문항카드 17

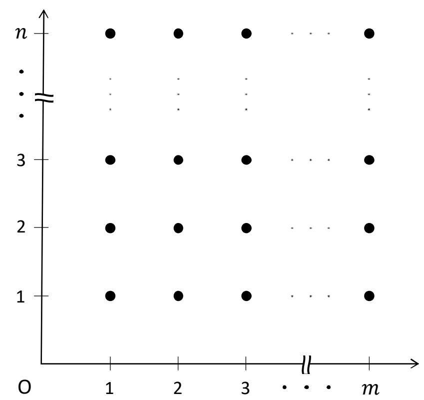
1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	수시 모집 논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 II(수학) / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학
	핵심개념 및 용어	경우의 수, 조합
예상 소요 시간	15분	

2. 문항 및 제시문

다음 상황에 기초하여 문제에 답하시오.

그림과 같이 좌표평면 위에 좌표가 $(1,1), (1,2), \cdots, (m,n)$ 인 $m \times n$ 개의 점이 있다. 이 중 4개의 점을 택하여 만들 수 있는 직사각형 중 넓이가 1인 것을 제외한 개수를 $A(m,n)$ 이라고 정의한다. (단, m, n 은 1보다 큰 자연수이다.)



[문제 1] $A(3,100) - A(2,100)$ **을 구하시오. [20점]**

3. 출제 의도

경우의 수는 논리적 사고에 의하여 다양한 방법으로 계산할 수 있으며 이는 다양한 문제에서 활용될 수 있다. 본 문제에서는 도형과 연관하여 경우의 수를 계산하는 능력을 평가하고자 하며, 이를 위하여 '조합'의 개념을 사용할 수 있는지를 평가한다. 본 문제는 경우의 수에 대한 계산능력 및 조합 개념의 이해도를 평가하며 난이도는 '중' 정도로 볼 수 있다.

4. 문항 및 제시문의 출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[수학] - (5) 확률과 통계 - $\boxed{1}$ 경우의 수 [10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다. [수학] - (5) 확률과 통계 - $\boxed{2}$ 순열과 조합 [10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	배종숙 외	금성출판사	2020	262-267, 272-276
	수학	류희찬 외	천재교과서	2020	258-262, 268-274
	수학	권오남 외	교학사	2020	255-263, 268-274

5. 문항 해설

선분 또는 점이 주어져 있을 때, 4개의 점을 선택하여 직사각형을 만드는 경우의 수를 찾는 문제이다. m개의 점들과 n개의 점들로부터 각각 2개의 점 (또는 선)을 선택하여 직사각형을 만드는 경우의 수는 ${}_mC_2 \times {}_nC_2$이다. $m=3$일 때, 가로와 세로가 아니더라도 서로 직교하는 선분은 $n-2$개이므로 이를 더해주어야 한다. 또한, 넓이가 1인 것을 제외한다는 조건이 있으므로, 이를 올바르게 찾아 제외하여야 한다.

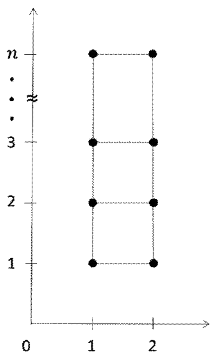
6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1	[채점요소] 모든 경로의 수를 논리적으로 구분하여 잘 셀 수 있는가? 조합 개념을 알고 있는가? [예시답안] 7번 참조 [채점준거] 1. $A(2,n) = {}_2C_2 \times {}_nC_2 - (n-1) = {}_nC_2 - (n-1)$ 의 수식을 유도하거나, $A(2,100) = {}_{100}C_2 - 99 = 4851$을 바르게 계산한 경우: +6점 2. $A(3,n) - A(2,n) = 3\,{}_nC_2 - n - {}_nC_2 + (n-1) = 2\,{}_nC_2 - 1$ 의 수식을 유도하거나, $A(3,100) = 3\,{}_{100}C_2 - 100 = 14750$을 바르게 계산한 경우: +12점 (단, 대각선으로 만들어지는 직사각형의 개수 $n-2=98$개를 빠뜨린 경우는 8점만 부여함) 3. $A(3,100) - A(2,100) = 9899$ 를 바르게 계산한 경우: +2점 ※ 계산 실수로 틀렸어도 논리 전개 과정이 맞으면 해당 부분에 1~2점의 부분 점수를	20

	부여함. ※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±1점 추가 점수 부여 가능함.	

7. 예시 답안

1) $m=2$인 경우

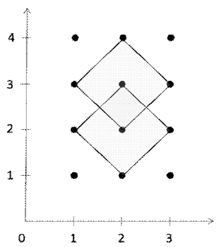


-가로 방향의 2개의 선과 세로 방향의 n개의 선들 중에서 2개를 선택하여 만들 수 있는 직사각형의 개수를 구하면 ${}_2C_2 \times {}_nC_2$ 이다.
-이 때, 넓이가 1인 직사각형의 개수는 $n-1$이다.
-따라서,
$A(2,n) = {}_2C_2 \times {}_nC_2 - (n-1) = {}_nC_2 - (n-1)$ 이다.

2) $m=3$인 경우

-가로 방향의 3개의 선들 중에서 2개를 선택하고 세로 방향의 n개의 선들 중에서 2개를 선택하여 만들 수 있는 직사각형의 개수를 구하면 ${}_3C_2 \times {}_nC_2$ 이다.
-가로와 세로가 아니더라도 서로 직교하는 선분은 $n-2$개 존재한다.

예시)



-이 때, 넓이가 1인 직사각형의 개수는 $2(n-1)$이다.
-따라서, $A(3,n) = {}_3C_2 \times {}_nC_2 + (n-2) - 2(n-1) = 3\,{}_nC_2 - n$

따라서, $A(3,n) - A(2,n) = 3\,{}_nC_2 - n - {}_nC_2 + (n-1) = 2\,{}_nC_2 - 1$ 이므로,
$A(3,100) - A(2,100) = 2\,{}_{100}C_2 - 1 = 9899$ 이다.

문항카드 18

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	수시 모집 논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 II(수학) / 문제 2	
출제 범위	과학과 교육과정 과목명	문제 2-1: 수학, 수학II 문제 2-2: 수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	문제 2-1: 함수의 극대와 극소 문제 2-2: 삼각함수의 덧셈정리, 적분과 미분의 관계
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하고 $x=a$ 에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$ 이다.
- 다항식 $P(x)$ 에 대하여 $P(\alpha)=0$ 일 때, $P(x)$ 를 $x-\alpha$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라 하면 $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$ 이다.
- 각 α 와 β 에 대하여 다음 식이 성립한다.
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,\quad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,\quad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
- 함수 $f(t)$ 가 닫힌구간 $[a,b]$ 에서 연속일 때 다음 식이 성립한다.
$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)\quad (\text{단, } a<x<b)$$

[문제 2-1] x 에 대한 방정식 $2x^3+3kx^2-(2k^2+k-2)=0$ 이 단 하나의 실근을 가지게 하는 실수 k 의 범위를 구하시오. (단, $k\geq 0$ 이다.) [10점]

[문제 2-2] 연속함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여
$$\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt=\ln(1+x^2)$$
을 만족한다. 이때 정적분 $\int_0^2 xf(x)\,dx$ 의 값을 구하시오. [15점]

3. 출제 의도

[문제 2-1] 도함수를 이용하여 3차 함수의 그래프의 개형을 파악하고, 함수의 그래프와 방정식의 해 사이를 이용해 방정식의 해의 개수를 알아낼 수 있는지를 평가한다.
[문제 2-2] 삼각함수의 중요한 성질인 덧셈정리를 이해하고 상황에 맞게 적용할 수 있는지를 평가한다. 미분과 정적분의 관계를 이해하는 것이 미적분의 핵심인데 이를 잘 이해하고 있는지를 묻는 문제이다. 덧붙여 삼각함수의 합 공식을 이용해 연립방정식을 풀 수 있는지도 평가한다.

4. 문항 및 제시문의 출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
문제 2-1	[수학II] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용 [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [수학] - (1) 문자와 식 - 3 인수분해 [10수학01-04] 다항식의 인수분해를 할 수 있다. [수학] - (1) 문자와 식 - 6 여러 가지 방정식과 부등식 [10수학01-16] 이차부등식과 이차함수의 관계를 이해하고, 이차부등식과 연립이차부등식을 풀 수 있다.
문제 2-2	[미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [수학II] - (3) 적분 - 2 정적분 [12수학II03-03] 정적분의 뜻을 안다. [미적분] - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법 [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수
고등학교 교과서	수학II	고성은 외	신사고	2020	83, 121
	수학II	김원경 외	비상교육	2019	84
	수학II	황선욱 외	미래엔	2019	127
	수학	홍성복 외	지학사	2020	36
	수학	배종숙 외	금성출판사	2020	32
	미적분	이준열 외	천재교육	2021	66
	미적분	류희찬 외	천재교과서	2020	69

5. 문항 해설

[문제 2-1]

함수와 방정식 사이의 관계를 이해하고 있는지를 평가한다. 미분을 이용하여 주어진 함수의 극대와 극소를 찾고 이를 이용하여 함수의 개형을 파악할 수 있는지를 묻는 문제이다. 이를 종합하여 간단한 2차 부등식을 유도하고 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

[문제 2-2]

삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 식을 적절히 변형할 수 있는지를 평가한다. 함수의 정적분과 미분과의 관계를 이해하고 있는지를 평가한다. 주어진 식으로부터 간단한 연립방정식을 풀어 원하는 함수를 얻은 후, 이 함수를 다양한 적분 방법(치환적분 등)을 적분 문제를 해결할 수 있는지를 묻는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	$f(x)=2x^3+3kx^2-(2k^2+k-2)$ 라하고 미분을 이용하여 문제를 푸는 것을 시도하면 **+2점** $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값을 구하면 +2점 $f(0)>0$ 또는 $f(-k)<0$ 일 때 해가 하나라는 것을 명시하면 **+4점** 최종적으로 정답을 얻으면 **+2점**	10
2-2	삼각함수 정리를 이용하여 $\ln(1+x^2)=g(x)\sin x-h(x)\cos x$ 형태로 식을 정리하면 **+3점** 미분하여 $\frac{2x}{1+x^2}=g(x)\cos x+h(x)\sin x$ 을 얻고, $g(x)$ 와 $h(x)$ 에 대한 연립방정식을 풀어 $g(x)=\ln(1+x^2)\sin x+\frac{2x}{1+x^2}\cos x$ 또는 $h(x)=\frac{2x}{1+x^2}\sin x-\ln(1+x^2)\cos x$ 를 얻으면 **+3점** 미분하여 $f(x)=\ln(1+x^2)+\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)'$ 를 얻으면 **+3점** 최종적으로 적분을 계산하여 정답 $\frac{3}{2}\ln 5-\frac{2}{5}$ 을 얻으면 **+6점**	15

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 1~2점의 부분 점수를 부여할 수 있습니다.
※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 -0.5~+0.5점을 부여할 수 있습니다.

7. 예시 답안

[문제 2-1]

$f(x)=2x^3+3kx^2-(2k^2+k-2)$ 라 하자. 우선 $k=0$ 인 경우 해가 하나인 것을 확인한 후, $k>0$ 이라 가정한다. 이때 $f'(x)=6x(x+k)$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=-k$ 에서 극대, $x=0$ 에서 극소이다. 따라서 단 하나의 해를 가지기 위해서는 $f(0)=-(2k^2+k-2)>0$ 또는

$$f(-k)=k^3-2k^2-k+2=(k+1)(k-1)(k-2)<0 \quad \Rightarrow \quad (k-1)(k-2)<0$$

이다. 위 부등식을 풀어 k 의 범위 $0\le k<\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$ 또는 $1<k<2$ 를 얻는다.

[문제 2-2]

우선 사인함수의 덧셈정리를 적용하여 식을 다음과 같이 정리한다.

$$\ln(1+x^2)=\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt=\int_0^x f(t)(\sin x\cos t-\cos x\sin t)\,dt$$
$$=\sin x\left\{\int_0^x f(t)\cos t\,dt\right\}-\cos x\left\{\int_0^x f(t)\sin t\,dt\right\}$$

위의 식을 미분하면

$$\frac{2x}{1+x^2}=\cos x\left\{\int_0^x f(t)\cos t\,dt\right\}+\sin x\left\{\int_0^x f(t)\sin t\,dt\right\}$$

이므로, 위 두 식에 각각 $\sin x$, $\cos x$ 를 곱하여 더해

$$\int_0^x f(t)\cos t\,dt=\ln(1+x^2)\sin x+\frac{2x}{1+x^2}\cos x$$

를 얻는다. (또는 비슷한 방법으로 $\int_0^x f(t)\sin t\,dt = \frac{2x}{1+x^2}\sin x - \ln(1+x^2)\cos x$를 얻을 수 있다.) 위 식을 미분하면

$$f(x)\cos x = \ln(1+x^2)\cos x + \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)'\cos x$$

(또는 $f(x)\sin x = \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)'\sin x + \ln(1+x^2)\sin x$)이므로 $f(x) = \ln(1+x^2) + \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)'$이다. 따라서

$$\int_0^2 xf(x)dx = \int_0^2 x\ln(1+x^2)dx + \int_0^2 x\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)'dx$$

이다. 첫 번째 적분은 치환적분과 부분적분을 이용하여 계산하고

$$\int_0^2 x\ln(1+x^2)dx = \frac{1}{2}\int_1^5 \ln u\,du = \frac{1}{2}\left[u\ln u - u\right]_1^5 = -2 + \frac{5}{2}\ln 5$$

두 번째 적분은 부분적분을 하여 값을 구한다.

$$\int_0^2 x\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)'dx = \left[\frac{2x^2}{1+x^2}\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{2x}{1+x^2}du = \frac{8}{5} - \left[\ln(1+x^2)\right]_0^2 = \frac{8}{5} - \ln 5$$

마지막으로 위의 적분 값을 더하여 정답 $\frac{3}{2}\ln 5 - \frac{2}{5}$을 얻는다.

문항카드 19

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	수시 모집 논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 II(수학) / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	문제 3-1: 수학, 미적분 문제 3-2: 미적분, 기하
	핵심개념 및 용어	문제 3-1: 원의 방정식, 부분적분 문제 3-2: 내적, 접선의 방정식
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 제시문

[문제 3] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 닫힌구간 $[a,b]$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 도함수가 연속일 때 다음 식이 성립한다.
$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$
- 점 (a,b)와 점 (b,a)는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
- 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ일 때, $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적은 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$이다.

[문제 3-1] 실수 θ에 대하여 영역 $A=\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+y^2\le 1,\ y\ge(\tan\theta)x\}$의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. 정적분 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{g(\theta)}{\cos^2\theta}d\theta$의 값을 구하시오. (단, $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$이다.) [10점]

[문제 3-2] $x\ge 1$에서 정의된 함수 $f(x)=\dfrac{1}{14+8\sqrt{3}}\ln x(\ln x-1)^2$에 대하여, 원점이 O인 좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(t,f(t))$가 있다. 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭시킨 점을 B라 할 때, 두 벡터 $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}$와 $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$의 내적의 최댓값을 구하시오. (단, $x\ge 1$에서 $f(x)\le\sqrt{x}$이다.) [15점]

3. 출제 의도

[문제 3-1]

주어진 영역을 알아내고 원과 삼각형의 성질을 이용하여 넓이를 계산하고, 주어진 정적분을 구할 수 있는지 평가한다.

[문제 3-2]

벡터의 내적을 잘 이해하고 있는지 확인한다. 곡선의 접선 중 원점을 지나는 접선을 구하고 그 중 기울기가 큰 것을 선별할 수 있는지 평가한다.

4. 문항 및 제시문의 출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
문제 3-1	[수학] - (2) 기하 - 3 원의 방정식 [10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다. [미적분] - (3) 적분법 - 1 여러가지 적분법 [12미적03-02] 부분적분을 이해하고 이를 활용할 수 있다.
문제 3-2	[미적분] - (1) 미분법 - 3 도함수의 활용 [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [기하] - (2) 평면백터 - 2 평면벡터의 성분과 내적 [12기하02-04] 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	배종숙 외	금성출판사	2019	139-147
	미적분	이준열 외	천재교육	2019	97-108 155-159
	기하	홍성복 외	지학사	2019	89-97

5. 문항 해설

[문제 3-1]
주어진 영역을 알아내고 원과 삼각형의 성질을 이용하여 $g(\theta)$를 구한다. $g(\theta)$가 들어간 주어진 정적분을 부분적분등을 이용하여 구한다.

[문제 3-2]
벡터의 내적 성질을 고려하여 주어진 내적이 나타내는 양을 알아낸다. 곡선의 접선 중 원점을 지나는 접선을 구한다. 기울기가 큰 접점을 선별하여 내적의 최댓값을 구한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-1	$g(\theta)=\frac{\pi}{2}-\theta-\sin\theta\cos\theta$을 보이면 **+5점** 부분적분 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} -\theta\sec^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan\theta\,d\theta-\frac{\pi}{4}$ 보이면 **+2점** 나머지 적분을 구하고 합하여 $\frac{\pi}{4}$ 구하면 **+3점**	10
3-2	주어진 식이 $\cos\theta$임을 보이면 **+3점** 접선의 방정식을 구하여 $\ln a=2\pm\sqrt{3}$ 보이면 **+7점**	15

	기울기를 비교하여 $A(e^{2+\sqrt{3}},1)$일 때 최댓값 $\dfrac{2e^{2+\sqrt{3}}}{1+e^{4+2\sqrt{3}}}$을 구하면 **+5점**	

7. 예시 답안

[문제 3-1]

직선 $y=(\tan\theta)x$는 x축의 양의 방향과 θ의 각을 이루는 직선이므로 원의 성질을 이용하면 $g(\theta)=\dfrac{1}{2}(\pi-2\theta)-\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\pi}{2}-\theta-\sin\theta\cos\theta$을 얻는다.

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\pi}{2}-\theta-\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\pi}{2}\sec^2\theta-\theta\sec^2\theta-\tan\theta\right)d\theta$이고 부분적분을 하면

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}-\theta\sec^2\theta d\theta=[-\theta\tan\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan\theta\, d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan\theta\, d\theta-\frac{\pi}{4}$이다.

정리하면 주어진 정적분은 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\pi}{2}\sec^2\theta\, d\theta-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}[\tan\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$이다.

[문제 3-2]

$\angle AOB=\theta$라 하자. 내적 정의를 고려하면 주어진 값은 $\cos\theta$임을 알 수 있다. 곡선 $y=\dfrac{1}{14+8\sqrt{3}}\ln x(\ln x-1)^2$은 $x=1$, $x=e$(중근)에서 근을 가지고 $x\geq e$에서 증가하면서 $f(x)\leq\sqrt{x}$이다. 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선 중 기울기가 최대인 경우에 $\cos\theta$이 최댓값을 갖는다. $(a,f(a))$에서의 접선이 원점을 지나면 $f(a)=af'(a)$을 만족한다. 계산하면 $\ln a(\ln a-1)^2=(\ln a-1)^2+2\ln a(\ln a-1)$이고 $(\ln a-1)$이 공통 인수이므로 나머지를 정리하면 $(\ln a)^2-4(\ln a)+1=0$이고 $\ln a=2\pm\sqrt{3}$을 얻을 수 있다.

$\ln a=2-\sqrt{3}$에 대응하는 접점은 $\left(e^{2-\sqrt{3}},\dfrac{7-4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}\right)$이고

$\ln a=2+\sqrt{3}$에 대응하는 접점은 $(e^{2+\sqrt{3}},1)$이다.

두 접점의 기울기를 비교해보자. $e<3$, $\sqrt{3}<2$을 고려하면 $e^{2\sqrt{3}}<3^4=81$이고 이를 이용하면 다음을 보일 수 있다.

$$\frac{7-4\sqrt{3}}{(7+4\sqrt{3})e^{2-\sqrt{3}}}<\frac{1}{e^{2+\sqrt{3}}}\Leftrightarrow e^{2\sqrt{3}}<\frac{7+4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}=(7+4\sqrt{3})^2=97+56\sqrt{3}$$

따라서 $A(e^{2+\sqrt{3}},1)$, $B(1,e^{2+\sqrt{3}})$일 때 최댓값 $\dfrac{2e^{2+\sqrt{3}}}{1+e^{4+2\sqrt{3}}}$을 갖는다.

문항카드 20

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	수시 모집 논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 II(생명과학) / 문제 [4-1], 문제 [4-2]	
출제 범위	과학과 교육과정 과목명	생명과학 I, 생명과학 II
	핵심개념 및 용어	항상성, 특이적 방어작용, 유전체 구성, 전사와 번역
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 제시문

[문제 4] 다음 제시문 (가) - (마)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) 포도당은 체내의 주요 에너지원이므로 혈당량이 과다하거나 부족하면 세포의 정상적인 기능에 문제가 생긴다. 따라서 혈당량은 일정한 수준으로 유지되어야 한다. 이자에서 분비되는 호르몬인 인슐린과 글루카곤은 혈당량 조절에서 가장 중요한 역할을 한다. 혈당량이 증가하면 인슐린의 분비가 촉진되어 혈당량을 감소시킨다. 이와 반대로 혈당량이 낮아지면 글루카곤이 분비되어 혈당량을 증가시킨다. 당뇨병은 혈당 조절에 필요한 인슐린의 분비가 부족하거나 인슐린이 제대로 작용하지 못해 발생하는 질환으로, 혈당이 너무 높아 오줌 속에 포도당이 섞여 나오고, 여러 가지 합병증을 일으킨다. 당뇨병에는 두 가지 유형이 있다. 제1형 당뇨병은 이자의 β 세포가 파괴되어 인슐린을 생성하지 못하는 것이며, 제2형 당뇨병은 인슐린이 정상적으로 분비되지만 인슐린의 표적 세포가 인슐린에 정상적으로 반응하지 못하는 것이다.

(나) 우리 몸은 병원체 침입에 대응하는 방어 기능을 가지고 있는데 이를 면역이라고 한다. 면역은 선천성 면역과 후천성 면역으로 나눌 수 있다. 선천성 면역은 병원체의 종류에 관계없이 신속하고 광범위하게 방어가 일어나기 때문에 비특이적 방어 작용이라고 하고, 후천성 면역은 선천성 면역 후에 병원체의 특정 부위를 인식하여 선별적으로 면역이 일어나기 때문에 특이적 방어 작용이라고 한다. 특이적 방어 작용에서는 백혈구의 일종인 림프구가 중요한 역할을 한다. 림프구는 골수에서 만들어지는데, 골수에서 만들어진 림프구 중 일부는 골수에서 성숙 과정을 거쳐 B 림프구로 분화하고, 다른 일부는 가슴샘으로 이동하여 T 림프구로 분화한다. 병원체에 감염되거나 내부 세포들의 변이로 암세포가 발생했을 때, 면역 체계가 제대로 대응하지 못하면 질병을 앓을 뿐만 아니라 생명까지 위협할 수 있다. 반대로, 면역 세포들이 우리 몸의 일부를 항원으로 인식하여 파괴하면 질병이 발생할 수 있다.

(다) 진핵생물에서는 전사 인자라고 하는 조절 단백질이 전사에 관여한다. 전사가 진행되기 위해서는 먼저 다양한 전사 인자가 RNA 중합 효소와 함께 DNA의 프로모터 부위에 결합하여 전사 개시 복합체를 형성한다. 전사 인자에는 전사 촉진 인자와 전사 억제 인자가 있으며, 이들 전사 인자들은 DNA의 조절 부위에 결합하여 유전자의 전사를 조절한다. 전사 촉진 인자는 염색질의 구조를 풀어 주거나 RNA 중합 효소가 프로모터에 잘 결합할 수 있도록 도와주어 전사가 개시될 수 있도록 해 준다.

(라) mRNA의 유전 정보에 따라 단백질을 합성하는 과정을 번역이라고 하며, 진핵생물에서 이 과정은 세포질의 리보솜에서 일어난다. mRNA의 염기 서열은 리보솜에서 번역이 일어나는 동안 tRNA가 운반해 온 아미노산을 순차적으로 결합하여 폴리펩타이드 사슬을 만든다. 폴리펩타이드 사슬은 접힘 과정을 통해 입체 구조를 형성하여 기능을 할 수 있는 단백질이 된다.

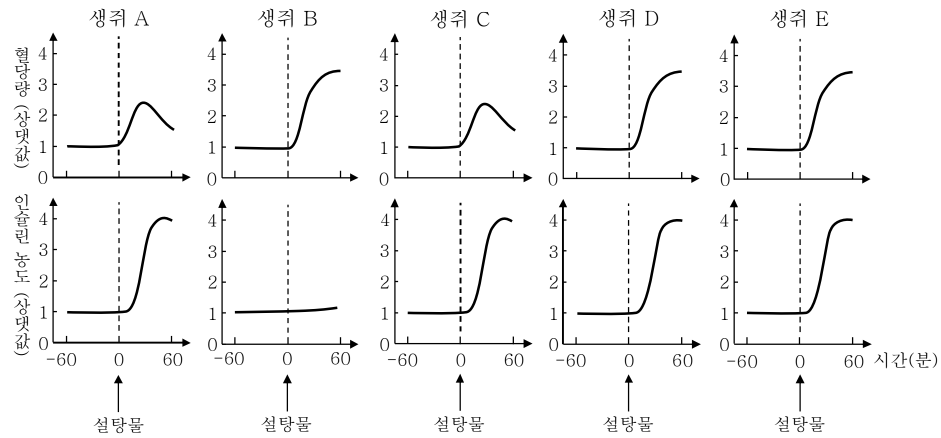
(마) 제한 효소는 유전 물질인 DNA의 특정 염기 서열을 인식하고 그 부위만 자르는 효소이다. 따라서 제한 효소의 종류에 따라 인식하는 염기 서열이 다르며, 적절한 제한 효소를 사용하면 DNA에서 원하는 부위를 선택적으로 자를 수 있다.

[문제 4-1] 다음은 당뇨병을 유발하는 것으로 알려진 물질 X와 Y가 어떻게 작용하는지를 알아본 실험이다.

[자료]
생쥐 A, B, D는 정상 생쥐이고, 생쥐 C, E는 가슴샘이 제거된 생쥐이다.

[실험 과정]
Ⅰ. 생쥐 A에 식염수를, 생쥐 B와 C에 물질 X를, 생쥐 D와 E에 물질 Y를 각각 주입하였다.
Ⅱ. 20일 후, 생쥐 A, B, C, D, E에 먹이 투여를 10시간 동안 중지한 후, 각각의 생쥐에게 같은 양의 설탕물을 먹였다.

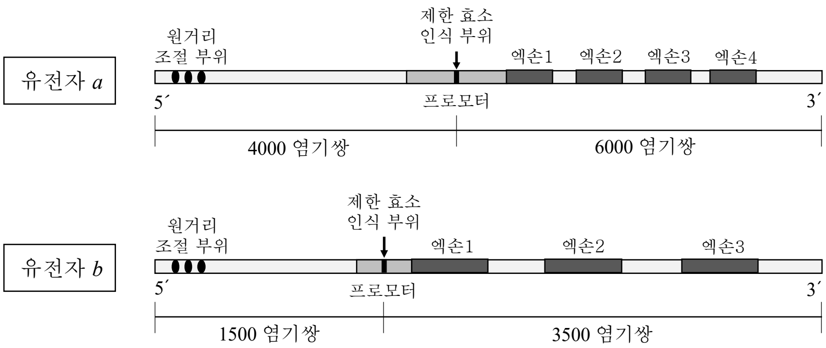
[실험 결과]
다음은 생쥐 A, B, C, D, E에서 설탕물을 먹이기 전과 후의 혈당량과 혈중 인슐린 농도의 변화를 나타낸 것이다.



[문제 4-1] 제시문 (가), (나)와 실험 결과를 통합적으로 해석하여 물질 X와 Y가 유발하는 당뇨병의 유형을 각각 제시하고, 물질 X와 Y가 각각 어떻게 당뇨병을 유발하는지를 논리적으로 설명하시오. [15점]

[문제 4-2] 다음은 항암제 X와 Y의 효능을 분석하기 위한 자료와 실험 결과이다.

[자료]
- 유전자 a는 전사 인자 P에 의해 암세포에서만 발현하고 전사 인자 A를 암호화한다.
- 전사 인자 A는 유전자 b의 발현을 촉진한다.
- 그 결과 유전자 b의 발현 산물인 단백질 B는 암세포의 증식을 촉진한다.
- 아래 그림은 유전자 a와 b의 구조 모식도이며, 유전자 a와 b의 DNA는 각각 10000개의 염기쌍과 5000개의 염기쌍으로 구성되어 있다.



[실험 과정]
Ⅰ. 같은 수의 암세포가 들어있는 서로 다른 배양 접시에 식염수, 항암제 X, 항암제 Y를 각각 처리한 후, 37℃에서 24시간 동안 배양하였다.
Ⅱ. 각각의 세포를 고정액으로 고정한 후, 세포의 핵에서 유전자 a와 b를 추출하여 각각 준비하고, 제한

효소와 충분히 반응시켜 얻은 DNA 절편의 검출 여부를 <표 1>에 정리하였다. 이 제한 효소는 전사 인자와 결합한 DNA는 자르지 못하며, 제한 효소의 효율은 100 %이다.

Ⅲ. 식염수, 항암제 X, 항암제 Y를 처리한 각각의 세포에서 유전자 a와 b에 대한 DNA의 상대량과 mRNA, 단백질 발현량의 상댓값을 <표 2>에 정리하였다.

<표 1> DNA 절편 검출 여부

염기쌍 수	식염수	항암제 X	항암제 Y
10000	○	○	○
6000	X	X	X
5000	○	X	○
4000	X	X	X
3500	X	○	○
1500	X	○	○

(○: 검출, X: 미검출)

<표 2> DNA 상대량 및 mRNA와 단백질의 발현량

구분	식염수		항암제 X		항암제 Y	
유전자	a	b	a	b	a	b
DNA	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
mRNA	1.1	1.0	1.1	0.0	1.2	0.2
단백질	1.0	1.1	1.0	0.0	0.1	0.2

(수치는 상댓값)

[문제 4-2] 위의 실험 결과를 통합적으로 해석하여 항암제 X와 Y가 암세포 증식을 억제하는 방법을 제시문 (다) - (마)에 근거하여 각각 추론하시오. (단, 항암제 X와 Y는 유전자 a 또는 b의 발현 과정 중 한 단계에만 작용하고, 전사 인자 P와 A는 프로모터에만 결합한다.) [15점]

3. 출제 의도

[문제 4-1]

체내 환경을 일정하게 유지하려는 특성인 항상성에 문제가 생기면 다양한 질병이 발생할 수 있다. 본 문제에서는 항상성을 유지시키는 데 문제가 생겨서 발생하는 질병에 대한 제시문과 실험 결과를 통합적으로 이해할 수 있는 능력을 평가한다.

이를 위하여, 주어진 제시문을 읽고 실험에 대한 자료를 해석하여 물질 X 또는 물질 Y의 주입이 각 생쥐에서의 혈당량 및 인슐린의 농도를 어떻게 변화시켰는지를 정확하게 이해할 수 있고, 그 이유를 논리적으로 설명할 수 있는지를 확인한다.

[문제 4-2]

진핵생물의 유전자 발현 및 조절 과정을 이해하고 있는지를 묻는 문제이다. 진핵생물의 전사 인자는 다른 유전자의 프로모터에 결합함으로써 유전자의 발현을 촉진하거나 억제할 수 있고, 유전자의 발현은 전사와 번역 과정을 통해 이루어지는 것을 이해하는지와 제한 효소의 개념을 파악하고 있는지를 통합적으로 평가하고자 하였다. 특히 전사 인자는 프로모터에만 결합한다는 단서와 전사 인자가 결합한 DNA의 경우 제한 효소가 작용하지 못한다는 단서를 조합하여 암세포에서만 발현하고 있는 유전자 a와 b가 항암제 X와 Y에 의해 어떻게 영향을 받는지를 찾는 문제이며, 문제 해결 과정을 통해 통합 추론 능력을 확인하고자 하였다.

4. 문항 및 제시문의 출제 근거

가) 교육과정 근거

		영역별 내용
제시문	(가)	생명과학 Ⅰ (3) 항상성과 몸의 조절 [12생과Ⅰ03-05] 신경계와 내분비계의 조절 작용을 통해 우리 몸의 항상성이 유지되는 과정을 설명할 수 있다.
	(나)	생명과학 Ⅰ (3) 항상성과 몸의 조절 [12생과Ⅰ03-06] 다양한 질병의 원인과 우리 몸의 특이적 방어 작용과 비특이적 방어 작용을 이해하고, 관련 질환에 대한 예방과 치료 사례를 조사하여 발표할 수 있다.
	(다)	생명과학 Ⅱ (4) 유전자의 발현과 조절 [12생과Ⅱ04-06] 진핵생물의 발생과 세포 분화에서 유전자 발현 조절 과정을 설명할 수 있다.
	(라)	생명과학 Ⅱ (4) 유전자의 발현과 조절 [12생과Ⅱ04-03] 전사와 번역 과정을 거쳐 유전자가 발현됨을 이해하고, 모형을 이용하여 유전자 발현 과정을 설명할 수 있다.
	(마)	생명과학 Ⅱ (6) 생명공학 기술과 인간생활 [12생과Ⅱ06-01] DNA 재조합 기술의 원리를 이해하고, 활용 사례를 조사하여 발표할 수 있다.
하위문항	문제 4-1	생명과학 Ⅰ (3) 항상성과 몸의 조절 [12생과Ⅰ03-05] 신경계와 내분비계의 조절 작용을 통해 우리 몸의 항상성이 유지되는 과정을 설명할 수 있다. 생명과학 Ⅰ (3) 항상성과 몸의 조절 [12생과Ⅰ03-06] 다양한 질병의 원인과 우리 몸의 특이적 방어 작용과 비특이적 방어 작용을 이해하고, 관련 질환에 대한 예방과 치료 사례를 조사하여 발표할 수 있다.
	문제 4-2	생명과학 Ⅱ (4) 유전자의 발현과 조절 [12생과Ⅱ04-03] 전사와 번역 과정을 거쳐 유전자가 발현됨을 이해하고, 모형을 이용하여 유전자 발현 과정을 설명할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수
고등학교 교과서	생명과학 Ⅰ	이준규 외 5인	천재교육	2018	44
	생명과학 Ⅰ	김윤택 외 4인	동아출판	2018	47, 98-100
	생명과학 Ⅰ	전상학 외 7인	지학사	2018	88, 94-95
	생명과학 Ⅰ	오현선 외 5인	미래엔	2018	96, 106-109
	생명과학 Ⅰ	심규철 외 5인	비상	2018	86-87
	생명과학 Ⅰ	심재호 외 5인	금성출판사	2018	114
	생명과학 Ⅱ	권혁빈 외	교학사	2018	111-129, 180-187
	생명과학 Ⅱ	전상학 외	지학사	2018	114-136, 192-198
	생명과학 Ⅱ	오현선 외	미래앤	2018	124-140, 194-197
	생명과학 Ⅱ	심규철 외	비상	2018	122-140, 195-198

5. 문항 해설

[문제 4-1]

포도당은 세포의 주요 에너지원이므로, 혈당량은 일정한 수준으로 유지되어야 한다. 당뇨병은 혈당 조절에 필요한 인슐린의 분비가 부족하거나 인슐린이 제대로 작용하지 못해 발생하는 질환으로, 두 가지 유형이 있다. 제1형 당뇨병은 이자의 β 세포가 파괴되어 인슐린을 생성하지 못하는 것이고, 제2형 당뇨병은 인슐린이 정상적으로 분비되지만 인슐린의 표적 세포가 인슐린에 정상적으로 반응하지 못하는 것이다. 실험 결과에서 식염수를 처리한 정상 생쥐 A의 결과에 비해, 물질 X를 처리한 정상 생쥐 B의 혈당량이 높고, 인슐린 농도가 매우 낮으므로, 물질 X는 제1형 당뇨병을 유발함을 유추할 수 있다. 제1형 당뇨병을 유발하는 물질 X는 가슴샘이 제거되어 T 림프구가 결핍된 생쥐 C에서, 혈당량과 인슐린 농도가 생쥐 A와 같았으므로, 물질 X는 T 림프구의 작용을 통해 이자의 β 세포를 파괴하여 당뇨병을 유발하였다고 추론할 수 있다. 물질 Y를 처리한 정상 생쥐 D의 경우, 혈당량이 높고 인슐린 농도는 비슷하므로, 제2형 당뇨병을 유발되었음을 유추할 수 있다. 가슴샘을 제거한 생쥐 E에 물질 Y를 처리하였을 때, 혈당량 및 인슐린 농도가 생쥐 D와 동일하므로, 물질 Y는 T 림프구와 상관없이 당뇨병을 유발함을 추론할 수 있다. 제2형 당뇨병은 표적 세포가 인슐린에 반응하지 못하는 것이라고 하였으므로, 물질 Y는 표적 세포의 인슐린 반응성을 낮추어서 당뇨병을 발생시켰을 것으로 추론할 수 있다.

[문제 4-2]

주어진 자료에 의하면 유전자 a는 전사 인자 P에 의해 발현이 지속되고 있으므로 전사 인자 P는 유전자 a의 프로모터에 결합하고 있다고 예측할 수 있다. 또한 유전자 a에서 전사를 통해 유전자 a의 mRNA가 증가하고 번역 과정을 통해 단백질 A의 발현이 증가했을 것이다. 그리고 단백질 A는 전사 인자로 작용하여 유전자 b의 발현을 높이므로 유전자 b의 프로모터에 결합을 하게 된다. 따라서 이 경우 제한 효소는 유전자 a와 b DNA를 모두 자를 수 없어 표 1에서 식염수 그룹의 경우 염기쌍 수는 10000과 5000에서 검출되었다.
반면 항암제 X의 경우 식염수와 동일하게 10000개 염기쌍은 검출이 되었으므로 유전자 a의 경우 전사 인자 P에 의해 발현이 지속되고 있음을 예측할 수 있으나 유전자 b의 경우 5000 염기는 검출되지 않았고, 대신 유전자 b의 프로모터 부위에서 잘리면 나타나는 3500과 1500염기쌍이 검출되었다. 이는 유전자 b DNA의 프로모터 부위가 잘렸음을 의미하고 전사 인자가 결합되지 않았음을 나타낸다. 표 2의 결과에서도 식염수와 동일하게 항암제 X를 처리한 군에서 유전

자 a는 mRNA와 단백질로 발현이 잘 일어나고 있으나 유전자 b의 전사 과정에 문제가 생겨 mRNA가 발현되지 않음을 알 수 있다. 따라서 표 1과 2의 결과를 통합적으로 해석하면 항암제 X는 유전자 a로부터 발현되는 단백질 A가 전사 인자로서 유전자 b의 프로모터에 결합하지 못하도록 하는 기전임을 알 수 있다.

항암제 Y의 경우 유전자 a의 DNA 절편은 10000개가 검출되었으므로 식염수와 마찬가지로 전사 인자 P가 프로모터에 결합하고 있음을 알 수 있고, 유전자 b DNA의 경우 절편이 프로모터에서 잘리지 않은 5000 염기쌍과 프로모터에서 제한 효소에 잘린 3500, 1500 염기쌍이 모두 검출되었다. 표 2에서는 유전자 a의 mRNA는 발현이 잘 되고 있으나 단백질로의 번역되는 효율이 감소 되었음을 알 수 있는데, 따라서 단백질 A의 양이 감소하여 유전자 b의 발현을 유도하는 효율이 떨어지고 있음을 알 수 있으므로, 유전자 b의 DNA 중 일부는 제한 효소에 잘리기도 하고 전사 인자 A가 결합하고 있어 잘리지 않기도 할 것이다. 이러한 결과를 통합적으로 해석하면 항암제 Y는 유전자 a의 번역 과정을 방해하는 기전임을 알 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 4-1	물질 X가 제1형 당뇨병을, 물질 Y가 제2형 당뇨병을 유발함을 제시	4점
	가슴샘이 제거된 생쥐에 T 림프구가 결핍되어 있음을 제시	2점
	물질 X가 T 림프구 작용을 통해 이자의 β 세포를 파괴하여 당뇨병을 유발함을 제시	4점
	물질 Y의 당뇨병 유발 기전은 T 림프구와 관계없음을 제시	3점
	물질 Y는 인슐린의 표적 세포가 인슐린에 제대로 반응하지 못하도록 하여 당뇨병을 유발함을 제시	2점
문제 4-2	식염수 처리군에서 DNA 절편이 10000과 5000에서 생기는 이유를 설명하면	3점
	표1에서 항암제 X 처리군에서 전사 인자 A가 유전자 b 프로모터에 결합하지 못하여 DNA 절편이 생긴 것을 설명하면	3점
	표1에서 항암제 Y 처리군에서 유전자 b의 DNA 절편이 3가지 모두 생긴 것을 설명하면	3점
	표2에서 항암제 X 처리군에서 유전자 b의 전사과정에 문제가 있음을 설명하면	3점
	표2에서 항암제 Y 처리군에서 유전자 a의 번역과정에 문제가 있음을 설명하면	3점

7. 예시 답안

[문제 4-1]

- 식염수를 처리한 정상 생쥐 A의 결과에 비해, 물질 X를 처리한 정상 생쥐 B의 혈당량이 높고, 인슐린 농도가 매우 낮다. 제시문 (가)에서 제1형 당뇨병은 인슐린을 생성하지 못하는 것이라고 하였으므로, 물질 X는 제1형 당뇨병을 유발함을 유추할 수 있다.
- 생쥐 A의 결과에 비해, 물질 Y를 처리한 정상 생쥐 D의 혈당량이 높고 인슐린 농도는 비슷하

다. 이 결과와 제시문 (가)를 통해, 물질 Y는 제2형 당뇨병을 유발함을 유추할 수 있다.

- 제시문 (나)에서 T 림프구가 가슴샘에서 분화한다고 하였으므로, 가슴샘이 제거된 생쥐에는 T 림프구가 결핍되어 있음을 유추할 수 있다. 제1형 당뇨병을 유발하는 물질 X를 가슴샘이 제거된 생쥐 C에 처리하였을 때, 혈당량과 인슐린 농도가 생쥐 A와 같았으므로, 물질 X는 T 림프구의 작용을 통해 이자의 β 세포를 파괴하여 당뇨병을 유발하였다고 추론할 수 있다.
- 가슴샘을 제거한 생쥐 E에 물질 Y를 처리하였을 때, 혈당량 및 인슐린 농도가 생쥐 D와 동일하므로, 물질 Y는 T 림프구와 상관없이 당뇨병을 유발함을 추론할 수 있다.
- 제시문 (가)에서 제2형 당뇨병은 표적 세포가 인슐린에 반응하지 못하는 것이라고 하였으므로, 물질 Y는 표적 세포의 인슐린 반응성을 낮추어서 당뇨병을 발생시켰을 것으로 추론할 수 있다.

[문제 4-2]

- 식염수 처리군의 경우 전사 인자 P와 A에 의해 유전자 발현 과정이 진행되고 있어 제한 효소에 의해 프로모터 부위가 절단되지 않아 유전자 a와 b 모두 10000과 5000 염기쌍에서 검출됨.
- 항암제 X: 식염수와 마찬가지로 유전자 a의 전체 크기인 10000개 염기쌍 DNA 절편은 확인되었으나 유전자 b의 전체 크기인 5000 염기쌍은 검출되지 않았고, 대신 유전자 b의 프로모터 부분이 제한 효소에 잘려 1500과 3500으로 나누어진 절편이 관찰됨. 이는 유전자 a를 통해 발현되는 전사 인자 A가 유전자 b의 프로모터에 결합하지 못하여 나타난 결과라는 것을 의미함.
- 또한 표 2에서 유전자 a의 mRNA 및 단백질 발현은 식염수 처리군과 동일한 반면 유전자 b의 mRNA 발현이 되지 않는 것을 확인할 수 있음. 단백질 A는 유전자 b의 전사인자로 작용한다고 하였으므로 단백질 A에 의한 유전자 b의 발현이 전사 수준에서 저해되고 있음을 유추할 수 있음. 따라서 항암제 X는 전사인자 A가 유전자 b의 프로모터 부위에 결합하지 못하게 하여 전사 과정을 방해함으로써 암세포의 성장을 억제함.
- 항암제 Y: 표 2에서 유전자 a의 mRNA는 증가하지만 단백질 A의 발현은 크게 감소하였음. 이는 발현된 유전자 a의 mRNA가 단백질로 번역되는 과정이 저해되었음을 의미함. 따라서 발현이 줄어든 단백질 A가 유전자 b의 전사 과정에도 영향을 미쳐 단백질 B 발현까지 낮아진 것을 알 수 있음.
- 표 1에서 유전자 a가 mRNA로 전사된 후 단백질 A로 번역되는 과정이 방해를 받아 단백질 A 합성이 줄어들게 되면, 유전자 b의 프로모터 부위에 붙을 수 있는 전사 인자도 감소하여 전사인자 A가 결합한 유전자 b가 줄어들지만 표 2에서 단백질 A의 완전한 번역을 막지는 못하므로 일부 전사 인자와 결합한 유전자 b가 함께 존재하므로 제한 효소에 의한 DNA 절편 역시 5000과 3500, 1500 모두 검출된다. 따라서 항암제 Y는 유전자 A의 번역과정을 방해하여 암세포의 성장을 억제한다.

문항카드 21

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	수시 모집 논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 II(물리) / 문제 [4-1], 문제 [4-2]	
출제 범위	과학과 교육과정 과목명	물리학 I, 물리학 II
	핵심개념 및 용어	운동량 보존, 역학적 에너지 보존, 등가속도 직선 운동, 벡터의 합성과 분해, 구심력
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 제시문

[문제 4] 다음 제시문 (가) - (바)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) 마찰이 없는 수평면 위에서 질량이 각각 m_{A}, m_{B}이고 속도가 v_{A}, v_{B}인 물체 A, B가 직선상에서 운동하다가 충돌한 후 속도가 각각 $v_{\mathrm{A}}{}'$, $v_{\mathrm{B}}{}'$이 될 때 다음 식이 성립한다.

$$m_{\mathrm{A}}v_{\mathrm{A}}+m_{\mathrm{B}}v_{\mathrm{B}}=m_{\mathrm{A}}v_{\mathrm{A}}{}'+m_{\mathrm{B}}v_{\mathrm{B}}{}'$$

즉, 충돌 전 두 물체의 운동량의 합은 충돌 후 두 물체의 운동량의 합과 같다. 이처럼 두 물체가 충돌할 때 외부에서 힘이 작용하지 않으면 충돌 전과 충돌 후의 운동량의 합은 항상 일정하게 보존된다. 이것을 운동량 보존 법칙이라고 한다.

(나) 질량 m인 물체가 속력 v로 움직일 때 운동 에너지 E_{k}는 $E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}mv^2$이다. 지면으로부터 높이 h에 있는 물체가 중력에 의해 가지는 에너지를 중력 퍼텐셜 에너지 E_{p}라 하고 $E_{\mathrm{p}}=mgh$로 나타낸다. 여기에서 g는 중력 가속도이다. 운동 에너지와 퍼텐셜 에너지의 합을 역학적 에너지라고 한다. 마찰이나 공기 저항이 없을 때 역학적 에너지는 보존된다.

(다) 물체에 힘이 작용할 때 물체는 알짜힘의 방향으로 가속된다. 이때 물체의 가속도의 크기 a는 물체에 작용하는 알짜힘의 크기 F에 비례하고 물체의 질량 m에 반비례하여 $F=ma$를 만족한다. 이를 뉴턴 운동 제2법칙이라 한다.

(라) 속력과 운동 방향이 일정한 운동을 등속 직선 운동이라고 하며, 속도 v로 등속도 운동하는 물체의 시간 t 동안의 변위 s는 $s=vt$를 만족한다. 운동 방향이 일정하고 시간에 따른 속력 변화가 일정한 운동을 등가속도 직선 운동이라고 한다. 처음 속도가 v_0인 물체가 가속도 a로 시간 t 동안 운동했을 때, 나중 속도 v와 이 시간 동안 물체의 변위 s는 다음의 식을 만족한다.

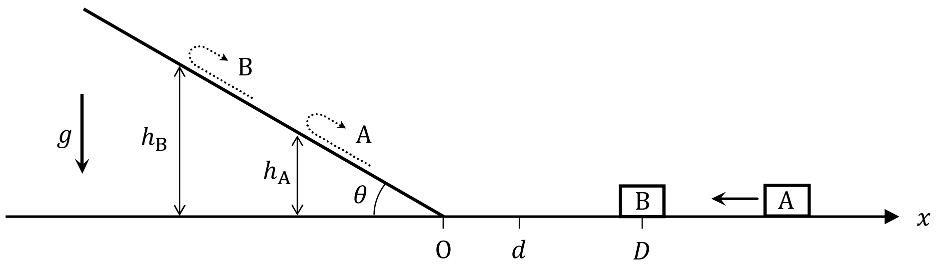
$$v = v_0 + at, \quad s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

(마) 변위, 속도, 가속도, 힘 등과 같이 방향과 크기를 함께 가지는 물리량을 벡터량이라고 한다. 벡터는 삼각형법 또는 평행사변형법으로 합성할 수 있으며 필요에 따라 성분별로 분해할 수 있다. 벡터 분해는 직각 좌표를 이용하여 벡터의 수직 성분과 수평 성분으로 나누어 분해한다. 크기가 $|\vec{C}|$ 이고 x 축과 이루는 각도가 θ 인 벡터 $\vec{C}$ 를 분해하면 수평 성분 $C_x = |\vec{C}|\cos\theta$ 와 수직 성분 $C_y = |\vec{C}|\sin\theta$ 가 된다. 마찰이 없고 경사각이 θ 인 빗면에서 질량이 m 인 물체가 중력에 의해 미끄러질 때, 물체의 운동 방향과 같은 방향으로 작용하는 알짜힘은 빗면에 나란한 중력 성분이며 그 크기는 $mg\sin\theta$ 이다. 이때 g 는 중력 가속도이다.

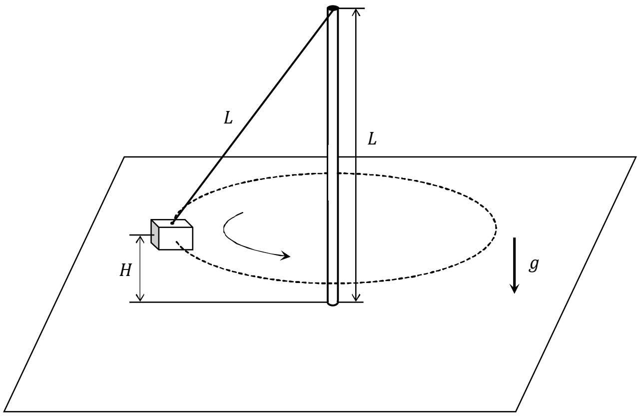
(바) 원운동을 하는 물체에 작용하는 원의 중심을 향한 힘을 구심력이라 부른다. 원의 반지름을 r, 물체의 질량을 m, 물체의 속도를 v 라 할 때 구심력 F 는 다음과 같다.

$$F = m\frac{v^2}{r}$$

[문제 4-1] 그림과 같이 물체 A 와 B 가 원점이 O 인 x 축 위에서 운동한다. 속력 $v = 2\,\mathrm{m/s}$ 로 움직이는 물체 A 가 정지해 있던 물체 B 와 위치 $D = 0.5\,\mathrm{m}$ 에서 충돌한 후, 두 물체는 경사면을 올라갔다가 내려와서 원점을 지나 위치 d 에서 다시 충돌한다. 경사면의 경사각은 $\theta = 30^\circ$ 로 일정하고, 물체 A 의 질량은 $m_\mathrm{A} = 0.6\,\mathrm{kg}$, 물체 B 의 질량은 $m_\mathrm{B} = 0.3\,\mathrm{kg}$ 이다. 물체 A 와 B 가 경사면을 따라 올라간 최대 높이 h_A 와 h_B 의 차이가 $h_\mathrm{B} - h_\mathrm{A} = 0.15\,\mathrm{m}$ 일 때, 두 번째 충돌 위치 d를 제시문 (가) - (마)에 근거하여 구하시오. (단, 중력가속도 g 는 $10\,\mathrm{m/s^2}$ 이고, 물체의 크기, 마찰력 및 공기 저항은 무시한다.) [15점]



[문제 4-2] 그림은 기둥의 끝에 길이가 L 인 줄을 고정하고 줄의 다른 쪽 끝에 관람차를 매달아 등속 원운동을 하게 하는 놀이기구이다. 관람차가 지면으로부터 높이 H 에서 등속 원운동을 하고 있을 때, 관람차에 탑승하고 있는 사람이 연직 방향으로 공을 가만히 떨어뜨린 후, 공이 지면에 떨어진 위치와 기둥의 중심 사이의 수평 거리 D 를 측정하였다. 제시문 (다) - (바)에 근거하여 수평 거리의 제곱 D^2 을 L 과 H 로 나타내고, $L = 50\,\mathrm{m}$, $H = 10\,\mathrm{m}$ 일 때, D 를 구하시오. (단, 기둥의 높이는 줄의 길이와 같으며 중력가속도 g 는 $10\,\mathrm{m/s^2}$ 이다. 공기 저항, 기둥의 두께, 관람차의 크기 및 공의 크기는 무시한다.) [15점]



3. 출제 의도

역학은 고등학교 물리 Ⅰ 역학과 에너지 단원, 고등학교 물리 Ⅱ 역학적 상호작용 단원에서 다루어지고 있는 물리학의 기본 분야이다. 본 문항 평가에는 역학의 기본 법칙인 뉴턴의 운동 방정식, 운동량 보존 법칙, 역학적 에너지 법칙, 힘의 평형을 이해하고 등가속도 운동과 벡터량의 합성과 분해를 통해 물체의 운동을 수리적으로 해석하는 문제를 출제하였다.

[문제 4-1]
물체의 1차원 충돌에서 충돌 전후의 운동량 보존을 이용하여 속력의 변화를 예측하고, 평면상의 등가속도 운동에서 물체의 속도와 위치를 정량적으로 기술하는 문제이다. 두 물체가 등속도 운동하는 구간과 등가속도 운동하는 구간을 구별하고, 각 구간에서의 속도와 가속도를 구하고, 이동 거리와 시간 사이의 관계를 구하는 문제이다. 본 문항의 평가에서는, 운동량 보존 법칙, 역학적 에너지 보존 법칙을 이해하고 등가속도 운동으로부터 물체의 운동을 정략적으로 분석하는 문제 해결력을 측정하고자 하였다.

[문제 4-2]
구심력을 이용하여 등속 원운동을 기술하고 벡터의 성분 분해를 통해 성분별로 등속도 운동과 등가속도 운동을 하는 물체의 위치와 속도를 정량적으로 분석하는 문제이다. 등속 원운동을 하는 물체의 구심력을 구하고, 힘의 평형으로부터 줄의 장력과 중력이 이루는 각도를 이해한다. 복잡한 물체의 운동을 등속 원운동, 등속 직선 운동, 등가속도 직선 운동으로 나누어 분류하고 물체의 속도, 변위를 정량적으로 분석하는 문제 해결력을 종합적으로 평가하는 문제이다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 근거

		영역별 내용
제시문	(가)	물리학 Ⅰ (1) 역학과 에너지 [12물리Ⅰ01-04] 물체의 1차원 충돌에서 충돌 전후의 운동량 보존을 이용하여 속력의 변화를 정량적으로 예측할 수 있다.
	(나)	물리학 Ⅰ (1) 역학과 에너지 [12물리Ⅰ01-06] 직선 상에서 운동하는 물체의 역학적 에너지가 보존되는 경우와 열에너지가 발생하여 역학적 에너지가 보존되지 않는 경우를 구별하여

		설명할 수 있다.
	(다)	물리학 I (1) 역학과 에너지 [12물리 I 01-02] 뉴턴 운동 법칙을 이용하여 직선 상에서 물체의 운동을 정량적으로 예측할 수 있다.
	(라)	물리학 I (1) 역학과 에너지 [12물리 I 01-01] 여러 가지 물체의 운동 사례를 찾아 속력의 변화와 운동 방향의 변화에 따라 분류할 수 있다.
	(마)	물리학 II (1) 역학적 상호 작용 [12물리 II 01-01] 평면상에서 여러 가지 힘이 합성될 때 힘의 벡터를 이용하여 알짜힘을 구할 수 있다.
	(바)	물리학 II (1) 역학적 상호 작용 [12물리 II 01-05] 구심력을 이용하여 등속 원운동을 설명할 수 있다.
하위문항	문제 4-1	물리학 I (1) 역학과 에너지 [12물리 I 01-04] 물체의 1차원 충돌에서 충돌 전후의 운동량 보존을 이용하여 속력의 변화를 정량적으로 예측할 수 있다. 물리학 I (1) 역학과 에너지 [12물리 I 01-06] 직선 상에서 운동하는 물체의 역학적 에너지가 보존되는 경우와 열에너지가 발생하여 역학적 에너지가 보존되지 않는 경우를 구별하여 설명할 수 있다. 물리학 I (1) 역학과 에너지 [12물리 I 01-02] 뉴턴 운동 법칙을 이용하여 직선 상에서 물체의 운동을 정량적으로 예측할 수 있다. 물리학 I (1) 역학과 에너지 [12물리 I 01-01] 여러 가지 물체의 운동 사례를 찾아 속력의 변화와 운동 방향의 변화에 따라 분류할 수 있다. 물리학 II (1) 역학적 상호 작용 [12물리 II 01-01] 평면상에서 여러 가지 힘이 합성될 때 힘의 벡터를 이용하여 알짜힘을 구할 수 있다.
	문제 4-2	물리학 I (1) 역학과 에너지 [12물리 I 01-02] 뉴턴 운동 법칙을 이용하여 직선 상에서 물체의 운동을 정량적으로 예측할 수 있다. 물리학 I (1) 역학과 에너지 [12물리 I 01-01] 여러 가지 물체의 운동 사례를 찾아 속력의 변화와 운동 방향의 변화에 따라 분류할 수 있다. 물리학 II (1) 역학적 상호 작용 [12물리 II 01-01] 평면상에서 여러 가지 힘이 합성될 때 힘의 벡터를 이용하여 알짜힘을 구할 수 있다. 물리학 II (1) 역학적 상호 작용 [12물리 II 01-05] 구심력을 이용하여 등속 원운동을 설명할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수
고등학교 교과서	물리학 I	손정우 외	비상교육	2017	30-33
	물리학 I	김성원 외	지학사	2018	48-49
	물리학 I	송진웅 외	동아출판	2017	20
	물리학 I	곽영직 외	와이비엠	2017	17
	물리학 II	김영민 외	교학사	2018	16
	물리학 II	강남화 외	천재교육	2018	37

5. 문항 해설

[문제 4-1]

물체의 1차원 충돌에서 충돌 전후의 운동량 보존을 이용하여 속력의 변화를 정량적으로 예측하고, 평면상의 등가속도 운동에서 물체의 속도와 위치를 정량적으로 기술하는 문제이다. 역학적 에너지 보존 법칙과 물체 A와 B가 빗면을 따라 올라간 최대 높이로부터 충돌 이후 두 물체의 속력 비율을 구할 수 있다. 두 물체가 등속도 운동한 구간과 등가속도 운동한 구간의 총 이동 시간으로부터 두 번째 충돌 위치 d를 구할 수 있다.

[문제 4-2]

구심력을 이용하여 등속 원운동을 기술하고 벡터의 성분 분해를 통해 성분별로 등속도 운동과 등가속도 운동을 하는 물체의 위치와 속도를 정량적으로 분석하는 문제이다. 중력과 장력의 합성 힘이 등속 원운동의 구심력으로 작용함을 이용하여 놀이기구의 속력을 구할 수 있고, 놀이기구의 높이로부터 공이 낙하하는 시간을 구할 수 있다. 공이 관람차에서 떨어질 때의 수평 방향 속력과 등속도 운동 법칙을 이용하여 공이 지면에 떨어진 위치를 계산할 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 4-1	두 물체의 충돌 전후 운동량 보존 법칙을 바르게 기술한다.	+3점
	각 구간에서 물체의 운동을 바르게 기술한다.	+3점
	에너지 보존법칙으로부터 두 물체의 속력 간의 관계를 구하였다.	+3점
	두 물체의 충돌 후 속도를 바르게 구하였다.	+3점
	총 이동 시간으로부터 두 번째 충돌 위치를 구하였다.	+3점
	※ 논리 전개가 맞으면 계산이 틀려도 항목별 점수의 절반 이내에서 부분 점수를 부여할 수 있음. ※ 항목별 답안의 완성도에 따라 ±0.5점 부여할 수 있음 (최대 점수 이내).	
문제 4-2	장력과 중력의 합력이 구심력임을 이용하여 관람차의 속도를 구하였다.	+5점
	관람차의 높이로부터 공의 낙하 시간을 바르게 구하였다.	+2점
	공의 수평 방향 운동이 등속운동임을 보이고 공의 변위를 구하였다.	+3점

	공이 떨어진 지점과 기둥의 거리를 구하였다. ※ 논리 전개가 맞으면 계산이 틀려도 항목별 점수의 절반 이내에서 부분 점수를 부여할 수 있음. ※ 항목별 답안의 완성도에 따라 ±0.5점 부여할 수 있음 (최대 점수 이내).	+5점

7. 예시 답안

[문제 4-1]

▶ 충돌 직후의 물체의 속도를 각각 v_A, v_B라고 할 때, 충돌 전후의 운동량이 보존됨을 이용하면 $m_A v = m_A v_A + m_B v_B$ 이고 $0.6v_A + 0.3v_B = 1.2$ 이다.

▶ 두 물체는 역학적 에너지 보존 법칙에 따라 경사면을 오르기 전과 내려온 후에는 각각 v_A와 v_B의 속력으로 등속도 운동을 하며, 경사면에서는 경사면 방향으로 가속도 $a = gsin\theta = 5\,\mathrm{m/s^2}$로 등가속도 운동을 한다.

▶ 역학적 에너지 보존 법칙에 따라 초기속력과 최대 도달 높이 사이의 관계는 $mgh = \frac{1}{2}mv^2$이다. 이로부터 $h_B - h_A = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2g}$ 이고 $v_B^2 - v_A^2 = 3$ 이다.

▶ 위에서 구한 두 식으로부터 두 해 $v_A = 1\,\mathrm{m/s}$, $v_B = 2m/s$와 $v_A = \frac{13}{3}\,\mathrm{m/s}$, $v_B = -\frac{14}{3}\,\mathrm{m/s}$을 구할 수 있다. 문제의 상황으로부터 속도는 모두 양수이므로 $v_A = 1\,\mathrm{m/s}$, $v_B = 2m/s$ 만이 가능하다.

▶ 두 물체가 위치 D에서 첫 번째 충돌 이후 위치 d에서 두 번째 충돌할 때까지 총 이동 시간이 같으므로, $\frac{D}{v_A} + \frac{d}{v_A} + 2\frac{v_A}{a} = \frac{D}{v_B} + \frac{d}{v_B} + 2\frac{v_B}{a}$이다. 위에서 구한 속도 v_A, v_B, 가속도 a 와 D를 대입하면 $d = 0.3\,\mathrm{m}$ 이다.

[문제 4-2]

▶ 줄과 기둥이 이루는 각을 θ, 관람차와 기둥 사이의 거리를 R, 관람차의 속력을 V라 하자. 줄의 장력과 중력의 합력이 구심력으로 작용하므로 $\frac{F_{구심력}}{F_{중력}} = \tan\theta$이고, $\frac{MV^2/R}{Mg} = \frac{R}{L-H}$ 이다.

이 식으로부터 관람차의 속력은 $V = \sqrt{g\frac{R^2}{L-H}}$ 이고 $R^2 = L^2 - (L-H)^2 = H(2L-H)$ 이므로, $V = \sqrt{g\frac{H(2L-H)}{L-H}}$ 이고 원의 접선 방향이다.

▶ 공이 높이 H에서 자유 낙하하므로 $H = \frac{1}{2}gt^2$이고 공이 낙하한 시간은 $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ 이다.

▶ 공이 낙하한 시간 동안 공은 원의 접선 방향으로 수평으로 등속도 운동을 한다. 그 이동 거리는 $S = Vt$이므로, $S = R\sqrt{\frac{2H}{L-H}} = H\sqrt{\frac{2(2L-H)}{L-H}}$ 이다.

▶ 공이 원운동의 접선 방향의 초기속도를 가지므로 공이 떨어진 위치와 기둥 사이의 거리는 $D^2 = R^2 + S^2$이고, $D^2 = R^2\left(\frac{L+H}{L-H}\right) = H(2L-H)\left(\frac{L+H}{L-H}\right)$이다.

▶ $L = 50\,\mathrm{m}$, $H = 10\,\mathrm{m}$를 위 식에 대입하면 $D = \sqrt{1350} = 15\sqrt{6}\,\mathrm{m}$이다.

문항카드 22

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	수시 모집 논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 II(화학) / 문제 [4-1], 문제 [4-2]	
출제 범위	과학과 교육과정 과목명	화학 I, 화학 II
	핵심개념 및 용어	아보가드로 법칙, 화학 반응의 양적 관계, 몰 농도, 몰랄 농도, 끓는점 오름, 총괄성
예상 소요 시간	30분	

2. 문항 및 제시문

제시문

(가) 원자, 분자, 이온 등은 크기나 질량이 매우 작아 일일이 세거나 재는 것이 불가능하다. 따라서 이런 작은 입자들을 보다 쉽게 다루기 위해 몰(mole)이라는 묶음 단위를 사용한다. 1몰은 6.02 × 1023개만큼 모인 집단을 뜻하며, 이 수를 아보가드로수라고 한다. 1몰의 원자, 1몰의 분자, 1몰의 이온은 각각 6.02 × 1023개의 해당 입자가 모여 있는 것을 뜻한다.

(나) 아보가드로 법칙에 따르면 모든 기체는 같은 온도와 같은 압력에서 같은 부피 속에 들어 있는 분자 수가 같다. 따라서 기체의 종류에 관계없이 같은 온도와 같은 압력에서 기체 1몰이 차지하는 부피는 일정하다. 즉, 0 ° C, 1기압에서 기체 1몰이 차지하는 부피는 기체의 종류에 관계없이 항상 22.4 L이다.

(다) 물질들 사이에서 일어나는 화학 반응은 화학식과 기호를 이용하여 간단하게 나타낼 수 있다. 화학식을 사용하여 화학 변화를 나타낸 식을 화학 반응식이라고 한다. 화학 반응식으로부터 반응물과 생성물의 종류뿐만 아니라 반응에 관한 여러 가지 정보를 얻을 수 있으며, 반응 계수비를 이용하여 반응에 관여하는 물질 사이의 양적 관계를 설명할 수 있다. 반응이 일어날 때 반응물과 생성물의 몰비와 분자 수비는 반응 계수비와 같다. 또한 기체 상태인 물질의 부피비도 반응 계수비와 같다. 이것은 같은 온도, 같은 압력에서 기체의 부피는 몰수에 비례하기 때문이다. 하지만 물질의 질량비는 반응 계수비와 일치하지 않는데, 이는 물질마다 분자량이 달라서 1몰의 질량이 서로 다르기 때문이다.

(라) 용액의 농도를 나타내는 방법에는 여러 가지가 있는데, 화학 반응에서는 입자 수가 매우 중요하므로 반응에 관여하는 입자 수를 농도로 나타내는 것이 필요하다. 퍼센트 농도(%)가 같은 용액이라도 용질의 종류에 따라 같은 질량의 용액에 녹아 있는 입자 수는 다르다. 그러므로 화학 실험을 할 때는 퍼센트 농도 대신 몰 농도를 사용하는 경우가 많다. 용액 1 L 속에 들어 있는 용질의 몰수를 몰 농도라고 하고, 단위로는 mol/L 또는 M을 사용한다. 몰 농도는 용액의 부피를 기준으로 나타내기 때문에 온도에 따라 달라진다. 따라서 온도의 변화에 관계없이 일정한 농도가 필요할 때는 용액의 부피 대신에 용매의 질량을 이용한 몰랄 농도를 사용한다. 몰랄 농도는 용매 1 kg 속에 녹아 있는 용질의 몰수를 나타내며, 단위는 mol/kg 또는 m을 사용한다.

(마) 비휘발성 용질이 녹아 있는 용액의 증기압은 순수한 용매의 증기압보다 낮으므로 이러한 용액은 순수한 용매보다 높은 온도에서 끓는다. 이때 용액의 끓는점(Tb′)과 순수한 용매의 끓는점(Tb) 차를 끓는점 오름(△Tb)이라고 한다.

$$\Delta T_b = T_b' - T_b$$

비휘발성, 비전해질 용질이 녹아 있는 묽은 용액의 끓는점 오름은 용질의 종류에 관계없이 일정량의 용매에 녹아 있는 용질의 양, 즉 용액의 몰랄 농도(m)에 비례한다.

$$\Delta Tb = Kb \times m$$

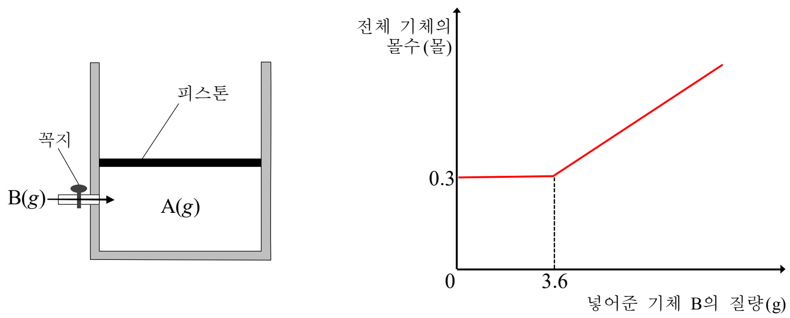
위 식에서 Kb는 몰랄 오름 상수인데, 이는 용액의 농도가 1 m일 때의 끓는점 오름 값에 해당한다. 몰랄 오름 상수는 용매의 종류에 따라 달라진다. 예를 들어, 물의 몰랄 오름 상수는 0.51 ° C · kg/mol이고 벤젠의 몰랄 오름 상수는 2.64 ° C · kg/mol이다.

하위 문항 1 [문제 4-1] 〈15점〉

[문제 4-1] 다음은 기체 A와 B가 반응하여 기체 C와 D를 생성하는 화학 반응식이다.

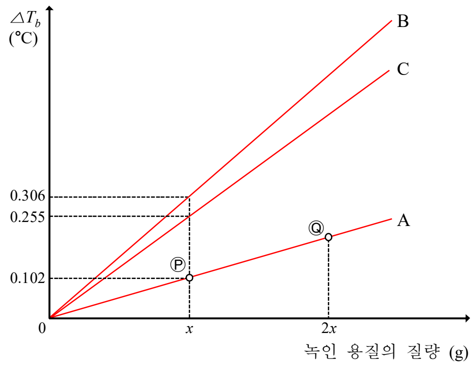
$$aA(g) + bB(g) \rightarrow cC(g) + dD(g) \quad (a \sim d \text{는 반응 계수})$$

A가 들어 있는 실린더에 B를 넣으면 반응이 즉각적으로 일어난다. 그래프는 A만 들어 있는 실린더에 B를 조금씩 넣으면서, 실린더에 들어 있는 전체 기체의 몰수를 나타낸 것이다. 넣어준 B의 몰수가 0.1몰일 때와 0.3몰일 때 실린더 안의 기체의 밀도를 측정하였더니 서로 같았다. 제시문 (가) - (다)에 근거하여 $\frac{c+d}{a+b}$와 A의 분자량을 논리적으로 구하시오. (단, B의 분자량은 36이고, 실린더 내부의 온도와 압력은 일정하며, 피스톤의 질량과 마찰은 무시한다.) [15점]



하위 문항 2 [문제 4-2] 〈15점〉

[문제 4-2] 그림은 물 500 g에 용질 A와 B를 각각 녹인 A 수용액, B 수용액과 용질 A와 B를 일정 비율로 같이 녹인 수용액 C의 끓는점 오름을 용질의 질량에 따라 나타낸 것이다. 용질 A를 x g 녹인 수용액 Ⓟ와 2x g 녹인 수용액 Ⓠ의 몰 농도를 측정하였더니, 수용액 Ⓠ의 몰 농도가 수용액 Ⓟ의 몰 농도의 $\frac{21}{11}$배였다. 제시문 (라)와 (마)에 근거하여 수용액 C에 들어 있는 용질 A와 B의 몰수비를 구하고, 수용액 Ⓟ에 들어 있는 용질 A의 질량 및 분자량을 논리적으로 구하시오. (단, 모든 수용액의 밀도는 1 g/mL이고, 용질 A와 B는 비휘발성, 비전해질이며 서로 반응하지 않는다.) [15점]



3. 출제 의도

본 논술고사에서는 고등학교 ‘화학 I’과 ‘화학 II’ 교육과정에 포함된 기본 개념의 통합적인 이해도 및 과학적 사고력을 평가하고자 한다. 이를 위해 몰, 아보가드로 법칙, 화학 반응에서의 양적 관계, 몰 농도, 몰랄 농도 및 묽은 용액의 끓는점 오름 등 고교 화학 교과 과정에서 핵심적으로 다루어지고 있는 기본적인 화학 개념에 대해 명확히 이해하고, 이를 바탕으로 통합적으로 사고할 수 있는지 평가하고자 한다. 생성물과 반응물이 모두 기체 분자인 화학 반응에서의 양적 관계를 화학 반응식으로부터 도출하고, 이를 전체 기체의 부피 변화 및 밀도 변화와 연계지을 수 있어야 한다. 또한, 용액의 끓는점 오름이 용액에 녹아 있는 용질의 종류에는 관계없이 입자 수에만 비례한다는 것을 이해하여 서로 반응하지 않는 두 종류의 용질이 녹아 있는 용액의 끓는점 오름으로부터 용질의 몰수비를 유추할 수 있고, 용액의 몰 농도와 몰랄 농도의 차이를 이해하여 이로부터 용질의 분자량을 도출할 수 있어야 한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 근거

‘교육부 고시 제 2015-74호[별책 9] 과학과 교육과정’을 바탕으로 작성

영역별 내용		
제시문	(가)	화학 I (1) 화학의 첫걸음 (146쪽) [12화학 I 01-03] 아보가드로수와 몰의 의미를 이해하고, 고체, 액체, 기체 물질 1몰의 양을 어림하고 체험할 수 있다.
	(나)	화학 I (1) 화학의 첫걸음 (146쪽) [12화학 I 01-03] 아보가드로수와 몰의 의미를 이해하고, 고체, 액체, 기체 물질 1몰의 양을 어림하고 체험할 수 있다.
	(다)	화학 I (1) 화학의 첫걸음 (146쪽) [12화학 I 01-04] 여러 가지 반응을 화학 반응식으로 나타내고 이를 이용해서 화학 반응에서의 양적 관계를 설명할 수 있다.
	(라)	화학 I (1) 화학의 첫걸음 (146쪽) [12화학 I 01-05] 용액의 농도를 몰 농도로 표현할 수 있다. 화학 II

		(1) 물질의 세 가지 상태와 용액 (157쪽) [12화학Ⅱ01-08] 퍼센트 농도, ppm, 농도, 몰랄 농도의 의미를 이해하고, 여러 가지 농도의 용액을 만들 수 있다.
	(마)	화학 Ⅱ (1) 물질의 세 가지 상태와 용액 (157쪽) [12화학Ⅱ01-08] 묽은 용액의 증기압 내림, 끓는점 오름, 어는점 내림을 이해하고, 일상생활의 예를 들 수 있다.
하위문항	4-1	제시문 (가), (나), (다)의 내용과 동일
	4-2	제시문 (라), (마)의 내용과 동일

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수
고등학교 교과서	화학 Ⅰ	홍훈기 외 6인	㈜교학사	2020	제시문 (가): p.32 제시문 (나): p.33 제시문 (다): p.39-40 제시문 (라): p.43-44
	화학 Ⅰ	최미화 외 5인	㈜미래엔	2020	제시문 (가): p.28 제시문 (나): p.32-33 제시문 (다): p.36-41 제시문 (라): p.44-45
	화학 Ⅰ	노태희 외 6인	㈜천재교육	2019	제시문 (가): p.23-24 제시문 (나): p.28-29 제시문 (다): p.30-37 제시문 (라): p.40-43
	화학 Ⅰ	박종석 외 7인	㈜비상교육	2020	제시문 (가): p.29 제시문 (나): p.31 제시문 (다): p.34-39 제시문 (라): p.40-42
	화학 Ⅰ	강대훈 외 3인	㈜와이비엠	2020	제시문 (가): p.37 제시문 (나): p.38 제시문 (다): p.50-53 제시문 (라): p.41-42
	화학 Ⅰ	황성용 외 3인	㈜동아출판	2020	제시문 (가): p.31-32 제시문 (나): p.33 제시문 (다): p.39-43 제시문 (라): p.36-37
	화학 Ⅰ	이상권 외 7인	㈜지학사	2019	제시문 (가): p.27-28 제시문 (나): p.31-33 제시문 (다): p.34-39 제시문 (라): p.40-42
	화학 Ⅰ	하윤경 외 5인	㈜금성출판사	2019	제시문 (가): p.29-32 제시문 (나): p.32-33 제시문 (다): p.40-43 제시문 (라): p.34-38
	화학 Ⅱ	홍훈기 외 6인	㈜교학사	2020	제시문 (라): p.53-57 제시문 (마): p.62-64
	화학 Ⅱ	최미화 외 5인	㈜미래엔	2020	제시문 (라): p.52-55 제시문 (마): p.60-63
	화학 Ⅱ	노태희 외 6인	㈜천재교육	2019	제시문 (라): p.49-52 제시문 (마): p.50-57

	화학 Ⅱ	박종석 외 7인	㈜비상교육	2020	제시문 (라): p.39-40 제시문 (마): p.44-45
	화학 Ⅱ	이상권 외 7인	㈜지학사	2019	제시문 (라): p.49-50 제시문 (마): p.53-56
	화학 Ⅱ	장낙한 외 9인	㈜상상아카데미	2020	제시문 (라): p.56-57 제시문 (마): p.65-67

5. 문항 해설

제시문의 내용은 몰, 아보가드로 법칙, 화학 반응에서의 양적 관계, 몰 농도, 몰랄 농도 및 묽은 용액의 끓는점 오름에 대한 것으로 고등학교 교과서 ‘화학 Ⅰ’과 ‘화학 Ⅱ’의 기본 내용을 기반으로 하였으며 고등학교 과학과 교육과정 범위 내에 포함되어 있다. 하위 문항 [문제 4-1]과 [문제 4-2]에서는 제시문에서 다루어지는 여러 가지 화학 개념을 연계하여 종합적으로 사고하고 이를 바탕으로 올바른 결론을 도출할 수 있는지 물어보고자 한다.

[문제 4-1]은 화학 Ⅰ의 기본 학습 내용인 몰, 아보가드로 법칙, 화학 반응의 양적 관계에 대해 이해하고, 이를 기체의 화학 반응에 적용하여 논리적으로 생각할 수 있는지 물어보는 문제이다. 기체의 화학 반응에서 반응한 기체와 생성한 기체의 몰수 변화를 화학 반응식의 반응 계수로부터 알아내고, 온도와 압력이 일정할 때 기체 분자의 몰수가 기체의 부피에 비례한다는 아보가드로 법칙과 연계하여 기체의 화학 반응을 이해할 수 있어야 한다. 이를 바탕으로 전체 기체의 몰수 변화로부터 화학 반응의 반응 계수비를 유추하고, 이로부터 전체 기체의 부피 및 밀도 변화를 논리적으로 추론하여 반응 초기에 존재하는 기체 분자의 분자량을 구할 수 있어야 한다.

[문제 4-2]는 화학 Ⅰ에서 다루는 몰 농도의 개념과 화학 Ⅱ에서 다루는 몰랄 농도 및 끓는점 오름의 개념에 대한 이해를 바탕으로 이를 통합적으로 연계하여 용액의 총괄성을 이해하고 있는지 물어보는 문제이다. 용액의 끓는점 오름은 용액에 녹아 있는 용질의 종류에는 관계없이 용질의 입자 수, 즉 몰랄 농도에 비례한다는 것을 이해하여 두 가지의 서로 다른 용질이 같이 녹아 있는 용액의 끓는점 오름을 유추할 수 있어야 한다. 두 가지의 용질이 녹아 있는 용액의 끓는점 오름과 각 용질이 녹아 있는 용액의 끓는점 오름을 비교하여 두 가지 용질이 녹아 있는 용액에 존재하는 각 용질의 몰수비를 구할 수 있어야 한다. 또한, 몰랄 농도와 몰 농도의 차이를 이해하여 용액에 존재하는 용질의 양과 분자량을 논리적으로 도출해 낼 수 있어야 한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
4-1	[채점 요소] 기체의 화학 반응에서 나타나는 전체 기체의 몰수 변화로부터 화학 반응식의 반응 계수비를 추론하고, 이를 바탕으로 전체 기체의 부피 및 밀도 변화를 도출하여 반응 초기에 존재하는 기체 분자의 분자량을 구할 수 있는가? [예시 답안] 7번 참조 [채점 준거] 다음과 같이 3단계로 나누어서 각 부분 점수를 준다. 1. 반응 계수비 $a:b$가 $3:1$이라는 것을 보이면 **+3점** 2. $\dfrac{c+d}{a+b}=0.75$라고 바르게 구하면 **+4점** 3. 반응에서 일어나는 질량 변화와 부피 변화를 알아내고, 이를 바탕으로 A의 분자량이 24라고 바르게 구하면 **+8점**	15

	※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 15점 이내에서 ±2점 점수 조절 가능함.	
4-2	[채점 요소] 서로 반응하지 않는 두 종류의 용질이 녹아 있는 수용액의 끓는점 오름으로부터 녹아 있는 용질의 몰수비를 구할 수 있고, 용액의 몰 농도와 몰랄 농도의 차이로부터 용질의 분자량을 알아낼 수 있는가? [예시 답안] 7번 참조 [채점 준거] 다음과 같이 3단계로 나누어서 각 부분 점수를 준다. 1. 수용액 C에 녹아 있는 용질 A와 B의 몰수비가 1 : 9 라는 것을 바르게 구하면 **+7점** 2. x가 25라는 것을 바르게 구하면 **+5점** 3. 용질 A의 분자량이 250이라는 것을 바르게 보이면 **+3점** ※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 15점 이내에서 ±2점 점수 조절 가능함.	15

7. 예시 답안

[문제 4-1]

▶ 문제에 주어진 그래프에서 넣어준 B의 몰수가 0.1 몰일 때 실린더 안의 기체 A가 모두 반응했다는 것을 알 수 있으므로 화학 반응식의 반응 계수 a : b = 0.3 : 0.1 = 3 : 1이라는 것을 알 수 있다.

▶ 위의 반응 계수비로부터 주어진 화학 반응식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

3A(g) + B(g) → cC(g) + dD(g)

넣어준 B의 몰수가 0.1몰보다 작을 때에는 넣어준 B는 전부 반응하기 때문에 반응 전후의 양적 관계는 다음의 표와 같다.

	A의 몰수	B의 몰수	C의 몰수	D의 몰수	전체 몰수
반응 전	0.3	0	0	0	0.3
B α몰 첨가		$+\alpha$			
반응 후	$0.3-3\alpha$	$\alpha-\alpha=0$	$c\alpha$	$d\alpha$	$0.3+(c+d-3)\alpha$

반응 후의 전체 기체의 몰수가 반응 전과 같이 0.3몰이므로 c+d =3라는 것을 알 수 있다.

따라서, $\frac{c+d}{a+b}=\frac{3}{4}=0.75$이다.

(별해) 주어진 화학 반응식을 3bA(g) + bB(g) → cC(g) + dD(g)로 두고 문제를 풀 수 있다.

	A의 몰수	B의 몰수	C의 몰수	D의 몰수	전체 몰수
반응 전	0.3	0	0	0	0.3
B α몰 첨가		$+\alpha$			
반응 후	$0.3-3\alpha$	$\alpha-\alpha=0$	$\frac{c}{b}\alpha$	$\frac{d}{b}\alpha$	$0.3+(\frac{c+d}{b}-3)\alpha$

이때 반응 후 전체 기체의 몰수가 0.3몰이므로 $\frac{c+d}{b}=3$이고, $\frac{c+d}{a+b}=\frac{3b}{3b+b}=0.75$이다.

▶ 기체 B를 0.1몰 첨가할 때 실린더 내의 기체의 질량은 반응 초기에 존재한 A 0.3몰과 첨가한 B 0.1몰의 질량의 합과 같다. 따라서, A와 B의 분자량을 각각 M_A, M_B라고 할 때 기체의 질량은 $w_1=0.3M_A+0.1M_B$이다. 반응 후 기체의 몰수는 초기 몰수인 0.3몰과 같다.

▶ 기체 B를 0.3몰 첨가하여 반응이 완료된 후의 기체의 질량은 반응 초기에 존재한 A 0.3몰과 첨가한 B 0.3몰의 질량의 합과 같다. 따라서 이때 기체의 질량은 $w_2 = 0.3M_A + 0.3M_B$이다. 반응으로 B 0.1몰이 소모된 후에는 실린더에 존재하는 A가 없으므로 더 이상의 반응은 일어나지 않기 때문에 반응 전후의 양적 관계는 다음과 같다.

	A의 몰수	B의 몰수	C의 몰수	D의 몰수	전체 몰수
반응 전	0.3	0	0	0	0.3
B 0.3몰 첨가		+0.3			
반응 후	0	0.2	$0.1c$	$0.1d$	$0.2+0.1(c+d)$

c+d =3이기 때문에 반응 후 전체 기체의 몰수는 0.2+0.1(c+d) = 0.5 몰이 된다. 일정 온도와 압력에서 기체의 부피는 몰수에 비례하므로 반응 후 기체의 부피 V_2는 B 0.1몰을 첨가하였을 때의 기체의 부피 V_1과 다음의 관계가 성립한다.

$$V_1 : V_2 = 0.3 : 0.5 \qquad \therefore V_2 = \frac{5}{3}V_1$$

▶ B를 0.1몰과 0.3몰 첨가하여 반응이 완료되었을 때의 기체의 밀도가 서로 같다고 하였으므로 다음의 식이 성립한다.

$$\frac{w_1}{V_1} = \frac{0.3M_A + 0.1M_B}{V_1} = \frac{w_2}{V_2} = \frac{0.3M_A + 0.3M_B}{\frac{5}{3}V_1}$$

위 식을 풀면, $\frac{M_B}{M_A} = 1.5$가 되고, $M_B = 36$이므로 $\underline{M_A = 24}$이다.

[문제 4-2]

▶끓는점 오름은 용액의 몰랄 농도에 비례하므로 용질 x g이 녹아 있는 수용액에서는 다음과 같은 관계식이 성립한다.

A 수용액: $\Delta T_b = 0.102 = K_b \times m_A = 0.51 \times m_A \qquad \therefore m_A = 0.2$

B 수용액: $\Delta T_b = 0.306 = K_b \times m_B = 0.51 \times m_B \qquad \therefore m_B = 0.6$

$m_A = \dfrac{\frac{x}{M_A}\mathrm{mol}}{0.5\,\mathrm{kg}} = 0.2$, $m_B = \dfrac{\frac{x}{M_B}\mathrm{mol}}{0.5\,\mathrm{kg}} = 0.6$ 이므로 $M_A = 10x, M_B = \dfrac{10x}{3}$이다. 따라서, 용질 A와 B의 분자량의 비는 $M_A : M_B = 3:1$이라는 것을 알 수 있다.

▶ 수용액 C에 녹아 있는 용질의 총 질량이 x g일때 용질 A와 B의 몰수를 n_A, n_B라고 하자. 이때 용질의 총 몰수(n_t)는 $m_C = \dfrac{n_t\,\mathrm{mol}}{0.5\,\mathrm{kg}} = \dfrac{0.255}{K_b} = \dfrac{0.255}{0.51} = 0.5$ 이므로 $n_t = 0.25\mathrm{mol}$이다. 따라서, 다음의 식이 성립한다.

$$n_t = n_A + n_B = 0.25$$

$$x = n_A M_A + n_B M_B = n_A \times 10x + n_B \times \frac{10x}{3}$$

위 두 식을 연립해서 풀면 $n_A = 0.025\,\mathrm{mol}, n_B = 0.225\,\mathrm{mol}$이 나온다.

따라서, 수용액 C에 녹아 있는 용질 A와 B의 몰수비는 $n_A : n_B = 1:9$이다.

▶ 용질 A가 x g, $2x$ g 녹아 있는 수용액의 몰 농도의 비가 $\frac{21}{11}$이므로 다음의 식이 성립한다.

$$\frac{\frac{x}{M_A}\mathrm{mol}}{\frac{(500+x)\,\mathrm{g}}{1\mathrm{g/mL}}\times 10^{-3}L/mL}:\frac{\frac{2x}{M_A}\mathrm{mol}}{\frac{(500+2x)\,\mathrm{g}}{1g/mL}\times 10^{-3}\mathrm{L/mL}}=11:21$$

위 식을 풀면 $x = 25$ 라는 것을 알 수 있다.

▶ 용질이 25 g 녹아 있는 A 수용액의 몰랄 농도가 0.2 m 이므로 $0.2 = \frac{\frac{25}{M_A}\mathrm{mol}}{0.5\,\mathrm{kg}}$ 라고 쓸 수 있고, 따라서 용질 A의 분자량은 250 이다.

문항카드 23

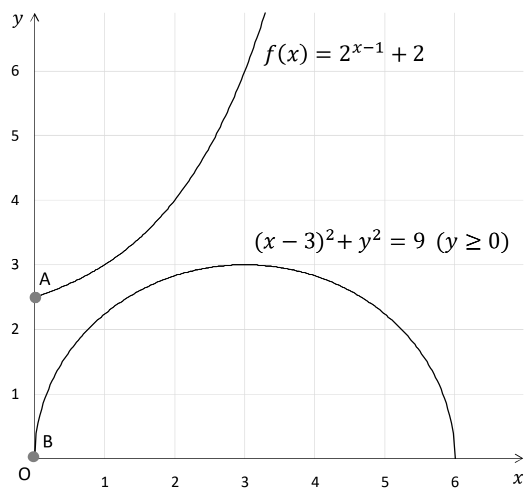
1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	수시 모집 논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열Ⅲ(수학) / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학
	핵심개념 및 용어	두 점 간의 거리, 경우의 수
예상 소요 시간	15분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 다음 상황에 기초하여 문제에 답하시오.

다음은 함수 $f(x)=2^{x-1}+2$ 와 원의 방정식 $(x-3)^2+y^2=9$ 의 일부이다.



y축 위의 점 A와 B는 다음의 규칙에 따라 이동한다.

- 1부터 4까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀있는 4장의 카드가 있다. 이 중에서 임의로 1장의 카드를 택하여 그 카드에 적혀있는 숫자를 a 라고 하면, 점 A는 $(a, f(a))$ 로 이동한다.
- 주사위를 한 번 던져서 나오는 눈의 수를 b 라고 하면,
  점 B는 $x=b$ 와 $(x-3)^2+y^2=9\ (y\geq 0)$ 과의 교점으로 이동한다.

[문제 1] 위의 규칙에 따라 이동한 두 점 A와 B에서 원점까지의 거리를 각각 구하였다. 이때 각 거리 제곱의 차이가 최소가 되는 순서쌍 (a,b) 를 모두 구하시오. [20점]