(p + \frac{1}{3}\right)\left(4p - \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$p = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } p = \frac{1}{12}$$

(ii) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x-4)f(x+1)}{\sqrt{x^2} - 3}$ 의 값이 존재하지

않는 실수 a 의 값이 3 인 경우

$x = -3$ 에서 극한값이 존재하고

$$\lim_{x \rightarrow -3} (\sqrt{x^2} - 3) = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x-4)f(x+1) = f(-7) \times f(-2) = 0$$

$$-7\left(-7p - \frac{1}{3}\right) \times (-2)\left(-2p - \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$\left(7p + \frac{1}{3}\right)\left(2p + \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$p = -\frac{1}{21} \text{ 또는 } p = -\frac{1}{6}$$

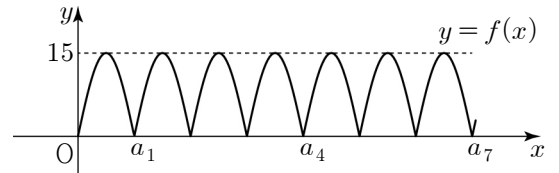
$p > 0$ 이므로 (i), (ii)에 의하여 $p = \frac{1}{12}$

$$f(x) = \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{3}x = \frac{1}{12}x(x-4)$$

$$\text{따라서 } f(24) = \frac{1}{12} \times 24 \times 20 = 40$$

29. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제 해결하기

(i) $q = 0$ 인 경우



함수 $f(x)$ 의 주기는 π

$$a_1 = \pi, a_4 = 4\pi, a_7 = 7\pi \text{ 이므로}$$

세 항 a_1, a_4, a_7 은 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

$$0 \leq f(x) = |p \sin x| \leq p$$

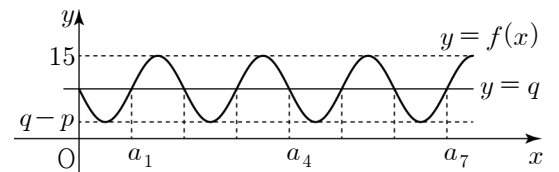
함수 $f(x)$ 의 최댓값이 15 이므로

$$p = 15$$

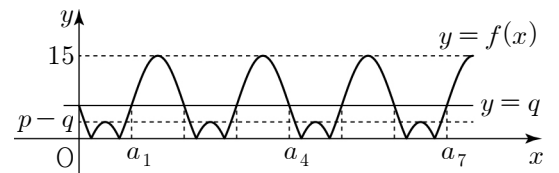
순서쌍 (p, q) 는 $(15, 0)$

(ii) $q > 0$ 인 경우

① $q > p - q$ ($q > \frac{p}{2}$)인 경우



[$q \geq p$ 인 경우]



[$\frac{p}{2} < q < p$ 인 경우]

함수 $f(x)$ 의 주기는 2π

$$a_1 = \pi, a_4 = 4\pi, a_7 = 7\pi \text{ 이므로}$$

세 항 a_1, a_4, a_7 은 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

$$0 \leq f(x) = |p \sin x - q| \leq p + q$$

함수 $f(x)$ 의 최댓값이 15 이므로

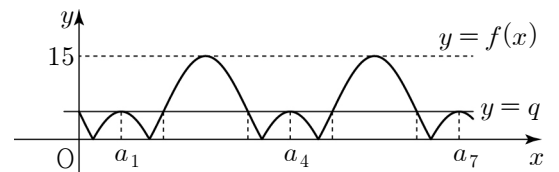
$$p + q = 15$$

순서쌍 (p, q) 는

$$(1, 14), (2, 13), (3, 12), (4, 11),$$

$$(5, 10), (6, 9), (7, 8), (8, 7), (9, 6)$$

② $q = p - q$ ($q = \frac{p}{2}$)인 경우



함수 $f(x)$ 의 주기는 2π

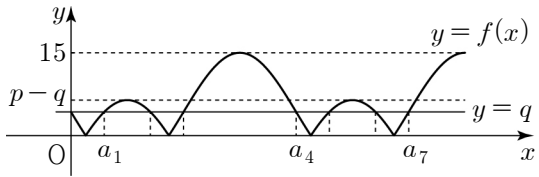
$$a_1 = \frac{\pi}{2}, a_4 = \frac{5}{2}\pi, a_7 = \frac{9}{2}\pi \text{ 이므로}$$

세 항 a_1, a_4, a_7 은 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

$$0 \leq f(x) = |p \sin x - q| \leq p + q$$

함수 $f(x)$ 의 최댓값이 15 이므로 $p+q=15$
순서쌍 (p, q) 는 $(10, 5)$

③ $q < p - q$ ($q < \frac{p}{2}$)인 경우



함수 $f(x)$ 의 주기는 2π

$a_4 - a_1 > \pi$ 이고 $a_7 - a_4 = \pi$ 이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 두 수 p, q 의 모든 순서쌍 (p, q) 의 개수는 11

30. [출제의도] 귀납적으로 정의된 수열 추론하기

$d \geq 0$ 이면 $n \geq 5$ 에 대하여 $a_n \geq 16$ 이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$d < 0 \dots \textcircled{1}$

$a_2 + a_3 = 0$ 에서 $a_2 = -a_3$

(I) $a_2 = a_3 = 0$ 인 경우

$a_3 = a_2 + d$ 에서 $d = 0$ 이므로 $\textcircled{1}$ 을
만족시키지 않는다.

(II) $a_2 < 0, a_3 > 0$ 인 경우

$a_3 = ra_2 = -a_2$ 이므로 $r = -1$

① $a_1 = 0$ 인 경우

$a_2 = a_1 + d = d < 0$

$a_3 = -d > 0$

$a_4 = a_3 + d = 0$

$a_5 = d < 0, a_5 \neq 16$

② $a_1 > 0$ 인 경우

$a_2 = a_1 + d < 0$

$a_3 = -a_2 = -a_1 - d > 0$

$a_4 = a_3 + d = -a_1 - d + d = -a_1 < 0$

$a_5 = ra_4 = a_1$

모든 자연수 n 에 대하여

$a_{n+4} = a_n \neq 0$ 이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

③ $a_1 < 0$ 인 경우

$a_2 = -a_1 > 0$

① ~ ③에 의하여 조건을 만족시키지 않는다.

(III) $a_2 > 0, a_3 < 0$ 인 경우

① $r = 0$ 인 경우

$a_4 = ra_3 = 0, a_5 = d < 0$ 이므로 $a_5 \neq 16$

② $r > 0$ 인 경우

$n \geq 3$ 인 모든 자연수 n 에 대하여

$a_n < 0$ 이고 $a_5 \neq 16$

①, ②에 의하여 $r < 0 \dots \textcircled{1}$

(I) ~ (III)에 의하여 $a_2 > 0, a_3 < 0, r < 0$

$a_3 = a_2 + d = -a_2$

$a_2 = -\frac{d}{2}, a_3 = \frac{d}{2}, a_4 = \frac{rd}{2} > 0,$

$a_5 = \frac{rd}{2} + d = 16 \dots \textcircled{2}$

조건 (나)에서 $a_k = 0$ 이면

$a_{k+1} = d < 0, a_{k+2} = rd > 0, a_{k+3} = rd + d,$

...

$a_{k+2-r} = rd - rd = 0$ 이므로

$2-r$ 은 12의 약수이다.

$\textcircled{1}$ 에 의하여 $r = -1, -2, -4, -10$

(i) $r = -1$ 인 경우

$\textcircled{2}$ 에 의하여 $d = 32$ 이므로 $\textcircled{1}$ 을 만족시키지
않는다.

(ii) $r = -2$ 인 경우

$\textcircled{2}$ 에 의하여 $a_5 = 0$ 이므로
조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $r = -4$ 인 경우

$\textcircled{2}$ 에 의하여 $d = -16$ 이므로

$a_2 = 8$ 이고

$a_1 \geq 0$ 이면 $a_1 = 24$

$a_1 < 0$ 이면 $a_1 = -2$

(iv) $r = -10$ 인 경우

$\textcircled{2}$ 에 의하여 $d = -4$ 이므로

$a_2 = 2$ 이고

$a_1 \geq 0$ 이면 $a_1 = 6$

$a_1 < 0$ 이면 $a_1 = -\frac{1}{5}$

(i) ~ (iv)에 의하여 a_1 의 값은 $-2, 6, 24$
이고 그 합은 28