

제2교시

수학 영역(가형)



5지선다형

1. 벡터 $\vec{a} = (-1, 4)$ 에 대하여 벡터 $3\vec{a}$ 의 모든 성분의 합은?
[2점]

① -3 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

2. $\sin\theta = \frac{1}{3}$ 일 때, $\cos 2\theta$ 의 값은? [2점]

① $\frac{4}{9}$ ② $\frac{5}{9}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{7}{9}$ ⑤ $\frac{8}{9}$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^{x+1} - 2}{3^x - 1}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 두 사건 A, B 에 대하여
 $P(B^c) = \frac{1}{3}$, $P(B \cap A^c) = \frac{2}{5}$
 일 때, $P(A|B)$ 의 값은?(단, A^c 은 A 의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{2}{15}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{4}{15}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{5}$

5. 함수 $f(x) = \frac{e^{2x}}{x+1}$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{3}{4}e^2$ ② e^2 ③ $\frac{5}{4}e^2$ ④ $\frac{3}{2}e^2$ ⑤ $\frac{7}{4}e^2$

7. 매개변수 t 로 나타내어진 함수

$$x = t\sqrt{t}, \quad y = t^2 - t$$

에서 $t=9$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{22}{9}$ ② $\frac{26}{9}$ ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{34}{9}$ ⑤ $\frac{38}{9}$

6. 부등식 $4^x - 2^{x+2} - 32 \leq 0$ 을 만족시키는 자연수 x 의 개수는?
[3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

8. 좌표평면에서 두 직선

$$\frac{x+1}{2}=3-y, \quad x-4=\frac{1-y}{3}$$

가 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos \theta$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

9. 문자 E가 적혀 있는 카드 2장, 문자 F가 적혀 있는 카드 2장, 문자 C, 문자 O가 적혀 있는 카드가 각각 1장씩 있다. 이 6장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, C가 적혀 있는 카드는 문자 O가 적혀 있는 카드보다 왼쪽에 나열되는 경우의 수는? [3점]

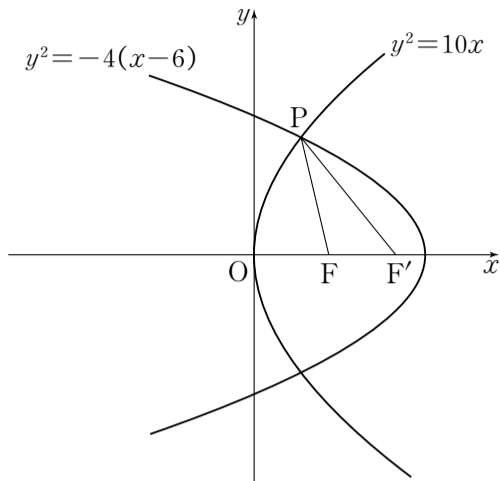


- ① 88 ② 90 ③ 92 ④ 94 ⑤ 96

10. 집합 $X=\{1, 2, 3\}$ 에서 집합 $Y=\{3, 4, 5, 6\}$ 으로의 함수 중에서 $f(1)+f(2)+f(3)=13$ 을 만족시키는 함수 f 의 개수는? [3점]

- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

11. 두 포물선 $y^2=10x$, $y^2=-4(x-6)$ 의 초점을 각각 F, F'이라 하고, 두 포물선이 만나는 한 점을 P라 하자. 삼각형 PFF'의 둘레의 길이는? [3점]

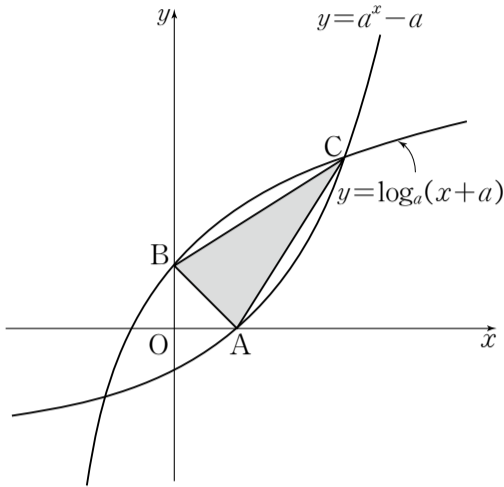


- ① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

12. 직선 $x=2$ 가 타원 $x^2-2x+\frac{y^2}{9}=1$ 과 제1사분면에서 만나는 점을 P라 할 때, 점 P에서 이 타원에 접하는 직선의 기울기는? [3점]

- ① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

13. 1보다 큰 양수 a 에 대하여 곡선 $y=a^x-a$ 가 x 축과 만나는 점을 A, 곡선 $y=\log_a(x+a)$ 가 y 축과 만나는 점을 B라 하고, 두 곡선 $y=a^x-a$, $y=\log_a(x+a)$ 가 제1사분면에서 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 ACB의 넓이가 $\frac{3}{2}$ 일 때, 상수 a 의 값은? [3점]



- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

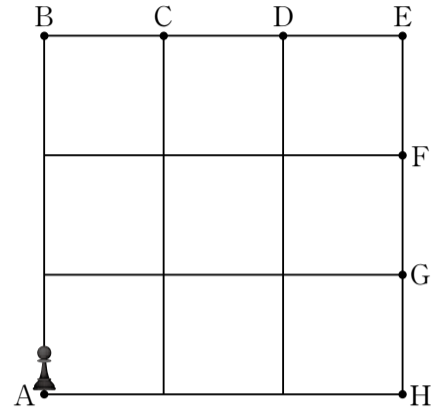
14. 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 모든 양의 실수 x 에 대하여 $f'(e^x) = \ln x$ 를 만족시킬 때, $\int_e^{e^2} \frac{f'(x)}{x} dx$ 의 값은? [4점]

- ① $2\ln 2 - 1$ ② $2\ln 2 - \frac{1}{2}$ ③ $2\ln 2$
 ④ $2\ln 2 + \frac{1}{2}$ ⑤ $2\ln 2 + 1$

15. 실수 t 에 대하여 곡선 $y=2xe^{2x}$ 위의 점 $(t, 2te^{2t})$ 에서의 접선이 y 축과 만나는 점의 y 좌표를 $f(t)$ 라 하자. 함수 $f(t)$ 가 $t=a$ 에서 극솟값 b 를 가질 때, ab 의 값은? [4점]

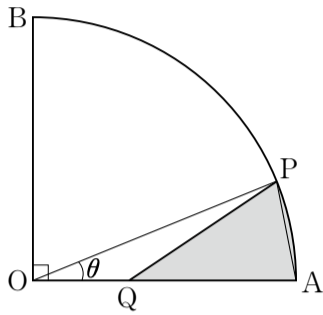
- ① $-\frac{2}{e}$ ② $-\frac{4}{e^2}$ ③ 0 ④ $\frac{2}{e}$ ⑤ $\frac{4}{e^2}$

16. 그림과 같은 바둑판 모양의 도형에서 한 개의 동전을 던질 때마다 동전의 앞면이 나오면 말(♞)을 오른쪽(→)으로 한 칸 움직이고, 뒷면이 나오면 말(♞)을 위쪽(↑)으로 한 칸 움직인다. 단, 말이 점 E, F, G, H에 있을 때 동전의 앞면이 나오면 움직이지 않고, 말이 점 B, C, D, E에 있을 때 동전의 뒷면이 나오면 움직이지 않는다. 점 A에 있던 말이 한 개의 동전을 6번 던진 후, 점 D, G에 있을 확률을 각각 p_1, p_2 라 하자. $p_1 - p_2$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{1}{64}$ ② $\frac{3}{64}$ ③ $\frac{5}{64}$ ④ $\frac{7}{64}$ ⑤ $\frac{9}{64}$

17. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 선분 OA 위에 $\overline{PA} = \overline{OQ}$ 를 만족시키는 점 Q를 정하자. $\angle POA = \theta (0 < \theta < \frac{\pi}{3})$ 라 할 때, 부채꼴 OAP의 내부이면서 삼각형 OQP의 외부인 색칠한 부분의 넓이를 $f(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\theta - 2f(\theta)}{\theta^2}$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

18. A, B, C 세 사람이 각각 주머니를 하나씩 가지고 있다. A가 가지고 있는 주머니에는 1, 7, 8의 숫자가 하나씩 적혀 있는 3장의 카드가 들어있고, B가 가지고 있는 주머니에는 4, 5, 6의 숫자가 하나씩 적혀 있는 3장의 카드가 들어있고, C가 가지고 있는 주머니에는 2, 3, 9의 숫자가 하나씩 적혀 있는 3장의 카드가 들어있다. A, B, C 세 사람 중 어떤 두 사람이 각자의 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼낼 때, 더 큰 숫자가 적힌 카드를 꺼낸 사람이 이기는 게임을 하려고 한다. A와 B의 게임에서 A가 이길 확률을 p_1 , B와 C의 게임에서 B가 이길 확률을 p_2 , C와 A의 게임에서 C가 이길 확률을 p_3 이라 할 때, $p_1 + p_2 + p_3$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{5}{3}$ ② $\frac{16}{9}$ ③ $\frac{17}{9}$ ④ 2 ⑤ $\frac{19}{9}$

19. 1부터 n 까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 n 장의 카드가 들어 있는 상자가 있다. 다음은 이 상자에서 임의로 두 장의 카드를 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 두 카드에 적혀 있는 수의 합이 n 보다 클 확률을 구하는 과정이다. (단, $n \geq 2$)

꺼낸 두 장의 카드에 적혀 있는 수를 각각 $a, b(a < b)$ 로 나타내기로 하자.

- (i) n 이 홀수, 즉 $n = 2m + 1$ (m 은 1 이상의 자연수)인 경우

$a = 1$ 일 때, $b = 2m + 1$ 이어야 하므로 1가지

$a = 2$ 일 때, $2m \leq b \leq 2m + 1$ 이어야 하므로 2가지

$a = 3$ 일 때, $2m - 1 \leq b \leq 2m + 1$ 이어야 하므로 3가지

⋮

$a = m$ 일 때, $m + 2 \leq b \leq 2m + 1$ 이어야 하므로

m 가지이다.

같은 방법으로 생각하면

$a \geq m + 1$ 일 때, 나오는 모든 경우의 수는

이므로

n 이 홀수일 때, 주어진 조건을 만족시키는 확률은

$$\frac{1}{{}_{2m+1}C_2} (1 + 2 + 3 + \dots + m + \text{$$

- (ii) n 이 짝수, 즉 $n = 2m$ (m 은 1 이상의 자연수)인 경우

$a = 1$ 일 때, $b = 2m$ 이어야 하므로 1가지

$a = 2$ 일 때, $2m - 1 \leq b \leq 2m$ 이어야 하므로 2가지

$a = 3$ 일 때, $2m - 2 \leq b \leq 2m$ 이어야 하므로 3가지

⋮

$a = m$ 일 때, $m + 1 \leq b \leq 2m$ 이어야 하므로 m 가지이다.

같은 방법으로 생각하면

$a \geq m + 1$ 일 때, 나오는 모든 경우의 수는

이므로

n 이 짝수일 때, 주어진 조건을 만족시키는 확률은

$$\frac{1}{{}_{2m}C_2} (1 + 2 + 3 + \dots + m + \text{$$

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $p(m), q(m)$ 이라 하고, (나), (라)에 알맞은 식을 각각 $r(n), s(n)$ 이라 할 때,

$\frac{p(10) \times r(10) \times s(10)}{q(11)}$ 의 값은? [4점]

- ① 80 ② 90 ③ 100 ④ 110 ⑤ 120

20. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) < 0$ 이다.

(나) $t > 1$ 인 임의의 실수 t 에 대하여 네 점 $(t, 0), (2-t, 0), (t, f(t)), (2-t, f(2-t))$ 를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이가 $(t-1)e^t$ 이다.

$\int_{-1}^3 f(x) dx$ 의 값은? [4점]

- ① $e - e^3\sqrt{e}$ ② $e - e^3$ ③ $e - e^2\sqrt{e}$
 ④ $e - e^2$ ⑤ $e - e\sqrt{e}$

21. 열린 구간 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 에서 정의된 두 함수 $f(x)=\sin x$,
 $g(x)=2x^2+4x$ 가 있다. 합성함수 $(g \circ f)(x)$ 의 역함수를
 $h(x)$ 라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
 [4점]

<보 기>

ㄱ. $h(0)=0$

ㄴ. $h'(0)=\frac{1}{4}$

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{h(\cos^2 3x) - 3a}{x - a}$ 의 값이 존재하도록 하는 실수
 a 의 개수는 3이다.

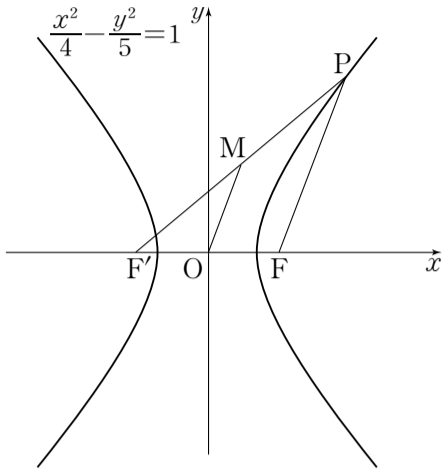
- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. 방정식 $\log_{\frac{1}{5}}(2x+1) = -2$ 를 만족시키는 실수 x 의 값을
 구하시오. [3점]

23. ${}_5P_2 + {}_5C_2$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 의 두 초점을 F, F'이라 하고, 쌍곡선 위의 점 P에 대하여 선분 PF'의 중점을 M이라 하자. $\overline{MF'} = 6$ 일 때, 사각형 OFPM의 둘레의 길이를 구하시오. (단, O는 원점이고, $\overline{PF} < \overline{PF'}$ 이다.) [3점]

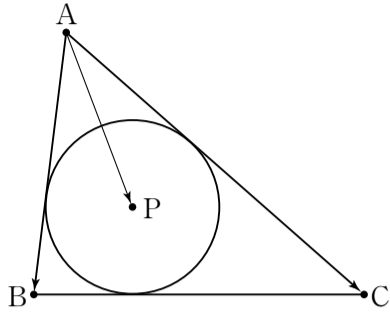


25. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z 의 모든 순서쌍 (x, y, z) 의 개수를 구하시오. [3점]

- (가) $x + y + z = 30$
- (나) x, y, z 를 3으로 나누었을 때의 나머지는 각각 0, 1, 2이다.

26. 함수 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4} - 10$ 이 있다. 자연수 n 에 대하여 직선 $y = n$ 이 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프와 제1사분면에서 만나는 점의 개수를 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{15} a_n$ 의 값을 구하시오. [4점]

27. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=5$, $\overline{CA}=6$ 인 삼각형 ABC의 내접원의 중심을 P라 하자. $\overrightarrow{AP}=p\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{AC}$ 일 때, $30(p+q)$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 실수이다.) [4점]



28. 함수 $f(x)=a\ln(x+b)$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)}{2h^2+3h}=1$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.) [4점]

29. 좌표평면에서 세 직선 l, m, n 위의 임의의 점을 각각 P, Q, R라 하자. 원점 O를 시점으로 하는 세 점 P, Q, R의 위치벡터를 각각 $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ 라 할 때, 원점 O를 시점으로 하는 두 위치벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여

$$\vec{p} = t\vec{a} + (1-t)\vec{b} \quad (t \text{는 실수})$$

$$\vec{q} = s\vec{a} + (2-2s)\vec{b} \quad (s \text{는 실수})$$

$$\vec{r} = u(\vec{b}-2\vec{a}) + (1-u)\vec{b} \quad (u \text{는 실수})$$

를 만족시킨다. 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 의 종점이 각각 A, B이고 삼각형 OAB의 넓이가 10일 때, 세 직선 l, m, n 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오. [4점]

30. 열린 구간 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 에서 미분가능하고 $f(0)=1$ 인 함수

$f(x)$ 가 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 인 모든 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad f(x) > 0$$

$$(나) \quad \left(\frac{1}{f(x)\cos x} \right)' = \frac{x}{\cos x}$$

$g(x) = \int_0^x \frac{\tan t}{f(t)} dt$ 라 할 때, $g(4) + \frac{1}{f(4)}$ 의 값을 구하시오.

[4점]

♣ 확인 사항

답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.