5 일만에 끝내는 라이브 특강

‘말로만 듣던 삼각함수의 신’

정승제 선생님

4~6교시 수학영역

EBSi

2021

정승제 선생님의

삼각함수 특강

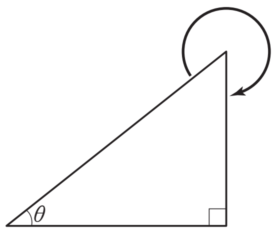
STAGE 01

삼각함수의 기초

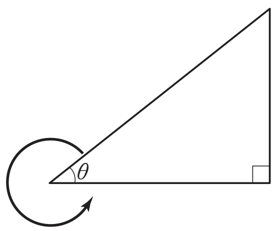
01 삼각비의 정의

직각삼각형을 이루고 있는 세 변 중 어느 두 변의 길이의 비를 ‘삼각비’라 하며, 총 6가지의 종류가 있다.
기본적인 것 세 가지, 부수적인 것 세 가지.
기본적인 세 가지를 sin, cos, tan라 부르며, 부수적인 것은 각각의 역수로서 csc, sec, cot라 부른다.
부수적인 것은 미적분을 학습하는 학생들에게만 해당된다. 그러므로 여기서는 다루지 않겠다!

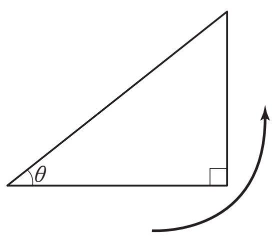
$\sin\theta \Rightarrow \theta$에서 시작해서 고개넘어 직각으로!!



$\cos\theta \Rightarrow \theta$를 사이에!! (빗변 먼저)



$\tan\theta \Rightarrow \theta$에서 시작해서 곧바로 직각으로!!



참고 **기본적인 삼각비의 역수** ※ 미적분을 학습한 학생들에게 해당

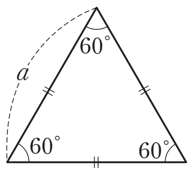
$$\frac{1}{\sin}=\text{cosec}(=\text{csc}),\ \frac{1}{\cos}=\text{sec},\ \frac{1}{\tan}=\text{cot}$$

‘co’가 있는 것의 역수는 ‘co’가 없고,
‘co’가 없는 것의 역수는 ‘co’가 있다.

02 암기해야 할 삼각비의 값

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

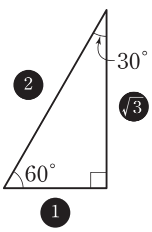
참고 특수각 삼각형 3개



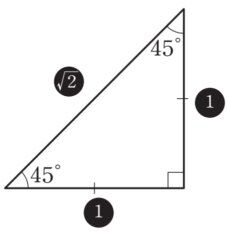
정삼각형

넓이 : $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

높이 : $\frac{\sqrt{3}}{2}a$



369 삼각형



직각이등변삼각형

03 호도법

$y=\sin x$와 같이 삼각비를 함수로 표현하기 위해서는 각 x의 값이 실수로 표현되어야 한다. 중심이 원점인 원을 생각해서 반지름의 길이와 호의 길이가 같을 때 생기는 중심각을 1라디안이라 부르기로 약속했으며 라디안을 생략해서 일반적으로 1이라 부른다. 이와 같이 각을 실수로 나타내는 방법을 호도법이라고 한다.

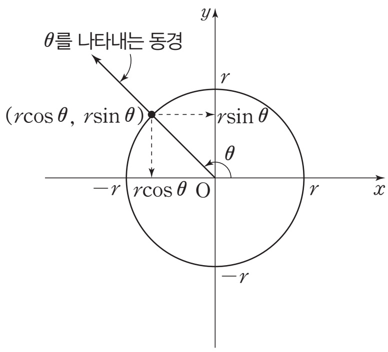
$$\pi=180^\circ$$

암기하여야 할 것들

$$30^\circ=\frac{\pi}{6},\ 45^\circ=\frac{\pi}{4},\ 60^\circ=\frac{\pi}{3},\ 90^\circ=\frac{\pi}{2},\ 360^\circ=2\pi$$

04 삼각함수의 정의

중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원과 θ를 나타내는 동경과의 교점의 좌표는 $(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$이다.

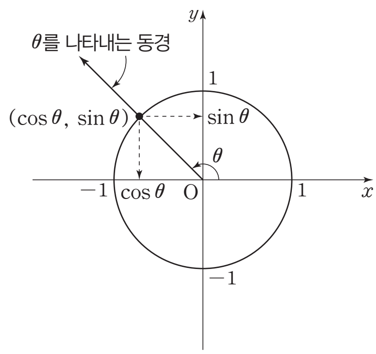


따라서 x좌표를 반지름으로 나눈 것이 cos의 정의, y좌표를 반지름으로 나눈 것이 sin의 정의가 된다.

$$\cos\theta=\frac{x\text{좌표}}{\text{반지름}}$$

$$\sin\theta=\frac{y\text{좌표}}{\text{반지름}}$$

특히, 반지름의 길이가 1인 단위원으로 정의하면 더욱 간단해진다.



이때에는 x좌표가 $\cos\theta$가 되며, y좌표가 $\sin\theta$가 된다.

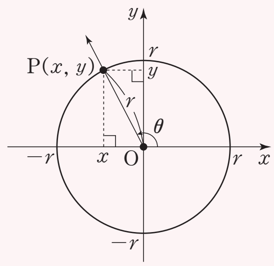
또, $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$라 했으므로

$$\tan\theta=\frac{y\text{좌표}}{x\text{좌표}}$$

가 되며 이는 동경이 나타내는 직선의 기울기가 된다.

삼각함수의 정의

중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원과 θ를 나타내는 동경의 교점의 좌표를 생각했을 때,



$$\cos\theta=\frac{x}{r} \leftarrow \frac{x\text{좌표}}{\text{반지름}}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r} \leftarrow \frac{y\text{좌표}}{\text{반지름}}$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}\ (x\neq 0) \leftarrow \frac{y\text{좌표}}{x\text{좌표}}$$

STAGE 02

삼각함수의 여러 가지 공식

01 각 바꾸기 공식

각이 너무 크거나 복잡할 때에는 간단한 각으로 바꿀 수 있다. 이때 쓰이는 공식이 총 5개가 있는데, 이것만 익혀두면 학교에서나 참고서에서 접할 수 있는 여러 가지 잡공식들을 이용하지 않고서도 쉽게 각을 간단히 고칠 수 있다.

❶ **음각 공식 :** cos만 '−'를 소화시키고 나머지는 뱉어낸다.

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$\cos(-\theta)=\cos\theta$

$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

❷ **90° 공식 :** sin과 cos은 각을 합해서 90도가 되면 값이 같다.

합 : 90°

$\sin\triangle=\cos\square$

❸ **180° 공식 :** sin과 sin은 각을 합해서 180도가 되면 값이 같다.

합 : 180°

$\sin\triangle=\sin\square$

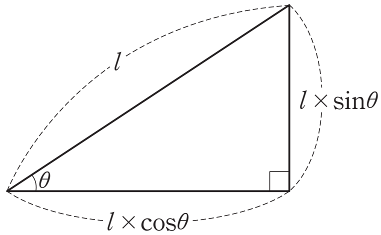
❹ **360° 공식 :** cos과 cos은 각을 합해서 360도가 되면 값이 같다.

합 : 360°

$\cos\triangle=\cos\square$

❺ **주기 공식 :** 주어진 각에 주기 혹은 주기의 배수를 더하거나 빼도 값은 같다.

sin, cos의 주기 : $360^\circ(=2\pi)$
tan의 주기 : $180^\circ(=\pi)$



02 제곱관계 공식

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$(S+C)^2=1+2SC$ 일 플러스 이싸코

$(S-C)^2=1-2SC$ 일 마이너스 이싸코

• 예제 01 $\begin{cases} x=\sin\theta+\cos\theta-1 \\ y=\sin\theta-\cos\theta+2 \end{cases}$ 일 때, 점 $(x,\ y)$의 자취의 방정식을 구하시오.

03 그 밖의 공식

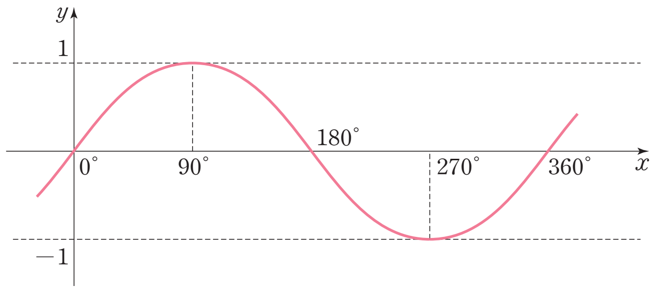
$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 코부네싸

STAGE 03

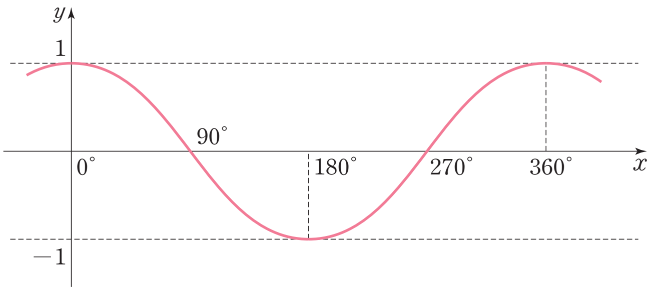
삼각함수의 그래프

01 삼각함수의 그래프

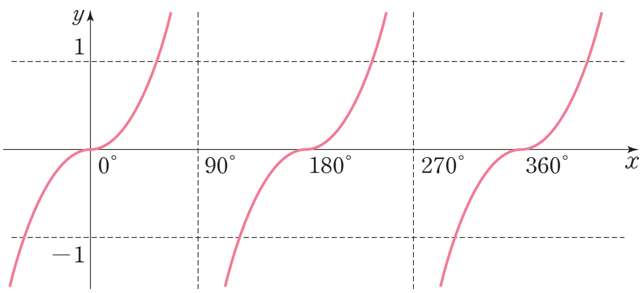
(1) $y=\sin x$의 그래프 (최댓값 : 1, 최솟값 : -1, 주기 : $360°(=2\pi)$)



(2) $y=\cos x$의 그래프 (최댓값 : 1, 최솟값 : -1, 주기 : $360°(=2\pi)$)



(3) $y=\tan x$의 그래프 (최댓값 : 없다, 최솟값 : 없다, 주기 : $180°(=\pi)$)



02 최댓값, 최솟값, 주기

이제 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$ 등 기본적인 그래프는 완벽하게 그릴 줄 안다. 하지만, 이 놈들이 평행이동을 하거나 x축에 대칭이동을 하게 되면 식이 지저분해 지는데, 이 지저분한 삼각함수에 대하여 최댓값, 최솟값, 주기를 구하라는 문제가 종종 출제된다. 완벽히 이해한 후 아래의 사항들을 기억해 두자.
매우 편리해 진다.

$y=a\sin bx$, $y=a\cos bx$	$y=a\tan bx$
최댓값 : $\lvert a\rvert$ (계수를 무조건 '+'로 만든 것) 최솟값 : $-\lvert a\rvert$ (최댓값에 '−'붙인 것) 주기 : $\dfrac{\text{원래주기}}{x\text{의 계수}}$	최댓값 : 없다. 최솟값 : 없다. 주기 : $\dfrac{\text{원래주기}}{x\text{의 계수}}$

끝에 붙어 있는 상수항 처리법 (y축 평행이동)

➡ 맨 마지막에 처리한다.

$y=■\pm c$

여기에 대한 최댓값, 최솟값, 주기를 구한 다음 최댓값, 최솟값에 각각 $\pm c$를 붙여 준다.
(주기에는 아무런 영향을 미치지 못한다.)

$y=\sin a(x-\text{각})$ 처리법 (x축 평행이동)

x축 평행이동은 최댓값, 최솟값, 주기에 아무런 영향을 미치지 않는다.

03 삼각함수의 최대 최소

① 동일한 삼각비로 통일한다.
➡ 제곱된 각을 바꾼다. $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$, $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ 이용

② t로 치환하여 2차함수의 최대 · 최소를 구한다. (이때 t의 범위가 생긴다)

• **예제 02** $y=-2\sin^2 x+\sin x+1$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

• **예제 03** $y=\sin^2 x+2\cos x-1$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

04 삼각방정식과 삼각부등식

주어진 삼각방정식이나 삼각부등식을 함수로 고쳐 그래프를 그린다.

• **예제 04** $\sin x=\frac{1}{2}$의 해를 구하시오. (단, $0\le x\le 2\pi$)

• **예제 05** $2\cos^2 x+7\sin x-5=0$의 해를 구하시오. (단, $0\le x\le 2\pi$)

• **예제 06** $0\le x\le 2\pi$일 때, 다음 삼각부등식의 해를 구하시오.

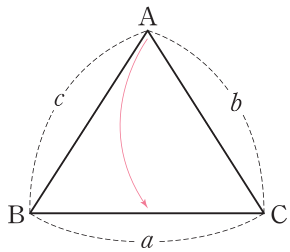
(1) $\sin x>\cos x$

(2) $2\cos^2 x-3\sin x<0$

STAGE 04

삼각형과 삼각함수

01 삼각형의 6요소



A, B, C : 각(삼각형의 세 내각 $\angle\mathrm{A}$, $\angle\mathrm{B}$, $\angle\mathrm{C}$)
a, b, c(소문자) : 그 각과 마주보는 변

➡ 서로 마주보는 각과 변은 발음이 같다.

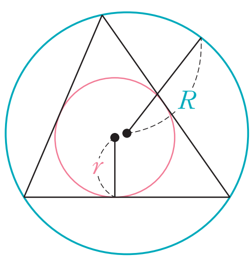
에이, 비, 씨

세 문자 중 어느 두 문자가 언급되면, 결과는 나머지 한 문자로 표현되고,
세 문자 중 어느 한 문자가 언급되면, 결과는 나머지 두 문자로 표현된다.

최대각과 최소각

최대각 : 가장 긴 변이 마주보는 각
최소각 : 가장 짧은 변이 마주보는 각

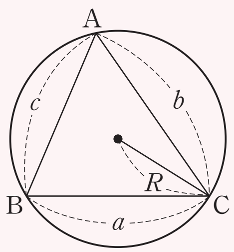
02 외접원과 내접원



외접원의 반지름 : R
내접원의 반지름 : r

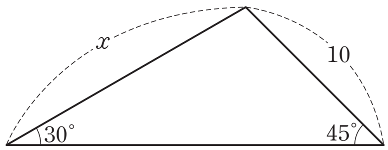
03 sin 법칙

한 변의 길이를 그 마주보는 각에다가 sin 붙인 것으로 나눈 값은 일정하다. $2R$로 일정하다.

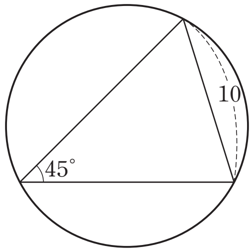


$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

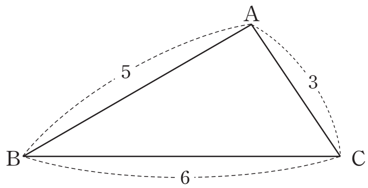
• 예제 07 다음 그림의 삼각형에서 x의 값을 구하시오.



• 예제 08 다음 그림의 원의 넓이를 구하시오.



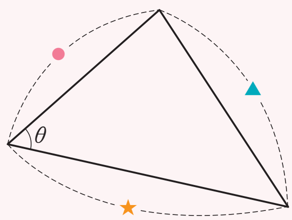
• **예제 09** 다음 그림의 삼각형 ABC에서 $\sin A : \sin B : \sin C$를 구하시오.



04 cos 법칙

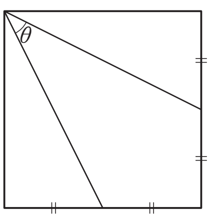
▶ $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 세 변과 한 각의 관계식

➡ 분모만 익혀두고, 분자는 그놈 제곱, 그놈 제곱, 빼기 나머지 제곱

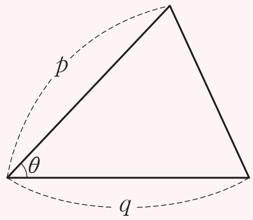


$\cos\theta=\dfrac{●^2+★^2-▲^2}{2●★}$

• **예제 10** 다음 그림의 정사각형에서 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값을 구하시오.

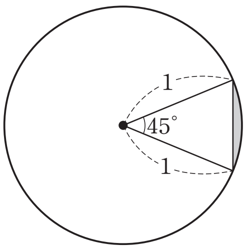


05 삼각형의 넓이

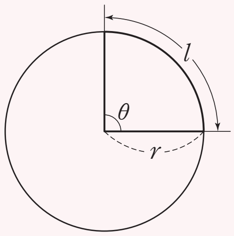


$$S=\frac{1}{2}pq\sin\theta$$

• 예제 11 다음 그림에서 어두운 활꼴 부분의 넓이를 구하시오



06 부채꼴 공식



(1) $l=r\theta$

(2) $S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl$

예제 정답

- **예제 01** $(x+1)^2+(y-2)^2=2$
- **예제 02** 최댓값: $\frac{9}{8}$, 최솟값: -2
- **예제 03** 최댓값: 1, 최솟값: -3
- **예제 04** $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$
- **예제 05** $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$
- **예제 06** (1) $\frac{\pi}{4}<x<\frac{5}{4}\pi$ (2) $\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$
- **예제 07** $10\sqrt{2}$
- **예제 08** 50π
- **예제 09** $6:3:5$
- **예제 10** $\sin\theta=\frac{3}{5}$, $\cos\theta=\frac{4}{5}$, $\tan\theta=\frac{3}{4}$
- **예제 11** $\frac{\pi}{8}-\frac{\sqrt{2}}{4}$