



개념픽

개념 PICK 유형 PICK

확률과 통계

• 정답과 풀이 •

스피드체크

I. 경우의 수

1 순열과 조합

- 체크 001** (1) 96
(2) 720
- 체크 002** (1) 3600
(2) 1440
- 체크 003** 360
- 체크 004** 18
- 체크 005** 8
- 체크 006** 30
- 체크 007** 240
- 체크 008** (1) 729
(2) 1024
- 체크 009** 32
- 체크 010** 127
- 체크 011** 216
- 체크 012** 120
- 체크 013** 250
- 체크 014** 100
- 체크 015** 150
- 체크 016** 78
- 체크 017** 12
- 체크 018** 18
- 체크 019** 720
- 체크 020** 7560
- 체크 021** 420
- 체크 022** (1) 30

(2) 96

- 체크 023** 60
- 체크 024** 105
- 체크 025** 16
- 026** 144
- 027** ②
- 028** 180
- 029** 254
- 030** 131
- 031** 6
- 032** 819
- 033** 80
- 034** 729
- 035** 65
- 036** 175
- 037** 36
- 038** 16
- 039** 660
- 040** 33
- 041** ④
- 042** 510
- 043** 1680
- 체크 044** 15
- 체크 045** 165
- 체크 046** 264
- 체크 047** 84
- 체크 048** (1) 21
(2) 60

- 체크 049** (1) 286
(2) 84
(3) 20
- 체크 050** 120
- 체크 051** 18
- 체크 052** 100
- 체크 053** 330
- 체크 054** (1) 125
(2) 60
(3) 5
(4) 10
(5) 35
- 체크 055** 56
- 056** 9
- 057** ⑤
- 058** 21
- 059** 56
- 060** 20
- 061** 15
- 062** 49
- 063** 20
- 064** 55
- 065** 12
- 066** 35
- 067** 14
- 068** 40
- 069** 96
- 070** 420

071 35

072 32

2 이항정리

체크 073 160

체크 074 $\frac{1}{4}$

체크 075 (1) 90

(2) 70

체크 076 12

체크 077 $\sqrt{2}$

체크 078 ④

체크 079 11

체크 080 1024

체크 081 11

082 2

083 5

084 5

085 70

086 228

087 660

088 32

089 6

090 255

091 3

092 ①

093 ①

II. 확률

1 확률의 뜻과 활용

체크 094 16

체크 095 $\frac{7}{18}$

체크 096 $\frac{1}{10}$

체크 097 $\frac{1}{2}$

체크 098 $\frac{1}{10}$

체크 099 $\frac{24}{125}$

체크 100 $\frac{3}{10}$

체크 101 $\frac{18}{35}$

체크 102 $\frac{3}{7}$

체크 103 $\frac{7}{66}$

체크 104 45

체크 105 ㄴ

체크 106 4

체크 107 $\frac{7}{9}$

체크 108 $\frac{11}{20}$

체크 109 $\frac{7}{36}$

체크 110 $\frac{1}{15}$

체크 111 (1) $\frac{2}{3}$

(2) $\frac{28}{33}$

112 ㄱ, ㄴ, ㄹ

113 215

114 $\frac{5}{14}$

115 $\frac{1}{7}$

116 $\frac{61}{216}$

117 $\frac{1}{7}$

118 86

119 $\frac{1}{15}$

120 $\frac{1}{7}$

121 $\frac{3}{22}$

122 $\frac{5}{6}$

123 $\frac{11}{24}$

124 ㄱ, ㄴ, ㄷ

125 $\frac{4}{7}$

126 8

127 $\frac{6}{7}$

128 ④

129 19

2 조건부확률

체크 130 $\frac{3}{4}$

체크 131 $\frac{1}{3}$

스피드체크

체크 132 $\frac{1}{2}$

체크 133 $\frac{3}{5}$

체크 134 $\frac{3}{4}$

체크 135 $\frac{5}{7}$

체크 136 $\frac{2}{7}$

체크 137 $\frac{1}{7}$

체크 138 4

체크 139 $\frac{4}{7}$

체크 140 0.75

체크 141 $\frac{2}{5}$

체크 142 $\frac{4}{5}$

143 (1) $\frac{2}{3}$

(2) $\frac{3}{10}$

144 $\frac{5}{3}$

145 $\frac{2}{5}$

146 $\frac{3}{7}$

147 $\frac{3}{4}$

148 $\frac{1}{6}$

149 10

150 $\frac{1}{9}$

151 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$

152 $\frac{3}{13}$

153 $\frac{1}{2}$

154 $\frac{1}{3}$

155 $\frac{8}{45}$

156 $\frac{2}{9}$

157 $\frac{3}{7}$

158 $\frac{4}{9}$

159 ②

160 $\frac{3}{4}$

체크 161 $\frac{1}{2}$

체크 162 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$

체크 163 $\frac{3}{7}$

체크 164 $\frac{1}{3}$

체크 165 $\frac{6}{35}$

체크 166 $\frac{1}{96}$

체크 167 0.26

체크 168 $\frac{13}{15}$

체크 169 (1) $\frac{35}{128}$

(2) $\frac{91}{216}$

체크 170 $\frac{23}{112}$

체크 171 $\frac{45}{512}$

체크 172 $\frac{16}{27}$

체크 173 $\frac{11}{32}$

174 ③

175 ⑤

176 $\frac{2}{5}$

177 $\frac{5}{9}$

178 $\frac{1}{2}$

179 $\frac{9}{2}$

180 120

181 $\frac{216}{625}$

182 $\frac{8}{243}$

183 $\frac{81}{128}$

184 $\frac{122}{243}$

185 $\frac{8}{27}$

186 43

187 ②

188 $\frac{21}{128}$

189 737

190 $\frac{57}{64}$

Ⅲ. 통계

1 확률분포

체크 191 (1) $\frac{1}{30}$

(2) $\frac{7}{15}$

체크 192 $\frac{1}{2}$

체크 193 (1) $P(X=x) = \frac{{}_3C_x \times {}_7C_{3-x}}{{}_{10}C_3}$
 $(x=0, 1, 2, 3)$

(2)	X	0	1	2	3	합계
	$P(X=x)$	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$	1

(3) $\frac{8}{15}$

체크 194 4

체크 195 평균 : $\frac{2}{5}$, 분산 : $\frac{21}{25}$,

표준편차 : $\frac{\sqrt{21}}{5}$

체크 196 $\sqrt{3}$

체크 197 $\frac{7}{12}$

체크 198 $\frac{5}{4}$

체크 199 $\frac{3}{5}$

체크 200 $\frac{25}{7}$

체크 201 1700원

체크 202 3.5

체크 203 46

체크 204 4

체크 205 13

체크 206 49

체크 207 30

208 $\frac{2}{3}$

209 $\frac{2}{3}$

210 $\frac{11}{10}$

211 $\frac{3}{5}$

212 $\frac{2}{9}$

213 $\frac{5}{8}$

214 $\frac{9}{2}$

215 평균 : $\frac{6}{7}$, 분산 : $\frac{20}{49}$,

표준편차 : $\frac{2\sqrt{5}}{7}$

216 760000원

217 ⑤

218 평균 : 6160원, 표준편차 : 224원

219 100

220 20

221 81만 원

222 16

223 93

체크 224 $\frac{1}{2}$

체크 225 (1) $B\left(8, \frac{1}{2}\right)$

(2) $\frac{7}{32}$

체크 226 평균 : 200, 분산 : 75

체크 227 (1) $\frac{24}{5}$

(2) 72

체크 228 $\frac{216}{5}$

체크 229 96

체크 230 18

체크 231 $2\sqrt{6}$

232 $\frac{2}{15}$

233 29

234 5

235 912

236 915

237 9

238 ⑤

239 180

240 50

241 $\frac{44}{81}$

242 23

243 10

체크 244 ㄷ, ㄹ

체크 245 $\frac{1}{4}$

체크 246 $\frac{1}{9}$

체크 247 (1) $\frac{2}{5}$

(2) $\frac{3}{20}$

(3) $\frac{3}{4}$

체크 248 4

체크 249 C, D

체크 250 68

체크 251 0.8185

체크 252 0.9

체크 253 47

체크 254 2.41%

체크 255 140명

체크 256 11.5초

체크 257 88.8점

체크 258 63

체크 259 (1) 0.1525

(2) 0.0668

체크 260 0.0655

체크 261 0.1574

체크 262 22

체크 263 4

264 $\frac{5}{8}$

265 $-\frac{1}{6}$

266 $\frac{2}{3}$

267 $\frac{3}{4}$

268 $\frac{2}{5}$

269 10

270 31

271 \neg, \cup

272 0.6247

273 0.1587

274 100

275 24.2

276 65점

277 0.1359

278 7

279 ③

280 ⑤

281 55

282 0.7745

283 296

284 31

285 ①

2 통계적 추정

체크 286 1632

체크 287 $\frac{11}{2}$

체크 288 2

체크 289 2

체크 290 0.62

체크 291 0.0124

체크 292 9

체크 293 4

체크 294 60

295 \neg, \cap, \cup

296 $\frac{3}{32}$

297 64

298 60

299 $\frac{61}{100}$

300 0.7745

301 0.6687

302 ②

303 0.9987

304 10

305 ③

체크 306 $49.355 \leq m \leq 50.645$

체크 307 (1) $189.02 \leq m \leq 190.98$

(2) $188.71 \leq m \leq 191.29$

체크 308 36

체크 309 19

체크 310 400

체크 311 $\sqrt{2}$

체크 312 \neg, \cup, \cap

313 9

314 15

315 124.98

316 68

317 64

318 ②

319 ③

320 42

321 97

322 \cup, \cap

1 순열과 조합

01 순열과 조합

02 원순열

체크 001

- (1) 4쌍의 부부를 각각 한 사람으로 생각하면 모두 4명이고, 이들이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$$(4-1)! = 3! = 6$$

부부끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 각각

$$2! = 2$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 96$$

- (2) A 부부 2명이 마주 보고 앉은 후, 남은 6명이 나머지 6자리에 한 명씩 앉으면 되므로 구하는 경우의 수는

$$6! = 720$$

답 (1) 96 (2) 720

체크 002

- (1) 시후와 시연이를 포함한 8명을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$$(8-1)! = 7! = 5040$$

시후와 시연이가 이웃하게 타는 경우의 수는 시후와 시연이를 한 사람으로 생각하여 7명을 원형으로 배열하는 경우의 수에 시후와 시연이가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수를 곱한 것과 같으므로

$$(7-1)! \times 2! = 1440$$

시후와 시연이가 이웃하지 않게 타는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 시후와 시연이가 이웃하게 타는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로 구하는 경우의 수는

$$5040 - 1440 = 3600$$

- (2) 시후와 시연이 사이에 타는 한 명을 A라 할 때, A를 택하는 경우의 수는

$${}_6C_1 = 6$$

시후, A, 시연의 3명을 한 사람으로 생각하면 모두 6명이고, 이들을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$$(6-1)! = 5! = 120$$

시후와 시연이가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 120 \times 2 = 1440$$

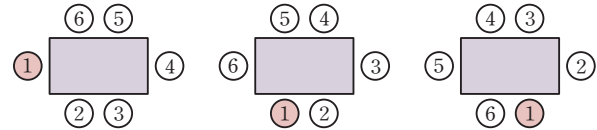
답 (1) 3600 (2) 1440

체크 003

6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$$(6-1)! = 5! = 120$$

이때 원탁에 둘러앉는 각 경우에 대하여 다음 그림과 같이 특정한 한 사람이 앉는 위치에 따라 서로 다른 배열이 3가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는

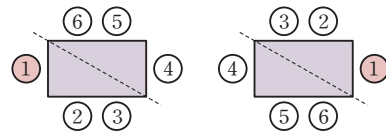
$$120 \times 3 = 360$$

답 360

[다른 풀이]

6명을 일렬로 나열하는 순열의 수는 6!

이때 다음의 2가지 경우는 순열에서는 서로 다른 경우이지만 직사각형 모양으로 배열하면 180° 회전하여 일치하므로 서로 같은 경우이다.



따라서 구하는 경우의 수는

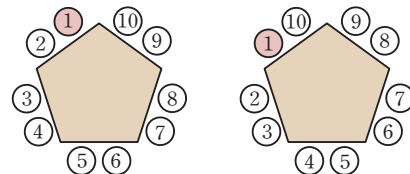
$$6! \div 2 = 6! \times \frac{1}{2} = 360$$

체크 004

10명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$$(10-1)! = 9!$$

이때 원탁에 둘러앉는 각 경우에 대하여 다음 그림과 같이 특정한 한 사람이 앉는 위치에 따라 서로 다른 배열이 2가지씩 존재한다.



따라서 정오각형 모양의 탁자에 10명이 둘러앉는 경우의 수는 $9! \times 2 = 8! \times 18$ 이므로

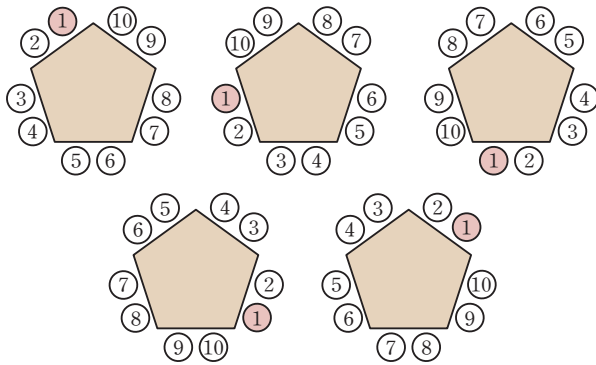
$$k = 18$$

답 18

[다른 풀이]

10명을 일렬로 나열하는 순열의 수는 10!

이때 다음의 5가지 경우는 순열에서는 모두 다른 경우이지만 정오각형 모양으로 배열하면 회전하여 일치하므로 모두 같은 경우이다.



따라서 정오각형 모양의 탁자에 10명이 둘러앉는 경우의 수는

$$10! \div 5 = 10! \times \frac{1}{5} = 9! \times 2 = 8! \times 18$$

$$\therefore k = 18$$

체크 005

가운데 정삼각형을 칠하는 경우의 수는

$${}_4C_1 = 4$$

나머지 3개의 정삼각형을 칠하는 경우의 수는 가운데 정삼각형에 칠한 색을 제외한 나머지 3가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$$(3-1)! = 2! = 2$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$4 \times 2 = 8$$

답 8

체크 006

정사각뿔의 밑면을 칠하는 경우의 수는

$${}_5C_1 = 5$$

정사각뿔의 옆면을 칠하는 경우의 수는 밑면에 칠한 색을 제외한 나머지 4가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$$(4-1)! = 3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$5 \times 6 = 30$$

답 30

체크 007

6가지 색 중 작은 원의 내부를 칠할 3가지 색을 택하는 경우의 수는

$${}_6C_3 = 20$$

택한 3가지 색을 사용하여 작은 원의 내부를 칠하는 경우의 수는

$$(3-1)! = 2! = 2$$

나머지 3가지 색으로 작은 원의 외부에 칠하는 경우의 수는

$$3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$20 \times 2 \times 6 = 240$$

답 240

03 중복순열

체크 008

(1) 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_6 = 3^6 = 729$$

(2) 구하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 10개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_{10} = 2^{10} = 1024$$

답 (1) 729 (2) 1024

체크 009

서로 다른 3개에서 n 개를 택하는 중복순열의 수는

$${}_3\Pi_n = 3^n$$

이때 ${}_3\Pi_n = 243$ 에서 $3^n = 3^5$ 이므로 $n = 5$

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_5 = 2^5 = 32$$

답 32

체크 010

전구 7개를 각각 켜거나 꺼서 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_2\Pi_7 = 2^7 = 128$$

이때 모든 전구가 꺼진 경우는 제외해야 하므로 구하는 신호의 개수는

$$128 - 1 = 127$$

답 127

체크 011

6개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 자연수 중

(i) 한 자리 자연수의 개수는 1, 2, 3, 4, 5의 5

(ii) 두 자리 자연수의 개수는 $5 \times 6 = 30$

(iii) 세 자리 자연수의 개수는 $5 \times {}_6\Pi_2 = 5 \times 6^2 = 180$

따라서 1000보다 작은 자연수의 개수는

$$5 + 30 + 180 = 215$$

이므로 1000은 216번째 수이다.

답 216

[다른 풀이]

한 자리 자연수는 백의 자리와 십의 자리의 숫자가 0인 세 자리 자연수, 두 자리 자연수는 백의 자리의 숫자가 0인 세 자리

자연수로 생각할 수 있다. 이때 세 자리 이하의 자연수의 개수는 서로 다른 6개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수에서 각 자리의 숫자가 모두 0이 되는 1가지 경우를 제외한 것과 같으므로

$${}_6\Pi_3 - 1 = 6^3 - 1 = 216 - 1 = 215$$

따라서 1000은 216번째 수이다.

체크 012

1, 2, 3, 4, 5의 5개의 숫자에서 3개를 택하는 중복순열의 수는 ${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$
 1개의 숫자로만 이루어진 세 자리 자연수의 개수는 111, 222, 333, 444, 555의 5
 따라서 구하는 자연수의 개수는 $125 - 5 = 120$

답 120

체크 013

$f(1) + f(5) = 3$ 을 만족시키는 경우는 $f(1) = 1, f(5) = 2$ 또는 $f(1) = 2, f(5) = 1$ 의 2가지
 각 경우에 대하여 $f(2), f(3), f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 공역 A 의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$
 따라서 구하는 함수의 개수는 $2 \times 125 = 250$

답 250

tip

두 집합 $X = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}, Y = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의

- (1) 함수의 개수 $\Rightarrow {}_n\Pi_r = n^r$
- (2) 일대일함수의 개수 $\Rightarrow {}_nP_r$ (단, $r \leq n$)
- (3) 일대일대응의 개수 $\Rightarrow rP_r = r!$ (단, $r = n$)

체크 014

X 에서 Y 로의 함수의 개수는 공역 Y 의 원소 2, 3, 5, 7, 11의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 정의역 X 의 원소 0, 1, 2에 대응시키는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$
 X 에서 Y 로의 함수 중 $f(1) = 5$ 인 함수의 개수는 ${}_5\Pi_2 = 5^2 = 25$
 따라서 구하는 함수의 개수는 $125 - 25 = 100$

답 100

[다른 풀이]

$f(0)$ 의 값이 될 수 있는 수는 5개,
 $f(1)$ 의 값이 될 수 있는 수는 5를 제외한 4개,
 $f(2)$ 의 값이 될 수 있는 수는 5개
 이므로 구하는 함수의 개수는 $5 \times 4 \times 5 = 100$

체크 015

공역과 치역이 같기 위해서는 공역 Y 의 3개의 원소 a, b, c 가 모두 치역에 포함되어야 한다.

(i) 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수의 개수는

$${}_3\Pi_5 = 3^5 = 243$$

(ii) 치역의 원소가 1개인 함수의 개수는

$${}_3C_1 = 3$$

(iii) 치역의 원소가 2개인 함수의 개수는

$${}_3C_2 \times ({}_2\Pi_5 - 2) = 3 \times 30 = 90$$

(i)~(iii)에서 구하는 함수의 개수는

$$243 - 3 - 90 = 150$$

답 150

${}_2\Pi_5$ 는 치역이 한 개인 함수까지 센 것이므로 2를 빼어 준다.

04 같은 것이 있는 순열

체크 016

짝수가 되려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 짝수이어야 하므로 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0 또는 2이다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

1, 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$$

(ii) 일의 자리의 숫자가 2인 경우

0, 1, 1, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

0□□□2 꼴의 자연수의 개수는 1, 1, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

따라서 일의 자리의 숫자가 2인 여섯 자리 자연수의 개수는 $60 - 12 = 48$

(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는

$$30 + 48 = 78$$

답 78

체크 017

다음 그림에서 짝수 2, 4, 4는 ○에, 홀수 1, 1, 1, 3은 △에 놓이게 된다.

△ ○ △ ○ △ ○ △

이때 2, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!}=3$$

1, 1, 1, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}=4$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$3 \times 4 = 12$$

답 12

체크 018

어떤 자연수가 3의 배수가 되려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다.

6개의 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 3에서 4개를 택하여 그 합이 3의 배수가 되는 경우는 합이 6이 되는 경우인 1, 1, 2, 2와 합이 9가 되는 경우인 1, 2, 3, 3의 2가지이다.

(i) 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

(ii) 1, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

(i), (ii)에서 구하는 3의 배수의 개수는

$$6 + 12 = 18$$

답 18

체크 019

f와 n을 제외한 6개의 문자 l, o, r, e, c, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2!} = 360$$

양 끝에 f와 n을 나열하는 경우의 수는

$$2! = 2$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$360 \times 2 = 720$$

답 720

체크 020

모음 a, i, e를 하나의 문자 A로 생각하여 7개의 문자 h, A, p, p, n, s, s를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{2! \times 2!} = 1260$$

이때 모음끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$1260 \times 6 = 7560$$

답 7560

체크 021

c, r, m의 순서가 정해져 있으므로 c, r, m을 모두 X로 생각하여 7개의 문자 X, a, X, a, X, e, l을 일렬로 나열한 후, X를 왼쪽부터 차례대로 c, r, m으로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{3! \times 2!} = 420$$

답 420

tip

순서가 정해진 순열

순서가 정해진 것끼리는 모두 같은 문자로 생각하여 순열의 수를 구한다.

체크 022

(1) A 지점에서 선분 PQ를 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3! \times 2!} \times 1 \times \frac{3!}{2!} = 10 \times 1 \times 3 = 30$$

(2) A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{9!}{5! \times 4!} = 126$$

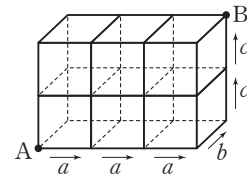
이때 (1)에서 A 지점에서 선분 PQ를 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수가 30이므로 구하는 경우의 수는

$$126 - 30 = 96$$

답 (1) 30 (2) 96

체크 023

다음 그림과 같이 오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a, 뒤로 한 칸 가는 것을 b, 위로 한 칸 가는 것을 c라 하자.



이때 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 a, a, a, b, c, c를 일렬로 나열하는 순열의 수와 같다.

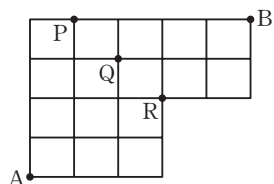
따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3! \times 2!} = 60$$

답 60

체크 024

다음 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면



A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는

$A \rightarrow P \rightarrow B$

또는 $A \rightarrow Q \rightarrow B$

또는 $A \rightarrow R \rightarrow B$

(i) $A \rightarrow P \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{4!} \times 1 = 5$$

(ii) $A \rightarrow Q \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 3!} \times \frac{4!}{3!} = 40$$

(iii) $A \rightarrow R \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3! \times 2!} \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 60$$

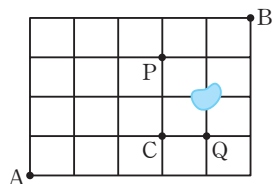
(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$$5 + 40 + 60 = 105$$

답 105

체크 025

다음 그림과 같이 두 지점 P, Q를 잡으면



A 지점에서 C 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는

$A \rightarrow C \rightarrow P \rightarrow B$

또는 $A \rightarrow C \rightarrow Q \rightarrow B$

(i) $A \rightarrow C \rightarrow P \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} \times 1 \times \frac{3!}{2!} = 12$$

(ii) $A \rightarrow C \rightarrow Q \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} \times 1 \times 1 = 4$$

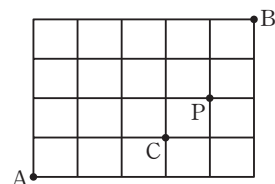
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$12 + 4 = 16$$

답 16

[다른 풀이]

다음 그림과 같이 물웅덩이로 인하여 막힌 도로의 한 지점을 P라 하자.



모든 도로가 막히지 않았다고 할 때, A 지점에서 C 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} \times \frac{5!}{2! \times 3!} = 40$$

A 지점에서 C 지점과 P 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} \times 2 \times \frac{3!}{2!} = 24$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$40 - 24 = 16$$

연습 문제 01

026

남학생 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$$(4-1)! = 3! = 6$$

여학생 4명이 남학생 사이사이의 4개의 자리에 각각 한 명씩 앉는 경우의 수는

$$4! = 24$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 24 = 144$$

답 144

027

A와 B를 한 묶음으로 생각하여 5개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$$(5-1)! = 4! = 24$$

이때 A와 B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$24 \times 2 = 48$$

답 ②

028

사각뿔대의 윗면과 아랫면을 칠하는 경우의 수는

$${}_6P_2 = 30$$

모두 합동인 4개의 옆면을 칠하는 경우의 수는 윗면과 아랫면에 칠한 색을 제외한 나머지 4가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$$(4-1)! = 3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$30 \times 6 = 180$$

답 180

029

서로 다른 사탕 8개를 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 8개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_8 = 2^8 = 256$$

이때 8개의 사탕을 1명의 학생이 모두 받는 경우는 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는

$$256 - 2 = 254$$

답 254

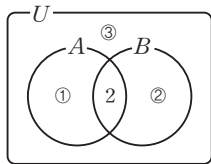
tip

서로 다른 r 개의 물건을 n 명에게 나누어 줄 때, n 명 모두 적어도 한 개 이상을 받는 경우의 수는 다음과 같이 구한다.

$${}_n\Pi_r - (\text{하나도 받지 못하는 사람이 있는 경우의 수})$$

030

다음 그림과 같이 집합 $A-B$ 를 ①, 집합 $B-A$ 를 ②, 집합 $U-(A \cup B)$ 를 ③으로 나타내자.



조건 (나)에서 $A \cap B = \{2\}$ 이므로 2를 제외한 나머지 5개의 원소 1, 3, 4, 5, 6이 각각 ①, ②, ③ 중 어느 한 집합의 원소가 될 수 있다.

따라서 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 (A, B) 의 개수는

$${}_3\Pi_5 = 3^5 = 243$$

이때 조건 (가)를 만족시키지 못하는 경우는 $n(A) = 2$ 또는 $n(A) = 1$ 인 경우이다.

(i) $n(A) = 2$ 인 경우

1, 3, 4, 5, 6 중 하나를 택하여 집합 ①의 원소로 정하면 나머지 4개의 원소는 각각 두 집합 ②, ③ 중 어느 한 집합의 원소가 되므로 그 경우의 수는

$$5 \times {}_2\Pi_4 = 5 \times 2^4 = 80$$

(ii) $n(A) = 1$ 인 경우

1, 3, 4, 5, 6은 각각 두 집합 ②, ③ 중 어느 한 집합의 원소가 되므로 그 경우의 수는

$${}_2\Pi_5 = 2^5 = 32$$

따라서 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 순서쌍 (A, B) 의 개수는

$$243 - 80 - 32 = 131$$

답 131

031

기호를 n 개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_2\Pi_n = 2^n$$

이므로 n 개 이하의 기호를 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_2\Pi_1 + {}_2\Pi_2 + {}_2\Pi_3 + \cdots + {}_2\Pi_n \\ = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$$

만들려고 하는 신호가 70개 이상이고,

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 62$$

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 126$$

이므로 $n \geq 6$

따라서 n 의 최솟값은 6이다.

답 6

032

(i) 한 자리 자연수 중 숫자 0을 포함하지 않는 수의 개수는

$$1, 2, \dots, 9 \text{의 } 9$$

(ii) 두 자리 자연수 중 숫자 0을 포함하지 않는 수의 개수는 서로 다른 9개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_9\Pi_2 = 9^2 = 81$$

(iii) 세 자리 자연수 중 숫자 0을 포함하지 않는 수의 개수는 서로 다른 9개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_9\Pi_3 = 9^3 = 729$$

(i)~(iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$9 + 81 + 729 = 819$$

답 819

[다른 풀이]

1부터 999까지의 자연수 중 숫자 0을 포함하는 자연수는 다음과 같다.

$$10, 20, 30, \dots, 90 \text{의 } 9 \text{개}$$

$$100, 101, 102, \dots, 109 \text{의 } 10 \text{개}$$

$$110, 120, 130, \dots, 190 \text{의 } 9 \text{개}$$

$$200, 201, 202, \dots, 209 \text{의 } 10 \text{개}$$

$$210, 220, 230, \dots, 290 \text{의 } 9 \text{개}$$

300, 301, 302, ..., 309의 10개

:

910, 920, 930, ..., 990의 9개

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$999 - (9 + 19 \times 9) = 999 - 180 = 819$$

033

조건을 만족시키는 자연수 N 은 맨 앞자리의 숫자와 맨 뒷자리의 숫자가 같은 세 자리 또는 네 자리 자연수이다.

(i) 세 자리 자연수 N 을 만드는 경우의 수

맨 앞자리와 맨 뒷자리에 넣을 숫자 1개를 택하고 가운데 자리에 넣을 숫자 1개를 택하는 경우의 수이므로 두 자리 자연수를 만드는 경우의 수와 같다.

즉, 1, 2, 3, 4 중 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_2 = 4^2 = 16$$

(ii) 네 자리 자연수 N 을 만드는 경우의 수

(i)과 같은 방법으로 하면 구하는 경우의 수는 세 자리 자연수를 만드는 경우의 수와 같다.

즉, 1, 2, 3, 4 중 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수 N 의 개수는

$$16 + 64 = 80$$

답 80

034

정의역의 모든 원소에 대한 함수값의 곱이 홀수가 되려면 치역의 원소가 홀수로만 이루어져야 하므로 치역이 될 수 있는 경우는 $\{3\}$, $\{5\}$, $\{7\}$, $\{3, 5\}$, $\{3, 7\}$, $\{5, 7\}$, $\{3, 5, 7\}$ 이다.

따라서 구하는 함수의 개수는 집합 $X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 에서 집합 $\{3, 5, 7\}$ 로의 함수의 개수와 같으므로

$${}_3\Pi_6 = 3^6 = 729$$

답 729

035

두 조건 (가), (나)에 의하여 함수 f 의 치역은 $\{7, 8\}$ 또는 $\{3, 5, 7\}$ 이다.

(i) 치역이 $\{7, 8\}$ 인 경우

$f(1)=7$ 이므로 나머지 정의역의 원소 3, 5, 7, 8은 치역의 원소 7 또는 8에 대응해야 한다.

이때 모두 7에 대응하는 경우는 제외해야 하므로 함수의 개수는

$${}_2\Pi_4 - 1 = 2^4 - 1 = 15$$

(ii) 치역이 $\{3, 5, 7\}$ 인 경우

$f(1)=7$ 이므로 나머지 정의역의 원소 3, 5, 7, 8은 치역의 원소 3 또는 5 또는 7에 대응해야 한다.

이때 모두 3 또는 모두 5 또는 모두 7에 대응하는 경우와 3, 7 또는 5, 7에만 대응하는 경우는 제외해야 하므로 함수의 개수는

$${}_3\Pi_4 - 3 \times 1 - 2 \times ({}_2\Pi_4 - 2)$$

$$= 3^4 - 3 - 2 \times (2^4 - 2)$$

$$= 50$$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$$15 + 50 = 65$$

답 65

036

두 조건 (가), (나)에 의하여 $x \in X$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$f(x)$ 의 최댓값은 6이므로 주어진 조건을 만족시키는 함수는 집합 $X = \{-1, 0, 1, 2\}$ 에서 집합 $\{3, 4, 5, 6\}$ 으로의 함수 중 치역의 원소에 6이 반드시 포함되는 함수이다.

이는 집합 $X = \{-1, 0, 1, 2\}$ 에서 집합 $\{3, 4, 5, 6\}$ 으로의 함수의 개수에서 집합 $X = \{-1, 0, 1, 2\}$ 에서 집합 $\{3, 4, 5\}$ 로의 함수의 개수를 뺀 것과 같다.

따라서 구하는 함수의 개수는

$${}_4\Pi_4 - {}_3\Pi_4 = 4^4 - 3^4 = 175$$

답 175

037

이웃하는 두 수의 곱이 항상 짝수가 되기 위해서는 홀수끼리 이웃하지 않아야 한다.

짝수 2, 2, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

$$\checkmark \boxed{\text{짝수}} \checkmark \boxed{\text{짝수}} \checkmark \boxed{\text{짝수}} \checkmark$$

짝수 사이사이 또는 양 끝의 4개의 자리에서 3개를 택하여 홀수 1, 3, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$${}_4C_3 \times \frac{3!}{2!} = 12$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$3 \times 12 = 36$$

답 36

038

흰 신발과 검은 신발의 개수가 서로 같고 각 세로 칸에는 같은 색의 신발을 넣을 수 없으므로 윗줄에 넣는 신발이 정해지면 아랫줄에 넣는 신발도 정해진다.

(i) 윗줄에 검은 신발 4켤레를 넣는 경우의 수는 1

(ii) 윗줄에 흰 신발 1켤레, 검은 신발 3켤레를 넣는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}=4$$

(iii) 앞줄에 흰 신발 2켤레, 검은 신발 2켤레를 넣는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!}=6$$

(iv) 앞줄에 흰 신발 3켤레, 검은 신발 1켤레를 넣는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}=4$$

(v) 앞줄에 흰 신발 4켤레를 넣는 경우의 수는 1

(i)~(v)에서 구하는 경우의 수는

$$1+4+6+4+1=16$$

답 16

039

7개의 문자 b, l, o, s, s, o, m을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{2! \times 2!}=1260$$

(i) 2개의 문자 o, o가 이웃하는 경우

o, o를 한 문자 O로 생각하여 6개의 문자 b, l, O, s, s, m을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2!}=360$$

(ii) 2개의 문자 s, s가 이웃하는 경우

s, s를 한 문자 S로 생각하여 6개의 문자 b, l, o, S, o, m을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2!}=360$$

(iii) o, o가 이웃하고 s, s가 이웃하는 경우

o, o를 한 문자 O로, s, s를 한 문자 S로 생각하여 5개의 문자 b, l, O, S, m을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$5!=120$$

(i)~(iii)에서 같은 문자끼리 이웃하는 경우의 수는

$$360+360-120=600$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$1260-600=660$$

답 660

tip

유한집합의 원소의 개수

전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

040

a 가 두 번 이상 나오는 경우는 a 가 2번 또는 3번 또는 4번 나오는 경우이다.

(i) a 가 두 번 나오는 경우

네 자리 중 두 자리에 a 를 배치하는 경우의 수는

$${}_4C_2=6$$

나머지 두 자리에 b 또는 c 를 중복을 허용하여 배치하는

경우의 수는 ${}_2\Pi_2=2^2=4$ 이므로 구하는 경우의 수는

$$6 \times 4=24$$

(ii) a 가 세 번 나오는 경우

네 자리 중 세 자리에 a 를 배치하는 경우의 수는

$${}_4C_3=4$$

나머지 한 자리에 b 또는 c 를 배치하는 경우의 수는 2이므로 구하는 경우의 수는

$$4 \times 2=8$$

(iii) a 가 네 번 나오는 경우

$aaaa$ 의 1가지

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$$24+8+1=33$$

답 33

041

A, B를 제외한 나머지 5가지 업무 중 오늘 처리할 3가지 업무를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_3=10$$

A를 B보다 먼저 처리하므로 A, B를 서로 같은 것으로 생각하여 5가지 업무의 순서를 정하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!}=60$$

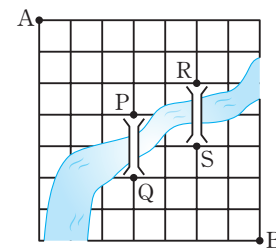
따라서 구하는 경우의 수는

$$10 \times 60=600$$

답 ④

042

다음 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡자.



다리를 통해서만 A 지점에서 B 지점으로 갈 수 있으므로 최단 거리로 가는 경우는

$A \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow B$ 또는 $A \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow B$

(i) $A \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3! \times 3!} \times 1 \times \frac{6!}{4! \times 2!} = 20 \times 1 \times 15 = 300$$

(ii) $A \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{7!}{5! \times 2!} \times 1 \times \frac{5!}{2! \times 3!} = 21 \times 1 \times 10 = 210$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$300 + 210 = 510$$

답 510

043

오른쪽 그림과 같이 정팔면체의 한 면 A에 한 가지 색을 칠하면 A와 마주 보는 면에 색을 칠하는 경우의 수는

$${}_7C_1 = 7$$

또한 면 A와 모서리를 공유하는 세 면에

나머지 6가지 색 중 3가지를 택하여 칠하는 경우의 수는

$${}_6C_3 \times (3-1)! = 20 \times 2 = 40$$

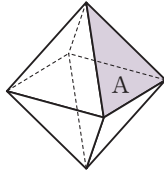
이때 나머지 3개의 면에 남은 3가지 색을 칠하는 경우의 수는

$$3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$7 \times 40 \times 6 = 1680$$

답 1680



05 중복조합

체크 044

$${}_nH_2 = {}_{n+1}C_2 = \frac{(n+1) \times n}{2 \times 1} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{이므로 } {}_nH_2 = 120 \text{에서 } \frac{n(n+1)}{2} = 120$$

$$n^2 + n - 240 = 0, (n-15)(n+16) = 0$$

$$\therefore n = 15 (\because n \text{은 자연수})$$

답 15

체크 045

구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_8 = {}_{11}C_8 = {}_{11}C_3 = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = 165$$

답 165

체크 046

기명 투표는 5명의 유권자가 각각 어느 후보를 뽑았는지 알 수 있으므로 3명의 후보 A, B, C에서 중복을 허용하여 5명을 택하는 중복순열의 수와 같다.

$$\therefore a = {}_3\Pi_5 = 3^5 = 243$$

한편, 무기명 투표는 5명의 유권자가 각각 어느 후보를 뽑았는지 알 수 없으므로 3명의 후보 A, B, C에서 중복을 허용하여 5명을 택하는 중복조합의 수와 같다.

$$\therefore b = {}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$$

$$\therefore a + b = 243 + 21 = 264$$

답 264

체크 047

딸기 3개, 키위 4개, 사과 2개를 먼저 산 다음 6개의 과일을 더 사면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 딸기, 참외, 키위, 사과 4종류의 과일에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_6 = {}_9C_6 = {}_9C_3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$$

답 84

체크 048

(1) 3개의 문자 a, b, c 에서 중복을 허용하여 5개를 택하여 곱하면 주어진 다항식을 전개할 때 생기는 항이 하나씩 만들어진다.

따라서 다항식 $(a+2b+3c)^5$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 3개의 문자 a, b, c 에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$$

(2) 다항식 $(a+b+c)^3$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 3개의 문자 a, b, c 에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

또한 다항식 $(x-y)^5$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 2개의 문자 x, y 에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_5 = {}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$$

따라서 구하는 서로 다른 항의 개수는

$$10 \times 6 = 60$$

답 (1) 21 (2) 60

체크 049

(1) 음이 아닌 정수해의 개수는 서로 다른 4개의 문자 x, y, z, w 에서 중복을 허용하여 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_{10} = {}_{13}C_{10} = {}_{13}C_3 = \frac{13 \times 12 \times 11}{3 \times 2 \times 1} = 286$$

(2) 음이 아닌 정수 x', y', z', w' 에 대하여 $x'+1, y'+1, z'+1, w'+1$ 은 양의 정수이므로

$$x = x'+1, y = y'+1, z = z'+1, w = w'+1 \text{이라 하면}$$

$$x+y+z+w=10 \text{에서}$$

$$(x'+1) + (y'+1) + (z'+1) + (w'+1) = 10$$

$$\therefore x' + y' + z' + w' = 6$$

따라서 구하는 양의 정수해의 개수는 서로 다른 4개의 문자

x', y', z', w' 에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_6 = {}_9C_6 = {}_9C_3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$$

(3) 음이 아닌 정수 x', y', z', w' 에 대하여

$$x' + 1 \geq 1, y' + 2 \geq 2, z' + 3 \geq 3, w' + 1 \geq 1 \text{ 이므로}$$

$$x = x' + 1, y = y' + 2, z = z' + 3, w = w' + 1 \text{ 이라 하면}$$

$$x + y + z + w = 10 \text{ 에서}$$

$$(x' + 1) + (y' + 2) + (z' + 3) + (w' + 1) = 10$$

$$\therefore x' + y' + z' + w' = 3$$

따라서 구하는 정수해의 개수는 서로 다른 4개의 문자 x', y', z', w' 에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_3 = {}_6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

답 (1) 286 (2) 84 (3) 20

tip

해의 조건이 '음이 아닌 정수해'가 아닌 경우, 방정식을 음이 아닌 정수해를 갖는 미지수에 대한 방정식으로 변형한 다음 중복조합을 이용한다.

체크 050

천의 자리의 숫자를 a , 백의 자리의 숫자를 b , 십의 자리의 숫자를 c , 일의 자리의 숫자를 d 라 하면

$$a + b + c + d = 8 \text{ (단, } a \text{는 자연수, } b, c, d \text{는 음이 아닌 정수)}$$

이때 음이 아닌 정수 a' 에 대하여 $a = a' + 1$ 이라 하면

$$(a' + 1) + b + c + d = 8 \quad \therefore a' + b + c + d = 7$$

따라서 구하는 자연수의 개수는 서로 다른 4개의 문자 a', b, c, d 에서 중복을 허용하여 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_7 = {}_{10}C_7 = {}_{10}C_3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120 \quad \text{답 } 120$$

체크 051

방정식 $x + y + 3z = 8$ 을 만족시키는 x, y, z 는 음이 아닌 정수 이므로 z 의 값으로 가능한 것은 0, 1, 2이다.

(i) $z = 0$ 일 때

방정식 $x + y = 8$ 의 음이 아닌 정수해의 개수는 서로 다른 2개의 문자 x, y 에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_8 = {}_9C_8 = {}_9C_1 = 9$$

(ii) $z = 1$ 일 때

방정식 $x + y = 5$ 의 음이 아닌 정수해의 개수는 서로 다른

2개의 문자 x, y 에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_5 = {}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$$

(iii) $z = 2$ 일 때

방정식 $x + y = 2$ 의 음이 아닌 정수해의 개수는 서로 다른 2개의 문자 x, y 에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

(i)~(iii)에서 구하는 해의 개수는

$$9 + 6 + 3 = 18$$

답 18

체크 052

조건 (나)를 만족시키는 자연수 x, y, z 의 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 8개의 자연수 1, 2, 3, ..., 8에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_8H_3 = {}_{10}C_3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

이때 조건 (가)를 만족시키는 자연수 x, y, z 의 순서쌍

(x, y, z) 의 개수는 조건 (나)를 만족시키는 전체 순서쌍의 개수에서 $x \times y \times z$ 의 값이 홀수인 순서쌍의 개수를 빼면 된다.

이때 $x \times y \times z$ 의 값이 홀수하려면 x, y, z 는 모두 홀수여야 한다. 이를 만족시키는 순서쌍의 개수는 8 이하의 4개의 홀수 1, 3, 5, 7에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_3 = {}_6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$$120 - 20 = 100$$

답 100

tip

$x \times y \times z$ 의 값이 짝수인 경우는

(i) x, y, z 가 모두 짝수

(ii) x, y, z 중 어느 두 수가 짝수

(iii) x, y, z 중 어느 한 수가 짝수

인 3가지이고, $x \times y \times z$ 의 값이 홀수인 경우는 x, y, z 가 모두 홀수인 1가지뿐이므로 $x \times y \times z$ 의 값이 짝수인 경우의 수는 전체 경우의 수에서 x, y, z 가 모두 홀수인 경우의 수를 빼어 구하면 편리하다.

체크 053

$1 \leq a \leq b < c \leq d < 10$ 을 만족시키는 자연수 a, b, c, d 의 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 $1 \leq a \leq b \leq c \leq d < 10$ 을 만족시키는 자연수 a, b, c, d 의 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수에서 $1 \leq a \leq b = c \leq d < 10$ 을 만족시키는 자연수 a, b, c, d 의 순서

쌍 (a, b, c, d) 의 개수를 뺀 것과 같다.

$1 \leq a \leq b \leq c \leq d < 10$ 을 만족시키는 자연수 a, b, c, d 의 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 9개의 자연수 1, 2, 3, ..., 9에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_9H_4 = {}_{12}C_4 = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 495$$

$1 \leq a \leq b = c \leq d < 10$ 을 만족시키는 자연수 a, b, c, d 의 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 9개의 자연수 1, 2, 3, ..., 9에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_9H_3 = {}_{11}C_3 = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = 165$$

따라서 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$495 - 165 = 330 \quad \text{답 330}$$

체크 054

- (1) 함수 f 의 개수는 공역 Y 의 서로 다른 원소 5개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$$

- (2) 일대일함수 f 의 개수는 공역 Y 의 서로 다른 원소 5개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

- (3) 상수함수 f 의 개수는 공역 Y 의 원소의 개수와 같으므로 5

- (4) $f(a) < f(b) < f(c)$ 를 만족시키는 함수 f 의 개수는 공역 Y 의 서로 다른 원소 5개에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

- (5) $f(a) \leq f(b) \leq f(c)$ 를 만족시키는 함수 f 의 개수는 공역 Y 의 서로 다른 원소 5개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_3 = {}_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

$$\text{답 (1) 125 (2) 60 (3) 5 (4) 10 (5) 35}$$

tip

집합 $X = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ 에서 집합 $Y = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ 으로의 함수 f 에 대하여 $x_i \in X, x_j \in X$ 일 때

- (1) 함수 f 의 개수는 ${}_n\Pi_r$
- (2) $x_i \neq x_j$ 이면 $f(x_i) \neq f(x_j)$ 인 함수, 즉 일대일함수의 개수는 ${}_nP_r$ (단, $n \geq r$)
- (3) $x_i < x_j$ 이면 $f(x_i) < f(x_j)$ 인 함수의 개수는 ${}_nC_r$ (단, $n \geq r$)
- (4) $x_i < x_j$ 이면 $f(x_i) \leq f(x_j)$ 인 함수의 개수는 ${}_nH_r$

체크 055

$f(1) = 6$ 이고, $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) \geq f(x_2)$ 를 만족시키므로

$$f(4) \leq f(3) \leq f(2) \leq f(1) = 6$$

즉, 공역 Y 의 원소 중 1, 2, 3, ..., 6에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 크기가 크거나 같은 것부터 차례대로 $f(2), f(3), f(4)$ 에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수 f 의 개수는 공역 Y 의 원소 중 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_6H_3 = {}_8C_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56 \quad \text{답 56}$$

연습 문제 02

056

$${}_3H_n = {}_{n+2}C_n = {}_{n+2}C_2 = \frac{(n+2)(n+1)}{2 \times 1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

이므로 ${}_3H_n = 55$ 에서

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = 55, n^2 + 3n + 2 = 110$$

$$n^2 + 3n - 108 = 0, (n-9)(n+12) = 0$$

$$\therefore n = 9 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

답 9

057

- (i) 같은 종류의 주스 4병을 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

- (ii) 같은 종류의 생수 2병을 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

- (iii) 우유 1병을 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 3

- (i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$$15 \times 6 \times 3 = 270$$

답 ⑤

058

서로 다른 3개의 과자를 서로 같은 3개의 주머니에 각각 1개씩 넣으면 각 주머니는 서로 다른 주머니가 된다.

한편, 서로 같은 사탕 8개를 각 주머니에 1개 이상씩 넣는 경우의 수는 서로 다른 3개의 주머니에 서로 같은 사탕을 하나씩 넣고 남은 5개를 서로 다른 3개의 주머니에 넣는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21 \quad \text{답 21}$$

059

고기만두, 김치만두, 새우만두, 야채만두 중 n 개를 주문하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 n 개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_n = {}_{n+3}C_n = {}_{n+3}C_3 = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

$$(n+3)(n+2)(n+1) = 720 = 10 \times 9 \times 8$$

즉, $n+1=8$ 이므로 $n=7$

이때 고기만두, 김치만두를 각각 적어도 하나씩 포함하여 7개를 주문하는 경우의 수는 먼저 고기만두, 김치만두를 하나씩 주문한 다음 고기만두, 김치만두, 새우만두, 야채만두 중 5개를 주문하는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_5 = {}_8C_5 = {}_8C_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56 \quad \text{답 56}$$

060

$12=2^2 \times 3$ 이므로 택한 6개의 수를 모두 곱한 값이 12의 배수가 되려면 2를 2개 이상, 3을 1개 이상 택해야 한다.

즉, 먼저 2를 2개, 3을 1개 택한 다음 4개의 자연수 2, 3, 5, 7에서 중복을 허용하여 3개를 택하면 되므로 구하는 경우의 수는

$${}_4H_3 = {}_6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20 \quad \text{답 20}$$

061

a 는 포함하지 않고, b 는 포함하는 서로 다른 항의 개수는 b 를 먼저 하나 택한 다음 3개의 문자 b, c, d 에서 중복을 허용하여 나머지 4개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

따라서 구하는 서로 다른 항의 개수는

$${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15 \quad \text{답 15}$$

[다른 풀이]

다항식 $(a+b+c+d)^5$ 의 전개식에서 a 를 포함하지 않는 서로 다른 항의 개수는 다항식 $(b+c+d)^5$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수와 같다.

이때 다항식 $(b+c+d)^5$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 3개의 문자 b, c, d 에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$$

또한 다항식 $(b+c+d)^5$ 의 전개식에서 b 를 포함하지 않는 항의 개수는 다항식 $(c+d)^5$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수

와 같다.

이때 다항식 $(c+d)^5$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 2개의 문자 c, d 에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_5 = {}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$$

따라서 구하는 서로 다른 항의 개수는

$$21 - 6 = 15$$

062

다항식 $(a+2b+c)^6$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는

$${}_3H_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$$

다항식 $(2b+c-3d)^6$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는

$${}_3H_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$$

이때 두 다항식 $(a+2b+c)^6$ 과 $(2b+c-3d)^6$ 의 전개식에서 공통인 항의 개수는 다항식 $(2b+c)^6$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수와 같으므로

$${}_2H_6 = {}_7C_6 = {}_7C_1 = 7$$

따라서 구하는 서로 다른 항의 개수는

$$28 + 28 - 7 = 49 \quad \text{답 49}$$

063

방정식 $x+y+z=n$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수는 서로 다른 3개의 문자 x, y, z 에서 중복을 허용하여 n 개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_n = {}_{n+2}C_n = {}_{n+2}C_2 = \frac{(n+2)(n+1)}{2 \times 1} = 231 \text{에서}$$

$$n^2 + 3n + 2 = 462, n^2 + 3n - 460 = 0$$

$$(n-20)(n+23) = 0$$

$$\therefore n = 20 \quad (\because n \text{은 자연수}) \quad \text{답 20}$$

064

$$x \geq -2, y \geq 2, z \geq 3 \text{이므로}$$

$$x+2 \geq 0, y-2 \geq 0, z-3 \geq 0$$

이때 $x+2=x', y-2=y', z-3=z'$ 이라 하면

$$x=x'-2, y=y'+2, z=z'+3 \text{이므로 } x+y+z=12 \text{에서}$$

$$(x'-2) + (y'+2) + (z'+3) = 12$$

$$\therefore x' + y' + z' = 9 \quad (\text{단, } x', y', z' \text{은 음이 아닌 정수})$$

따라서 구하는 해의 개수는 서로 다른 3개의 문자 x', y', z' 에서 중복을 허용하여 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_9 = {}_{11}C_9 = {}_{11}C_2 = \frac{11 \times 10}{2 \times 1} = 55 \quad \text{답 55}$$

065

방정식 $x+y+2z=5$ 를 만족시키는 x, y, z 는 음이 아닌 정수
이므로 z 의 값으로 가능한 것은 0, 1, 2이다.

(i) $z=0$ 일 때

방정식 $x+y=5$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수는

$${}_2H_5 = {}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$$

(ii) $z=1$ 일 때

방정식 $x+y=3$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수는

$${}_2H_3 = {}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

(iii) $z=2$ 일 때

방정식 $x+y=1$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수는

$${}_2H_1 = {}_2C_1 = 2$$

(i)~(iii)에서 구하는 음이 아닌 정수해의 개수는

$$6+4+2=12$$

답 12

066

x, y, z 가 음이 아닌 정수이므로 부등식 $x+y+z \leq 4$ 를 만족
시키는 경우를 다음과 같이 나누어 구한다.

(i) 방정식 $x+y+z=0$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개
수는

$${}_3H_0 = {}_2C_0 = 1$$

(ii) 방정식 $x+y+z=1$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개
수는

$${}_3H_1 = {}_3C_1 = 3$$

(iii) 방정식 $x+y+z=2$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개
수는

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

(iv) 방정식 $x+y+z=3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개
수는

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

(v) 방정식 $x+y+z=4$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개
수는

$${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

(i)~(v)에서 구하는 음이 아닌 정수해의 개수는

$$1+3+6+10+15=35$$

답 35

[다른 풀이]

x, y, z 가 음이 아닌 정수이므로 부등식 $x+y+z \leq 4$ 를 만족
시키는 경우는 $x+y+z=0$ 또는 $x+y+z=1$ 또는
 $x+y+z=2$ 또는 $x+y+z=3$ 또는 $x+y+z=4$ 이다.

이때 음이 아닌 정수 w 에 대하여 방정식

$x+y+z+w=4$ 의 해의 개수는

$w=4$ 일 때, $x+y+z=0$ 의 음이 아닌 정수해의 개수와

$w=3$ 일 때, $x+y+z=1$ 의 음이 아닌 정수해의 개수와

$w=2$ 일 때, $x+y+z=2$ 의 음이 아닌 정수해의 개수와

$w=1$ 일 때, $x+y+z=3$ 의 음이 아닌 정수해의 개수와

$w=0$ 일 때, $x+y+z=4$ 의 음이 아닌 정수해의 개수의 합과
같다.

따라서 부등식 $x+y+z \leq 4$ 의 음이 아닌 정수해의 개수는 음
이 아닌 정수 w 에 대하여 방정식 $x+y+z+w=4$ 의 음이 아
닌 정수해의 개수와 같으므로

$${}_4H_4 = {}_7C_4 = {}_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

tip

위의 풀이에서

$${}_3H_0 + {}_3H_1 + {}_3H_2 + {}_3H_3 + {}_3H_4 = {}_4H_4$$

임을 알 수 있다. 일반적으로 두 자연수 n, r 에 대하여 다음이
성립한다.

$${}_nH_0 + {}_nH_1 + {}_nH_2 + \cdots + {}_nH_r = {}_{n+1}H_r$$

체크 067

a 는 홀수이고 조건 (나)에서 자연수 a, b, c 가 $a^2+b+c=13$ 을
만족시키므로 a 의 값으로 가능한 것은 1, 3이다.

(i) $a=1$ 일 때

조건 (나)에서 $b+c=12$

음이 아닌 정수 b', c' 에 대하여 $b=b'+1, c=c'+1$ 이라
하면

$$(b'+1) + (c'+1) = 12$$

$$\therefore b' + c' = 10$$

이를 만족시키는 순서쌍의 개수는

$${}_2H_{10} = {}_{11}C_{10} = {}_{11}C_1 = 11$$

(ii) $a=3$ 일 때

조건 (나)에서 $b+c=4$

음이 아닌 정수 b', c' 에 대하여 $b=b'+1, c=c'+1$ 이라
하면

$$(b'+1) + (c'+1) = 4$$

$$\therefore b' + c' = 2$$

이를 만족시키는 순서쌍의 개수는

$${}_2H_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

(i), (ii)에서 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$11+3=14$$

답 14

068

$1 \leq |x| \leq |y| \leq 4$ 이므로 4개의 자연수 1, 2, 3, 4에서 중복을

허용하여 2개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 차례대로 $|x|, |y|$ 에 대응시키면 된다.

따라서 순서쌍 $(|x|, |y|)$ 의 개수는

$${}_4H_2 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

이때 x, y 의 값은 각각 양수 또는 음수가 될 수 있으므로 구하는 모든 순서쌍 (x, y) 의 개수는

$$10 \times 2 \times 2 = 40$$

답 40

069

구하는 함수 f 의 개수는 조건 ㉠을 만족시키는 모든 함수의 개수에서 $f(3)=9$ 이면서 조건 ㉠을 만족시키는 함수의 개수를 빼면 된다.

조건 ㉠을 만족시키는 함수 f 는 공역 Y 의 5개의 원소 6, 7, 8, 9, 10에서 중복을 허용하여 5개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 차례대로 $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ 에 대응시키면 되므로 이를 만족시키는 함수의 개수는

$${}_5H_5 = {}_9C_5 = {}_9C_4 = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$$

$f(3)=9$ 이면서 조건 ㉠을 만족시키는 함수는 공역 Y 의 4개의 원소 6, 7, 8, 9에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 차례대로 $f(1), f(2)$ 에 대응시키고, 공역 Y 의 2개의 원소 9, 10에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 차례대로 $f(4), f(5)$ 에 대응시키면 되므로 이를 만족시키는 함수의 개수는

$${}_4H_2 \times {}_2H_2 = {}_3C_2 \times {}_3C_2 = 10 \times 3 = 30$$

따라서 구하는 함수 f 의 개수는

$$126 - 30 = 96$$

답 96

070

같은 종류의 연필 6자루를 5명의 학생에게 먼저 1자루씩 나누어 주고 남은 연필 1자루를 한 명에게 주면 되므로 서로 같은 종류의 연필 6자루를 5명의 학생에게 각각 1자루 이상씩 나누어 주는 경우의 수는 5이다.

이때 연필을 1자루 받은 4명의 학생에게만 먼저 지우개를 1개씩 나누어 주고 남은 6개의 지우개를 중복을 허용하여 4명에게 나누어 주면 된다.

즉, 1자루의 연필을 받은 학생에게만 지우개를 각각 1개 이상씩 나누어 주는 경우의 수는

$${}_4H_6 = {}_9C_6 = {}_9C_3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$5 \times 84 = 420$$

답 420

071

D열의 10개의 좌석 중 왼쪽부터 갑, 을, 병의 순으로 앉았을 때, 갑, 을, 병의 양 끝과 사이사이의 빈 좌석의 개수를 각각 다음 그림과 같이 왼쪽부터 차례대로 a, b, c, d (a, d 는 음이 아닌 정수, b, c 는 $b \geq 1, c \geq 2$ 인 정수)라 하자.



이때 $a \geq 0, b \geq 1, c \geq 2, d \geq 0$ 이고, $a+b+c+d=7$ 이므로 음이 아닌 정수 b', c' 에 대하여 $b=b'+1, c=c'+2$ 라 하면

$$a + (b'+1) + (c'+2) + d = 7$$

$$\therefore a + b' + c' + d = 4$$

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_4 = {}_7C_4 = {}_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

답 35

072

$a+b+c=7$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$${}_3H_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 36$$

조건 ㉠에서 $2^a \times 4^b = 2^{a+2b}$ 이 8의 배수, 즉 2^3 의 배수이므로

$$a+2b \geq 3$$

이때 $a+2b < 3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$$(0, 0), (0, 1), (1, 0), (2, 0)$$

의 4개이므로 구하는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$36 - 4 = 32$$

답 32

2 이항정리

06 이항정리

체크 073

$(a+2b)^6$ 의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r a^{6-r} (2b)^r = {}_6C_r 2^r a^{6-r} b^r$$

이때 $a^{6-r} b^r = a^3 b^3$ 에서 $r=3$

따라서 $a^3 b^3$ 의 계수는

$${}_6C_3 \times 2^3 = 20 \times 8 = 160$$

답 160

체크 074

$(ax+2y)^6$ 의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r (ax)^{6-r} (2y)^r = {}_6C_r 2^r a^{6-r} x^{6-r} y^r$$

이때 $x^{6-r} y^r = x^2 y^4$ 에서 $r=4$

한편, $x^2 y^4$ 의 계수가 15이므로 ${}_6C_4 2^4 a^2 = 15$ 에서

$$15 \times 16 \times a^2 = 15, a^2 = \frac{1}{16}$$

$$\therefore a = \frac{1}{4} (\because a > 0)$$

답 $\frac{1}{4}$

체크 075

(1) $\left(x + \frac{3}{x}\right)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r x^{5-r} \left(\frac{3}{x}\right)^r = {}_5C_r 3^r \frac{x^{5-r}}{x^r}$$

이때 x 항은 $5-r-r=1$ 일 때이므로 $r=2$

따라서 x 의 계수는 ${}_5C_2 \times 3^2 = 10 \times 9 = 90$

(2) $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^8$ 의 전개식의 일반항은

$${}_8C_r (x^2)^{8-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = {}_8C_r (-1)^r \frac{x^{16-2r}}{x^r}$$

이때 x^4 항은 $16-2r-r=4$ 일 때이므로 $r=4$

따라서 x^4 의 계수는 ${}_8C_4 \times (-1)^4 = 70 \times 1 = 70$

답 (1) 90 (2) 70

체크 076

$\left(x - \frac{1}{x}\right)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r x^{4-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = {}_4C_r (-1)^r \frac{x^{4-r}}{x^r}$$

..... ㉠

이때

$$(3x^2 + 2x + 4) \left(x - \frac{1}{x}\right)^4$$

$$= 3x^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^4 + 2x \left(x - \frac{1}{x}\right)^4 + 4 \left(x - \frac{1}{x}\right)^4$$

이므로 전개식에서 상수항은 다음과 같은 경우에 나타난다.

(i) $3x^2$ 과 ㉠의 $\frac{1}{x^2}$ 항이 곱해지는 경우

$$\text{㉠에서 } \frac{1}{x^2} \text{항은 } r - (4-r) = 2, \text{ 즉 } r=3 \text{일 때이므로}$$

$$3x^2 \times {}_4C_3 \times (-1)^3 \times \frac{1}{x^2} = -12$$

(ii) $2x$ 와 ㉠의 $\frac{1}{x}$ 항이 곱해지는 경우

$$\text{㉠에서 } \frac{1}{x} \text{항은 } r - (4-r) = 1, \text{ 즉 } r = \frac{5}{2} \text{일 때이다.}$$

그런데 r 는 $0 \leq r \leq 4$ 인 정수이므로 ㉠에서 $\frac{1}{x}$ 항은 존재하지 않는다.

(iii) 4와 ㉠의 상수항이 곱해지는 경우

$$\text{㉠에서 상수항은 } 4-r=r, \text{ 즉 } r=2 \text{일 때이므로}$$

$$4 \times {}_4C_2 \times (-1)^2 = 24$$

(i)~(iii)에서 상수항은

$$-12 + 24 = 12$$

답 12

체크 077

$(x-a)^4$ 의 전개식의 일반항은 ${}_4C_r x^{4-r} (-a)^r$

$\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^3$ 의 전개식의 일반항은 ${}_3C_s x^{3-s} \left(\frac{1}{x^2}\right)^s = {}_3C_s \frac{x^{3-s}}{x^{2s}}$

$(x-a)^4 \left(x + \frac{1}{x^2}\right)^3$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r \times {}_3C_s \times (-a)^r \times \frac{x^{7-r-s}}{x^{2s}} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

이므로 x^2 항은 $7-r-s-2s=2$, 즉 $r+3s=5$ 일 때이다.

이때 $0 \leq r \leq 4, 0 \leq s \leq 3$ 인 정수 r, s 에 대하여 $r+3s=5$ 를 만족시키는 순서쌍 (r, s) 는 $(2, 1)$ 뿐이다.

따라서 $r=2, s=1$ 을 ㉠의 ${}_4C_r \times {}_3C_s \times (-a)^r$ 에 대입하면 x^2 의 계수는

$${}_4C_2 \times {}_3C_1 \times a^2 = 18a^2$$

x^2 의 계수가 36이므로 $18a^2=36, a^2=2$

$$\therefore a = \sqrt{2} (\because a > 0)$$

답 $\sqrt{2}$

07 이항계수의 성질

체크 078

$${}_{12}C_9 + {}_{13}C_{10} + {}_{14}C_{11} + {}_{15}C_{12} + {}_{16}C_{13}$$

$$= \underbrace{{}_{12}C_8 + {}_{12}C_9}_{{}_{13}C_9} + {}_{13}C_{10} + {}_{14}C_{11} + {}_{15}C_{12} + {}_{16}C_{13} - {}_{12}C_8$$

$$\begin{aligned}
&= {}_{13}C_9 + {}_{13}C_{10} + {}_{14}C_{11} + {}_{15}C_{12} + {}_{16}C_{13} - {}_{12}C_8 \\
&= {}_{14}C_{10} + {}_{14}C_{11} + {}_{15}C_{12} + {}_{16}C_{13} - {}_{12}C_8 \\
&= {}_{15}C_{11} + {}_{15}C_{12} + {}_{16}C_{13} - {}_{12}C_8 \\
&= {}_{16}C_{12} + {}_{16}C_{13} - {}_{12}C_8 \\
&= {}_{17}C_{13} - {}_{12}C_8
\end{aligned}$$

답 ④

체크 079

${}_5C_0 = {}_5C_5, {}_6C_1 = {}_6C_5, {}_7C_2 = {}_7C_5, {}_8C_3 = {}_8C_5, {}_9C_4 = {}_9C_5$ 이므로
(주어진 식)

$$\begin{aligned}
&= 2{}_5C_0 + 2{}_6C_1 + 2{}_7C_2 + 2{}_8C_3 + 2{}_9C_4 + 2{}_5C_5 \\
&= 2({}_6C_0 + {}_6C_1 + {}_7C_2 + {}_8C_3 + {}_9C_4 + {}_{10}C_5) \quad (\because {}_5C_0 = {}_6C_0) \\
&= 2({}_7C_1 + {}_7C_2 + {}_8C_3 + {}_9C_4 + {}_{10}C_5) \\
&= 2({}_8C_2 + {}_8C_3 + {}_9C_4 + {}_{10}C_5) \\
&\vdots \\
&= 2({}_{10}C_4 + {}_{10}C_5) \\
&= 2{}_{11}C_5 = 2{}_{11}C_6 \\
&\therefore n=11
\end{aligned}$$

답 11

체크 080

$(1+x)^{10} = {}_{10}C_0 + {}_{10}C_1x + {}_{10}C_2x^2 + \cdots + {}_{10}C_{10}x^{10}$ 의 양변에
 $x=-3$ 을 대입하면

$$\begin{aligned}
(-2)^{10} &= {}_{10}C_0 - 3{}_{10}C_1 + 3^2{}_{10}C_2 - 3^3{}_{10}C_3 + \cdots + 3^{10}{}_{10}C_{10} \\
\therefore {}_{10}C_0 - 3{}_{10}C_1 + 3^2{}_{10}C_2 - 3^3{}_{10}C_3 + \cdots + 3^{10}{}_{10}C_{10} &= 1024
\end{aligned}$$

답 1024

체크 081

$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_nx^n$ 의 양변에 $x=1$ 을
대입하면

$$2^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n$$

따라서 주어진 부등식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$2000 < 2^n < 3000$$

이때 $2^{10}=1024, 2^{11}=2048, 2^{12}=4096$ 이므로 주어진 부등식
을 만족시키는 자연수 n 의 값은 11이다.

답 11

연습 문제 03

082

$(ax + \frac{1}{bx})^7$ 의 전개식의 일반항은

$${}_7C_r(ax)^{7-r}\left(\frac{1}{bx}\right)^r = {}_7C_r \times a^{7-r} \times \left(\frac{1}{b}\right)^r \times \frac{x^{7-r}}{x^r}$$

이때 x 항은 $7-r-r=1$ 일 때이므로 $r=3$

x 의 계수는 35이므로

$${}_7C_3 \times a^4 \times \frac{1}{b^3} = \frac{35a^4}{b^3} = 35$$

$$\therefore a^4 = b^3$$

..... ㉠

또한 x^5 항은 $7-r-r=5$ 일 때이므로 $r=1$

x^5 의 계수는 7이므로

$${}_7C_1 \times a^6 \times \frac{1}{b} = \frac{7a^6}{b} = 7$$

$$\therefore b = a^6$$

..... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $a^4 = a^{18}$

이때 a 는 자연수이므로 $a=1, b=1$

$$\therefore a+b=2$$

답 2

083

$(x^3 - \frac{2}{x^2})^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r(x^3)^{n-r}\left(-\frac{2}{x^2}\right)^r = {}_nC_r(-2)^r \frac{x^{3n-3r}}{x^{2r}}$$

이때 상수항이 존재하려면 $3n-3r=2r$ 에서 $3n=5r$, 즉 $3n$
이 5의 배수이어야 한다.

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 5이다.

답 5

084

$(2+x)^3$ 의 전개식의 일반항은 ${}_3C_r 2^{3-r} x^r$

$(1+x^2)^n$ 의 전개식의 일반항은 ${}_nC_s x^{2s}$

$(2+x)^3(1+x^2)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_3C_r 2^{3-r} x^r \times {}_nC_s x^{2s} = {}_3C_r \times {}_nC_s \times 2^{3-r} \times x^{r+2s}$$

이므로 x^2 항은 $r+2s=2$ 일 때이다.

이때 $0 \leq r \leq 3, 0 \leq s \leq n$ 인 정수 r, s 에 대하여 $r+2s=2$ 를
만족시키는 순서쌍 (r, s) 는 $(0, 1)$ 또는 $(2, 0)$ 이므로 x^2 의
계수는

$$({}_3C_0 \times {}_nC_1 \times 2^3) + ({}_3C_2 \times {}_nC_0 \times 2) = 8n+6$$

$$8n+6=46 \quad \therefore n=5$$

답 5

[다른 풀이]

$(2+x)^3$ 의 전개식의 일반항은

$${}_3C_r 2^{3-r} x^r$$

..... ㉠

$(1+x^2)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_nC_s x^{2s} \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

이때 $(2+x)^3(1+x^2)^n$ 에서 x^2 항은 다음과 같은 경우에 나타난다.

(i) \textcircled{I} 의 상수항과 \textcircled{L} 의 x^2 항이 곱해지는 경우

\textcircled{I} 에서 상수항은 $r=0$ 일 때이고, \textcircled{L} 에서 x^2 항은 $s=1$ 일 때이므로

$$({}_3C_0 \times 2^3) \times {}_nC_1 x^2 = 8nx^2$$

(ii) \textcircled{I} 의 x 항과 \textcircled{L} 의 x 항이 곱해지는 경우

\textcircled{I} 에서 x 항은 $r=1$ 일 때이고, \textcircled{L} 에서 x 항은 $2s=1$, 즉

$$s=\frac{1}{2}\text{일 때이다.}$$

그런데 s 는 $0 \leq s \leq n$ 인 정수이므로 x^2 항은 존재하지 않는다.

(iii) \textcircled{I} 의 x^2 항과 \textcircled{L} 의 상수항이 곱해지는 경우

\textcircled{I} 에서 x^2 항은 $r=2$ 일 때이고, \textcircled{L} 에서 상수항은 $s=0$ 일 때이므로

$$({}_3C_2 \times 2x^2) \times {}_nC_0 = 6x^2$$

(i)~(iii)에서 x^2 의 계수는 $8n+6$ 이므로

$$8n+6=46 \quad \therefore n=5$$

085

주어진 식의 값은 $(1+x)^4(1+x)^4=(1+x)^8$ 의 전개식에서 x^4 의 계수와 같으므로

$${}_4C_0 \times {}_4C_4 + {}_4C_1 \times {}_4C_3 + {}_4C_2 \times {}_4C_2 + {}_4C_3 \times {}_4C_1 + {}_4C_4 \times {}_4C_0$$

$$= {}_8C_4$$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$$

답 70

[다른 풀이]

$${}_4C_0 \times {}_4C_4 + {}_4C_1 \times {}_4C_3 + {}_4C_2 \times {}_4C_2 + {}_4C_3 \times {}_4C_1 + {}_4C_4 \times {}_4C_0$$

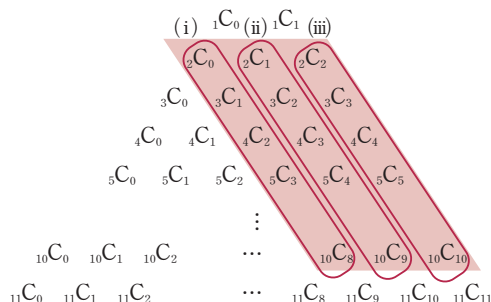
$$= ({}_4C_0)^2 + ({}_4C_1)^2 + ({}_4C_2)^2 + ({}_4C_3)^2 + ({}_4C_0)^2$$

$$= 2({}_4C_0)^2 + 2({}_4C_1)^2 + ({}_4C_2)^2$$

$$= 2 \times 1^2 + 2 \times 4^2 + 6^2 = 70$$

086

주어진 그림에서 색칠한 부분을 다음 그림과 같이 (i), (ii), (iii)으로 나누면



$$(i) {}_2C_0 + {}_3C_1 + {}_4C_2 + \dots + {}_{10}C_8 = {}_{11}C_8 = {}_{11}C_3 = 165$$

$$(ii) {}_1C_0 + {}_2C_1 + {}_3C_2 + \dots + {}_{10}C_9 = {}_{11}C_9 = {}_{11}C_2 = 55 \text{이므로}$$

$${}_2C_1 + {}_3C_2 + \dots + {}_{10}C_9 = 55 - 1 = 54$$

$$(iii) {}_2C_2 + {}_3C_3 + \dots + {}_{10}C_{10} = \underbrace{1+1+\dots+1}_{9\text{개}} = 9$$

(i)~(iii)에서 색칠한 부분에 포함되는 모든 수의 합은

$$165 + 54 + 9 = 228$$

답 228

087

1, $(1+2x)$ 에는 x^2 항이 없으므로 x^2 의 계수는 0이다.

$$(1+2x)^2 \text{에서 } x^2 \text{의 계수는 } 2^2 \times {}_2C_2$$

$$(1+2x)^3 \text{에서 } x^2 \text{의 계수는 } 2^2 \times {}_3C_2$$

$$(1+2x)^4 \text{에서 } x^2 \text{의 계수는 } 2^2 \times {}_4C_2$$

⋮

$$(1+2x)^{10} \text{에서 } x^2 \text{의 계수는 } 2^2 \times {}_{10}C_2$$

즉, 주어진 식의 전개식에서 x^2 의 계수는

$$2^2 \times ({}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + \dots + {}_{10}C_2)$$

이때

$${}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + \dots + {}_{10}C_2$$

$$= {}_3C_3 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + \dots + {}_{10}C_2 \quad (\because {}_2C_2 = {}_3C_3)$$

$$= {}_4C_3$$

$$= {}_4C_3 + {}_4C_2 + \dots + {}_{10}C_2$$

$$= {}_5C_3$$

⋮

$$= {}_{10}C_3 + {}_{10}C_2$$

$$= {}_{11}C_3 = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = 165$$

이므로 구하는 x^2 의 계수는

$$2^2 \times 165 = 660$$

답 660

088

$(1+x)^n$ 의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r x^r$

이때 x^{n-3} 의 계수는 ${}_nC_{n-3} = {}_nC_3$ 이므로 $f(n, x) = {}_nC_3$

$$\therefore f(3, x) + f(4, x) + f(5, x) + \dots + f(11, x)$$

$$= {}_3C_3 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + \dots + {}_{11}C_3$$

$$= {}_4C_4 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + \dots + {}_{11}C_3 \quad (\because {}_3C_3 = {}_4C_4)$$

$$= {}_5C_4$$

$$= {}_5C_4 + {}_5C_3 + \dots + {}_{11}C_3$$

$$= {}_6C_4$$

⋮

$$= {}_{11}C_4 + {}_{11}C_3 = {}_{12}C_4 = {}_{12}C_8$$

즉, $f(3, x) + f(4, x) + f(5, x) + \dots + f(11, x)$ 는

$(1+x)^{12}$ 의 전개식에서 x^4 의 계수 또는 x^8 의 계수와 같으므로

$p=4$ 또는 $p=8$

따라서 구하는 모든 p 의 값의 곱은

$$4 \times 8 = 32$$

답 32

089

$$(1+x)^{2n} = {}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_1x + {}_{2n}C_2x^2 + \cdots + {}_{2n}C_{2n}x^{2n} \quad \cdots \textcircled{1}$$

①의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$2^{2n} = {}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_2 + \cdots + {}_{2n}C_{2n} \quad \cdots \textcircled{2}$$

①의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$0 = {}_{2n}C_0 - {}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_2 - \cdots + {}_{2n}C_{2n} \quad \cdots \textcircled{3}$$

②+③을 하면

$$2^{2n} = 2({}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_2 + {}_{2n}C_4 + \cdots + {}_{2n}C_{2n})$$

$$\therefore {}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_2 + {}_{2n}C_4 + \cdots + {}_{2n}C_{2n} = 2^{2n-1}$$

이때 주어진 부등식에서

$$2^{2n-1} > 1000$$

한편, $2^9 = 512$, $2^{10} = 1024$ 이므로 $2n-1 > 9$ 에서 $n > 5$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 6이다.

답 6

090

$$(가) (1+x)^{100} = {}_{100}C_0 + {}_{100}C_1x + {}_{100}C_2x^2 + \cdots + {}_{100}C_{100}x^{100}$$

양변에 $x=-5$ 를 대입하면

$$(-4)^{100} = {}_{100}C_0 - 5{}_{100}C_1 + 5^2{}_{100}C_2 - \cdots + 5^{100}{}_{100}C_{100}$$

$${}_{100}C_0 - 5{}_{100}C_1 + 5^2{}_{100}C_2 - \cdots + 5^{100}{}_{100}C_{100} = 2^{200}$$

$$\therefore p = 200$$

$$(나) (1+x)^{51} = {}_{51}C_0 + {}_{51}C_1x + {}_{51}C_2x^2 + \cdots + {}_{51}C_{51}x^{51}$$

이때 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$2^{51} = {}_{51}C_0 + {}_{51}C_1 + {}_{51}C_2 + \cdots + {}_{51}C_{51}$$

이때

$${}_{51}C_0 + {}_{51}C_1 + {}_{51}C_2 + \cdots + {}_{51}C_{25}$$

$$= {}_{51}C_{26} + {}_{51}C_{27} + {}_{51}C_{28} + \cdots + {}_{51}C_{51}$$

이므로

$${}_{51}C_{26} + {}_{51}C_{27} + {}_{51}C_{28} + \cdots + {}_{51}C_{51} = 2^{50}$$

$$\therefore q = 50$$

$$(다) ({}_5C_0)^2 + ({}_5C_1)^2 + ({}_5C_2)^2 + \cdots + ({}_5C_5)^2$$

$$= ({}_5C_0 \times {}_5C_5) + ({}_5C_1 \times {}_5C_4) + ({}_5C_2 \times {}_5C_3) + \cdots + ({}_5C_5 \times {}_5C_0)$$

이므로 주어진 식은 $(1+x)^5(1+x)^5 = (1+x)^{10}$ 의 전개식에서 x^5 의 계수와 같다.

이때 $(1+x)^{10}$ 의 전개식에서 x^5 의 계수는 ${}_{10}C_5$

$$\therefore ({}_5C_0)^2 + ({}_5C_1)^2 + ({}_5C_2)^2 + \cdots + ({}_5C_5)^2 = {}_{10}C_5$$

$$\therefore r = 5$$

(가), (나), (다)에서

$$p+q+r=200+50+5=255$$

답 255

091

원 위의 n 개의 점 전부 또는 일부를 사용하여 만들 수 있는 다각형은 삼각형, 사각형, 오각형, ..., n 각형이므로 그 개수는 ${}_nC_3 + {}_nC_4 + {}_nC_5 + \cdots + {}_nC_n$

이때 ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$ 이므로

$$\begin{aligned} {}_nC_3 + {}_nC_4 + {}_nC_5 + \cdots + {}_nC_n &= 2^n - {}_nC_0 - {}_nC_1 - {}_nC_2 \\ &= 2^n - 1 - n - \frac{n(n-1)}{2} \\ &= 2^n - \frac{n^2+n+2}{2} \end{aligned}$$

따라서 $a=1$, $b=2$ 이므로

$$a+b=3$$

답 3

tip

원 위의 점으로 만들 수 있는 도형의 개수

원 위의 n 개의 점을 이어서 만들 수 있는 r 각형의 개수는 ${}_nC_r$ (단, $3 \leq r \leq n$)

092

$(x+a^2)^n$ 의 전개식에서 x^{n-1} 의 계수는

$${}_nC_{n-1} \times a^2 = {}_nC_1 \times a^2 = a^2n$$

$$(x^2-2a)(x+a)^n = x^2(x+a)^n - 2a(x+a)^n$$

$(x+a)^n$ 의 전개식에서 x^{n-3} 의 계수는

$${}_nC_{n-3} \times a^3 = {}_nC_3 a^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} a^3$$

이므로 $x^2(x+a)^n$ 을 전개하면 x^{n-1} 의 계수는

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \times a^3 \text{이고,}$$

$2a(x+a)^n$ 을 전개하면 x^{n-1} 의 계수는 $2a^2n$ 이다.

따라서 $(x^2-2a)(x+a)^n$ 의 전개식에서 x^{n-1} 의 계수는

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \times a^3 - 2a^2n$$

이다. 그러므로

$$a^2n = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \times a^3 - 2a^2n$$

이고, 양변을 a^2 으로 나누면

$$1 = \frac{(n-1)(n-2)}{6} \times a - 2$$

$$\therefore a = \frac{18}{(n-1)(n-2)}$$

여기서 a 는 자연수이고, n 은 4 이상의 자연수이므로

$$n-1=3$$

$$\therefore n=4$$

$$\text{따라서 } f(n)=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}, g(n)=(n-1)(n-2),$$

$k=4$ 이므로

$$f(k)+g(k)=f(4)+g(4)$$

$$=\frac{4 \times 3 \times 2}{6}+3 \times 2$$

$$=4+6=10$$

답 ①

093

$(1+x)^{11}={}_{11}C_0+{}_{11}C_1x+{}_{11}C_2x^2+\cdots+{}_{11}C_{11}x^{11}$ 의 양변에 $x=7$ 을 대입하면

$$8^{11}={}_{11}C_0+{}_{11}C_1 \times 7+{}_{11}C_2 \times 7^2+\cdots+{}_{11}C_{11} \times 7^{11}$$

$$={}_{11}C_0+7({}_{11}C_1+{}_{11}C_2 \times 7+\cdots+{}_{11}C_{11} \times 7^{10})$$

$$=1+7({}_{11}C_1+{}_{11}C_2 \times 7+\cdots+{}_{11}C_{11} \times 7^{10})$$

즉, 8^{11} 을 7로 나눈 나머지는 1이다.

따라서 오늘부터 8¹¹일째 되는 날의 요일인 토요일은 내일의 요일과 같으므로 오늘은 금요일이다.

한편, $(2+x)^9={}_9C_02^9+{}_9C_1x \times 2^8+{}_9C_2x^2 \times 2^7+\cdots+{}_9C_9x^9$ 의 양변에 $x=7$ 을 대입하면

$$9^9={}_9C_02^9+{}_9C_1 \times 7 \times 2^8+{}_9C_2 \times 7^2 \times 2^7+\cdots+{}_9C_9 \times 7^9$$

$$=512+7({}_9C_1 \times 2^8+{}_9C_2 \times 7 \times 2^7+\cdots+{}_9C_9 \times 7^8)$$

즉, 9^9 을 7로 나눈 나머지는 512를 7로 나눈 나머지인 1이므로 오늘부터 9⁹일째 되는 날의 요일은 내일의 요일과 같다.

따라서 9⁹일째 되는 날의 요일은 토요일이다.

답 ①

1 확률의 뜻과 활용

08 시행과 사건

09 확률

체크 094

표본공간을 S 라 하면

$S = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 이고

$A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$

이때 두 사건 A, B 모두와 배반사건인

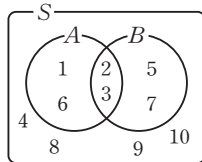
사건은 $A^c \cap B^c$ 의 부분집합이다.

$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{4, 8, 9, 10\}$

이므로 A, B 모두와 배반사건인 사건의 개수는

$2^4 = 16$

답 16



체크 095

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는

$6 \times 6 = 36$

이차방정식 $x^2 - 2ax + 5b = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면

판별식을 D 라 할 때 $\frac{D}{4} = a^2 - 5b > 0$ 이어야 한다.

이를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는

$(3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (4, 2), (5, 2), (6, 2),$

$(4, 3), (5, 3), (6, 3), (5, 4), (6, 4), (6, 5), (6, 6)$

의 14개이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{14}{36} = \frac{7}{18}$

답 $\frac{7}{18}$

체크 096

부모님을 포함한 5명의 가족이 일렬로 서는 경우의 수는 5!

양 끝 자리에 부모님이 서는 경우의 수는 2!이고, 그 각각에

대하여 부모님 사이에 3명의 가족이 일렬로 서는 경우의 수가

3!이므로 5명이 일렬로 설 때 양 끝에 부모님이 서는 경우의

수는 $2! \times 3!$

따라서 구하는 확률은 $\frac{2! \times 3!}{5!} = \frac{1}{10}$

답 $\frac{1}{10}$

tip

순열의 수

서로 다른 n 개 중 r 개를 뽑아 일렬로 나열하는 방법의 수

$\Rightarrow {}_n P_r = n \times (n-1) \times \dots \times (n-r+1)$

$= \frac{n!}{(n-r)!}$ (단, $0 \leq r \leq n$)

체크 097

다섯 자리의 자연수가 되기 위해서는 만의 자리에 0이 올 수

없으므로 0, 1, 2, 3, 4를 모두 한 번씩 사용하여 만들 수 있는

다섯 자리 자연수의 개수는 $4 \times 4!$

$3 \square \square \square \square$ 꼴의 자연수의 개수는 $4!$

$4 \square \square \square \square$ 꼴의 자연수의 개수는 $4!$

즉, 다섯 자리 자연수가 30000보다 큰 경우의 수는 $4! + 4!$

따라서 구하는 확률은 $\frac{4! + 4!}{4 \times 4!} = \frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

체크 098

6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(6-1)! = 5!$

남학생 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(3-1)! = 2!$

남학생 사이사이의 3개의 자리에 여학생 3명이 한 명씩 앉는

경우의 수는 $3!$

즉, 남학생과 여학생이 교대로 앉는 경우의 수는 $2! \times 3!$

따라서 구하는 확률은 $\frac{2! \times 3!}{5!} = \frac{1}{10}$

답 $\frac{1}{10}$

tip

원순열의 수

(1) 서로 다른 n 개를 원형으로 배열하는 원순열의 수

$\Rightarrow \frac{n!}{n} = (n-1)!$

(2) 서로 다른 n 개 중 r 개를 택하여 원형으로 배열하는 원순열의 수

$\Rightarrow \frac{{}_n P_r}{r} = \frac{n!}{r(n-r)!}$

체크 099

만들 수 있는 함수 f 의 개수는

${}_5 \Pi_4 = 5^4 = 625$

집합 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1) = f(x_2)$ 이면

$x_1 = x_2$ 를 만족시키는 경우는 함수 f 가 일대일함수일 때이다.

일대일함수인 함수 f 의 개수는 ${}_5 P_4 = 120$

따라서 구하는 확률은 $\frac{120}{625} = \frac{24}{125}$

답 $\frac{24}{125}$

tip

x_1, x_2 가 정의역의 원소일 때,

‘ $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이다.’

와 그 대우

‘ $f(x_1) = f(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$ 이다.’

는 모두 함수 f 가 일대일함수임을 뜻한다.

체크 100

백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는 $4 \times 5 \times 2 = 100$

300보다 작은 세 자리 자연수가 짝수이려면 백의 자리의 숫자로 1, 2만 가능하고 일의 자리의 숫자로 0, 2, 4만 가능하다.

(i) $2 \square \square$ 꼴인 짝수의 개수는 $5 \times 3 = 15$

(ii) $1 \square \square$ 꼴인 짝수의 개수는 $5 \times 3 = 15$

따라서 구하는 확률은 $\frac{15+15}{100} = \frac{3}{10}$ **답** $\frac{3}{10}$

체크 101

P 지점에서 Q 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{7!}{4!3!} = 35$$

P 지점에서 R 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} = 3 \text{이고, R 지점에서 Q 지점까지 최단 거리로 가는 경우}$$

$$\text{의 수는 } \frac{4!}{2!2!} = 6 \text{이므로 P 지점에서 R 지점을 거쳐 Q 지점}$$

$$\text{까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 } 3 \times 6 = 18$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{18}{35}$ **답** $\frac{18}{35}$

체크 102

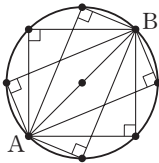
원 위에 일정한 간격으로 놓인 8개의 점 중 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않으므로 3개의 점을 택하면 삼각형이 하나 만들어진다. 즉, 8개의 점 중 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수는

$${}_8C_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

오른쪽 그림과 같이 하나의 지름 AB에 대하여 만들 수 있는 직각삼각형은 6개이고, 8개의 점으로 만들 수 있는 지름은 4개이므로 직각삼각형의 개수는

$$6 \times 4 = 24$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{24}{56} = \frac{3}{7}$ **답** $\frac{3}{7}$



체크 103

방정식 $x+y+z=10$ 의 음이 아닌 정수해의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_{10} = {}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2 = \frac{12 \times 11}{2 \times 1} = 66$$

$$x+y+z=10 \text{에서 } y=4 \text{이면 } x+z=6$$

$x+z=6$ 의 음이 아닌 정수해의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_6 = {}_7C_6 = {}_7C_1 = 7$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{7}{66}$ **답** $\frac{7}{66}$

체크 104

$$\text{당첨 제비가 나올 확률이 } \frac{3}{20} \text{이므로 } \frac{n}{300} = \frac{3}{20}$$

$$20n = 900 \quad \therefore n = 45 \quad \text{답 } 45$$

체크 105

ㄱ. (반례) 표본공간 $S = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 $A = \{1, 2\}$ 이면

$$A^c = \{3, 4\} \text{이므로 } P(A) = P(A^c) = \frac{1}{2} \text{ (거짓)}$$

ㄴ. $0 \leq P(A) \leq 1, 0 \leq P(B) \leq 1$ 이므로

$$0 \leq P(A)P(B) \leq 1 \text{ (참)}$$

ㄷ. (반례) $S = \{1, 2, 3\}, A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}$ 일 때,

$$P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{2}{3} \text{이므로 } P(A) + P(B) = \frac{4}{3} > 1$$

(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ이다. **답** ㄴ

tip

$$\begin{aligned} \square \text{에서 } 0 \leq P(A) \leq 1, 0 \leq P(B) \leq 1 \text{이므로} \\ 0 \leq P(A) + P(B) \leq 2 \end{aligned}$$

10 확률의 덧셈정리

체크 106

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2}P(A) = \frac{1}{3}P(B) \text{에서}$$

$$P(A) = 2P(A \cap B), P(B) = 3P(A \cap B) \text{이므로}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 2P(A \cap B) + 3P(A \cap B) - P(A \cap B)$$

$$= 4P(A \cap B)$$

$$\therefore \frac{P(A \cup B)}{P(A \cap B)} = \frac{4P(A \cap B)}{P(A \cap B)} = 4$$

답 4

체크 107

천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 4개의 숫자 0, 1, 4, 5를 한 번씩 사용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$$3 \times {}_3P_3 = 18$$

네 자리 자연수가 5의 배수인 사건을 A , 홀수인 사건을 B 라 하자.

(i) 네 자리 자연수가 5의 배수가 되려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.

일의 자리의 숫자가 0인 자연수의 개수는 $3! = 6$

천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 일의 자리의 숫자가 5인 자연수의 개수는 $2 \times 2 = 4$

$$\therefore P(A) = \frac{6+4}{18} = \frac{5}{9}$$

(ii) 네 자리 자연수가 홀수이려면 일의 자리의 숫자가 1 또는 5이어야 한다.

천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 일의 자리의 숫자가 1인 자연수의 개수는 $2 \times 2 = 4$

일의 자리의 숫자가 5인 자연수의 개수는 4 (\because (i))

$$\therefore P(B) = \frac{4+4}{18} = \frac{4}{9}$$

(iii) 네 자리 자연수가 5의 배수이면서 홀수이려면 일의 자리의 숫자가 5이어야 한다.

일의 자리의 숫자가 5인 자연수의 개수는 4 (\because (i))

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

(i)~(iii)에서 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{5}{9} + \frac{4}{9} - \frac{2}{9} = \frac{7}{9} \quad \text{답 } \frac{7}{9}$$

tip

4개의 숫자 0, 1, 4, 5를 한 번씩 사용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는 0, 1, 4, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수에서 0이 맨 앞에 오도록 일렬로 나열하는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로 $4! - 3! = 24 - 6 = 18$ 과 같이 구할 수도 있다.

체크 108

빨간 주머니와 파란 주머니에서 임의로 구슬을 각각 한 개씩 꺼내는 모든 경우의 수는

$$5 \times 4 = 20$$

빨간 주머니와 파란 주머니에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자를 각각 a, b 라 하고 순서쌍 (a, b) 로 나타낼 때, 구슬에 적힌 두 수의 합이 5 이하인 사건을 A , 짝수인 사건을 B 라 하면

$$A = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (3, 2)\}$$

$$B = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8),$$

$$(4, 2), (4, 4), (4, 6), (4, 8)\}$$

$$A \cap B = \{(2, 2)\}$$

$$\therefore P(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}, P(B) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}, P(A \cap B) = \frac{1}{20}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{2}{5} - \frac{1}{20} = \frac{11}{20} \quad \text{답 } \frac{11}{20}$$

체크 109

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$

나오는 두 눈의 수를 각각 a, b 라 하고 순서쌍 (a, b) 로 나타낼 때, 두 눈의 수의 곱이 6인 사건을 A , 합이 4인 사건을 B 라 하면

$$A = \{(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)\},$$

$$B = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$$

$$\therefore P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}, P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

이때 두 사건 A, B 는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{1}{12} = \frac{7}{36} \quad \text{답 } \frac{7}{36}$$

체크 110

$$3P(A) = 2P(B) = \frac{2}{5} \text{에서}$$

$$P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}, P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

한편, 두 사건 A 와 B^c 가 서로 배반사건이므로

$$A \cap B^c = \emptyset \quad \therefore A \subset B$$

따라서 $P(A \cap B) = P(A)$ 이므로

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(B) - P(A)$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{2}{15} = \frac{1}{15} \quad \text{답 } \frac{1}{15}$$

체크 111

(1) 세 사람이 가위바위보를 할 때 나올 수 있는 모든 경우의 수는

$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

세 사람의 승부가 결정되는 사건을 A 라 하면 승부가 결정되지 않는 사건은 A^c 이다.

승부가 결정되지 않는 경우는 세 사람이 모두 같은 것을 내거나 모두 다른 것을 낼 때이다. 이때 모두 같은 것을 내는 경우의 수는 3, 모두 다른 것을 내는 경우의 수는 $3!=6$ 이므로

$$P(A^c) = \frac{3+6}{27} = \frac{1}{3}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

- (2) 남학생 5명과 여학생 7명의 12명 중 대표 2명을 뽑는 경우의 수는

$${}_{12}C_2 = 66$$

여학생이 적어도 한 명 뽑히는 사건을 A 라 하면 여학생이 한 명도 뽑히지 않는 사건은 A^c 이다. 남학생 5명 중에서만 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_5C_2 = 10$ 이므로

$$P(A^c) = \frac{10}{66} = \frac{5}{33}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{5}{33} = \frac{28}{33}$$

답 (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{28}{33}$

연습 문제 04

112

두 눈의 수를 a, b 라 하고 순서쌍 (a, b) 로 나타내면

$$A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$$

$$B = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)\}$$

$$C = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$$

$$D = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

ㄱ. $A \cap B = \emptyset$ 이므로 A 와 B 는 서로 배반사건이다.

ㄴ. $A \cap C = \{(3, 5), (5, 3)\}$ 이므로 A 와 C 는 서로 배반사건이 아니다.

ㄷ. $A \cap D = \{(4, 4)\}$ 이므로 A 와 D 는 서로 배반사건이 아니다.

ㄹ. $B \cap C = \emptyset$ 이므로 B 와 C 는 서로 배반사건이다.

ㅁ. $B \cap D = \emptyset$ 이므로 B 와 D 는 서로 배반사건이다.

ㅂ. $C \cap D = \{(1, 1), (3, 3), (5, 5)\}$ 이므로 C 와 D 는 서로 배반사건이 아니다.

따라서 서로 배반사건인 것은 ㄱ, ㄹ, ㅁ이다.

답 ㄱ, ㄹ, ㅁ

113

만들 수 있는 두 자리 정수는

$$12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43$$

이때 두 자리 정수가 x 이하의 수일 확률이 1이므로

$$x \geq 43$$

또한 두 자리 정수가 y 의 배수일 확률이 0이므로 자연수 y 의 최솟값은 5이다.

따라서 구하는 xy 의 최솟값은

$$43 \times 5 = 215$$

답 215

114

남학생 5명과 여학생 3명의 8명을 일렬로 세울 때, 모든 경우의 수는 8!

$$\vee \textcircled{\text{남}} \vee \textcircled{\text{남}} \vee \textcircled{\text{남}} \vee \textcircled{\text{남}} \vee \textcircled{\text{남}} \vee$$

여학생끼리 이웃하지 않게 서려면 남학생을 먼저 한 줄로 세운 후, 양 끝과 그 사이사이의 6개의 자리 중 3개를 택하여 여학생이 한 명씩 서면 된다.

즉, 여학생끼리 이웃하지 않는 경우의 수는 $5! \times {}_6P_3$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{5! \times {}_6P_3}{8!} = \frac{5! \times 6 \times 5 \times 4}{8!} = \frac{5}{14}$$

답 $\frac{5}{14}$

115

색을 칠하는 모든 경우의 수는

$$(8-1)! = 7!$$

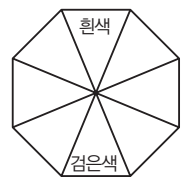
흰색을 칠할 자리가 정해지면 검은색을 칠할 자리는 그 맞은편으로 자동으로 정해진다. 회전하면 모두 같으므로 흰색과 검은색을 칠하는 경우의 수는 1이고, 남은 6개의 영역에 나머지 6가지 색을 칠하면 된다.

즉, 흰색과 검은색을 마주 보게 칠하는 경우의 수는

$$1 \times 6! = 6!$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{6!}{7!} = \frac{1}{7}$$

답 $\frac{1}{7}$



116

한 개의 주사위를 3번 던질 때, 모든 경우의 수는

$$6^3 = 216$$

세 눈의 수의 최솟값이 2인 경우의 수는 2, 3, 4, 5, 6에서 중

복을 허용하여 3개를 뽑아 순서대로 나열하는 경우의 수에서 3, 4, 5, 6에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 순서대로 나열하는 경우의 수를 빼 것과 같다.

$$\therefore {}_5\Pi_3 - {}_4\Pi_3 = 5^3 - 4^3 = 125 - 64 = 61$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{61}{216}$

답 $\frac{61}{216}$

117

7장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{3!2!} = 420$$

1이 적힌 카드 2장을 양 끝에 두고 나머지 1, 2, 2, 3, 4가 적힌 5장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{60}{420} = \frac{1}{7}$

답 $\frac{1}{7}$

118

두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 의 개수는

$${}_3\Pi_5 = 3^5 = 243$$

$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = 13$ 을 만족시키는 함수의 개수는 $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ 에 각각 3, 3, 3, 3, 1 또는 3, 3, 3, 2, 2를 대응시키는 경우의 수의 합과 같다.

(i) 3, 3, 3, 3, 1인 경우

$$\frac{5!}{4!} = 5$$

(ii) 3, 3, 3, 2, 2인 경우

$$\frac{5!}{3!2!} = 10$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{5+10}{243} = \frac{15}{243} = \frac{5}{81}$ 이므로

$$p = 81, q = 5$$

$$\therefore p + q = 81 + 5 = 86$$

답 86

119

표본공간 $S = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합의 개수는 $2^4 - 1 = 15$

15개의 사건 중 서로 다른 2개를 택하여 두 사건 A, B 로 정하는 경우의 수는

$${}_{15}P_2 = 15 \times 14 = 210$$

사건 A 가 정해지면 $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = S$ 를 만족시키는 사

건 B 는 $B = S - A = A^c$ 로 정해지므로 A 의 원소의 개수에 따라 두 사건 A, B 를 정하는 경우의 수는 다음과 같다.

(i) A 의 원소가 1개인 경우의 수는 ${}_4C_1 = 4$

(ii) A 의 원소가 2개인 경우의 수는 ${}_4C_2 = 6$

(iii) A 의 원소가 3개인 경우의 수는 ${}_4C_3 = 4$

(i)~(iii)에서 $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = S$ 인 두 사건 A, B 를 정하는 경우의 수는

$$4 + 6 + 4 = 14$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{14}{210} = \frac{1}{15}$

답 $\frac{1}{15}$

tip

표본공간 $S = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합 15개 중

(1) 서로 다른 두 부분집합을 택하는 경우의 수

$$\rightarrow {}_{15}C_2$$

(2) 서로 다른 두 부분집합 A, B 를 택하는 경우의 수

$$\rightarrow {}_{15}P_2$$

120

정육면체의 8개의 꼭짓점 중 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않으므로 서로 다른 세 꼭짓점을 임의로 택하여 연결하면 삼각형을 만들 수 있다. 즉, 8개의 꼭짓점 중 서로 다른 세 꼭짓점을 임의로 택하여 만들 수 있는 모든 삼각형의 개수는

$${}_8C_3 = 56$$

□ABCD의 대각선 AC를 한 변으로

하는 정삼각형은 오른쪽 그림과 같이

△AFC, △ACH의 두 개이다. 한 면

에는 대각선을 두 개씩 그을 수 있으므로

로 총 대각선의 개수는 $2 \times 6 = 12$

그런데 △AFC에서 각각 선분 AC, 선

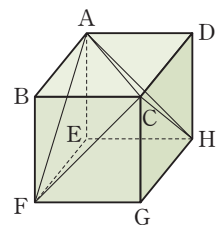
분 AF, 선분 FC를 기준으로 만들어지는 정삼각형은 같으므로 3개의 삼각형이 중복되어 만들어진다.

즉, 만들 수 있는 서로 다른 정삼각형의 개수는

$$\frac{2 \times 12}{3} = 8$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{56} = \frac{1}{7}$

답 $\frac{1}{7}$



121

10명의 심사위원이 3개의 작품 중 한 개에 무기명으로 투표할 때, 모든 경우의 수는

$${}_3H_{10} = {}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2 = 66$$

작품 B를 고른 심사위원이 2명인 경우의 수는 작품 A, C를 고른 심사위원이 8명이 되는 경우의 수와 같으므로

$${}_2H_8 = {}_9C_8 = {}_9C_1 = 9$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{9}{66} = \frac{3}{22}$

답 $\frac{3}{22}$

122

직선 l 과 직선 m 위에 있는 9개의 점 중 3개를 택하는 경우의

$$\text{수는 } {}_9C_3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$$

택한 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형이 만들어지는 사건을 A 라 하면 삼각형이 만들어지지 않는 사건은 A^c 이다.

이때 삼각형이 만들어지지 않으려면 직선 l 위의 점 중 3개를 택하거나 직선 m 위의 점 중 3개를 택하면 되므로 이 경우의 수는

$${}_4C_3 + {}_5C_3 = 4 + 10 = 14$$

$$\therefore P(A^c) = \frac{14}{84} = \frac{1}{6}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

답 $\frac{5}{6}$

123

$$P(A^c \cup B^c) = P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B) = \frac{5}{6} \text{에서}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{에서}$$

$$\frac{2}{3} = P(A) + P(B) - \frac{1}{6}$$

$$\therefore P(A) = \frac{5}{6} - P(B)$$

$$\text{이때 } \frac{1}{4} \leq P(A) \leq \frac{3}{8} \text{이므로 } \frac{1}{4} \leq \frac{5}{6} - P(B) \leq \frac{3}{8}$$

$$\therefore \frac{11}{24} \leq P(B) \leq \frac{7}{12}$$

따라서 $P(B)$ 의 최솟값은 $\frac{11}{24}$ 이다.

답 $\frac{11}{24}$

124

$$\neg. 0 \leq P(A) \leq 1 \text{ (참)}$$

$$\neg. P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ \leq P(A) + P(B) \text{ (}\because P(A \cap B) \geq 0 \text{)} \text{ (참)}$$

$$\neg. P(S) = 1 \text{이므로 } P(A) \leq P(S) \text{ (참)}$$

$$\neg. (\text{반례}) S = \{0, 1, 2\} \text{일 때, } A = \{1, 2\}, B = \{1, 2\} \text{이면} \\ A \subset B \text{이지만 } P(A) = P(B) \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 \neg, \neg, \neg 이다.

답 \neg, \neg, \neg

[다른 풀이]

르. $B \subset A$ 이면 $n(B) \leq n(A)$ 이므로

$$\frac{n(B)}{n(S)} \leq \frac{n(A)}{n(S)} \therefore P(B) \leq P(A) \text{ (거짓)}$$

125

15개의 구슬 중 2개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_{15}C_2 = 105$$

적어도 한 개가 노란 구슬인 사건을 A 라 하면 노란 구슬이 한 개도 뽑히지 않는 사건은 A^c 이다.

노란 구슬이 한 개도 뽑히지 않는 경우는 흰 구슬 3개, 파란 구슬 7개의 10개 중 2개를 뽑는 경우이므로 이 경우의 수는

$${}_{10}C_2 = 45$$

$$\therefore P(A^c) = \frac{45}{105} = \frac{3}{7}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

답 $\frac{4}{7}$

126

소고기피자는 4조각뿐이므로 접시에 담은 5조각의 피자 중 소고기피자가 3조각 이하인 사건을 A 라 하면 소고기피자가 4조각인 사건은 A^c 이다.

$$\text{이때 } P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{98}{99} = \frac{1}{99} \text{이므로}$$

$$\frac{{}_4C_4 \times {}_n C_1}{{}_{4+n} C_5} = \frac{1}{99}, {}_{4+n} C_5 = 99 \times n$$

$$\frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n}{5!} = 99 \times n$$

$$\text{즉, } (n+1)(n+2)(n+3)(n+4) = 5! \times 99 \text{에서}$$

$$5! \times 99 = (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) \times (3^2 \times 11)$$

$$= 3^2 \times (5 \times 2) \times 11 \times (4 \times 3)$$

$$= 9 \times 10 \times 11 \times 12$$

따라서 $n+1=9$ 이므로 $n=8$

답 8

127

T, E, N, S, I, O, N을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{2!}$$

적어도 한 쪽 끝에 자음이 오는 사건을 A 라 하면 양 끝에 모 두 모음이 오는 사건은 A^c 이다.

이때 모음은 E, I, O이므로 이중 2개를 양 끝에 나열하는 경

우의 수는 ${}_3P_2$ 이고, 그 각각에 대하여 나머지 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!}$ 이다.

$$\therefore P(A^c) = \frac{{}_3P_2 \times \frac{5!}{2!}}{\frac{7!}{2!}} = \frac{1}{7}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7} \quad \text{답 } \frac{6}{7}$$

128

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

이차함수

$$f(x) = x^2 - 7x + 10 \\ = (x-2)(x-5)$$

에 대하여 $y=f(x)$ 의 그래프

는 위의 그림과 같으므로

$$f(2)=f(5)=0, f(1)>0, f(6)>0, f(3)<0, f(4)<0$$

즉, 눈의 수 a, b 에 대하여 $f(a)f(b)<0$ 이 성립하는 경우는 다음과 같다.

(i) $f(a)<0$ 이고 $f(b)>0$ 인 경우

$(3, 1), (3, 6), (4, 1), (4, 6)$ 의 4가지

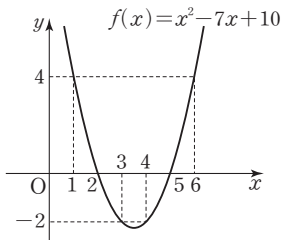
(ii) $f(a)>0$ 이고 $f(b)<0$ 인 경우

$(1, 3), (1, 4), (6, 3), (6, 4)$ 의 4가지

(i), (ii)에서 $f(a)f(b)<0$ 인 경우의 수는

$$4+4=8$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{8}{36} = \frac{2}{9} \quad \text{답 } \frac{2}{9}$$



(ii) $y=z$ 인 경우도 (i)과 마찬가지로 6개

(iii) $z=x$ 인 경우도 (i)과 마찬가지로 6개

(i), (ii), (iii)은 배반사건이므로 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$ 을 만족시키는 경우의 수는

$$6+6+6=18$$

$$\therefore P(A^c) = \frac{18}{66} = \frac{3}{11}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11}$$

$$\therefore p=11, q=8$$

$$\therefore p+q=11+8=19 \quad \text{답 } 19$$

tip

$(x-y)(y-z)(z-x) \neq 0$ 의 부정은

$$(x-y)(y-z)(z-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=y \text{ 또는 } y=z \text{ 또는 } z=x$$

129

방정식 $x+y+z=10$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z 의 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는

$${}_3H_{10} = {}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2 = 66$$

순서쌍 (x, y, z) 가 $(x-y)(y-z)(z-x) \neq 0$ 을 만족시키는 사건을 A 라 하면 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$ 을 만족시키는 사건은 A^c 이다. 이때 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$ 을 만족시키는 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 다음과 같다.

(i) $x=y$ 인 경우

$x+y+z=10$, 즉 $2x+z=10$ 을 만족시키는 순서쌍은

$(0, 0, 10), (1, 1, 8), (2, 2, 6), (3, 3, 4), (4, 4, 2),$

$(5, 5, 0)$ 의 6개

2 조건부확률

11 조건부확률

체크 130

$$P(A^c) = 0.3 \text{에서 } P(A) = 1 - 0.3 = 0.7$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{에서}$$

$$0.8 = 0.7 + 0.4 - P(A \cap B) \text{이므로}$$

$$P(A \cap B) = 0.3$$

$$\therefore P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.3}{0.4} = \frac{3}{4} \quad \text{답 } \frac{3}{4}$$

체크 131

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{6} \text{에서 } P(A) = 6P(A \cap B)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{4} \text{에서 } P(B) = 4P(A \cap B)$$

$$\text{이때 } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$6P(A \cap B) + 4P(A \cap B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2}$$

$$\text{즉, } 9P(A \cap B) = \frac{1}{2} \text{이므로 } P(A \cap B) = \frac{1}{18}$$

$$\therefore P(A) = 6P(A \cap B) = 6 \times \frac{1}{18} = \frac{1}{3} \quad \text{답 } \frac{1}{3}$$

체크 132

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) \text{이므로}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - P(A \cap B) \quad \therefore P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$\text{또한 } P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B) \text{이므로}$$

$$P(B \cap A^c) = \frac{5}{12} - \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$$

$$\text{한편, } P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$P(B|A^c) = \frac{P(B \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \quad \text{답 } \frac{1}{2}$$

tip

전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여

$$(1) (A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$(2) A - B = A \cap B^c = A - (A \cap B)$$

$$(3) B - A = B \cap A^c = B - (A \cap B)$$

체크 133

임의로 뽑은 한 명이 버스를 이용하여 등원하는 학생인 사건을 A , 남학생인 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{15+10}{50} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5} \quad \text{답 } \frac{3}{5}$$

[다른 풀이]

(단위: 명)

	남학생	여학생	합계
지하철	13	12	25
버스	15	10	25
합계	28	22	50

위의 표에서 구하는 확률은 버스를 이용하여 등원하는 학생 중 남학생을 뽑을 확률과 같으므로

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

체크 134

상자에서 홀수가 적힌 카드를 뽑는 사건을 A , 파란 카드를 뽑는 사건을 B 라 하자.

전체 카드는 9장이고, 이중 홀수가 적힌 카드는 3, 5, 7, 9가 적힌 4장이므로

$$P(A) = \frac{4}{9}$$

또한 홀수가 적힌 파란 카드는 3장이므로

$$P(A \cap B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{3}{4} \quad \text{답 } \frac{3}{4}$$

[다른 풀이]

홀수가 적힌 4장의 카드 중 파란 카드는 3장이고, 구하는 확률은 홀수가 적힌 카드 중 파란 카드를 뽑을 확률과 같으므로

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{3}{4}$$

체크 135

임의로 뽑은 한 명이 여자 관람객인 사건을 A , 야구팀 D 를 선호하는 관람객인 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}, P(A \cap B) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{20}} = \frac{5}{7} \quad \text{답 } \frac{5}{7}$$

[다른 풀이]

전체 관람객 수를 100이라 하면 여자 관람객은 35명이고 야구팀 D 를 선호하는 여자 관람객은 25명이다.

따라서 구하는 확률은 여자 관람객 중 야구팀 D 를 선호하는 관람객을 뽑을 확률과 같으므로

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$$

체크 136

첫 번째에 검은 공이 나오는 사건을 A , 두 번째에 흰 공이 나오는 사건을 B 라 하자.

첫 번째에 검은 공이 나올 확률은

$$P(A) = \frac{3}{7}$$

첫 번째에 검은 공이 나왔을 때, 두 번째에 흰 공이 나올 확률은

$$P(B|A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \leftarrow \text{첫 번째에 검은 공이 나왔으므로 주머니 안에는 흰 공 4개와 검은 공 2개가 있다.}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{7} \quad \text{답 } \frac{2}{7}$$

체크 137

도형이가 승부차기를 할 때 첫 번째 시도에서 성공하는 사건을 A 라 하면

$$P(A) = \frac{4}{5}, P(A^c) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

두 번째 시도에서 성공하는 사건을 B 라 하면, 첫 번째 시도에서 실패했을 때, 두 번째 시도에서 성공할 확률은

$$P(B|A^c) = \frac{5}{7}$$

따라 도형이가 두 번의 승부차기를 할 때, 첫 번째 시도에서 실패하고 두 번째 시도에서 성공할 확률은

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) = \frac{1}{5} \times \frac{5}{7} = \frac{1}{7} \quad \text{답 } \frac{1}{7}$$

체크 138

첫 번째에 당첨 제비가 나오는 사건을 A , 두 번째에 당첨 제비가 나오는 사건을 B 라 하자.

첫 번째에 당첨 제비를 뽑을 확률은

$$P(A) = \frac{n}{12}$$

첫 번째에 당첨 제비를 뽑았을 때, 두 번째에도 당첨 제비를 뽑을 확률은

$$P(B|A) = \frac{n-1}{11} \quad \leftarrow \text{첫 번째에 당첨 제비를 뽑았으므로 남은 11개의 제비 중 당첨 제비는 (n-1)개이다.}$$

따라서 두 번 모두 당첨 제비를 뽑을 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \\ &= \frac{n}{12} \times \frac{n-1}{11} \\ &= \frac{n(n-1)}{132} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{n(n-1)}{132} = \frac{1}{11} \text{ 이므로}$$

$$n(n-1) = 12, n^2 - n - 12 = 0$$

$$(n+3)(n-4) = 0$$

$$\therefore n = 4 (\because n > 0)$$

답 4

체크 139

A, B 가 흰 공을 꺼내는 사건을 각각 A, B 라 하자.

(i) A 가 흰 공을 꺼낼 확률은

$$P(A) = \frac{4}{7}$$

A 가 흰 공을 꺼냈을 때, B 가 흰 공을 꺼낼 확률은

$$P(B|A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \leftarrow A \text{가 흰 공을 꺼냈으므로 주머니 안에는 흰 공 3개와 검은 공 3개가 있다.}$$

따라서 A 가 흰 공을 꺼내고, B 도 흰 공을 꺼낼 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{7}$$

(ii) A 가 검은 공을 꺼낼 확률은

$$P(A^c) = \frac{3}{7}$$

A 가 검은 공을 꺼냈을 때, B 가 흰 공을 꺼낼 확률은

$$P(B|A^c) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \leftarrow A \text{가 검은 공을 꺼냈으므로 주머니 안에는 흰 공 4개와 검은 공 2개가 있다.}$$

따라서 A 가 검은 공을 꺼내고, B 가 흰 공을 꺼낼 확률은

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{7}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$$

$$= \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$$

답 $\frac{4}{7}$

체크 140

내년 여름의 평균 기온이 예년보다 높은 사건을 A , 목표 수확량을 달성하는 사건을 B 라 하자.

(i) 내년 여름의 평균 기온이 예년보다 높을 확률은

$$P(A) = 0.7$$

내년 여름의 평균 기온이 예년보다 높을 때, 목표 수확량을 달성할 확률은

$$P(B|A) = 0.9$$

즉, 내년 여름의 평균 기온이 예년보다 높고 목표 수확량을 달성할 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = 0.7 \times 0.9 = 0.63$$

(ii) 내년 여름의 평균 기온이 예년과 비슷하거나 낮을 확률은

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0.7 = 0.3$$

내년 여름의 평균 기온이 예년과 비슷하거나 낮을 때, 목표 수확량을 달성할 확률은

$$P(B|A^c) = 0.4$$

즉, 내년 여름의 평균 기온이 예년과 비슷하거나 낮고 목표 수확량을 달성할 확률은

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) = 0.3 \times 0.4 = 0.12$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$$

$$= 0.63 + 0.12 = 0.75$$

답 0.75

tip

두 사건 A, B 에 대하여

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ &= P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c) \end{aligned}$$

체크 141

흰 공을 꺼내는 사건을 A , 검은 공을 꺼내는 사건을 B , 수현이가 흰 공이라고 대답하는 사건을 E 라 하자.

(i) 주머니에서 흰 공을 꺼내고, 수현이가 흰 공이라 대답할 확률은

$$P(A \cap E) = P(A)P(E|A)$$

$$= \frac{4}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{수현이가 한 대답은 거짓말이} \\ \text{아니므로 } P(E|A) = \frac{1}{4} \end{array}$$

(ii) 주머니에서 검은 공을 꺼내고, 수현이가 흰 공이라 대답할 확률은

$$P(B \cap E) = P(B)P(E|B)$$

$$= \frac{2}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{수현이가 한 대답은 거짓말} \\ \text{이므로 } P(E|B) = \frac{3}{4} \end{array}$$

(i), (ii)에서

$$P(E) = P(A \cap E) + P(B \cap E)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{12}} = \frac{2}{5} \quad \text{답 } \frac{2}{5}$$

체크 142

주머니 A에서 주머니 B로 흰 공을 옮기는 사건을 A , 주머니 B에서 꺼낸 두 개의 공이 모두 흰 공인 사건을 B 라 하자.

(i) 주머니 A에서 주머니 B로 옮겨진 공이 흰 공이고, 주머니 B에서 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공일 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{{}_4C_2}{{}_6C_2} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{옮겨진 공이 흰 공이므로 주머니 B 안에는} \\ \text{흰 공 4개와 검은 공 2개가 들어 있다.} \end{array}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

(ii) 주머니 A에서 주머니 B로 옮겨진 공이 검은 공이고, 주머니 B에서 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공일 확률은

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{{}_3C_2}{{}_6C_2} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{옮겨진 공이 검은 공이므로 주머니 B 안에는} \\ \text{흰 공 3개와 검은 공 3개가 들어 있다.} \end{array}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

(i), (ii)에서

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$$

$$= \frac{4}{15} + \frac{1}{15} = \frac{1}{3}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{1}{3}} = \frac{4}{5} \quad \text{답 } \frac{4}{5}$$

tip

사건 B 가 일어났을 때의 사건 A 의 조건부확률은

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(A^c \cap B)} \\ &= \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c)} \end{aligned}$$

연습 문제 05

143

(1) 두 사건 A, B 가 서로 배반사건이므로

$$P(A \cap B^c) = P(A) = \frac{1}{3}$$

$$\text{이때 } P(B^c) = 1 - P(B) = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

(2) $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ 이고,

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) \\ &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

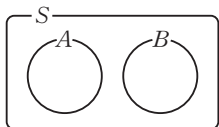
이므로

$$P(B^c|A^c) = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(A^c)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{10}$$

답 (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{3}{10}$

tip

두 사건 A, B 가 동시에 일어나지 않을 때, 즉 $A \cap B = \emptyset$ 일 때, 두 사건 A, B 는 서로 배반사건이므로 오른쪽 벤다이어그램에서 $A \subset B^c$ 이고 $A \cap B^c = A$ 이다.



144

두 사건 A, B 에 대하여

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}P(A \cap B)$$

이므로 $P(A \cap B)$ 가 최대일 때 $P(B|A)$ 도 최대가 되고,

$P(A \cap B)$ 가 최소일 때 $P(B|A)$ 도 최소가 된다.

(i) $A \subset B$, 즉 $A \cap B = A$ 일 때, $P(A \cap B)$ 가 최대이고 그 최댓값은 $P(A)$ 이므로

$$M = \frac{5}{3}P(A \cap B) = \frac{5}{3}P(A) = \frac{5}{3} \times \frac{3}{5} = 1$$

(ii) $P(A \cup B) = 1$ 일 때, $P(A \cap B)$ 가 최소이고 그 최솟값은

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 1 = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} - 1 = \frac{2}{5}$$

$$\therefore m = \frac{5}{3}P(A \cap B) = \frac{5}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{3}$$

(i), (ii)에서

$$M + m = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

답 $\frac{5}{3}$

145

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

첫 번째 나온 눈의 수를 a , 두 번째 나온 눈의 수를 b 라 할 때, 사건 A 를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는

$(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)$

의 15개이다.

$$\therefore P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

또한 사건 $A \cap B$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는

$(3, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 3), (6, 2), (6, 4)$

의 6개이다.

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{12}} = \frac{2}{5}$$

답 $\frac{2}{5}$

tip

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 첫 번째 나온 눈의 수가 두 번째 나온 눈의 수보다 큰 경우의 수는 1부터 6까지의 자연수 중 서로 다른 2개를 뽑은 후, 큰 수를 첫 번째 나온 눈의 수로, 작은 수를 두 번째 나온 눈의 수로 정하는 경우의 수 ${}_6C_2 = 15$ 로 계산할 수도 있다.

146

15명의 회원 중 임의로 2명을 뽑는 경우의 수는

$${}_{15}C_2 = \frac{15 \times 14}{2 \times 1} = 105$$

이때 2명이 같은 종목을 신청한 회원인 사건을 A , 2명이 요가 종목을 신청한 회원인 사건을 B 라 하자.

같은 종목을 신청한 회원인 사건은 2명 모두 스피닝을 신청한 회원인 경우와 2명 모두 요가를 신청한 회원인 경우뿐이다.

(i) 2명이 모두 스피닝을 신청한 회원인 경우의 수는

$${}_8C_2 = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$$

(ii) 2명이 모두 요가를 신청한 회원인 경우의 수는

$${}_7C_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$$

(i), (ii)에서 2명이 같은 종목을 신청한 회원인 경우의 수는
 $28 + 21 = 49$

$$\text{따라서 } P(A) = \frac{49}{105} = \frac{7}{15}, P(A \cap B) = \frac{21}{105} = \frac{1}{5} \text{이므로}$$

구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{15}} = \frac{3}{7} \quad \text{답 } \frac{3}{7}$$

147

정육면체 ABCD-EFGH의 8개의 꼭짓점 중 서로 다른 두 점을 택하는 모든 경우의 수는

$${}_8C_2 = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$$

이때 선분의 길이가 무리수인 사건을 A, 선분의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 사건을 B라 하자.

오른쪽 그림과 같이 두 점을 연결한 선분의 길이가 무리수인 경우는 그 길이가 $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$ 인 두 가지 경우뿐이다.

(i) 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 선분은 6개의 각 면마다 2개씩 존재하므로

$$6 \times 2 = 12(\text{개})$$

(ii) 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 선분은 \overline{AG} , \overline{BH} , \overline{CE} , \overline{DF} 의 4개

(i), (ii)에서 선분의 길이가 무리수인 경우의 수는

$$12 + 4 = 16$$

$$\text{따라서 } P(A) = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}, P(A \cap B) = \frac{12}{28} = \frac{3}{7} \text{이므로 구하는}$$

확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{4}{7}} = \frac{3}{4} \quad \text{답 } \frac{3}{4}$$

[다른 풀이]

선분의 길이가 무리수인 사건을 A, 선분의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 사건을 B라 하면 (i), (ii)로부터 선분의 길이가 무리수인 것은 16개이고, 이중 선분의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 것은 (i)의 12개이므로

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

148

7명을 일렬로 세우는 모든 경우의 수는 7!

준영이와 소현이가 이웃하여 서는 사건을 A, 준영이와 지연

이가 이웃하여 서는 사건을 B라 하자.

준영이와 소현이를 한 사람으로 생각하여 모두 6명을 일렬로 세우는 경우의 수는 6!이고, 그 각각에 대하여 준영이와 소현이가 자리를 바꾸는 경우의 수가 2이므로 준영이와 소현이가 이웃하여 서는 경우의 수는 $6! \times 2$ 이다.

$$\therefore P(A) = \frac{6! \times 2}{7!} = \frac{2}{7}$$

준영이와 소현이가 이웃하면서 준영이와 지연이도 이웃하는 경우는

오른쪽 그림과 같이 2가지이다. 그 각각에 대하여 준영, 소현, 지연의 3명을 한 사람으로 생각하여 모두 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는 5!이므로 준영이와 소현이가 이웃하면서 준영이와 지연이도 이웃하게 서는 경우의 수는 $2 \times 5!$ 이다.

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{2 \times 5!}{7!} = \frac{1}{21}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{21}}{\frac{2}{7}} = \frac{1}{6} \quad \text{답 } \frac{1}{6}$$

149

임의로 선택한 1건이 액정 화면 고장 건인 사건을 A, 접수 시기가 품질보증 기간 이내인 사건을 B라 하면

$$P(A) = \frac{50+b}{200}, P(A \cap B) = \frac{50}{200} = \frac{1}{4}$$

따라서 접수된 200건 중 임의로 선택한 1건이 액정 화면 고장 건일 때, 이 건의 접수 시기가 품질보증 기간 이내일 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{50+b}{200}} = \frac{50}{50+b}$$

$$\text{즉, } \frac{50}{50+b} = \frac{2}{3} \text{이므로}$$

$$100 + 2b = 150 \quad \therefore b = 25$$

이때 $a+b=60$ 에서 $a=35$ 이므로

$$a-b=35-25=10 \quad \text{답 } 10$$

[다른 풀이]

(단위 : 건)

	메인 보드 고장	액정 화면 고장	합계
품질보증 기간 이내	90	50	140
품질보증 기간 이후	a	b	60
합계	$90+a$	$50+b$	200

위의 표에서 구하는 확률은 액정 화면 고장 건 중 품질보증 기간 이내인 건을 뽑을 확률과 같으므로

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{50}{50+b}$$

$$\text{즉, } \frac{50}{50+b} = \frac{2}{3} \text{ 이므로}$$

$$100+2b=150 \quad \therefore b=25$$

이때 $a+b=60$ 에서 $a=35$ 이므로

$$a-b=35-25=10$$

150

갑 또는 을이 회장으로 뽑히는 사건을 A , 병이 부회장으로 뽑히는 사건을 B 라 하면 갑 또는 을이 회장으로 뽑힐 확률은

$$P(A) = \frac{{}_9P_1}{{}_{10}P_2} + \frac{{}_9P_1}{{}_{10}P_2} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$

갑 또는 을이 회장으로 뽑히고, 병이 부회장으로 뽑힐 확률은

$$P(A \cap B) = \frac{1}{{}_{10}P_2} + \frac{1}{{}_{10}P_2} = \frac{1}{45}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{45}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{9} \quad \text{답 } \frac{1}{9}$$

151

ㄱ. 갑이 당첨 제비를 뽑을 확률은 $P(A) = \frac{3}{5}$

(i) 갑이 당첨 제비를 뽑고, 을이 당첨 제비를 뽑을 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

(ii) 갑이 당첨 제비를 뽑지 못하고, 을이 당첨 제비를 뽑을 확률은

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$$

(i), (ii)에서 을이 당첨 제비를 뽑을 확률은

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$$

$\therefore P(A) = P(B)$ (참)

$$\text{ㄴ. } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2}$$

$$P(B|A^c) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{4}$$

$\therefore P(B|A) < P(B|A^c)$ (참)

$$\text{ㄷ. } P(A^c|B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2}$$

$\therefore P(A^c|B) = P(B|A)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

152

세 번째 시행에서 처음으로 같은 색의 공을 뽑으려면 첫 번째, 두 번째 시행에서는 서로 다른 색의 공을 뽑아야 한다.

세 번째 시행에서 처음으로 같은 색의 공을 뽑는 사건을 A , 검은 공 2개를 뽑는 사건을 B 라 하자.

$$P(A) = \frac{{}_5C_1 \times {}_7C_1}{{}_{12}C_2} \times \frac{{}_4C_1 \times {}_6C_1}{{}_{10}C_2} \times \frac{{}_3C_2 + {}_5C_2}{{}_8C_2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{{}_5C_1 \times {}_7C_1}{{}_{12}C_2} \times \frac{{}_4C_1 \times {}_6C_1}{{}_{10}C_2} \times \frac{{}_3C_2}{{}_8C_2}$$

이므로

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{{}_3C_2}{{}_3C_2 + {}_5C_2} = \frac{3}{13} \quad \text{답 } \frac{3}{13}$$

153

화요일에 비가 오는 사건을 A , 수요일에 비가 오는 사건을 B 라 하자.

(i) 화요일, 수요일 모두 비가 올 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

(ii) 화요일에 비가 오지 않고, 수요일에 비가 올 확률은

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = \frac{4}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{2} \quad \text{답 } \frac{1}{2}$$

154

[1단계]에서 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 A , [3단계]에서 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 B 라 하자.

(i) [1단계]에서 꺼낸 공이 흰 공일 확률은

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

[2단계]에서 주머니에 흰 공을 1개 넣으므로 [3단계]에서 꺼낸 공이 흰 공일 확률은

$$P(B|A) = \frac{3}{7} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{주머니 안에는 흰 공 3개,} \\ \text{검은 공 4개가 들어 있다.} \end{array}$$

따라서 [1단계]에서 꺼낸 공이 흰 공이고, [3단계]에서 꺼낸 공이 흰 공일 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$$

(ii) [1단계]에서 꺼낸 공이 검은 공일 확률은

$$P(A^c) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

[2단계]에서 주머니에 검은 공을 1개 넣으므로 [3단계]에서 꺼낸 공이 흰 공일 확률은

$$P(B|A^c) = \frac{2}{7} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{주머니 안에는 흰 공 2개,} \\ \text{검은 공 5개가 들어 있다.} \end{array}$$

따라서 [1단계]에서 꺼낸 공이 검은 공이고, [3단계]에서 꺼낸 공이 흰 공일 확률은

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{7} = \frac{4}{21}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = \frac{1}{7} + \frac{4}{21} = \frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

155

임의로 뽑은 한 명이 지역 P의 사람인 사건을 A, 지역 Q의 사람인 사건을 B, 청소년인 사건을 E라 하면

$$P(A) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}, P(E|A) = \frac{1}{5},$$

$$P(E|B) = \frac{1}{6}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A \cap E) + P(B \cap E) \\ &= P(A)P(E|A) + P(B)P(E|B) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{8}{45} \end{aligned}$$

답 $\frac{8}{45}$

156

임의로 뽑은 한 개의 전구가 두 회사 A, B에서 생산된 사건을 각각 A, B, 불량품인 사건을 E라 하면

$$P(A) = 0.3, P(B) = 0.7, P(E|A) = 0.02, P(E|B) = 0.03$$

(i) 뽑은 전구가 회사 A에서 생산된 불량품인 전구일 확률은

$$P(A \cap E) = P(A)P(E|A) = 0.3 \times 0.02 = 0.006$$

(ii) 뽑은 전구가 회사 B에서 생산된 불량품인 전구일 확률은

$$P(B \cap E) = P(B)P(E|B) = 0.7 \times 0.03 = 0.021$$

(i), (ii)에서

$$P(E) = P(A \cap E) + P(B \cap E) = 0.006 + 0.021 = 0.027$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{0.006}{0.027} = \frac{2}{9}$$

답 $\frac{2}{9}$

[다른 풀이]

생산된 전구의 수를 1000이라 하면 두 회사 A, B에서 생산된 전구는 각각 300개, 700개이고, 이중 불량품은 각각 6개, 21

개이므로 다음 표와 같이 나타낼 수 있다.

(단위: 개)

	회사 A	회사 B	합계
합격품	294	679	973
불량품	6	21	27
합계	300	700	1000

따라서 구하는 확률은 불량품인 전구 중 회사 A에서 생산된 전구를 뽑을 확률과 같으므로

$$P(A|E) = \frac{n(A \cap E)}{n(E)} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$$

157

2장의 카드에 적힌 두 수의 합이 짝수인 사건을 E, 주머니 A에서 홀수가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 A라 하자.

이때 두 주머니 A, B에서 각각 한 장씩 꺼낸 2장의 카드에 적힌 수의 합이 짝수이려면

(홀수)+(홀수) 또는 (짝수)+(짝수)이어야 한다.

(i) 두 주머니 A, B에서 각각 홀수가 적힌 카드를 꺼내고 그 두 수의 합이 짝수일 확률은

$$P(A \cap E) = P(A)P(E|A) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$$

(ii) 두 주머니 A, B에서 각각 짝수가 적힌 카드를 꺼내고 그 두 수의 합이 짝수일 확률은

$$P(A^c \cap E) = P(A^c)P(E|A^c) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$$

(i), (ii)에서 2장의 카드에 적힌 두 수의 합이 짝수일 확률은

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A \cap E) + P(A^c \cap E) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{4}{15} = \frac{7}{15} \end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{15}} = \frac{3}{7} \quad \text{답 } \frac{3}{7}$$

158

작품 A를 읽은 67명의 회원 중 남자는 31명이므로 작품 A를 읽은 여자 회원은 36명이고, 작품 B를 읽은 69명의 회원 중 여자는 44명이므로 작품 B를 읽은 남자 회원은 25명이다.

이때 40명의 남자 회원 중 작품 A를 읽은 회원이 31명이고 작품 B를 읽은 회원이 25명이므로 남자 회원 중 두 작품 A, B를 모두 읽은 회원의 수는

$$31 + 25 - 40 = 16 \text{ (명)}$$

또한 60명의 여자 회원 중 작품 A를 읽은 회원이 36명이고 작

품 B를 읽은 회원이 44명이므로 여자 회원 중 두 작품 A, B를 모두 읽은 회원의 수는

$$36 + 44 - 60 = 20 \text{ (명)}$$

따라서 두 작품 A, B의 독서 여부는 다음 표와 같다.

(단위: 명)

	남자	여자	합계
A를 읽은 회원	31	36	67
B를 읽은 회원	25	44	69
A, B를 모두 읽은 회원	16	20	36
합계	40	60	100

임의로 뽑은 한 명이 두 작품 A, B를 모두 읽은 회원인 사건을 A, 남자 회원인 사건을 B라 하면

$$P(A) = \frac{36}{100} = \frac{9}{25}, P(A \cap B) = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{25}}{\frac{9}{25}} = \frac{4}{9} \quad \text{답 } \frac{4}{9}$$

[다른 풀이]

위의 표에서 구하는 확률은 두 작품 A, B를 모두 읽은 회원 중 남자 회원을 뽑을 확률과 같으므로

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

159

임의로 선택한 한 명의 학생이 K자격증을 가지고 있지 않은 사건을 A, 여학생인 사건을 B라 하면

$$P(A) = \frac{3}{10}, P(B) = \frac{3}{5}$$

임의로 선택한 한 명의 학생이 K자격증을 가지고 있는 남학생일 확률이 $\frac{1}{5}$ 이므로 $P(A^c \cap B^c) = \frac{1}{5}$ 에서

$$P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = \frac{1}{5}$$

$$\therefore P(A \cup B) = \frac{4}{5}$$

또한 $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ 에서

$$P(A \cap B) = \frac{3}{10} + \frac{3}{5} - \frac{4}{5} = \frac{1}{10}$$

따라서 임의로 선택한 학생이 K자격증을 가지고 있지 않을 때, 이 학생이 여학생일 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{3} \quad \text{답 } \frac{1}{3}$$

[다른 풀이]

전체 학생 수를 100이라 하면 남학생 수와 여학생 수의 비가 2:3이므로 남학생은 40명, 여학생은 60명이다.

또한 전체 학생의 70%가 K자격증을 가지고 있으므로 K자격증을 가지고 있는 학생은 70명이고, 전체 학생 중 임의로 선택한 학생이 K자격증을 가지고 있는 남학생일 확률이 $\frac{1}{5}$ 이므로 K자격증을 가진 남학생은 20명이다.

따라서 K자격증을 가지고 있는 여학생은 50명이므로 다음 표와 같이 나타낼 수 있다.

(단위: 명)

	남학생	여학생	합계
K자격증 소지자	20	50	70
K자격증 미소지자	20	10	30
합계	40	60	100

위의 표에서 구하는 확률은 K자격증을 가지고 있지 않은 학생 중 여학생을 뽑을 확률과 같으므로

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

160

오른쪽 그림과 같이 주어진 대진

표의 왼쪽부터 차례대로 1, 2, 3,

4, 5라 하면 A팀이 1 또는 4 또는

5의 위치에 배치되는 사건을 A, 2

또는 3의 위치에 배치되는 사건을

B, A팀이 우승하는 사건을 E라 하자.

(i) A팀이 2번 시합하여 우승하는 경우

A팀이 1 또는 4 또는 5의 위치에 배치되고 우승할 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cap E) &= P(A)P(E|A) \\ &= \frac{3}{5} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{20} \end{aligned}$$

(ii) A팀이 3번 시합하여 우승하는 경우

A팀이 2 또는 3의 위치에 배치되고 우승할 확률은

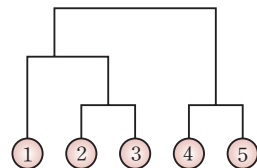
$$\begin{aligned} P(B \cap E) &= P(B)P(E|B) \\ &= \frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{20} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서

$$P(E) = P(A \cap E) + P(B \cap E) = \frac{3}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{5}} = \frac{3}{4} \quad \text{답 } \frac{3}{4}$$



12 사건의 독립과 종속

체크 161

3개의 동전을 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하고 각 사건을 순서쌍 (10원, 100원, 500원)으로 나타내면

$$A = \{(H, T, T), (H, H, T), (H, T, H), (H, H, H)\},$$

$$B = \{(T, H, T), (H, H, T), (T, H, H), (H, H, H)\},$$

$$C = \{(T, T, H), (T, H, T), (H, T, T)\} \text{이므로}$$

$$A \cap B = \{(H, H, T), (H, H, H)\},$$

$$A \cap C = \{(H, T, T)\}, B \cap C = \{(T, H, T)\}$$

$$\therefore P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{3}{8}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}, P(A \cap C) = \frac{1}{8}, P(B \cap C) = \frac{1}{8}$$

ㄱ. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

ㄴ. $P(A \cap C) \neq P(A)P(C)$ 이므로 두 사건 A와 C는 서로 종속이다.

ㄷ. $P(B \cap C) \neq P(B)P(C)$ 이므로 두 사건 B와 C는 서로 종속이다.

따라서 서로 독립인 사건은 ㄱ이다.

답 ㄱ

체크 162

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}, B = \{5, 10\},$$

$$C = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}, D = \{4, 9\} \text{이므로}$$

$$A \cap B = \{5\}, A \cap C = \{1, 3\}, A \cap D = \{9\}, C \cap D = \{4\}$$

$$\therefore P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{6}, P(C) = \frac{1}{2}, P(D) = \frac{1}{6},$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{12}, P(A \cap C) = \frac{1}{6}, P(A \cap D) = \frac{1}{12},$$

$$P(C \cap D) = \frac{1}{12}$$

ㄱ. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

ㄴ. $P(A \cap C) \neq P(A)P(C)$ 이므로 두 사건 A와 C는 서로 종속이다.

ㄷ. $P(A \cap D) = P(A)P(D)$ 이므로 두 사건 A와 D는 서로 독립이다.

ㄹ. $P(C \cap D) = P(C)P(D)$ 이므로 두 사건 C와 D는 서로 독립이다.

따라서 서로 독립인 사건은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

tip

양의 약수의 개수가 3인 수는 소수의 제곱수이다.

체크 163

$$P(A) = \frac{2}{5} \text{에서 } P(A^c) = 1 - P(A) = \frac{3}{5}$$

$$P(B^c) = \frac{2}{7} \text{에서 } P(B) = 1 - P(B^c) = \frac{5}{7}$$

이때 두 사건 A, B가 서로 독립이므로 두 사건 A^c , B도 서로 독립이다.

$$\therefore P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B) = \frac{3}{5} \times \frac{5}{7} = \frac{3}{7} \quad \text{답 } \frac{3}{7}$$

체크 164

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{4}P(A)$$

이때 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 에서

$$\frac{1}{2} = P(A) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}P(A), \quad \frac{3}{4}P(A) = \frac{1}{4}$$

$$\therefore P(A) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore P(A|B) = P(A) = \frac{1}{3} \quad \text{답 } \frac{1}{3}$$

체크 165

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$P(A|B^c) = P(A), P(B|A^c) = P(B),$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A|B^c) + P(B|A^c) = \frac{31}{35} \text{에서}$$

$$P(A) + P(B) = \frac{31}{35}$$

이때 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 에서

$$\frac{5}{7} = \frac{31}{35} - P(A)P(B)$$

$$\therefore P(A)P(B) = \frac{31}{35} - \frac{5}{7} = \frac{6}{35} \quad \text{답 } \frac{6}{35}$$

tip

두 사건 A, B가 서로 독립이면

$$P(A|B) = P(A|B^c) = P(A)$$

체크 166

2개의 주사위를 던져 나오는 눈의 수를 각각 a, b라 하고 순서쌍 (a, b)로 나타내면 주사위의 두 눈의 수의 합이 4가 되는

경우는 (1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지이고, 동전 3개가 모두 뒷면이 나오는 경우는 1가지이다. 이때 주사위의 두 눈의 수의 합이 4가 되는 사건을 A , 동전 3개가 모두 뒷면이 나오는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{1}{12}, P(B) = \frac{1}{8}$$

두 사건 A, B 는 서로 독립이므로 구하는 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{96} \quad \text{답 } \frac{1}{96}$$

체크 167

A, B 가 과녁을 명중시키는 사건을 각각 A, B 라 하면 두 사건 A, B 는 서로 독립이므로 A 와 B^c, A^c 와 B 도 서로 독립이다.

(i) A 가 명중시키고 B 는 명중시키지 않을 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A)P(B^c) \\ &= 0.1 \times (1 - 0.2) = 0.08 \end{aligned}$$

(ii) A 가 명중시키지 않고 B 는 명중시킬 확률은

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(A^c)P(B) \\ &= (1 - 0.1) \times 0.2 = 0.18 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) = 0.08 + 0.18 = 0.26 \quad \text{답 } 0.26$$

체크 168

예지와 승현이가 운전 면허 시험에 합격하는 사건을 각각 A, B 라 하면 두 사건 A, B 는 서로 독립이므로 두 사건 A^c, B^c 도 서로 독립이다.

따라서 두 사람 중 적어도 한 명이 합격하는 사건은 두 사람 모두 불합격하는 사건의 여사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} 1 - P(A^c \cap B^c) &= 1 - P(A^c)P(B^c) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{2}{3}\right)\left(1 - \frac{3}{5}\right) \\ &= \frac{13}{15} \quad \text{답 } \frac{13}{15} \end{aligned}$$

[다른 풀이]

예지와 승현이가 운전 면허 시험에 합격하는 사건을 각각 A, B 라 하면

$$P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{3}{5}$$

이때 두 사건 A, B 는 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

따라서 두 사람 중 적어도 한 명이 합격할 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{13}{15}$$

13 독립시행의 확률

체크 169

(1) 한 개의 동전을 던져 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 뒷면이 나올

확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.

한 개의 동전을 8번 던질 때, 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 같으려면 앞면과 뒷면이 각각 4번씩 나와야 한다. 따라서 구하는 확률은

$${}_8C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{35}{128}$$

(2) 2개의 주사위를 동시에 던져 나오는 눈의 수를 각각 a, b 라 하고 순서쌍 (a, b) 로 나타내면 두 눈의 수의 합이 7이 되는 경우는 (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)의 6가지이므로 그 확률은 $\frac{1}{6}$ 이다.

2개의 주사위를 동시에 던지는 시행을 3번 반복할 때, 두 눈의 수의 합이 7이 되는 사건이 한 번도 일어나지 않을 확률은 ${}_3C_0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^3$ 이다.

따라서 여사건의 확률을 이용하면 구하는 확률은

$$1 - {}_3C_0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

$$\text{답 } (1) \frac{35}{128} \quad (2) \frac{91}{216}$$

체크 170

1부터 7까지의 자연수 중 소수는 2, 3, 5, 7의 4개이므로 소수가 적힌 공을 꺼낼 확률은 $\frac{4}{7}$ 이고, 4의 약수는 1, 2, 4이므로 주사위를 한 번 던져 4의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.

(i) 소수가 적힌 공을 꺼내는 경우

한 개의 주사위를 3번 던져 4의 약수의 눈이 3번 나와야 하므로 그 확률은

$$\frac{4}{7} \times {}_3C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{14}$$

(ii) 그 이외의 수가 적힌 공을 꺼내는 경우

한 개의 주사위를 5번 던져 4의 약수의 눈이 3번 나와야 하므로 그 확률은

$$\left(1 - \frac{4}{7}\right) \times {}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{112}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{14} + \frac{15}{112} = \frac{23}{112}$$

답 23/112

체크 171

2개의 동전을 동시에 던져 모두 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{4}$, 적어

도 1개가 뒷면이 나올 확률은 $\frac{3}{4}$ 이다.

2개의 동전을 동시에 던지는 시행을 5번 반복할 때, 모두 앞면이 나오는 횟수를 x , 적어도 1개가 뒷면이 나오는 횟수를 y 라 하면

$$x + y = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또한 점수의 합이 20점이므로

$$10x - 5y = 20 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$x = 3, y = 2$$

따라서 2개의 동전을 동시에 던지는 시행을 5번 반복할 때, 앞면이 3번, 뒷면이 2번 나와야 하므로 구하는 확률은

$${}_5C_3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{45}{512} \quad \text{답 } \frac{45}{512}$$

체크 172

흰 공 4개와 검은 공 2개가 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 흰 공이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$, 검은 공이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$ 이다.

이 시행을 6번 반복할 때, 흰 공을 꺼낸 횟수를 x , 검은 공을 꺼낸 횟수를 y 라 하면

$$x + y = 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) 점 P의 위치가 2인 경우

점 P가 원점에서 오른쪽으로 2만큼 움직였으므로

$$x - 3y = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$x = 5, y = 1$$

즉, 흰 공이 5번, 검은 공이 1번 나와야 하므로 그 확률은

$${}_6C_5 \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{64}{243}$$

(ii) 점 P의 위치가 -2인 경우

점 P가 원점에서 왼쪽으로 2만큼 움직였으므로

$$x - 3y = -2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{3}$ 을 연립하여 풀면

$$x = 4, y = 2$$

즉, 흰 공이 4번, 검은 공이 2번 나와야 하므로 그 확률은

$${}_6C_4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{80}{243}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{64}{243} + \frac{80}{243} = \frac{144}{243} = \frac{16}{27}$$

답 16/27

체크 173

한 개의 동전을 던져 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.

한 개의 동전을 5번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수를 x , 뒷면이 나오는 횟수를 y 라 하면

$$x + y = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) 점 P가 삼각형 ABC의 변을 따라 점 A를 출발하여 시계 반대 방향으로 7만큼 움직인 경우

$$2x + y = 7 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$x = 2, y = 3$$

즉, 앞면이 2번, 뒷면이 3번 나와야 하므로 그 확률은

$${}_5C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$$

(ii) 점 P가 삼각형 ABC의 변을 따라 점 A를 출발하여 시계 반대 방향으로 10만큼 움직인 경우

$$2x + y = 10 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{3}$ 을 연립하여 풀면

$$x = 5, y = 0$$

즉, 앞면이 5번 나와야 하므로 그 확률은

$${}_5C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{32}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{5}{16} + \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$$

답 11/32

[참고]

점 P가 점 A를 출발하여 점 B에 도착할 때, 점 P가 움직인 거리는

$$2x + y = 1, 4, 7, 10, 13, \dots$$

이때 $x + y = 5$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y 에 대하여

$$2x + y = 2x + (5 - x) = x + 5 \geq 5$$

$$2x + y = 2(5 - y) + y = 10 - y \leq 10$$

따라서 점 P가 움직인 거리 $2x + y$ 의 값의 범위는

$$5 \leq 2x + y \leq 10 \text{ 이므로 } 2x + y = 7 \text{ 또는 } 2x + y = 10 \text{ 이다.}$$

연습 문제 06

174

주사위를 한 번 던지는 시행에서 3 이상의 수가 나오는 사건을 A 라 하면 $A = \{3, 4, 5, 6\}$ 이므로

$$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

① $B = \{1, 2\}$ 라 하면 $A \cap B = \emptyset$ 이므로

$$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, P(A \cap B) = 0$$

$$\therefore P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

즉, 두 사건 A, B 는 서로 종속이다.

② $C = \{1, 2, 3\}$ 이라 하면 $A \cap C = \{3\}$ 이므로

$$P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P(A \cap C) = \frac{1}{6}$$

$$\therefore P(A \cap C) \neq P(A)P(C)$$

즉, 두 사건 A, C 는 서로 종속이다.

③ $D = \{1, 3, 5\}$ 라 하면 $A \cap D = \{3, 5\}$ 이므로

$$P(D) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P(A \cap D) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore P(A \cap D) = P(A)P(D)$$

즉, 두 사건 A, D 는 서로 독립이다.

④ $E = \{4, 5, 6\}$ 이라 하면 $A \cap E = \{4, 5, 6\}$ 이므로

$$P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P(A \cap E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P(A \cap E) \neq P(A)P(E)$$

즉, 두 사건 A, E 는 서로 종속이다.

⑤ $F = \{1, 2, 3, 6\}$ 이라 하면 $A \cap F = \{3, 6\}$ 이므로

$$P(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, P(A \cap F) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore P(A \cap F) \neq P(A)P(F)$$

즉, 두 사건 A, F 는 서로 종속이다.

따라서 3 이상의 수가 나오는 사건과 서로 독립인 사건은 ③이다. 답 ③

175

① 두 사건 A, B 가 서로 독립이면 A 와 B^c , A^c 와 B 도 서로 독립이므로

$$P(A|B^c) + P(A^c|B) = P(A) + P(A^c) = 1 \text{ (참)}$$

② 두 사건 A, B 가 서로 배반사건이면 $P(A \cap B) = 0$ 이므로

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) \quad \dots\dots ㉠$$

이때 $B \subset A^c$ 이므로

$$P(B) \leq P(A^c) = 1 - P(A) \quad \therefore P(A) + P(B) \leq 1$$

즉, ㉠에서 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \leq 1$ (참)

③ 두 사건 A, B 가 서로 독립이면 A, B^c 도 서로 독립이므로

$$P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c) = P(A|B)P(B^c) \text{ (참)}$$

④ 두 사건 A, B 가 서로 배반사건이면 $A \cap B = \emptyset$ 이므로

$$P(A \cap B) = 0 \text{이다. 이때 } P(A) \neq 0, P(B) \neq 0 \text{이므로}$$

$$P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

즉, 두 사건 A, B 는 서로 종속이다. (참)

⑤ ④에서 '두 사건 A, B 가 서로 배반사건이면 A, B 는 서로 종속이다.'가 참이므로 그 대우, 즉 '두 사건 A, B 가 서로 독립이면 A, B 는 서로 배반사건이 아니다.'도 참이다.

(거짓)

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

tip

$P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$ 인 두 사건 A, B 에 대하여

(1) 두 사건 A, B 가 서로 배반사건이면 두 사건 A, B 는 서로 종속이다.

(2) 두 사건 A, B 가 서로 독립이면 두 사건 A, B 는 서로 배반사건이 아니다.

176

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{5} \quad \dots\dots ㉠$$

이때 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 에서

$$\frac{7}{10} = P(A) + P(B) - \frac{1}{5} \quad \therefore P(B) = \frac{9}{10} - P(A)$$

이를 ㉠에 대입하면

$$P(A) \left\{ \frac{9}{10} - P(A) \right\} = \frac{1}{5}$$

$$10\{P(A)\}^2 - 9P(A) + 2 = 0$$

$$\{5P(A) - 2\} \{2P(A) - 1\} = 0$$

$$\therefore P(A) = \frac{2}{5} \text{ 또는 } P(A) = \frac{1}{2}$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\begin{cases} P(A) = \frac{2}{5} \\ P(B) = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} P(A) = \frac{1}{2} \\ P(B) = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\therefore P(A) = \frac{2}{5} \text{ (}\because P(A) < P(B)\text{)}$$

답 $\frac{2}{5}$

177

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{9}$$

이때 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 에서

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \frac{1}{9}$$

한편, $0 < P(A) \leq 1$, $0 < P(B) \leq 1$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$P(A) + P(B) \geq 2\sqrt{P(A)P(B)} = 2\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{2}{3}$$

(단, 등호는 $P(A) = P(B) = \frac{1}{3}$ 일 때 성립)

$$\therefore P(A \cup B) \geq \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

따라서 $P(A \cup B)$ 의 최솟값은 $\frac{5}{9}$ 이다.

답 $\frac{5}{9}$

tip

산술평균과 기하평균의 관계

$a > 0, b > 0$ 일 때, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$ 일 때 성립한다.)

178

갑이 명중시키는 사건을 A , 을이 명중시키는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{3}{5}, P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) = \frac{1}{2}$$

이때 두 사건 A, B 는 서로 독립이므로 A 와 B^c , A^c 와 B 도 서로 독립이다.

$$\begin{aligned} \therefore P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) &= P(A)P(B^c) + P(A^c)P(B) \\ &= \frac{3}{5}\{1 - P(B)\} + \left(1 - \frac{3}{5}\right)P(B) \\ &= \frac{3}{5} - \frac{1}{5}P(B) \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{3}{5} - \frac{1}{5}P(B) = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

따라서 을이 명중시킬 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.

답 $\frac{1}{2}$

179

남자 직원을 택하는 사건을 A , 국내를 선호하는 직원을 택하는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{150}{200} = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{80}{200} = \frac{2}{5}, P(A \cap B) = \frac{a}{200}$$

이때 두 사건 A, B 는 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$\text{즉, } \frac{a}{200} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} \text{에서 } a = 60$$

한편, $a + b = 150$ 이므로

$$b = 150 - a = 150 - 60 = 90$$

또한 $a + c = 80$ 이므로

$$c = 80 - a = 80 - 60 = 20$$

$$\therefore \frac{b}{c} = \frac{90}{20} = \frac{9}{2}$$

답 $\frac{9}{2}$

180

$$A = \{1, 2, 4, 8\} \text{이므로 } P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

두 조건 (가), (나)에서 $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ 이고, 두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{5} \times P(B) \quad \therefore P(B) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore n(B) = 5$$

이때 $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ 에서 $n(A \cap B) = 2$ 이므로 사건 B 의 원소는 1, 2, 4, 8 중 2개와 3, 5, 6, 7, 9, 10 중 3개로 이루어진다.

따라서 구하는 사건 B 의 개수는

$$\begin{aligned} {}_4C_2 \times {}_6C_3 &= \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} \\ &= 6 \times 20 = 120 \end{aligned}$$

답 120

181

파란 공 3개와 빨간 공 3개가 들어 있는 상자에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 서로 다른 색의 공이 나올 확률은

$$\frac{{}_3C_1 \times {}_3C_1}{{}_6C_2} = \frac{3}{5}$$

따라서 이 시행을 5번 반복할 때, 서로 다른 색의 공이 나오는 사건이 3번 일어날 확률은

$${}_5C_3 \left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{216}{625}$$

답 $\frac{216}{625}$

182

2개의 주사위를 동시에 던질 때, 두 눈의 수의 곱이 10과 서로 소하려면 두 눈의 수의 곱이 2 또는 5를 소인수로 가지지 않아야 하므로 어느 주사위의 눈도 2, 4, 5, 6이 나오지 않아야 한다. 즉, 2개의 주사위의 눈이 모두 1 또는 3이 나와야 하므로 2개의 주사위를 동시에 던져 나오는 두 눈의 수의 곱이 10과 서로소일 확률은

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

따라서 구하는 확률은

$${}_3C_2 \left(\frac{1}{9}\right)^2 \left(\frac{8}{9}\right)^1 = \frac{8}{243}$$

답 $\frac{8}{243}$

183

4건의 예약 중 1건 꼴로 취소가 되므로 1건의 예약이 취소될 확률은 $\frac{1}{4}$ 이다.

이때 테이블이 부족하려면 예약 5건 중 취소되는 예약이 0건 또는 1건이어야 한다.

(i) 예약 5건 중 취소가 0건일 때의 확률은

$${}_5C_0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^5=\frac{243}{1024}$$

(ii) 예약 5건 중 취소가 1건일 때의 확률은

$${}_5C_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{405}{1024}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{243}{1024}+\frac{405}{1024}=\frac{81}{128} \quad \text{답 } \frac{81}{128}$$

184

3장의 카드 중 임의로 한 장의 카드를 뽑을 때, 홀수가 나올 확률은 $\frac{2}{3}$, 짝수가 나올 확률은 $\frac{1}{3}$ 이다.

이때 5개의 자연수를 더한 합이 홀수가 되려면 홀수가 1개 또는 3개 또는 5개이어야 한다.

(i) 홀수가 1개, 짝수가 4개일 때의 확률은

$${}_5C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{10}{243}$$

(ii) 홀수가 3개, 짝수가 2개일 때의 확률은

$${}_5C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{80}{243}$$

(iii) 홀수가 5개일 때의 확률은

$${}_5C_5\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{32}{243}$$

(i)~(iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{10}{243}+\frac{80}{243}+\frac{32}{243}=\frac{122}{243} \quad \text{답 } \frac{122}{243}$$

185

당첨 제비 1개, 비당첨 제비 5개가 들어 있는 상자에서 임의로 2개의 제비를 동시에 뽑을 때, 당첨 제비를 뽑을 확률은

$$\frac{{}_1C_1 \times {}_5C_1}{{}_6C_2}=\frac{1}{3}$$

4장의 추첨권을 가진 사람이 받은 경품의 개수가 2이려면 상자에서 제비를 뽑는 시행을 4번 했을 때, 당첨 제비를 2번 뽑아야 한다.

따라서 구하는 확률은

$${}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27} \quad \text{답 } \frac{8}{27}$$

186

한 개의 동전을 던져 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 뒷면이 나올 확

률은 $\frac{1}{2}$ 이다. 동전을 6번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수가 뒷면

이 나오는 횟수보다 큰 경우는 다음과 같다.

(i) 앞면이 6회, 뒷면이 0회 나올 확률은

$${}_6C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{64}$$

(ii) 앞면이 5회, 뒷면이 1회 나올 확률은

$${}_6C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{6}{64}=\frac{3}{32}$$

(iii) 앞면이 4회, 뒷면이 2회 나올 확률은

$${}_6C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{15}{64}$$

(i)~(iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{64}+\frac{3}{32}+\frac{15}{64}=\frac{22}{64}=\frac{11}{32}$$

따라서 $p=32$, $q=11$ 이므로

$$p+q=32+11=43$$

답 43

187

첫 번째 던져서 나오는 주사위의 눈의 수를 a 라 할 때

$f(a)=0$ 이 되는 사건을 A 라 하고, 두 번째 던져서 나오는 주사위의 눈의 수를 b 라 할 때 $f(b)=0$ 이 되는 사건을 B 라 하자.

이차방정식 $f(x)=0$, 즉 $x^2-7x+12=0$ 의 해는

$(x-3)(x-4)=0$ 에서 $x=3$ 또는 $x=4$ 이므로

$$P(A)=\frac{1}{3}, P(B)=\frac{1}{3}$$

이다.

구하는 확률 $P(A \cup B)$ 는

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$$

이고, 두 사건 A , B 는 서로 독립이므로

$$P(A \cap B)=P(A)P(B)=\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

이다. 그러므로

$$P(A \cup B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$$

이다.

따라서 $m=\frac{1}{3}$, $n=\frac{1}{9}$, $k=\frac{5}{9}$ 이므로

$$m \times n \times k=\frac{1}{3} \times \frac{1}{9} \times \frac{5}{9}=\frac{5}{243}$$

답 ②

188

주사위 1개를 던져 나오는 눈의 수를 k 라 하자.

동전 6개를 던질 때, 앞면이 나오는 동전의 개수가 k 일 확률을 P_k 라 하면

$$P_k = \frac{1}{6} \times {}_6C_k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{6-k} \quad (\text{단, } k=1, 2, 3, \dots, 6)$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \times \left\{ {}_6C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}_6C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots + {}_6C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \right\} \\ &= \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 ({}_6C_1 + {}_6C_2 + {}_6C_3 + {}_6C_4 + {}_6C_5 + {}_6C_6) \end{aligned}$$

이때 ${}_6C_0 + {}_6C_1 + {}_6C_2 + \dots + {}_6C_6 = 2^6$ 이므로 구하는 확률은

$$\frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 (2^6 - {}_6C_0) = \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times 63 = \frac{21}{128} \quad \text{답 } \frac{21}{128}$$

tip

이항계수의 성질

$${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \dots + {}_nC_n = 2^n$$

189

파란 공 3개와 빨간 공 2개가 들어 있는 상자에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 같은 색의 공을 꺼낼 확률은

$$\frac{{}_3C_2 + {}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{2}{5}$$

따라서 한 번의 게임에서 상훈이가 이길 확률은 $\frac{2}{5}$ 이고, 헤인

이가 이길 확률은 $\frac{3}{5}$ 이다.

(i) 3번째 게임에서 상훈이가 우승하는 경우

3번 연속으로 상훈이가 이겨야 하므로 그 확률은

$${}_3C_3 \left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(\frac{3}{5}\right)^0 = \frac{8}{125}$$

(ii) 4번째 게임에서 상훈이가 우승하는 경우

3번째 게임까지는 상훈이가 2번, 헤인이가 1번 이기고 4번째 게임에서는 상훈이가 이겨야 하므로 그 확률은

$${}_3C_2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^1 \times \frac{2}{5} = \frac{72}{625}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{8}{125} + \frac{72}{625} = \frac{112}{625}$$

따라서 $a=625$, $b=112$ 이므로

$$a+b=737 \quad \text{답 } 737$$

190

한 개의 동전을 던져 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 뒷면이 나올 확

률은 $\frac{1}{2}$ 이다.

동전을 8번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수를 a , 뒷면이 나오는 횟수를 b 라 하면

$$a+b=8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 점 P의 좌표는 (a, b) 이므로 점 P가 직선 $y=x+4$ 위에 있으려면

$$b=a+4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a=2, b=6$$

즉, 점 P가 직선 $y=x+4$ 위로 옮겨질 확률은

$${}_8C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{7}{64}$$

따라서 점 P가 직선 $y=x+4$ 위로 옮겨지지 않을 확률은

$$1 - \frac{7}{64} = \frac{57}{64} \quad \text{답 } \frac{57}{64}$$

1 확률분포

14 확률변수와 확률분포

체크 191

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	k	$4k$	$9k$	$16k$	1

(1) 확률의 총합은 1이므로

$$k + 4k + 9k + 16k = 1 \text{에서}$$

$$30k = 1 \quad \therefore k = \frac{1}{30}$$

(2) $X^2 - 4X + 3 \leq 0$ 에서

$$(X-1)(X-3) \leq 0 \quad \therefore 1 \leq X \leq 3$$

$$\therefore P(X^2 - 4X + 3 \leq 0)$$

$$= P(1 \leq X \leq 3)$$

$$= P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$

$$= \frac{1}{30} + \frac{4}{30} + \frac{9}{30} = \frac{7}{15}$$

답 (1) $\frac{1}{30}$ (2) $\frac{7}{15}$

체크 192

확률의 총합은 1이므로

$$\left(\frac{1}{18} + a\right) + \left(\frac{2}{18} + a\right) + \left(\frac{3}{18} + a\right) + \left(\frac{4}{18} - a\right) + \left(\frac{5}{18} - a\right) = 1$$

$$\text{에서 } a + \frac{5}{6} = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{6}$$

$$\therefore P(3 \leq X \leq 5) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$

$$= \left(\frac{3}{18} + a\right) + \left(\frac{4}{18} - a\right) + \left(\frac{5}{18} - a\right)$$

$$= \frac{2}{3} - a$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

체크 193

(1) 뽑힌 당첨 제비의 개수가 확률변수 X 이므로 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다.

이때 10개의 제비 중 3개의 제비를 뽑는 경우의 수는 ${}_{10}C_3$

이고, 뽑힌 3개의 제비 중 당첨 제비가 x 개인 경우의 수는

${}_3C_x \times {}_7C_{3-x}$ 이므로 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = \frac{{}_3C_x \times {}_7C_{3-x}}{{}_{10}C_3} \quad (x=0, 1, 2, 3)$$

(2) X 가 각 값을 가질 확률은

$$P(X=0) = \frac{{}_3C_0 \times {}_7C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{7}{24}$$

$$P(X=1) = \frac{{}_3C_1 \times {}_7C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{21}{40}$$

$$P(X=2) = \frac{{}_3C_2 \times {}_7C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{7}{40}$$

$$P(X=3) = \frac{{}_3C_3 \times {}_7C_0}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{120}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$	1

$$(3) P(X=1 \text{ 또는 } X=3) = P(X=1) + P(X=3)$$

$$= \frac{21}{40} + \frac{1}{120} = \frac{8}{15}$$

답 (1) $P(X=x) = \frac{{}_3C_x \times {}_7C_{3-x}}{{}_{10}C_3} \quad (x=0, 1, 2, 3)$

(2) 풀이 참조 (3) $\frac{8}{15}$

체크 194

흰 바둑돌이 3개이므로 검은 바둑돌은 반드시 2개 이상 나와야 한다. 즉, 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5이고, 각 값을 가질 확률은

$$P(X=2) = \frac{{}_3C_3 \times {}_7C_2}{{}_{10}C_5} = \frac{1}{12}$$

$$P(X=3) = \frac{{}_3C_2 \times {}_7C_3}{{}_{10}C_5} = \frac{5}{12}$$

$$P(X=4) = \frac{{}_3C_1 \times {}_7C_4}{{}_{10}C_5} = \frac{5}{12}$$

$$P(X=5) = \frac{{}_3C_0 \times {}_7C_5}{{}_{10}C_5} = \frac{1}{12}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	1

$$\text{이때 } P(X=4) + P(X=5) = \frac{5}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2} \text{이므로 구하는}$$

자연수 a 의 값은 4이다.

답 4

15 이산확률변수의 기댓값과 표준편차

체크 195

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{10} + a + \frac{1}{10} = 1 \text{에서}$$

$$a + \frac{3}{5} = 1 \quad \therefore a = \frac{2}{5}$$

따라서 확률변수 X 의 평균, 분산, 표준편차는 각각

$$E(X) = (-1) \times \frac{1}{5} + 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= (-1)^2 \times \frac{1}{5} + 0^2 \times \frac{3}{10} + 1^2 \times \frac{2}{5} + 2^2 \times \frac{1}{10} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 \\ &= \frac{21}{25} \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{21}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

답 평균 : $\frac{2}{5}$, 분산 : $\frac{21}{25}$, 표준편차 : $\frac{\sqrt{21}}{5}$

체크 196

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + p = 1 \text{에서}$$

$$\frac{11}{12} + p = 1 \quad \therefore p = \frac{1}{12}$$

이때 $E(X) = 5$ 이므로

$$E(X) = k \times \frac{1}{6} + 2k \times \frac{1}{4} + 3k \times \frac{1}{2} + 4k \times \frac{1}{12} = 5$$

$$\frac{5}{2}k = 5 \quad \therefore k = 2$$

따라서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	6	8	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	1

이때 확률변수 X 의 분산은

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= 2^2 \times \frac{1}{6} + 4^2 \times \frac{1}{4} + 6^2 \times \frac{1}{2} + 8^2 \times \frac{1}{12} - 5^2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

이므로

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{3} \quad \text{답 } \sqrt{3}$$

tip

이산확률변수 X 의 확률질량함수가

$$P(X=x_i) = p_i \quad (i=1, 2, 3, \dots, n)$$

이고, $E(X) = m$ 일 때

$$(1) E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n$$

$$(2) V(X) = E((X-m)^2) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$(3) \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

체크 197

확률의 총합은 1이므로

$$a + b + \frac{1}{6} = 1 \text{에서 } a + b = \frac{5}{6} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $E(X) = \frac{3}{2}$ 이므로

$$E(X) = 1 \times a + 2 \times b + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{3}{2}$$

$$a + 2b + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a + 2b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{6}$$

따라서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= 1^2 \times \frac{2}{3} + 2^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{6} - \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$= \frac{7}{12} \quad \text{답 } \frac{7}{12}$$

체크 198

정사면체 모양의 주사위를 던질 때, 바닥면에 적힌 숫자가 확률변수 X 이므로 X 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고, 각 값을 가질 확률은 $\frac{1}{4}$ 로 같다.

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

이때

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$$

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{1}{4} + 4^2 \times \frac{1}{4} = \frac{15}{2}$$

이므로 구하는 X 의 분산은

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= \frac{15}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \quad \text{답 } \frac{5}{4} \end{aligned}$$

tip

확률분포가 주어지지 않을 때, 평균, 분산, 표준편차 구하기

(i) 확률변수가 가질 수 있는 값을 모두 구한다.

(ii) 확률변수가 각 값을 가질 확률을 구하여 확률분포를 표로 나타낸다.

(iii) 평균, 분산, 표준편차를 구한다.

체크 199

5개의 숫자 중 소수는 2, 3, 5의 3개이므로 소수가 적힌 카드는 적어도 1개 이상 나와야 한다. 소수가 적힌 카드의 개수가 확률변수 X 이므로 X 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이고, 각 값을 가질 확률은

$$P(X=1) = \frac{{}_2C_2 \times {}_3C_1}{{}_5C_3} = \frac{3}{10}$$

$$P(X=2) = \frac{{}_2C_1 \times {}_3C_2}{{}_5C_3} = \frac{3}{5}$$

$$P(X=3) = \frac{{}_2C_0 \times {}_3C_3}{{}_5C_3} = \frac{1}{10}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

이때

$$E(X) = 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{1}{10} = \frac{9}{5}$$

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{3}{10} + 2^2 \times \frac{3}{5} + 3^2 \times \frac{1}{10} = \frac{18}{5}$$

이므로

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= \frac{18}{5} - \left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \end{aligned}$$

따라서 구하는 X 의 표준편차는

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} \quad \text{답 } \frac{3}{5}$$

체크 200

앞면이 보이는 동전을 3개 뒤집으면 $X=1$

앞면이 보이는 동전을 2개, 뒷면이 보이는 동전을 1개 뒤집으면 $X=3$

앞면이 보이는 동전을 1개, 뒷면이 보이는 동전을 2개 뒤집으면 $X=5$

뒷면이 보이는 동전을 3개 뒤집으면 $X=7$

즉, X 가 가질 수 있는 값은 1, 3, 5, 7이고, 각 값을 가질 확률은

$$P(X=1) = \frac{{}_4C_3 \times {}_3C_0}{{}_7C_3} = \frac{4}{35}$$

$$P(X=3) = \frac{{}_4C_2 \times {}_3C_1}{{}_7C_3} = \frac{18}{35}$$

$$P(X=5) = \frac{{}_4C_1 \times {}_3C_2}{{}_7C_3} = \frac{12}{35}$$

$$P(X=7) = \frac{{}_4C_0 \times {}_3C_3}{{}_7C_3} = \frac{1}{35}$$

이므로 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	7	합계
$P(X=x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$	1

따라서 구하는 X 의 평균은

$$E(X) = 1 \times \frac{4}{35} + 3 \times \frac{18}{35} + 5 \times \frac{12}{35} + 7 \times \frac{1}{35} = \frac{25}{7}$$

답 $\frac{25}{7}$

체크 201

한 번의 시행에서 받을 수 있는 금액을 확률변수 X 라 하면 X 가 가질 수 있는 값은 700, 1400, 2100이고, 각 값을 가질 확률은

$$P(X=700) = \frac{{}_3C_2}{{}_7C_2} = \frac{1}{7}$$

$$P(X=1400) = \frac{{}_4C_2}{{}_7C_2} = \frac{2}{7}$$

$$P(X=2100) = \frac{{}_3C_1 \times {}_4C_1}{{}_7C_2} = \frac{4}{7}$$

이므로 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	700	1400	2100	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	1

따라서 구하는 금액의 기댓값은

$$700 \times \frac{1}{7} + 1400 \times \frac{2}{7} + 2100 \times \frac{4}{7} = 1700 \text{ (원)}$$

답 1700원

체크 202

유정이가 여행 가방이 열릴 때까지 시도한 최대 횟수는 1, 2, 3을 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$3! = 6$$

이때 여행 가방이 열릴 때까지 시도한 횟수를 확률변수 X 라 하면 X 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이고, 각 값을 가질 확률은

$$P(X=1) = \frac{1}{6}$$

$$P(X=2) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{6}$$

$$P(X=3) = \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

$$P(X=4) = \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$P(X=5) = \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P(X=6) = \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$$

이므로 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

따라서 구하는 횃수의 기댓값은

$$1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = 3.5$$

답 3.5

체크 203

$$E(Y) = 4, E(Y^2) = 28 \text{ 이므로}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - \{E(Y)\}^2 = 28 - 4^2 = 12$$

$$\text{이때 } Y = \frac{1}{2}X + 5 \text{ 에서 } X = 2Y - 10 \text{ 이므로}$$

$$m = E(X) = E(2Y - 10)$$

$$= 2E(Y) - 10$$

$$= 2 \times 4 - 10 = -2$$

$$\sigma^2 = V(X) = V(2Y - 10)$$

$$= 2^2 V(Y) = 4 \times 12 = 48$$

$$\therefore m + \sigma^2 = -2 + 48 = 46$$

답 46

tip

이산확률변수 X 와 두 상수 a ($a \neq 0$), b 에 대하여

$$(1) E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$(2) V(aX + b) = a^2 V(X)$$

$$(3) \sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$$

체크 204

$$E(X) = -2 \text{ 이므로 } E(Y) = 1 \text{ 에서}$$

$$E(aX + b) = aE(X) + b = -2a + b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{또한 } V(X) = 3 \text{ 이므로 } V(Y) = 3 \text{ 에서}$$

$$V(aX + b) = a^2 V(X) = 3a^2 = 3$$

$$\therefore a = 1 \quad (\because a > 0)$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{ 에 대입하면}$$

$$-2 + b = 1 \quad \therefore b = 3$$

$$\therefore a + b = 1 + 3 = 4$$

답 4

체크 205

주어진 표에서 확률변수 X 의 평균과 분산은 각각

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{2}{5} = 2$$

$$V(X) = 0^2 \times \frac{1}{10} + 1^2 \times \frac{1}{5} + 2^2 \times \frac{3}{10} + 3^2 \times \frac{2}{5} - 2^2 = 1$$

$$\text{이때 } E(Y) = 4 \text{ 에서}$$

$$E(aX + b) = aE(X) + b = 4$$

$$\therefore 2a + b = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

답 4

$$\text{또한 } V(Y) = 9 \text{ 에서}$$

$$V(aX + b) = a^2 V(X) = 9$$

$$a^2 = 9 \quad \therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{ 에 대입하면}$$

$$6 + b = 4 \quad \therefore b = -2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 3^2 + (-2)^2 = 13$$

답 13

체크 206

9의 약수는 1, 3, 9의 3개이므로 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다.

X 가 각 값을 가질 확률은

$$P(X=0) = \frac{{}_3C_0 \times {}_7C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{7}{24}$$

$$P(X=1) = \frac{{}_3C_1 \times {}_7C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{21}{40}$$

$$P(X=2) = \frac{{}_3C_2 \times {}_7C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{7}{40}$$

$$P(X=3) = \frac{{}_3C_3 \times {}_7C_0}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{120}$$

이므로 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$	1

이때

$$E(X) = 0 \times \frac{7}{24} + 1 \times \frac{21}{40} + 2 \times \frac{7}{40} + 3 \times \frac{1}{120} = \frac{9}{10}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{7}{24} + 1^2 \times \frac{21}{40} + 2^2 \times \frac{7}{40} + 3^2 \times \frac{1}{120} = \frac{13}{10}$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{13}{10} - \left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{49}{100}$$

$$\therefore V(10X + 3) = 10^2 V(X) = 100 \times \frac{49}{100} = 49$$

답 49

체크 207

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5이고, 각 값을 가질 확률은

$$P(X=2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

$$P(X=3) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$$

$$P(X=4)$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{10}$$

$$P(X=5)$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} \\ + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1} \\ = \frac{2}{5}$$

이므로 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

이때

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{3}{10} + 5 \times \frac{2}{5} = 4$$

이므로

$$E(7X+2) = 7E(X) + 2 = 7 \times 4 + 2 = 30$$

답 30

연습 문제 07

208

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{a}{3} + \frac{1}{3} + a^2 = 1 \text{에서 } 3a^2 + a - 2 = 0$$

$$(a+1)(3a-2) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = \frac{2}{3}$$

이때 $0 \leq P(X=x) \leq 1$ 이므로

$$a = \frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

209

$$P(X=x) = \frac{a}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1}} \\ = \frac{a(\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1})}{(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1})(\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1})} \\ = \frac{a(\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1})}{2}$$

이때 확률의 총합은 1이므로

$$P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + \cdots + P(X=24) = 1$$

$$\frac{a}{2} \{(\sqrt{3}-1) + (\sqrt{5}-\sqrt{3}) + (\sqrt{7}-\sqrt{5}) + \cdots + (\sqrt{49}-\sqrt{47})\} = 1$$

$$\frac{a}{2}(\sqrt{49}-1) = 1, 3a = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{3}$$

즉, 확률변수 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = \frac{1}{6}(\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1}) \quad (x=1, 2, 3, \cdots, 24)$$

이므로

$$P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) + \cdots + P(X=24) \\ = 1 - \{P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)\} \\ = 1 - \frac{1}{6} \{(\sqrt{3}-1) + (\sqrt{5}-\sqrt{3}) + (\sqrt{7}-\sqrt{5}) + (\sqrt{9}-\sqrt{7})\} \\ = 1 - \frac{1}{6}(\sqrt{9}-1) = \frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

210

확률의 총합은 1이므로

$$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1$$

$$\frac{1}{10} + \frac{a+2}{20} + \frac{a+1}{10} + \frac{3a+2}{20} = 1$$

$$\frac{6a+8}{20} = 1, 6a+8=20 \quad \therefore a=2$$

즉, 확률변수 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = \frac{x+1}{10} \quad (x=0, 1, 2, 3)$$

$$\therefore P(|X-2| \leq 1) = P(1 \leq X \leq 3) \\ = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) \\ = \frac{1}{5} + \frac{3}{10} + \frac{2}{5} = \frac{9}{10}$$

$$\text{이때 } P(|X-2| \leq 1) = b \text{이므로 } b = \frac{9}{10}$$

$$\therefore a-b = 2 - \frac{9}{10} = \frac{11}{10}$$

답 $\frac{11}{10}$

211

뽑힌 카드에 적힌 두 수의 차가 확률변수 X 이므로 X 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이다.

한편, $X^2 - 6X + 5 < 0$ 에서 $(X-1)(X-5) < 0$, 즉

$1 < X < 5$ 이므로

$$P(X^2 - 6X + 5 < 0) = P(1 < X < 5) \\ = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) \\ = 1 - P(X=1)$$

이때 뽑힌 카드에 적힌 두 수의 차가 1인 경우는 0, 1 또는 1, 2 또는 2, 3 또는 3, 4가 적힌 카드를 뽑는 경우이므로 이 경우의 확률은

$$P(X=1) = \frac{4}{5C_2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore P(X^2 - 6X + 5 < 0) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

답 $\frac{3}{5}$

212

$P(X=1)=a$, $P(X=2)=b$ 라 하면 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + a + b = 1$$

$$\therefore a + b = \frac{5}{9} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또한 확률변수 X 의 평균이 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$(-2) \times \frac{1}{9} + (-1) \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times a + 2 \times b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a + 2b = \frac{8}{9} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = \frac{2}{9}, b = \frac{1}{3}$$

$$\therefore P(X=1) = a = \frac{2}{9} \quad \text{답 } \frac{2}{9}$$

213

확률의 총합은 1이므로

$$a + \frac{1}{4} + b = 1 \text{에서 } a + b = \frac{3}{4}$$

$$\therefore b = \frac{3}{4} - a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 확률변수 X 의 분산은

$$V(X)$$

$$= E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= 2^2 \times a + 4^2 \times \frac{1}{4} + 6^2 \times b - (2a + 1 + 6b)^2$$

$$= 4a + 4 + 36\left(\frac{3}{4} - a\right) - \left\{2a + 1 + 6\left(\frac{3}{4} - a\right)\right\}^2 \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= -16a^2 + 12a + \frac{3}{4}$$

$$= -16\left(a - \frac{3}{8}\right)^2 + 3 \quad \left(\text{단, } 0 \leq a \leq \frac{3}{4}\right)$$

이므로 확률변수 X 의 분산은 $a = \frac{3}{8}$ 일 때, 최댓값 3을 갖는다.

따라서 이때의 $P(X \leq 4)$ 를 구하면

$$P(X \leq 4) = P(X=2) + P(X=4)$$

$$= a + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8} \quad \text{답 } \frac{5}{8}$$

214

꺼낸 공에 적힌 수의 최댓값이 확률변수 X 이므로 X 가 가질 수 있는 값은 3, 4, 5이다.

X 가 각 값을 가질 확률은

$$P(X=3) = \frac{{}_2C_2}{{}_5C_3} = \frac{1}{10}$$

$$P(X=4) = \frac{{}_3C_2}{{}_5C_3} = \frac{3}{10}$$

$$P(X=5) = \frac{{}_4C_2}{{}_5C_3} = \frac{3}{5}$$

이므로 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	1

따라서 구하는 확률변수 X 의 평균은

$$E(X) = 3 \times \frac{1}{10} + 4 \times \frac{3}{10} + 5 \times \frac{3}{5} = \frac{45}{10} = \frac{9}{2} \quad \text{답 } \frac{9}{2}$$

215

2개의 제품을 동시에 꺼낼 때, 나오는 불량품의 개수가 확률변수 X 이므로 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

X 가 각 값을 가질 확률은

$$P(X=0) = \frac{{}_3C_0 \times {}_4C_2}{{}_7C_2} = \frac{2}{7}$$

$$P(X=1) = \frac{{}_3C_1 \times {}_4C_1}{{}_7C_2} = \frac{4}{7}$$

$$P(X=2) = \frac{{}_3C_2 \times {}_4C_0}{{}_7C_2} = \frac{1}{7}$$

이므로 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

따라서 확률변수 X 의 평균, 분산, 표준편차는 각각

$$E(X) = 0 \times \frac{2}{7} + 1 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$$

$$V(X) = 0^2 \times \frac{2}{7} + 1^2 \times \frac{4}{7} + 2^2 \times \frac{1}{7} - \left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{20}{49}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{20}{49}} = \frac{2\sqrt{5}}{7}$$

$$\text{답 } \text{평균} : \frac{6}{7}, \text{분산} : \frac{20}{49}, \text{표준편차} : \frac{2\sqrt{5}}{7}$$

216

한 상자 당 상한 키위는 3개씩 들어 있으므로 한 상자에서 2개의 키위를 꺼낼 때, 상한 키위가 없을 확률은

$$\frac{{}_9C_2}{{}_{12}C_2} = \frac{6}{11}$$

또한 상한 키위가 1개 이상 있을 확률은

$$1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11}$$

이때 한 상자의 판매액을 확률변수 X 라 하면 X 가 가질 수 있는 값은 6000, 8000이고, X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	6000	8000	합계
$P(X=x)$	$\frac{6}{11}$	$\frac{5}{11}$	1

그러므로 한 상자의 판매액의 기댓값은

$$6000 \times \frac{6}{11} + 8000 \times \frac{5}{11} = \frac{76000}{11} \text{ (원)}$$

따라서 110상자를 판매할 때, 전체 판매액의 기댓값은

$$110 \times \frac{76000}{11} = 760000 \text{ (원)} \quad \text{답 760000원}$$

217

$Y=10X-2.21$ 이라 하자. 확률변수 Y 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	-1	0	1	합계
$P(Y=y)$	a	b	$\frac{2}{3}$	1

확률의 총합이 1이므로 $a+b+\frac{2}{3}=1$ 에서

$$a+b=\frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또한 $E(Y)=10E(X)-2.21=0.5$ 이므로

$$E(Y)=(-1) \times a + 0 \times b + 1 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

$$-a + \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \quad \therefore a = \frac{1}{6}$$

이를 ①에 대입하면

$$\frac{1}{6} + b = \frac{1}{3} \quad \therefore b = \frac{1}{6}$$

또한

$$V(Y)=(-1)^2 \times \frac{1}{6} + 0^2 \times \frac{1}{6} + 1^2 \times \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{12}$$

이다. 한편, $Y=10X-2.21$ 에서

$$V(Y)=\boxed{100} \times V(X) \text{이므로}$$

$$V(X)=\frac{1}{\boxed{100}} \times \frac{7}{12} \text{이다.}$$

따라서 $p=\frac{1}{6}$, $q=\frac{1}{6}$, $r=100$ 이므로

$$pqr=\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times 100 = \frac{25}{9} \quad \text{답 ⑤}$$

218

$E(X)=5250$, $\sigma(X)=196$ 에서

$$\begin{aligned} E(Y) &= E\left(\frac{8}{7}X + 160\right) \\ &= \frac{8}{7}E(X) + 160 \\ &= \frac{8}{7} \times 5250 + 160 = 6160 \\ \sigma(Y) &= \sigma\left(\frac{8}{7}X + 160\right) \\ &= \left|\frac{8}{7}\right| \sigma(X) \\ &= \frac{8}{7} \times 196 = 224 \end{aligned}$$

따라서 확률변수 Y 의 평균은 6160원, 표준편차는 224원이다.

답 평균 : 6160원, 표준편차 : 224원

219

$E(X)=m$, $\sigma(X)=\sigma$ 이므로

$$\begin{aligned} E(T) &= E\left(a\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) + b\right) \\ &= \frac{a}{\sigma}E(X) - \frac{am}{\sigma} + b \\ &= \frac{am}{\sigma} - \frac{am}{\sigma} + b = b \\ \sigma(T) &= \sigma\left(a\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) + b\right) \\ &= \left|\frac{a}{\sigma}\right| \sigma(X) \\ &= \frac{a}{\sigma} \times \sigma \quad (\because a > 0, \sigma > 0) \\ &= a \end{aligned}$$

표준점수 T 의 평균이 80점, 표준편차가 20점이므로

$$a=20, b=80$$

$$\therefore a+b=100$$

답 100

220

영희에게 배정되는 서랍에 적힌 자연수 중 작은 수가 확률변수 X 이므로 X 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이다.

X 가 각 값을 가질 확률은

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \frac{{}_4C_1}{{}_5C_2} = \frac{2}{5} \\ P(X=2) &= \frac{{}_3C_1}{{}_5C_2} = \frac{3}{10} \\ P(X=3) &= \frac{{}_2C_1}{{}_5C_2} = \frac{1}{5} \\ P(X=4) &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

이므로 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

이때 확률변수 X 의 평균은

$$E(X) = 1 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{1}{10} = 2$$

이므로

$$E(10X) = 10E(X) = 20$$

답 20

221

짝수가 적힌 카드의 개수가 확률변수 X 이므로 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4이다. 이때 확률변수 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_4C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{4-x} \quad (x=0, 1, 2, 3, 4)$$

이므로 확률변수 5^X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

5^X	5^0	5^1	...	5^4	합계
$P(X=x)$	${}_4C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^4$	${}_4C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3$...	${}_4C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4$	1

따라서 효주가 받을 상금의 기댓값은

$$\begin{aligned} E(5^X) &= 5^0 \times {}_4C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 5^1 \times {}_4C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 5^2 \times {}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &\quad + 5^3 \times {}_4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 5^4 \times {}_4C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ &= {}_4C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + {}_4C_1 \left(\frac{5}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_4C_2 \left(\frac{5}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &\quad + {}_4C_3 \left(\frac{5}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + {}_4C_4 \left(\frac{5}{2}\right)^4 \\ &= \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right)^4 = 3^4 = 81 \text{ (만 원)} \end{aligned}$$

답 81만 원

tip

이항정리

$$(a+b)^n = {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1}b + \cdots + {}_nC_n b^n$$

222

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고, 각 값을 가질 확률은

$$P(X=1) = \frac{{}_4P_1 \times 6!}{7!} = \frac{4}{7}$$

$$P(X=2) = \frac{{}_3P_1 \times {}_4P_1 \times 5!}{7!} = \frac{2}{7}$$

$$P(X=3) = \frac{{}_3P_2 \times {}_4P_1 \times 4!}{7!} = \frac{4}{35}$$

$$P(X=4) = \frac{3! \times 4!}{7!} = \frac{1}{35}$$

이므로 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{35}$	1

$$\text{이때 } E(X) = 1 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{2}{7} + 3 \times \frac{4}{35} + 4 \times \frac{1}{35} = \frac{8}{5},$$

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{4}{7} + 2^2 \times \frac{2}{7} + 3^2 \times \frac{4}{35} + 4^2 \times \frac{1}{35} = \frac{16}{5}$$

$$\text{이므로 } V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{16}{5} - \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$\therefore V(5X) = 5^2 V(X) = 25 \times \frac{16}{25} = 16$$

답 16

223

7번의 경기 중 4번을 먼저 이겨야 우승팀이 되므로 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 4, 5, 6, 7이고, 각 값을 가질 확률은 다음과 같다.

(i) $X=4$ 일 때

두 팀 중 어느 한 팀이 4경기를 연달아 이겨야 하므로

$$P(X=4) = 2 \times {}_4C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}$$

(ii) $X=5$ 일 때

두 팀 중 어느 한 팀이 4경기를 치르는 동안 3승 1패를 하고 마지막 5번째 경기에서 이겨야 하므로

$$P(X=5) = 2 \times \left\{ {}_4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{4}$$

(iii) $X=6$ 일 때

두 팀 중 어느 한 팀이 5경기를 치르는 동안 3승 2패를 하고 마지막 6번째 경기에서 이겨야 하므로

$$P(X=6) = 2 \times \left\{ {}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} \right\} = \frac{5}{16}$$

(iv) $X=7$ 일 때

두 팀이 6경기를 치르면서 3승 3패를 하고 마지막 7번째 경기에서 한 팀이 이겨야 하므로

$$P(X=7) = 2 \times \left\{ {}_6C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{2} \right\} = \frac{5}{16}$$

(i)~(iv)에서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	4	5	6	7	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	1

따라서 확률변수 X 의 평균은

$$E(X) = 4 \times \frac{1}{8} + 5 \times \frac{1}{4} + 6 \times \frac{5}{16} + 7 \times \frac{5}{16} = \frac{93}{16}$$

이므로

$$E(16X) = 16E(X) = 16 \times \frac{93}{16} = 93$$

답 93

tip

독립시행의 확률

1회의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p 일 때, n 회의 독립
시행에서 사건 A가 r 회 일어날 확률은

$${}_nC_r p^r (1-p)^{n-r} \quad (\text{단, } r=0, 1, 2, \dots, n)$$

16 이항분포

체크 224

확률변수 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_{10}C_x p^x (1-p)^{10-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 10)$$

$$\text{이때 } P(X=10) = \frac{1}{1024} \text{에서}$$

$${}_{10}C_{10} p^{10} = \frac{1}{1024}, p^{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$\therefore p = \frac{1}{2} \quad (\because p \geq 0)$$

답 $\frac{1}{2}$

체크 225

(1) 8개의 문항에 답하므로 8회의 독립시행이고, 1개의 문항에

임의로 답할 때, 답을 맞힐 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(8, \frac{1}{2}\right)$ 을 따른다.

(2) 확률변수 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_8C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{8-x} \quad (\text{단, } x=0, 1, 2, \dots, 8)$$

$$\therefore P(X=5) = {}_8C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{32}$$

답 (1) $B\left(8, \frac{1}{2}\right)$ (2) $\frac{7}{32}$

체크 226

확률변수 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_{320}C_x \left(\frac{5}{8}\right)^x \left(\frac{3}{8}\right)^{320-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 320)$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(320, \frac{5}{8}\right)$ 를 따르므로 X 의
평균과 분산은 각각

$$E(X) = 320 \times \frac{5}{8} = 200$$

$$V(X) = 320 \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{8} = 75$$

답 평균 : 200, 분산 : 75

체크 227

(1) 확률변수 X 가 이항분포 $B(30, p)$ 를 따르므로

$$E(X) = 30p = 6 \text{에서 } p = \frac{1}{5}$$

$$\therefore V(X) = 30 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{5}$$

(2) 확률변수 X 가 이항분포 $B(n, p)$ 를 따르므로

$$E(X) = np = 48 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\sigma(X) = 4 \text{에서 } V(X) = 16 \text{이므로}$$

$$V(X) = np(1-p) = 16 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$48(1-p) = 16, 1-p = \frac{1}{3}$$

$$\therefore p = \frac{2}{3}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{2}{3}n = 48 \quad \therefore n = 72$$

답 (1) $\frac{24}{5}$ (2) 72

체크 228

4개의 옷가락을 동시에 던져서 개가 나올 확률은

$${}_4C_2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{216}{625}$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(125, \frac{216}{625}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 125 \times \frac{216}{625} = \frac{216}{5} \quad \text{답 } \frac{216}{5}$$

체크 229

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(25, \frac{2}{5}\right)$ 를 따르므로

$$V(X) = 25 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = 6$$

$$\therefore V(-4X+3) = (-4)^2 V(X)$$

$$= 16 \times 6 = 96$$

답 96

체크 230

정우가 매일 아침 알람 소리에 깬 확률이 0.75, 즉 $\frac{3}{4}$ 이므로

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(40, \frac{3}{4}\right)$ 을 따른다.

따라서 $E(X) = 40 \times \frac{3}{4} = 30$ 이므로

$$E\left(\frac{1}{2}X+3\right) = \frac{1}{2}E(X)+3 = \frac{1}{2} \times 30+3 = 18$$

답 18

체크 231

주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼낼 때, 4의 배수가 적힌 카드가 나올 확률은 $\frac{1}{4}$ 이므로 확률변수 X 는 이항분포

$B\left(n, \frac{1}{4}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(X) = n \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}n, V(X) = n \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}n$$

이때 $E(X^2) = 70$ 이고, $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ 이므로

$$\frac{3}{16}n = 70 - \left(\frac{1}{4}n\right)^2, \frac{3}{16}n = 70 - \frac{1}{16}n^2$$

$$n^2 + 3n - 1120 = 0, (n+35)(n-32) = 0$$

$$\therefore n = 32 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(32, \frac{1}{4}\right)$ 을 따르므로

$$\sigma(X) = \sqrt{32 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}} = \sqrt{6}$$

$$\therefore \sigma(2X+3) = |2|\sigma(X) = 2\sqrt{6} \quad \text{답 } 2\sqrt{6}$$

연습 문제 08

232

확률변수 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_6C_x \left(\frac{3}{5}\right)^x \left(\frac{2}{5}\right)^{6-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 6)$$

이때 $P(X=1) = kP(X=3)$ 에서

$${}_6C_1 \left(\frac{3}{5}\right)^1 \left(\frac{2}{5}\right)^5 = k \times {}_6C_3 \left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)^3$$

$$6 \times 2^2 = k \times 20 \times 3^2$$

$$\therefore k = \frac{6 \times 2^2}{20 \times 3^2} = \frac{2}{15} \quad \text{답 } \frac{2}{15}$$

233

이 공장에서 생산된 제품 중 4개를 택하므로 4회의 독립시행이고, 제품의 12.5%, 즉 $\frac{1}{8}$ 이 불량품이므로 확률변수 X 는 이

항분포 $B\left(4, \frac{1}{8}\right)$ 을 따른다.

따라서 확률변수 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_4C_x \left(\frac{1}{8}\right)^x \left(\frac{7}{8}\right)^{4-x} \quad (x=0, 1, 2, 3, 4)$$

이때

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= P(X=3) + P(X=4) \\ &= {}_4C_3 \left(\frac{1}{8}\right)^3 \left(\frac{7}{8}\right)^1 + {}_4C_4 \left(\frac{1}{8}\right)^4 \\ &= \frac{29}{2^{12}} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } k = 29 \quad \text{답 } 29$$

234

확률변수 X 가 이항분포 $B(20, p)$ 를 따르므로

$$\begin{aligned} V(X) &= 20p(1-p) \\ &= -20p^2 + 20p \\ &= -20\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + 5 \quad (\text{단, } 0 \leq p \leq 1) \end{aligned}$$

따라서 $V(X)$ 는 $p = \frac{1}{2}$ 일 때, 최댓값 5를 갖는다. 답 5

235

확률변수 X 의 확률질량함수가

$$P(X=x) = {}_{50}C_x \left(\frac{3}{5}\right)^x \left(\frac{2}{5}\right)^{50-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 50)$$

이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(50, \frac{3}{5}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(X) = 50 \times \frac{3}{5} = 30, V(X) = 50 \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = 12$$

이때 $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ 에서

$$\begin{aligned} E(X^2) &= V(X) + \{E(X)\}^2 \\ &= 12 + 30^2 = 912 \end{aligned} \quad \text{답 } 912$$

236

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(60, \frac{1}{2}\right)$ 을 따른다고 하면

$$E(X) = 60 \times \frac{1}{2} = 30, V(X) = 60 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 15$$

또한 확률변수 X 의 확률질량함수는

$$\begin{aligned} P(X=x) &= {}_{60}C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{60-x} \\ &= {}_{60}C_x \left(\frac{1}{2}\right)^{60} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 60) \end{aligned}$$

이때 주어진 식은 확률변수 X^2 의 평균, 즉 $E(X^2)$ 을 뜻하고

$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ 이므로 구하는 식의 값은

$$E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2 = 15 + 30^2 = 915 \quad \text{답 } 915$$

237

카드 1장을 n 번 꺼내므로 n 회의 독립시행이고, 1회의 시행에서 빨간 카드가 나올 확률은 $\frac{a}{a+4}$ 이므로 확률변수 X 는 이항

분포 $B\left(n, \frac{a}{a+4}\right)$ 를 따른다.

이때 확률변수 X 의 평균이 6이므로

$$E(X) = n \times \frac{a}{a+4} = 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또한 확률변수 X 의 분산이 4이므로

$$V(X) = n \times \frac{a}{a+4} \times \frac{4}{a+4} = 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\frac{24}{a+4}=4 \quad \therefore a=2$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\frac{1}{3}n=6 \quad \therefore n=18$$

$$\therefore \frac{n}{a}=\frac{18}{2}=9$$

답 9

238

주어진 그래프에서 $f(m) > 0$ 의 해는 $0 < m < 3$ 이므로

$$A = \{1, 2\}$$

즉, $P(A) = \frac{1}{3}$ 이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B(15, \frac{1}{3})$ 을 따른다.

$$\therefore E(X) = 15 \times \frac{1}{3} = 5$$

답 ⑤

239

확률변수 X 가 이항분포 $B(n, \frac{1}{3})$ 을 따르므로

$$V(X) = n \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}n$$

$$\text{이때 } V\left(\frac{1}{2}X + 3\right) = 10 \text{에서}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 V(X) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{9}n = 10$$

$$\therefore n = 180$$

답 180

240

확률변수 X 가 이항분포 $B(10, p)$ 를 따르므로 X 의 확률질량 함수는

$$P(X=x) = {}_{10}C_x p^x (1-p)^{10-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 10)$$

$$\text{이때 } P(X=4) = \frac{1}{3}P(X=5) \text{에서}$$

$${}_{10}C_4 p^4 (1-p)^6 = \frac{1}{3} \times {}_{10}C_5 p^5 (1-p)^5$$

$$1-p = \frac{2}{5}p$$

$$\therefore p = \frac{5}{7}$$

$$\text{따라서 } E(X) = 10 \times \frac{5}{7} = \frac{50}{7} \text{이므로}$$

$$E(7X) = 7E(X) = 7 \times \frac{50}{7} = 50$$

답 50

241

확률변수 X 는 이항분포 $B(3, p)$ 를 따르므로

$$E(X) = 3p$$

확률변수 Y 는 이항분포 $B(4, 1-p)$ 를 따르므로

$$E(Y) = 4(1-p)$$

$$\text{이때 } E(X) = E(3Y-2) \text{에서}$$

$$E(X) = 3E(Y) - 2, \quad 3p = 12(1-p) - 2$$

$$3p = 12 - 12p - 2, \quad 15p = 10$$

$$\therefore p = \frac{2}{3}$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B(3, \frac{2}{3})$, 확률변수 Y 는 이

항분포 $B(4, \frac{1}{3})$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} P(X=2) + P(Y=3) &= {}_3C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^1 + {}_4C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \\ &= \frac{44}{81} \end{aligned}$$

답 $\frac{44}{81}$

242

주머니에서 한 개의 공을 꺼내어 숫자를 확인하고 다시 넣는 시행을 50번 반복하므로 50회의 독립시행이고, 1회의 시행에

서 3의 배수가 적힌 공이 나올 확률은 $\frac{3}{10}$ 이므로 확률변수 X

는 이항분포 $B(50, \frac{3}{10})$ 을 따른다.

$$\therefore E(X) = 50 \times \frac{3}{10} = 15, \quad V(X) = 50 \times \frac{3}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{21}{2}$$

이때 $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ 이므로

$$E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2$$

$$= \frac{21}{2} + 15^2 = \frac{471}{2}$$

$$\therefore E((X-a)^2) = E(X^2 - 2aX + a^2)$$

$$= E(X^2) - 2aE(X) + a^2$$

$$= \frac{471}{2} - 30a + a^2$$

$$= (a-15)^2 + \frac{21}{2}$$

따라서 $(X-a)^2$ 의 평균은 $a=15$ 일 때, 최솟값 $\frac{21}{2}$ 을 갖는다.

즉, $m=2, n=21$ 이므로

$$m+n=2+21=23$$

답 23

tip

$$E((X-a)^2) = E(X^2) - 2aE(X) + a^2$$

$$= \{a-E(X)\}^2 + E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= \{a-E(X)\}^2 + V(X)$$

이므로 $E((X-a)^2)$ 은 $a=E(X)$ 일 때, 최솟값 $V(X)$ 를 갖는다.

243

한 개의 주사위를 30번 던져 2보다 큰 수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 Y 라 하면 2 이하의 눈이 나오는 횟수는 $30-Y$ 이므로

$$X = 2Y - 3(30 - Y) = 5Y - 90$$

한편, 한 개의 주사위를 던질 때, 2보다 큰 수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$ 이므로 확률변수 Y 는 이항분포 $B\left(30, \frac{2}{3}\right)$ 를 따른다.

$$\text{따라서 } E(Y) = 30 \times \frac{2}{3} = 20 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= E(5Y - 90) \\ &= 5E(Y) - 90 \\ &= 5 \times 20 - 90 = 10 \end{aligned}$$

답 10

17 연속확률변수

체크 244

$-1 \leq X \leq 1$ 에서 정의된 연속확률변수 X 의 확률밀도함수가 되기 위해서는 함수값이 항상 0 이상이고, 함수의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x = -1, x = 1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이어야 한다.

ㄱ. $-1 \leq x \leq 1$ 에서 $f(x) = 1 \geq 0$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축
및 두 직선 $x = -1, x = 1$ 로
둘러싸인 도형의 넓이는
 $2 \times 1 = 2$

따라서 함수 $f(x)$ 는 확률밀도함수가 될 수 없다.

ㄴ. $-1 \leq x < 0$ 에서 $g(x) < 0$

이므로 함수 $g(x)$ 는 확률밀도
함수가 될 수 없다.

ㄷ. $-1 \leq x \leq 1$ 에서 $h(x) \geq 0$

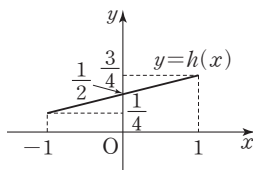
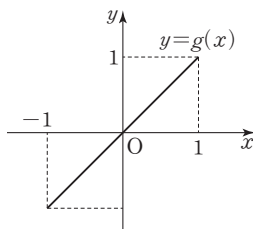
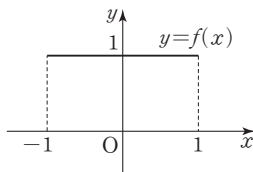
함수 $y = h(x)$ 의 그래프와 x 축
및 두 직선 $x = -1, x = 1$ 로
둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) \times 2 = 1$$

따라서 함수 $h(x)$ 는 확률밀도함수가 될 수 있다.

$$\text{ㄹ. } r(x) = |x| = \begin{cases} -x & (-1 \leq x < 0) \\ x & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

이므로 $-1 \leq x \leq 1$ 에서



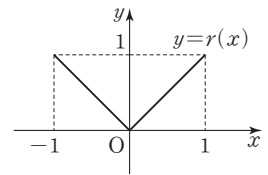
$$r(x) \geq 0$$

함수 $y = r(x)$ 의 그래프와
 x 축 및 두 직선 $x = -1, x = 1$
로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\left(\frac{1}{2} \times 1 \times 1\right) + \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 1\right) = 1$$

따라서 함수 $r(x)$ 는 확률밀도함수가 될 수 있다.
따라서 확률밀도함수가 될 수 있는 것은 ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄷ, ㄹ



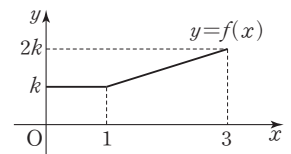
체크 245

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축
및 두 직선 $x = 0, x = 3$ 으로 둘
러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$1 \times k + \frac{1}{2} \times (k + 2k) \times 2 = 1$$

$$4k = 1 \quad \therefore k = \frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$



tip

연속확률변수 X 의 확률밀도함수 $f(x)$ 에 미정계수가 포함되어 있는 경우 또는 $y = f(x)$ 의 그래프에 미지수가 있는 경우에는 주어진 범위에서 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1임을 이용하여 미정계수 또는 미지수를 구한다.

체크 246

$$\begin{aligned} f(x) &= a(3 - |x|) \\ &= \begin{cases} a(3+x) & (-3 \leq x < 0) \\ a(3-x) & (0 \leq x \leq 3) \end{cases} \end{aligned}$$

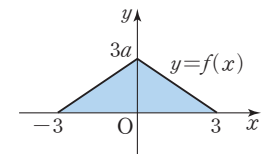
연속확률변수 X 의 확률밀도함수 $f(x)$ 는 $-3 \leq x \leq 3$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이어야 하므로 $a > 0$ 이다.

이때 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축
및 두 직선 $x = -3, x = 3$ 으로
둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 3a = 1$$

$$\therefore a = \frac{1}{9}$$

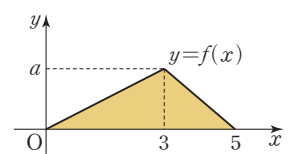
답 $\frac{1}{9}$



체크 247

(1) 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2} \times 5 \times a = 1$$



$$\therefore a = \frac{2}{5}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} \frac{2}{15}x & (0 \leq x < 3) \\ -\frac{1}{5}(x-5) & (3 \leq x \leq 5) \end{cases} \text{이고,}$$

$P(0 \leq X \leq \frac{3}{2})$ 은 함수

$y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및

직선 $x=\frac{3}{2}$ 으로 둘러싸인 도

형의 넓이와 같으므로

$$P(0 \leq X \leq \frac{3}{2}) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$$

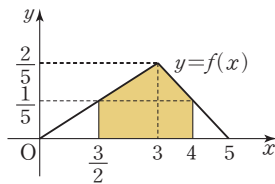
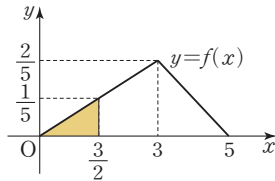
(3) $P(\frac{3}{2} \leq X \leq 4)$ 는 함수

$y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및

두 직선 $x=\frac{3}{2}$, $x=4$ 로 둘러

싸인 도형의 넓이와 같으므로

$$P(\frac{3}{2} \leq X \leq 4) = \frac{1}{2} \times (\frac{1}{5} + \frac{2}{5}) \times \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \times (\frac{2}{5} + \frac{1}{5}) \times 1 = \frac{3}{4}$$



답 (1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{3}{20}$ (3) $\frac{3}{4}$

체크 248

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1
이므로

$$\frac{1}{2} \times k \times \frac{1}{3} = 1 \quad \therefore k = 6$$

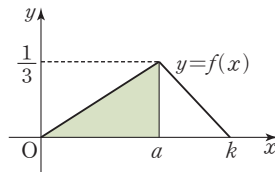
$P(0 \leq X \leq a)$ 는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선

$x=a$ 로 둘러싸인 도형의 넓이와
같으므로

$$P(0 \leq X \leq a) = \frac{1}{2} \times a \times \frac{1}{3} = \frac{a}{6}$$

$$P(0 \leq X \leq a) = \frac{k}{9} = \frac{2}{3} \text{에서}$$

$$\frac{a}{6} = \frac{2}{3} \quad \therefore a = 4$$



18 정규분포

체크 249

표준편차가 클수록 정규분포곡선의 가운데 부분의 높이는 낮
아지고 옆으로 퍼지므로 표준편차가 가장 큰 지역은 C이다.

또한 평균이 클수록 대칭축이 오른쪽에 있으므로 평균이 가장
큰 지역은 D이다.

답 C, D

체크 250

정규분포 $N(70, 4)$ 를 따르는 확

률변수 X 의 확률밀도함수는 직선

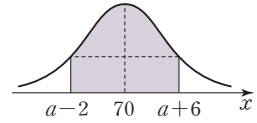
$x=70$ 에 대하여 대칭이므로

직선 $x=a-2$ 와 직선 $x=a+6$ 이

직선 $x=70$ 에 대하여 대칭일 때 $P(a-2 \leq X \leq a+6)$ 이 최
대가 된다.

$$\text{따라서 } \frac{a-2+a+6}{2} = 70 \text{이므로 } a=68 \text{이다.}$$

답 68



체크 251

확률변수 X 가 정규분포 $N(30, 3^2)$ 을 따르므로

$$m=30, \sigma=3$$

$$\therefore P(27 \leq X \leq 36)$$

$$= P(30-3 \leq X \leq 30+3)$$

$$= P(m-\sigma \leq X \leq m+\sigma)$$

$$= P(m-\sigma \leq X \leq m) + P(m \leq X \leq m+\sigma)$$

$$= P(m \leq X \leq m+\sigma) + P(m \leq X \leq m+\sigma)$$

$$= 0.3413 + 0.4772$$

$$= 0.8185$$

답 0.8185

체크 252

$Z = \frac{X-30}{10}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\therefore P\left(\left|X - \frac{85}{2}\right| \geq \frac{5}{2}\right)$$

$$= P\left(X - \frac{85}{2} \leq -\frac{5}{2} \text{ 또는 } X - \frac{85}{2} \geq \frac{5}{2}\right)$$

$$= P(X \leq 40 \text{ 또는 } X \geq 45)$$

$$= P(X \leq 40) + P(X \geq 45)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{40-30}{10}\right) + P\left(Z \geq \frac{45-30}{10}\right)$$

$$= P(Z \leq 1) + P(Z \geq 1.5)$$

$$= \{P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1)\}$$

$$+ \{P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.5)\}$$

$$= (0.5 + 0.3) + (0.5 - 0.4)$$

$$= 0.9$$

답 0.9

체크 253

$Z_1 = \frac{X-100}{6}$ 으로 놓으면

$$P(100 \leq X \leq 109) = P\left(\frac{100-100}{6} \leq Z_1 \leq \frac{109-100}{6}\right) \\ = P\left(0 \leq Z_1 \leq \frac{3}{2}\right)$$

$Z_2 = \frac{Y-50}{2}$ 으로 놓으면

$$P(k \leq Y \leq 50) = P\left(\frac{k-50}{2} \leq Z_2 \leq \frac{50-50}{2}\right) \\ = P\left(\frac{k-50}{2} \leq Z_2 \leq 0\right)$$

이때 Z_1 과 Z_2 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P\left(0 \leq Z_1 \leq \frac{3}{2}\right) = P\left(\frac{k-50}{2} \leq Z_2 \leq 0\right) \text{에서}$$

$$P\left(-\frac{3}{2} \leq Z_1 \leq 0\right) = P\left(\frac{k-50}{2} \leq Z_2 \leq 0\right)$$

따라서 $-\frac{3}{2} = \frac{k-50}{2}$ 이므로 $k=47$

답 47

tip

확률변수 X 가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따를 때, $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ 으로 놓으면

(1) 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$(2) P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-m}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-m}{\sigma}\right)$$

체크 254

부품의 무게를 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포 $N(80, 2^2)$

을 따르므로 $Z = \frac{X-80}{2}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\therefore P(X \leq 74 \text{ 또는 } X \geq 84)$$

$$= P(X \leq 74) + P(X \geq 84)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{74-80}{2}\right) + P\left(Z \geq \frac{84-80}{2}\right)$$

$$= P(Z \leq -3) + P(Z \geq 2)$$

$$= \{P(Z \leq 0) - P(0 \leq Z \leq 3)\} + \{P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 2)\}$$

$$= (0.5 - 0.4987) + (0.5 - 0.4772)$$

$$= 0.0013 + 0.0228 = 0.0241$$

따라서 무게가 74 g 이하이거나 84 g 이상인 부품은 전체의 2.41 %이다.

답 2.41 %

tip

정규분포의 활용 문제 풀이 순서

(i) 확률변수 X 를 정한 후, X 가 따르는 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 구한다.

(ii) 확률변수 X 를 표준화한다.

(iii) 표준정규분포표를 이용하여 확률을 구한다.

체크 255

수행평가 점수를 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포

$N(70, 5^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-70}{5}$ 으로 놓으면 확률변수 Z

는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

이때 C등급을 받은 학생의 점수는 60점 이상 75점 미만이므로

$$P(60 \leq X < 75) = P\left(\frac{60-70}{5} \leq Z < \frac{75-70}{5}\right) \\ = P(-2 \leq Z < 1) \\ = P(-2 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1) \\ = P(0 \leq Z \leq 2) + P(0 \leq Z \leq 1) \\ = 0.4 + 0.3 = 0.7$$

따라서 C등급을 받은 학생은

$$200 \times 0.7 = 140 \text{ (명)}$$

답 140명

tip

X 가 연속확률변수일 때

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) \\ = P(a < X \leq b) \\ = P(a \leq X \leq b)$$

체크 256

100 m 달리기 기록을 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포

$N(15, 2^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-15}{2}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는

표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

전국 대회에 나가기 위한 100 m 달리기 기록이 최대 k 초 이내 이어야 한다고 하면

$$P(X \leq k) = 0.04 \text{에서 } P\left(Z \leq \frac{k-15}{2}\right) = 0.04$$

$$P(Z \leq 0) - P\left(\frac{k-15}{2} \leq Z \leq 0\right) = 0.04$$

$$0.5 - P\left(\frac{k-15}{2} \leq Z \leq 0\right) = 0.04$$

$$\therefore P\left(\frac{k-15}{2} \leq Z \leq 0\right) = 0.46$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.75) = 0.46$ 이므로

$$P(-1.75 \leq Z \leq 0) = 0.46$$

$$\text{즉, } \frac{k-15}{2} = -1.75 \text{이므로 } k = 11.5$$

따라서 전국 대회에 나가기 위한 100 m 달리기 기록은 최대 11.5초 이내이어야 한다.

답 11.5초

체크 257

응시자의 성적을 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포 $N(82, 10^2)$

을 따르므로 $Z = \frac{X-82}{10}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분

포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

1차 합격자는 모집 정원의 2배를 뽑으므로 200명 중 50등 안에 들어야 1차 합격자로 선발이 된다. 1차 합격자가 되기 위한 최저 점수를 k 점이라 하면

$$P(X \geq k) = \frac{50}{200} = 0.25 \text{에서 } P\left(Z \geq \frac{k-82}{10}\right) = 0.25$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-82}{10}\right) = 0.25$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-82}{10}\right) = 0.25$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-82}{10}\right) = 0.25$$

$$\text{이때 } P(0 \leq Z \leq 0.68) = 0.25 \text{이므로 } \frac{k-82}{10} = 0.68$$

$$\therefore k = 88.8$$

따라서 1차 합격자가 되기 위한 최저 점수는 88.8점이다.

답 88.8점

19 이항분포와 정규분포의 관계

체크 258

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(162, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 162 \times \frac{1}{3} = 54$$

$$V(X) = 162 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 36$$

즉, 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(54, 6^2)$ 을 따른다.

$$\therefore a = 54, b = 6 (\because b > 0)$$

$Z = \frac{X-54}{6}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$

을 따르므로

$$P(42 \leq X \leq 60)$$

$$= P\left(\frac{42-54}{6} \leq Z \leq \frac{60-54}{6}\right)$$

$$= P(-2 \leq Z \leq 1)$$

$$= P(-2 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 2) + P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$0 < c < d \text{이므로 } c = 1, d = 2$$

$$\therefore a + b + c + d = 54 + 6 + 1 + 2 = 63$$

답 63

체크 259

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(720, \frac{5}{6}\right)$ 를 따르므로

$$E(X) = 720 \times \frac{5}{6} = 600$$

$$V(X) = 720 \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = 100$$

즉, 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(600, 10^2)$ 을 따르

므로 $Z = \frac{X-600}{10}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따른다.

$$(1) P(610 \leq X \leq 625)$$

$$= P\left(\frac{610-600}{10} \leq Z \leq \frac{625-600}{10}\right)$$

$$= P(1 \leq Z \leq 2.5)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 2.5) - P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.4938 - 0.3413 = 0.1525$$

$$(2) P(X \leq 585) = P\left(Z \leq \frac{585-600}{10}\right)$$

$$= P(Z \leq -1.5)$$

$$= P(Z \leq 0) - P(-1.5 \leq Z \leq 0)$$

$$= P(Z \leq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= 0.5 - 0.4332 = 0.0668$$

답 (1) 0.1525 (2) 0.0668

체크 260

한 개의 주사위를 던지는 450번의 시행 중 5의 약수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X 라 하자.

한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 5의 약수가 나올 확률은 $\frac{1}{3}$

이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(450, \frac{1}{3}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(X) = 450 \times \frac{1}{3} = 150$$

$$V(X) = 450 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 100$$

이때 450은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(150, 10^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X-150}{10}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분

포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$P(165 \leq X \leq 180) = P\left(\frac{165-150}{10} \leq Z \leq \frac{180-150}{10}\right)$$

$$= P(1.5 \leq Z \leq 3)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 3) - P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= 0.4987 - 0.4332$$

$$= 0.0655$$

답 0.0655

tip

이항분포와 정규분포의 활용 문제 풀이 순서

- (i) 사건이 일어나는 횟수를 확률변수 X 로 놓고, X 가 따르는 이항분포 $B(n, p)$ 를 구한다.
- (ii) m 과 σ 의 값을 구한다.
- (iii) X 가 근사적으로 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따름을 이용하여 확률변수 X 를 표준화한다.
- (iv) 표준정규분포표를 이용하여 확률을 구한다.

체크 261

한 달에 4권 이상 독서를 하는 학생 수를 확률변수 X 라 하면 X 는 이항분포 $B(225, \frac{1}{5})$ 을 따르므로

$$E(X) = 225 \times \frac{1}{5} = 45$$

$$V(X) = 225 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = 36$$

이때 225는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(45, 6^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X-45}{6}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(27 \leq X \leq 39) &= P\left(\frac{27-45}{6} \leq Z \leq \frac{39-45}{6}\right) \\ &= P(-3 \leq Z \leq -1) \\ &= P(1 \leq Z \leq 3) \\ &= P(0 \leq Z \leq 3) - P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.4987 - 0.3413 \\ &= 0.1574 \end{aligned}$$

답 0.1574

체크 262

수연이가 ○, × 퀴즈 64문제 중 맞히는 문제의 개수를 확률변수 X 라 하면 한 문제를 맞힐 확률이 $\frac{1}{2}$ 이므로 X 는 이항분포 $B(64, \frac{1}{2})$ 을 따른다.

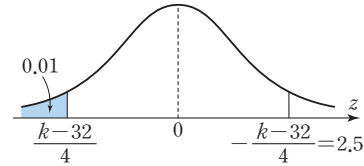
$$\therefore E(X) = 64 \times \frac{1}{2} = 32$$

$$V(X) = 64 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 16$$

이때 64는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(32, 4^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X-32}{4}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(X \leq k) = 0.01 \text{이므로 } P\left(Z \leq \frac{k-32}{4}\right) = 0.01$$



$$P(Z \leq 0) - P\left(\frac{k-32}{4} \leq Z \leq 0\right) = 0.01$$

$$0.5 - P\left(\frac{k-32}{4} \leq Z \leq 0\right) = 0.01$$

$$P\left(\frac{k-32}{4} \leq Z \leq 0\right) = 0.49$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq -\frac{k-32}{4}\right) = 0.49$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2.5) = 0.49$ 이므로

$$-\frac{k-32}{4} = 2.5 \quad \therefore k = 22$$

답 22

체크 263

확률변수 X 는 이항분포 $B(400, \frac{4}{5})$ 를 따르므로

$$E(X) = 400 \times \frac{4}{5} = 320$$

$$V(X) = 400 \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = 64$$

이때 400은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(320, 8^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X-320}{8}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$P(|X-320| \leq k) = 0.38$ 에서

$$\begin{aligned} P(|X-320| \leq k) &= P\left(\left|\frac{X-320}{8}\right| \leq \frac{k}{8}\right) \\ &= P\left(|Z| \leq \frac{k}{8}\right) \\ &= P\left(-\frac{k}{8} \leq Z \leq \frac{k}{8}\right) \\ &= 2P\left(0 \leq Z \leq \frac{k}{8}\right) \\ &= 0.38 \end{aligned}$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{k}{8}\right) = 0.19$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 0.5) = 0.19$ 이므로 $\frac{k}{8} = 0.5$

$$\therefore k = 4$$

답 4

연습 문제 09

264

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축
및 두 직선 $x=0$, $x=2$ 로 둘러
싸인 도형의 넓이가 1이므로

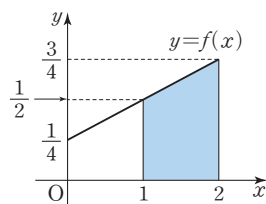
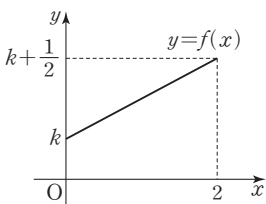
$$\frac{1}{2} \times \left(k + k + \frac{1}{2}\right) \times 2 = 1$$

$$2k + \frac{1}{2} = 1 \quad \therefore k = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \text{에서 } f(1) = \frac{1}{2}$$

$P(X \geq 1)$ 은 함수 $y=f(x)$ 의 그
래프와 x 축 및 두 직선 $x=1$,
 $x=2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이와
같으므로

$$P(X \geq 1) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) \times 1 = \frac{5}{8}$$



265

$P\left(a \leq X \leq a + \frac{1}{3}\right)$ 은 함수

$y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두

직선 $x=a$, $x=a + \frac{1}{3}$ 로 둘러싸

인 도형의 넓이와 같다.

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 $x=0$ (y 축)에 대하여 대칭이
므로 a 와 $a + \frac{1}{3}$ 의 평균이 0일 때, $P\left(a \leq X \leq a + \frac{1}{3}\right)$ 이 최대
가 된다.

$$\text{즉, } \frac{a + a + \frac{1}{3}}{2} = 0 \text{에서 } 2a + \frac{1}{3} = 0$$

$$\therefore a = -\frac{1}{6}$$

[다른 풀이]

$P\left(a \leq X \leq a + \frac{1}{3}\right)$ 이 최대가 되려면 $a \leq 0 \leq a + \frac{1}{3}$ 을 만족시
켜야 한다.

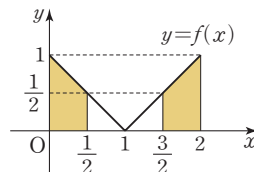
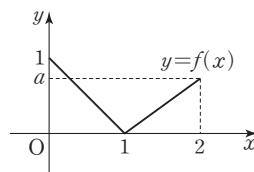
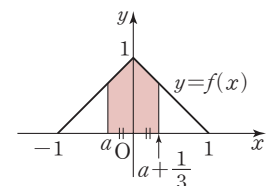
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (-1 \leq x < 0) \\ -x+1 & (0 \leq x \leq 1) \end{cases} \text{에서}$$

$$f(a) = a+1, f\left(a + \frac{1}{3}\right) = -a + \frac{2}{3} \text{이므로}$$

$$P\left(a \leq X \leq a + \frac{1}{3}\right)$$

$$= P(a \leq X \leq 0) + P\left(0 \leq X \leq a + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times (a+1+1) \times (-a) + \frac{1}{2} \times \left(1 - a + \frac{2}{3}\right) \times \left(a + \frac{1}{3}\right)$$



$$= -a^2 - \frac{1}{3}a + \frac{5}{18}$$

$$= -\left(a + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{36}$$

따라서 구하는 상수 a 의 값은 $-\frac{1}{6}$ 이다.

266

$$12x^2 - 7x + 1 = 0 \text{에서 } (4x-1)(3x-1) = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{4} \text{ 또는 } x = \frac{1}{3}$$

$P(X \leq 1)$, $P(X \leq 3)$ 이 이차방정식 $12x^2 - 7x + 1 = 0$ 의 두
근이고, $P(X \leq 1) \leq P(X \leq 3)$ 이므로

$$P(X \leq 1) = \frac{1}{4}, P(X \leq 3) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore P(3 \leq X \leq 4) = 1 - P(X \leq 3)$$

$$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{답 } \frac{2}{3}$$

267

확률밀도함수 $f(x)$ 에 대하여

$0 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이어야 하
므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는
오른쪽 그림과 같다.

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x

축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$\left(\frac{1}{2} \times 1 \times 1\right) + \left(\frac{1}{2} \times 1 \times a\right) = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{a}{2} = 1 \quad \therefore a = 1$$

한편, $|X-1| \geq \frac{1}{2}$ 에서 $X-1 \leq -\frac{1}{2}$ 또는 $X-1 \geq \frac{1}{2}$

$$\therefore X \leq \frac{1}{2} \text{ 또는 } X \geq \frac{3}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & (0 \leq x < 1) \\ x-1 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases} \text{에서}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P\left(|X-1| \geq \frac{1}{2}\right)$$

$$= P\left(X \leq \frac{1}{2} \text{ 또는 } X \geq \frac{3}{2}\right)$$

$$= P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) + P\left(X \geq \frac{3}{2}\right)$$

$$= 2P\left(X \leq \frac{1}{2}\right)$$

$$= 2 \times \left[\frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2}\right] = \frac{3}{4}$$

$$\text{답 } \frac{3}{4}$$

268

조건 (가)에 의하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이고, $P(-1 \leq X \leq 1) = 1$ 이므로

$$P(-1 \leq X \leq 0) = P(0 \leq X \leq 1) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P\left(0 \leq X \leq \frac{2}{3}\right) + P\left(\frac{2}{3} \leq X \leq 1\right) = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 (나)에 의하여

$$P\left(\frac{2}{3} \leq X \leq 1\right) = \frac{1}{4}P\left(0 \leq X \leq \frac{2}{3}\right)$$

이므로 ①에서

$$P\left(0 \leq X \leq \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{4}P\left(0 \leq X \leq \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{4}P\left(0 \leq X \leq \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P\left(0 \leq X \leq \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{5}$$

$$\therefore P\left(-\frac{2}{3} \leq X \leq 0\right) = P\left(0 \leq X \leq \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{5} \quad \text{답 } \frac{2}{5}$$

tip

우함수와 기함수

- (1) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = f(x)$ 일 때, 함수 $f(x)$ 를 우함수라 한다. 이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.
- (2) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 일 때, 함수 $f(x)$ 를 기함수라 한다. 이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

269

연속확률변수 X 가 갖는 값의 범위는 $0 \leq X \leq 3$ 이므로

$$P(x \leq X \leq 3) = a(3-x) \quad (0 \leq x \leq 3)$$

에서 $x=0$ 일 때 $P(0 \leq X \leq 3) = 1$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } a(3-0) = 1 \text{이므로 } a = \frac{1}{3}$$

$$\text{이때 } P(x \leq X \leq 3) = \frac{1}{3}(3-x) \quad (0 \leq x \leq 3) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} P(0 \leq X < a) &= P\left(0 \leq X < \frac{1}{3}\right) \\ &= 1 - P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq 3\right) \\ &= 1 - \frac{1}{3}\left(3 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

따라서 $p=9$, $q=1$ 이므로

$$p+q=10 \quad \text{답 } 10$$

tip

$P(x \leq X \leq 3) = a(3-x) \quad (0 \leq x \leq 3)$ 는 확률밀도함수가 아니다. 따라서 $P(0 \leq X < a)$ 를 구할 때, $y=a(3-x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=0$, $x=a$ 로 둘러싸인 도형의 넓이로 구하지 않도록 주의한다.

270

확률변수 X 가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 를 따르므로 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이다.

조건 (가)에서 $P(X \leq 4) = P(X \geq 8)$ 이므로

$$m = \frac{4+8}{2} = 6$$

즉, $E(X) = m = 6$ 이고, 조건 (나)에서 $E(X^2) = 61$ 이므로

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= 61 - 6^2 = 25 \end{aligned}$$

$$\therefore \sigma^2 = 25$$

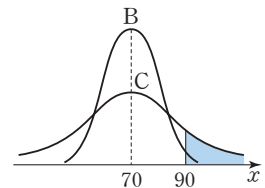
$$\therefore m + \sigma^2 = 6 + 25 = 31$$

답 31

271

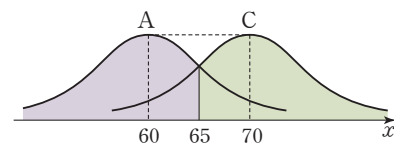
ㄱ. A반의 평균이 60점, B반의 평균이 70점이므로 평균적으로 B반의 학생이 더 우수하다. (참)

ㄴ. 오른쪽 그림에서 $x \geq 90$ 일 때, B반의 성적을 나타내는 정규분포곡선과 x 축 사이의 넓이보다 C반의 성적을 나타내는 정규분포곡선과 x 축 사이의 넓이가 더 넓으므로 C반에 90점 이상인 학생 수가 더 많다. (거짓)



ㄷ. A반과 C반의 수학 성적의 표준편차가 같으므로 A반의 성적을 나타내는 정규분포곡선과 C반의 성적을 나타내는 정규분포곡선의 교점의 x 좌표는 60과 70의 평균인 65이다.

이때 다음 그림과 같이 $x \leq 65$ 일 때, A반의 성적을 나타내는 정규분포곡선과 x 축 사이의 넓이는 $x \geq 65$ 일 때, C반의 성적을 나타내는 정규분포곡선과 x 축 사이의 넓이와 같으므로 A반에서 점수가 65점 이하인 학생과 C반에서 점수가 65점 이상인 학생 수는 같다. (참)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

272

$$P(|X-3| \leq 4) = P(-4 \leq X-3 \leq 4) = P(-1 \leq X \leq 7)$$

$m=5, \sigma=4$ 이므로

$$-1 = 5 - 1.5 \times 4 = m - 1.5\sigma$$

$$7 = 5 + 0.5 \times 4 = m + 0.5\sigma$$

$$\therefore P(-1 \leq X \leq 7)$$

$$= P(m - 1.5\sigma \leq X \leq m + 0.5\sigma)$$

$$= P(m - 1.5\sigma \leq X \leq m) + P(m \leq X \leq m + 0.5\sigma)$$

$$= P(m \leq X \leq m + 1.5\sigma) + P(m \leq X \leq m + 0.5\sigma)$$

$$= 0.4332 + 0.1915$$

$$= 0.6247$$

답 0.6247

273

확률밀도함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$f(50-x) = f(50+x)$ 를 만족시키므로 $f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=50$ 에 대하여 대칭이다.

$$\therefore m=50$$

한편, 확률변수 X 는 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르므로

$Z = \frac{X-m}{\sigma}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따른다.

이때 $P(m \leq X \leq m+8) = 0.4772$ 이므로

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{8}{\sigma}\right) = 0.4772$$

$$P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772 \text{이므로}$$

$$\frac{8}{\sigma} = 2 \quad \therefore \sigma = 4$$

$$\therefore P(X \geq 54) = P\left(Z \geq \frac{54-50}{4}\right)$$

$$= P(Z \geq 1)$$

$$= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.5 - 0.3413$$

$$= 0.1587$$

답 0.1587

tip

모든 실수 x 에 대하여 $f(a-x) = f(a+x)$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=a$ 에 대하여 대칭이다.

274

A 공장과 B 공장에서 생산하는 제품의 무게를 각각 확률변수 X, Y 라 하면 X, Y 는 각각 정규분포 $N(82, 2^2), N(90, 4^2)$

을 따르므로 $Z_X = \frac{X-82}{2}, Z_Y = \frac{Y-90}{4}$ 으로 놓으면 확률변수 Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\therefore P(X \leq 87) = P\left(Z_X \leq \frac{87-82}{2}\right)$$

$$= P(Z_X \leq 2.5)$$

$$P(Y \leq k) = P\left(Z_Y \leq \frac{k-90}{4}\right)$$

이때 $P(X \leq 87) = P(Y \leq k)$ 이므로

$$P(Z_X \leq 2.5) = P\left(Z_Y \leq \frac{k-90}{4}\right)$$

따라서 $2.5 = \frac{k-90}{4}$ 이므로

$$k=100$$

답 100

275

학생 한 명의 키를 확률변수 X 라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(170, 10^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-170}{10}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$\therefore P(X \geq 177) = P\left(Z \geq \frac{177-170}{10}\right)$

$$= P(Z \geq 0.7)$$

$$= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 0.7)$$

$$= 0.5 - 0.2580$$

$$= 0.2420$$

따라서 키가 177 cm 이상인 학생은 24.2 %이므로

$$a=24.2$$

답 24.2

276

지원자의 점수를 확률변수 X 라 하면 확률변수 X 는

정규분포 $N(58, 4^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-58}{4}$ 로 놓으면

확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

합격하기 위한 최저 점수를 k 점이라 하면

$$P(X \geq k) = \frac{1}{25} = 0.04 \text{이므로}$$

$$P\left(Z \geq \frac{k-58}{4}\right) = 0.04$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-58}{4}\right) = 0.04$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-58}{4}\right) = 0.04$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-58}{4}\right) = 0.46$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.75) = 0.46$ 이므로

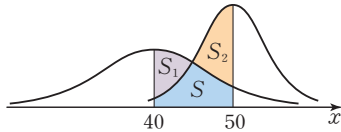
$$\frac{k-58}{4} = 1.75 \quad \therefore k=65$$

따라서 합격자의 최저 점수는 65점이다.

답 65점

277

두 확률변수 X, Y 가 각각 정규분포 $N(40, 10^2), N(50, 5^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X-40}{10}, Z_Y = \frac{Y-50}{5}$ 으로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다. 다음 그림과 같이 두 곡선과 x 축 및 두 직선 $x=40, x=50$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S 라 하자.



이때

$$S + S_1 = P(40 \leq X \leq 50) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S + S_2 = P(40 \leq Y \leq 50) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이므로 $\textcircled{2} - \textcircled{1}$ 을 하면

$$\begin{aligned} S_2 - S_1 &= P(40 \leq Y \leq 50) - P(40 \leq X \leq 50) \\ &= P\left(\frac{40-50}{5} \leq Z_Y \leq \frac{50-50}{5}\right) \\ &\quad - P\left(\frac{40-40}{10} \leq Z_X \leq \frac{50-40}{10}\right) \\ &= P(-2 \leq Z_Y \leq 0) - P(0 \leq Z_X \leq 1) \\ &= P(0 \leq Z_Y \leq 2) - P(0 \leq Z_X \leq 1) \\ &= 0.4772 - 0.3413 = 0.1359 \quad \text{답 } 0.1359 \end{aligned}$$

278

A 모의고사와 B 모의고사의 수학 점수를 각각 확률변수 X, Y 라 하면 두 확률변수 X, Y 가 각각 정규분포 $N(80, a^2), N(82, 4^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X-80}{a}, Z_Y = \frac{Y-82}{4}$ 로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

경원이의 두 모의고사의 수학 점수가 모두 84점이므로 두 모의고사에서 경원이보다 수학 점수가 높을 확률은 각각

$$P(X \geq 84) = P\left(Z_X \geq \frac{84-80}{a}\right) = P\left(Z_X \geq \frac{4}{a}\right)$$

$$P(Y \geq 84) = P\left(Z_Y \geq \frac{84-82}{4}\right) = P\left(Z_Y \geq \frac{1}{2}\right)$$

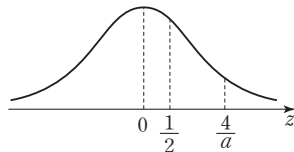
이때 경원이의 A 모의고사의

수학 성적이 상대적으로 더 우

수하려면 $\frac{4}{a} > \frac{1}{2}$ 이어야 하므

로 $a < 8$ 이다.

따라서 자연수 a 의 최댓값은 7이다.



답 7

279

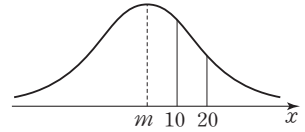
조건 ㉠에서 $f(10) > f(20)$ 이므로

(i) $m \leq 10$ 일 때

$m \leq 10 < 20$ 이므로 오른쪽

그림에서 $f(10) > f(20)$ 이

항상 성립한다.



(ii) $10 < m < 20$ 일 때

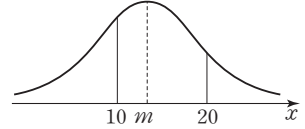
10이 20보다 평균 m 에 더

가까워야 한다.

즉, $m - 10 < 20 - m$

$$2m < 30 \quad \therefore m < 15$$

$10 < m < 20$ 이어야 하므로 $10 < m < 15$



(i), (ii)에서 $m < 15$

$\dots\dots \textcircled{1}$

조건 ㉡에서 $f(4) < f(22)$ 이

고, $\textcircled{1}$ 에서 $m < 15$ 이므로 22

가 4보다 평균 m 에 더 가깝다.

즉, $m - 4 > 22 - m$

$$2m > 26 \quad \therefore m > 13$$

$\dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $13 < m < 15$

이때 m 이 자연수이므로 $m = 14$

따라서 확률변수 X 가 정규분포 $N(14, 5^2)$ 을 따르므로

$Z = \frac{X-14}{5}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$

을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore P(17 \leq X \leq 18) &= P\left(\frac{17-14}{5} \leq Z \leq \frac{18-14}{5}\right) \\ &= P(0.6 \leq Z \leq 0.8) \\ &= P(0 \leq Z \leq 0.8) - P(0 \leq Z \leq 0.6) \\ &= 0.288 - 0.226 \\ &= 0.062 \quad \text{답 } \textcircled{3} \end{aligned}$$

280

이 회사 직원들의 이 날의 출근 시간을 확률변수 X 라 하면 X

는 정규분포 $N(66.4, 15^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-66.4}{15}$ 로 놓으

면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\therefore P(X \geq 73) = P\left(Z \geq \frac{73-66.4}{15}\right)$$

$$= P(Z \geq 0.44)$$

$$= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 0.44)$$

$$= 0.5 - 0.17 = 0.33$$

이때 $P(X < 73) = 1 - P(X \geq 73) = 0.67$ 이므로 구하는 확률

$$0.33 \times 0.4 + 0.67 \times 0.2 = 0.266$$

답 ⑤

281

확률변수 X 가 이항분포 $B(180, p)$ 를 따르므로

$$E(X) = 180p \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

180은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(180p, 180pq)$ 를 따른다. (단, $q=1-p$)

이때 $P(X \leq 30) = 0.5$ 이므로

$$E(X) = 30 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } 180p = 30 \quad \therefore p = \frac{1}{6}$$

$$V(X) = 180 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 25$$

$$\therefore a = 30, b = 25$$

$$\therefore a + b = 30 + 25 = 55 \quad \text{답 } 55$$

282

확률변수 X 의 확률질량함수가

$$P(X=x) = {}_{490}C_x \left(\frac{5}{7}\right)^x \left(\frac{2}{7}\right)^{490-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 490)$$

이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(490, \frac{5}{7}\right)$ 를 따른다.

$$\therefore E(X) = 490 \times \frac{5}{7} = 350$$

$$V(X) = 490 \times \frac{5}{7} \times \frac{2}{7} = 100$$

이때 490은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(350, 10^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X-350}{10}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(340 \leq X \leq 365)$$

$$= P\left(\frac{340-350}{10} \leq Z \leq \frac{365-350}{10}\right)$$

$$= P(-1 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= 0.3413 + 0.4332$$

$$= 0.7745 \quad \text{답 } 0.7745$$

tip

확률변수 X 의 확률질량함수가

$$P(X=x) = {}_nC_x p^x q^{n-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, n)$$

이면 X 는 이항분포 $B(n, p)$ 를 따른다. (단, $q=1-p$)

283

400명의 학생 중 후보 C를 지지하지 않는 학생 수를 확률변수 X 라 하면 한 명의 학생이 후보 C를 지지하지 않을 확률은

$\frac{80}{100} = \frac{4}{5}$ 이므로 X 는 이항분포 $B\left(400, \frac{4}{5}\right)$ 를 따른다.

$$\therefore E(X) = 400 \times \frac{4}{5} = 320$$

$$V(X) = 400 \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = 64$$

이때 400은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(320, 8^2)$ 을 따른다.

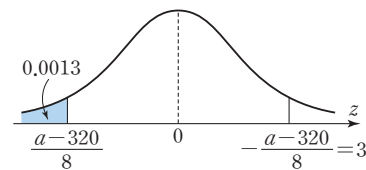
따라서 $Z = \frac{X-320}{8}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(X \leq a) = 0.0013 \text{이므로}$$

$$P\left(Z \leq \frac{a-320}{8}\right) = 0.0013$$

$$P(Z \leq 0) - P\left(\frac{a-320}{8} \leq Z \leq 0\right) = 0.0013$$

$$0.5 - P\left(\frac{a-320}{8} \leq Z \leq 0\right) = 0.0013$$



$$P\left(\frac{a-320}{8} \leq Z \leq 0\right) = 0.4987 \text{이므로}$$

$$P\left(0 \leq Z \leq -\frac{a-320}{8}\right) = 0.4987$$

$$P(0 \leq Z \leq 3) = 0.4987 \text{이므로}$$

$$-\frac{a-320}{8} = 3 \quad \therefore a = 296$$

답 296

284

1620번의 시행 중 3점을 얻는 횟수를 확률변수 X , 1점을 잃는 횟수를 확률변수 Y 라 하면

$$X + Y = 1620 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

점수가 1300점인 경우는

$$3X - Y = 1300 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면

$$X = 730, Y = 890$$

즉, 게임을 1620번 독립적으로 시행한 후의 점수가 1300점 이상이라면 $X \geq 730$ 이어야 한다.

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(1620, \frac{4}{9}\right)$ 를 따르므로

$$E(X) = 1620 \times \frac{4}{9} = 720$$

$$V(X) = 1620 \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} = 400$$

이때 1620은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X 는 근사적으로

정규분포 $N(720, 20^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X-720}{20}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} P(X \geq 730) &= P\left(Z \geq \frac{730-720}{20}\right) \\ &= P(Z \geq 0.5) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 0.5) \\ &= 0.5 - 0.19 \\ &= 0.31 \end{aligned}$$

$p = 0.31$ 이므로 $100p = 31$

답 31

285

가지의 무게를 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포

$N(400, 50^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X-400}{50}$ 으로 놓으면 확률변수

Z_X 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

가지 1개를 선택할 때 백화점 납품 가능 상품이 될 확률은 무게가 442g 이상이어야 하므로

$$\begin{aligned} P(X \geq 442) &= P\left(Z_X \geq \frac{442-400}{50}\right) \\ &= P(Z_X \geq 0.84) \\ &= P(Z_X \geq 0) - P(0 \leq Z_X \leq 0.84) \\ &= 0.5 - 0.3 \\ &= 0.2 \end{aligned}$$

가지 1개가 백화점 납품 가능 상품일 확률이 0.2이므로 가지 100개 중 백화점 납품 가능 상품의 개수를 확률변수 Y 라 하면 Y 는 이항분포 $B(100, 0.2)$ 를 따른다.

$$\therefore E(Y) = 100 \times 0.2 = 20$$

$$V(Y) = 100 \times 0.2 \times 0.8 = 16$$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 Y 는 근사적으로 정규분포 $N(20, 4^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z_Y = \frac{Y-20}{4}$ 으로 놓으면 Z_Y 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 가지 100개 중 백화점 납품 가능 상품의 개수가 26개 이상일 확률은

$$\begin{aligned} P(Y \geq 26) &= P\left(Z_Y \geq \frac{26-20}{4}\right) \\ &= P(Z_Y \geq 1.5) \\ &= P(Z_Y \geq 0) - P(0 \leq Z_Y \leq 1.5) \\ &= 0.5 - 0.43 \\ &= 0.07 \end{aligned}$$

답 ①

2 통계적 추정

20 모집단과 표본

21 모평균과 표본평균

체크 286

모평균 $m = 40$, 모표준편차 $\sigma = 16$, 표본의 크기 $n = 8$ 이므로

$$E(\bar{X}) = m = 40, V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{16^2}{8} = 32$$

이때 $V(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - \{E(\bar{X})\}^2$ 에서

$$\begin{aligned} E(\bar{X}^2) &= V(\bar{X}) + \{E(\bar{X})\}^2 \\ &= 32 + 40^2 = 1632 \end{aligned}$$

답 1632

체크 287

이 상자에서 임의추출한 카드 한 장에 적힌 숫자를 확률변수 X 라 하면 X 가 가질 수 있는 값은 1, 3, 5, 7이고, 각 값을 가질 확률은

$$P(X=1) = \frac{1}{10}, P(X=3) = \frac{1}{5}, P(X=5) = \frac{3}{10},$$

$$P(X=7) = \frac{2}{5}$$

이므로 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	7	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

따라서 확률변수 X 의 평균과 분산은 각각

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{5} + 5 \times \frac{3}{10} + 7 \times \frac{2}{5} = 5$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= 1^2 \times \frac{1}{10} + 3^2 \times \frac{1}{5} + 5^2 \times \frac{3}{10} + 7^2 \times \frac{2}{5} - 5^2 = 4$$

이때 표본의 크기가 8이므로

$$E(\bar{X}) = 5, V(\bar{X}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore E(\bar{X}) + V(\bar{X}) = 5 + \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$$

답 $\frac{11}{2}$

[참고]

분산 $V(X)$ 는 다음과 같이 구할 수도 있다.

$$V(X)$$

$$= E((X-5)^2) \quad \leftarrow (\text{분산}) = \{(\text{편차})^2 \text{의 평균}\}$$

$$\begin{aligned} &= (1-5)^2 \times \frac{1}{10} + (3-5)^2 \times \frac{1}{5} + (5-5)^2 \times \frac{3}{10} + (7-5)^2 \times \frac{2}{5} \\ &= 4 \end{aligned}$$

체크 288

이 주머니에서 임의추출한 공 한 개에 적힌 숫자를 확률변수 X 라 하면 X 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이고, 각 값을 가질 확률은

$$P(X=1)=\frac{2}{7}, P(X=2)=\frac{2}{7}, P(X=3)=\frac{3}{7}$$

이므로 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

따라서 확률변수 X 의 평균과 분산은 각각

$$E(X)=1 \times \frac{2}{7} + 2 \times \frac{2}{7} + 3 \times \frac{3}{7} = \frac{15}{7}$$

$$V(X)=1^2 \times \frac{2}{7} + 2^2 \times \frac{2}{7} + 3^2 \times \frac{3}{7} - \left(\frac{15}{7}\right)^2 = \frac{34}{49}$$

이때 표본평균 \bar{X} 의 분산이 $\frac{17}{49}$ 이므로

$$V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{n} \text{에서 } \frac{1}{n} \times \frac{34}{49} = \frac{17}{49}$$

$$\therefore n=2$$

답 2

체크 289

모집단이 정규분포 $N(350, 25^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 25

이므로 표본평균 \bar{X} 는 정규분포 $N\left(350, \frac{25^2}{25}\right)$, 즉

$N(350, 5^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{\bar{X}-350}{5}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$

을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \geq 360) &= P\left(Z \geq \frac{360-350}{5}\right) \\ &= P(Z \geq 2) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.5 - 0.48 = 0.02 \end{aligned}$$

따라서 $a=0.02$ 이므로

$$100a=2$$

답 2

체크 290

모집단이 정규분포 $N(400, 32^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 64

이므로 표본평균 \bar{X} 는 정규분포 $N\left(400, \frac{32^2}{64}\right)$, 즉

$N(400, 4^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{\bar{X}-400}{4}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$

을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(394 \leq \bar{X} \leq 402) &= P\left(\frac{394-400}{4} \leq Z \leq \frac{402-400}{4}\right) \\ &= P(-1.5 \leq Z \leq 0.5) \\ &= P(-1.5 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 0.5) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1.5) + P(0 \leq Z \leq 0.5) \\ &= 0.43 + 0.19 = 0.62 \end{aligned}$$

답 0.62

체크 291

모집단이 정규분포 $N(m, 14^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 49이

므로 표본평균 \bar{X} 는 정규분포 $N\left(m, \frac{14^2}{49}\right)$, 즉 $N(m, 2^2)$ 을

따른다.

따라서 $Z = \frac{\bar{X}-m}{2}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$

을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(|\bar{X}-m| \geq 5) &= P\left(\left|\frac{\bar{X}-m}{2}\right| \geq \frac{5}{2}\right) \\ &= P(|Z| \geq 2.5) \\ &= P(Z \leq -2.5) + P(Z \geq 2.5) \\ &= 2P(Z \geq 2.5) \\ &= 2\{P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 2.5)\} \\ &= 2(0.5 - 0.4938) = 0.0124 \end{aligned}$$

답 0.0124

체크 292

모집단이 정규분포 $N(40, 4^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 n 이므로

표본평균 \bar{X} 는 정규분포 $N\left(40, \frac{4^2}{n}\right)$, 즉 $N\left(40, \left(\frac{4}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을

따른다.

따라서 $Z = \frac{\bar{X}-40}{\frac{4}{\sqrt{n}}}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$

을 따르므로 $P\left(\bar{X} \leq \frac{124}{\sqrt{n}}\right) = 0.8413$ 에서

$$\begin{aligned} P\left(\bar{X} \leq \frac{124}{\sqrt{n}}\right) &= P\left(Z \leq \frac{\frac{124}{\sqrt{n}}-40}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right) \\ &= P(Z \leq 31 - 10\sqrt{n}) \\ &= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 31 - 10\sqrt{n}) = 0.8413 \end{aligned}$$

$$\therefore P(0 \leq Z \leq 31 - 10\sqrt{n}) = 0.3413$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$ 이므로

$$31 - 10\sqrt{n} = 1, \quad 10\sqrt{n} = 30$$

$$\therefore n = 9$$

답 9

체크 293

모집단이 정규분포 $N(450, 10^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 n 이므로 표본평균 \bar{X} 는 정규분포 $N(450, \frac{10^2}{n})$, 즉

$N(450, (\frac{10}{\sqrt{n}})^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{\bar{X} - 450}{\frac{10}{\sqrt{n}}}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$

을 따르므로 $P(440 \leq \bar{X} \leq 460) = 0.9544$ 에서

$$\begin{aligned} P(440 \leq \bar{X} \leq 460) &= P\left(\frac{440 - 450}{\frac{10}{\sqrt{n}}} \leq Z \leq \frac{460 - 450}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right) \\ &= P(-\sqrt{n} \leq Z \leq \sqrt{n}) \\ &= 2P(0 \leq Z \leq \sqrt{n}) = 0.9544 \end{aligned}$$

$$\therefore P(0 \leq Z \leq \sqrt{n}) = 0.4772$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로 $\sqrt{n} = 2$

$$\therefore n = 4$$

답 4

체크 294

모집단이 정규분포 $N(58, 24^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 400이므로 \bar{X} 는 정규분포 $N(58, \frac{24^2}{400})$, 즉 $N(58, 1.2^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{\bar{X} - 58}{1.2}$ 로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(\bar{X} \geq k) \leq 0.16$ 에서

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \geq k) &= P\left(Z \geq \frac{k - 58}{1.2}\right) \\ &= P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k - 58}{1.2}\right) \\ &= 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k - 58}{1.2}\right) \leq 0.16 \end{aligned}$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{k - 58}{1.2}\right) \geq 0.34$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.34$ 이므로

$$\frac{k - 58}{1.2} \geq 1, \quad k - 58 \geq 1.2$$

$$\therefore k \geq 59.2$$

따라서 구하는 정수 k 의 최솟값은 60이다.

답 60

연습 문제 10

295

- ㄱ. 모든 전구의 수명을 조사하면 사용할 수 있는 전구가 없게 되므로 전수조사보다는 표본조사가 적합하다.
 - ㄴ. 어느 학급의 수학 성적의 평균은 조사 대상도 많지 않고 조사 시간도 길지 않으므로 전수조사가 적합하다.
 - ㄷ. 청소년 전체에 대하여 가장 선호하는 직업을 조사하는 것은 매우 오랜 시간이 걸리므로 전수조사보다는 표본조사가 적합하다.
 - ㄹ. 선거 투표 후 출구 조사는 모든 유권자에 대하여 조사하는 것은 시간이 오래 걸리므로 전수조사보다는 표본조사가 적합하다.
 - ㅁ. 우리나라 총 인구 조사는 모든 국민을 대상으로 조사하는 것이므로 전수조사가 적합하다.
- 따라서 표본조사가 적합한 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

296

$\bar{X} = 3$ 인 경우는 1과 5, 3과 3, 5와 1을 추출하는 경우이므로

$$P(\bar{X} = 3) = P(X = 1) \times P(X = 5) + P(X = 3) \times P(X = 3) + P(X = 5) \times P(X = 1)$$

$$= \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{8}$$

$$= \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$$

답 $\frac{3}{32}$

297

모표준편차 $\sigma = 16$, 표본의 크기가 n 이므로 표본평균 \bar{X} 에 대하여

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{16}{\sqrt{n}} \leq 2, \quad \sqrt{n} \geq 8$$

$$\therefore n \geq 64$$

따라서 n 의 최솟값은 64이다.

답 64

298

모평균 $m = 12$, 모분산 $\sigma^2 = 5$, 표본의 크기가 n 이므로

$$E(\bar{X}) = m = 12, \quad V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{5}{n}$$

이때 $E(\bar{X}^2 - 24\bar{X} + 144) = \frac{1}{12}$ 에서

$$\begin{aligned}
& E(\bar{X}^2) - 24E(\bar{X}) + 144 \\
&= V(\bar{X}) + \{E(\bar{X})\}^2 - 24E(\bar{X}) + 144 = V(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - \{E(\bar{X})\}^2 \\
&= \frac{5}{n} + 144 - 24 \times 12 + 144 \\
&= \frac{5}{n} = \frac{1}{12} \\
&\therefore n = 60
\end{aligned}$$

답 60

[다른 풀이]

모평균 $m=12$, 모분산 $\sigma^2=5$, 표본의 크기가 n 이므로

$$E(\bar{X}) = m = 12, V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{5}{n} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $E(\bar{X}^2 - 24\bar{X} + 144) = \frac{1}{12}$ 에서

$$E((\bar{X} - 12)^2) = V(\bar{X}) = \frac{1}{12} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \frac{5}{n} = \frac{1}{12}$$

$$\therefore n = 60$$

tip

(분산) = {(편차)²의 평균}이므로
 $E(X) = m$ 일 때, $E((X - m)^2) = V(X)$

299

이 상자에서 복원추출한 카드 한 장에 적힌 숫자를 확률변수 X 라 할 때, X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	k	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{k+5}$	$\frac{3}{k+5}$	$\frac{k}{k+5}$	1

따라서 확률변수 X 의 평균은

$$E(X) = 1 \times \frac{2}{k+5} + 3 \times \frac{3}{k+5} + k \times \frac{k}{k+5} = \frac{k^2 + 11}{k+5}$$

이때 표본평균 \bar{X} 의 평균이 $\frac{18}{5}$ 이므로

$$\frac{k^2 + 11}{k+5} = \frac{18}{5}, 5k^2 - 18k - 35 = 0$$

$$(5k+7)(k-5) = 0$$

$$\therefore k = 5 (\because k \text{는 자연수})$$

즉, 확률변수 X 의 분산은

$$V(X) = 1^2 \times \frac{1}{5} + 3^2 \times \frac{3}{10} + 5^2 \times \frac{1}{2} - \left(\frac{18}{5}\right)^2 = \frac{61}{25}$$

이고, 표본의 크기가 4이므로

$$V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{n} = \frac{\frac{61}{25}}{4} = \frac{61}{100} \quad \text{답 } \frac{61}{100}$$

300

모집단이 정규분포 $N(56, 16^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 16이므로 표본평균 \bar{X} 는 정규분포 $N\left(56, \frac{16^2}{16}\right)$, 즉 $N(56, 4^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{\bar{X} - 56}{4}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}
P(50 \leq \bar{X} \leq 60) &= P\left(\frac{50-56}{4} \leq Z \leq \frac{60-56}{4}\right) \\
&= P(-1.5 \leq Z \leq 1) \\
&= P(-1.5 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1) \\
&= P(0 \leq Z \leq 1.5) + P(0 \leq Z \leq 1) \\
&= 0.4332 + 0.3413 = 0.7745
\end{aligned}$$

답 0.7745

301

이항분포 $B\left(600, \frac{2}{5}\right)$ 를 따르는 모집단의 확률변수를 X 라 하면

$$E(X) = 600 \times \frac{2}{5} = 240, V(X) = 600 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = 144$$

이때 시행횟수 600이 충분히 크므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(240, 12^2)$ 을 따른다.

이 모집단에서 임의추출한 크기가 4인 표본평균 \bar{X} 는 정규분포 $N\left(240, \frac{12^2}{4}\right)$, 즉 $N(240, 6^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{\bar{X} - 240}{6}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}
P(237 \leq \bar{X} \leq 252) &= P\left(\frac{237-240}{6} \leq Z \leq \frac{252-240}{6}\right) \\
&= P(-0.5 \leq Z \leq 2) \\
&= P(-0.5 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) \\
&= P(0 \leq Z \leq 0.5) + P(0 \leq Z \leq 2) \\
&= 0.1915 + 0.4772 = 0.6687
\end{aligned}$$

답 0.6687

302

공용 자전거의 1회 이용 시간을 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포 $N(60, 10^2)$ 을 따른다. 표본의 크기가 25인 표본평균을 \bar{X} 라 하면 \bar{X} 는 정규분포 $N\left(60, \frac{10^2}{25}\right)$, 즉 $N(60, 2^2)$ 을 따른다.

$Z = \frac{\bar{X} - 60}{2}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 25회 이용 시간의 총합이 1450분 이상일 확률은

$$\begin{aligned} P(25\bar{X} \geq 1450) &= P\left(\bar{X} \geq \frac{1450}{25}\right) = P(\bar{X} \geq 58) \\ &= P\left(Z \geq \frac{58-60}{2}\right) \\ &= P(Z \geq -1) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 0) + P(Z \geq 0) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1) + P(Z \geq 0) \\ &= 0.3413 + 0.5 = 0.8413 \end{aligned}$$

답 ②

303

정규분포 $N(100, \sigma^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 \bar{X} 이므로 \bar{X} 는 정규분포 $N\left(100, \frac{\sigma^2}{9}\right)$, 즉 $N\left(100, \left(\frac{\sigma}{3}\right)^2\right)$ 을 따른다.

따라서 $Z_X = \frac{\bar{X} - 100}{\frac{\sigma}{3}}$ 으로 놓으면 Z_X 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따른다.

정규분포 $N(80, 16^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 \bar{Y} 이므로 \bar{Y} 는 정규분포

$N\left(80, \frac{16^2}{4}\right)$, 즉 $N(80, 8^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z_Y = \frac{\bar{Y} - 80}{8}$ 으로 놓으면 Z_Y 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(\bar{X} \geq 92) + P(\bar{Y} \geq 96)$$

$$= P\left(Z_X \geq \frac{92-100}{\frac{\sigma}{3}}\right) + P\left(Z_Y \geq \frac{96-80}{8}\right)$$

$$= P\left(Z_X \geq -\frac{24}{\sigma}\right) + P(Z_Y \geq 2) = 1$$

이때

$$P(Z \geq -2) + P(Z \geq 2) = 1$$

이므로

$$-\frac{24}{\sigma} = -2$$

$$\therefore \sigma = 12$$

$$\therefore P(\bar{X} \leq 112) = P\left(Z_X \leq \frac{112-100}{4}\right)$$

$$= P(Z_X \leq 3)$$

$$= P(Z_X \leq 0) + P(0 \leq Z_X \leq 3)$$

$$= 0.5 + 0.4987 = 0.9987$$

답 0.9987

304

모집단이 정규분포 $N(2000, 120^2)$ 을 따르고 표본의 크기가

n 이므로 표본평균 \bar{X} 는 정규분포 $N\left(2000, \frac{120^2}{n}\right)$, 즉

$N\left(2000, \left(\frac{120}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{\bar{X} - 2000}{\frac{120}{\sqrt{n}}}$ 으로 놓으면 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 $P\left(\bar{X} \geq 1880 + \frac{144}{\sqrt{n}}\right) \geq 0.97$ 에서

$$P\left(Z \geq \frac{1880 + \frac{144}{\sqrt{n}} - 2000}{\frac{120}{\sqrt{n}}}\right) \geq 0.97$$

$$P(Z \geq 1.2 - \sqrt{n}) \geq 0.97$$

$$P(1.2 - \sqrt{n} \leq Z \leq 0) + P(Z \geq 0) \geq 0.97$$

$$P(1.2 - \sqrt{n} \leq Z \leq 0) \geq 0.47$$

이때

$$P(0 \leq Z \leq 1.88) = P(-1.88 \leq Z \leq 0) = 0.47$$

이므로

$$1.2 - \sqrt{n} \leq -1.88$$

$$\sqrt{n} \geq 3.08 \quad \therefore n \geq 9.4864$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 10이다.

답 10

305

확률변수 X 는 정규분포 $N(m, 30^2)$ 을 따르므로 표본의 크기

가 9인 표본평균 \bar{X} 는 정규분포 $N\left(m, \frac{30^2}{9}\right)$, 즉 $N(m, 10^2)$

을 따른다.

따라서 $Z_A = \frac{X - m}{30}$, $Z_B = \frac{\bar{X} - m}{10}$ 으로 놓으면 Z_A , Z_B 는

모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$G(k) = P(X \leq m + 30k)$$

$$= P\left(Z_A \leq \frac{m + 30k - m}{30}\right)$$

$$= P(Z_A \leq k)$$

..... ㉠

$$H(k) = P(\bar{X} \geq m - 30k)$$

$$= P\left(Z_B \geq \frac{m - 30k - m}{10}\right)$$

$$= P(Z_B \geq -3k)$$

..... ㉡

㉠, ㉡에 각각 $k=0$ 을 대입하면

$$G(0) = P(Z_A \leq 0) = 0.5$$

$$H(0) = P(Z_B \geq 0) = 0.5$$

$$\therefore G(0) = H(0) \text{ (참)}$$

ㄴ. ㉠에 $k=3$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} G(3) &= P(Z_A \leq 3) \\ &= P(Z_A \leq 0) + P(0 \leq Z_A \leq 3) \\ &= 0.5 + P(0 \leq Z_A \leq 3) \end{aligned}$$

㉡에 $k=1$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} H(1) &= P(Z_B \geq -3) \\ &= P(-3 \leq Z_B \leq 0) + P(Z_B \geq 0) \\ &= P(0 \leq Z_B \leq 3) + 0.5 \end{aligned}$$

$$\therefore G(3) = H(1) \text{ (참)}$$

ㄷ. ㉠에 $k=1$ 을 대입하면

$$G(1) = P(Z_A \leq 1)$$

㉡에 $k=-1$ 을 대입하면

$$H(-1) = P(Z_B \geq 3)$$

$$\begin{aligned} \therefore G(1) + H(-1) &= P(Z_A \leq 1) + P(Z_B \geq 3) \\ &= 1 - P(1 < Z < 3) < 1 \text{ (거짓)} \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

22 모평균의 추정

체크 306

모표준편차가 3, 표본의 크기가 144, 표본평균이 50이므로 모평균 m 의 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$50 - 2.58 \times \frac{3}{\sqrt{144}} \leq m \leq 50 + 2.58 \times \frac{3}{\sqrt{144}}$$

$$\therefore 49.355 \leq m \leq 50.645$$

$$\text{답 } 49.355 \leq m \leq 50.645$$

tip

모평균의 신뢰구간

(1) $P(|Z| \leq 1.96) = 0.95$ 일 때, 모평균 m 의 신뢰도 95%의 신뢰구간

$$\Rightarrow \bar{x} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

(2) $P(|Z| \leq 2.58) = 0.99$ 일 때, 모평균 m 의 신뢰도 99%의 신뢰구간

$$\Rightarrow \bar{x} - 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

체크 307

표본의 크기 400은 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 10을 사용할 수 있고, 표본평균이 190이므로

(1) 모평균 m 의 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$190 - 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{400}} \leq m \leq 190 + 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{400}}$$

$$\therefore 189.02 \leq m \leq 190.98$$

(2) 모평균 m 의 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$190 - 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{400}} \leq m \leq 190 + 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{400}}$$

$$\therefore 188.71 \leq m \leq 191.29$$

$$\text{답 (1) } 189.02 \leq m \leq 190.98$$

$$(2) 188.71 \leq m \leq 191.29$$

tip

신뢰구간을 구할 때, 표본의 크기가 충분히 크면 모표준편차와 표본표준편차가 거의 같아지므로 모표준편차가 주어지지 않은 경우 모표준편차 대신 표본표준편차를 사용하여 신뢰구간을 구한다.

체크 308

모표준편차가 15, 표본의 크기가 n , 표본평균이 240이므로 모평균 m 의 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$240 - 2 \times \frac{15}{\sqrt{n}} \leq m \leq 240 + 2 \times \frac{15}{\sqrt{n}}$$

이것이 $235 \leq m \leq 245$ 와 같으므로

$$240 - 2 \times \frac{15}{\sqrt{n}} = 235, \quad 240 + 2 \times \frac{15}{\sqrt{n}} = 245$$

$$2 \times \frac{15}{\sqrt{n}} = 5, \quad \sqrt{n} = 6$$

$$\therefore n = 36$$

답 36

체크 309

표본평균을 \bar{x} 라 하면 모표준편차가 5이므로 모평균 m 의 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 2.58 \times \frac{5}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 2.58 \times \frac{5}{\sqrt{n}}$$

$$\text{이므로 } b - a = 2 \times 2.58 \times \frac{5}{\sqrt{n}} < 6$$

$$\sqrt{n} > 4.3 \quad \therefore n > 18.49$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 19이다.

답 19

체크 310

표본의 크기가 900일 때, 표본평균을 \bar{x}_1 라 하면 모평균 m 의 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\bar{x}_1 - 3 \times \frac{\sigma}{\sqrt{900}} \leq m \leq \bar{x}_1 + 3 \times \frac{\sigma}{\sqrt{900}}$$

$$\text{즉, } \alpha = \bar{x}_1 - 3 \times \frac{\sigma}{\sqrt{900}}, \quad \beta = \bar{x}_1 + 3 \times \frac{\sigma}{\sqrt{900}} \text{ 이므로}$$

$$l = \beta - \alpha = 2 \times 3 \times \frac{\sigma}{\sqrt{900}} = \frac{\sigma}{5}$$

또한 표본의 크기가 n 일 때, 표본평균을 \bar{x}_2 라 하면 모평균 m 의 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x}_2 - 2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x}_2 + 2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

즉, $\gamma = \bar{x}_2 - 2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\delta = \bar{x}_2 + 2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 이므로

$$l' = \delta - \gamma = 2 \times 2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4\sigma}{\sqrt{n}}$$

이때 $l = l'$ 이 성립하므로

$$\frac{\sigma}{5} = \frac{4\sigma}{\sqrt{n}}, \sqrt{n} = 20$$

$$\therefore n = 400$$

답 400

tip

$P(-k \leq Z \leq k) = \frac{\alpha}{100}$ 일 때, 모평균 m 의 신뢰도 $\alpha\%$ 의 신뢰구간의 길이는

$$2k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

체크 311

정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르는 모집단에서

$P(-k \leq Z \leq k) = \frac{\alpha}{100}$ 일 때, 크기가 n 인 표본의 표본평균을

\bar{x}_1 라 하면 모평균 m 의 신뢰도 $\alpha\%$ 의 신뢰구간은

$$\bar{x}_1 - k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x}_1 + k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이므로 $b - a = 2k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

한편, 이 모집단에서 크기가 $\frac{1}{2}n$ 인 표본의 표본평균을 \bar{x}_2 라 하고 모평균 m 의 신뢰도 $\alpha\%$ 의 신뢰구간을 $c \leq m \leq d$ 라 하면

$$\bar{x}_2 - k \frac{\sigma}{\sqrt{\frac{1}{2}n}} \leq m \leq \bar{x}_2 + k \frac{\sigma}{\sqrt{\frac{1}{2}n}}, \text{ 즉}$$

$$\bar{x}_2 - k \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x}_2 + k \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{n}}$$

이므로 $d - c = 2k \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}(b - a)$

따라서 신뢰도가 같을 때, 표본의 크기가 $\frac{1}{2}$ 배가 되면 $b - a$ 의 값은 $\sqrt{2}$ 배가 된다.

$$\therefore t = \sqrt{2}$$

답 $\sqrt{2}$

체크 312

정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르는 모집단에서

$P(-k \leq Z \leq k) = \frac{\alpha}{100}$ 일 때, 크기가 n 인 표본의 표본평균을

\bar{x} 라 하면 모평균 m 의 신뢰도 $\alpha\%$ 의 신뢰구간은

$$\bar{x} - k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이므로 신뢰구간의 길이는

$$\beta - \alpha = 2k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ㄱ. 표본의 크기가 n 으로 일정할 때,

모평균 m 의 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

모평균 m 의 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 ㉠은 ㉡을 포함한다. (참)

ㄴ. α 의 값이 커지면 k 의 값도 커지고, n 의 값이 작아지면

$\frac{1}{\sqrt{n}}$ 의 값은 커지므로 $\beta - \alpha$ 의 값은 커진다. 즉, 신뢰도를 높이면서 표본의 크기를 작게 하면 신뢰구간의 길이는 길어진다. (참)

ㄷ. 표본의 크기가 n 일 때 신뢰구간의 길이는

$$2k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

표본의 크기가 $4n$ 일 때 신뢰구간의 길이는

$$2k \frac{\sigma}{\sqrt{4n}} = k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

따라서 신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기가 4배가 되면 신뢰구간의 길이는 $\frac{1}{2}$ 배가 된다. (거짓)

ㄹ. 신뢰구간의 길이 $2k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 는 모평균 m 의 값과 관계가 없다.

(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

tip

신뢰구간의 길이 $\beta - \alpha = 2k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 에 대하여 다음이 성립한다.

- (1) 표본의 크기가 일정할 때, 신뢰도가 높아지면 신뢰구간의 길이는 길어지고, 신뢰도가 낮아지면 신뢰구간의 길이는 짧아진다.
- (2) 신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기가 커지면 신뢰구간의 길이는 짧아지고, 표본의 크기가 작아지면 신뢰구간의 길이는 길어진다.

연습 문제 11

313

표본의 크기 36이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 15를 사용할 수 있고, 표본평균이 90이므로 모평균 m 의 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$90 - 1.96 \times \frac{15}{\sqrt{36}} \leq m \leq 90 + 1.96 \times \frac{15}{\sqrt{36}}$$

$$\therefore 85.1 \leq m \leq 94.9$$

따라서 신뢰구간에 속하는 정수는

$$86, 87, 88, \dots, 94$$

의 9개이다.

답 9

314

표본평균을 \bar{x} 라 하면 표본의 크기가 100, 모표준편차가 α 이므로 모평균 m 의 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 2 \times \frac{\alpha}{\sqrt{100}} \leq m \leq \bar{x} + 2 \times \frac{\alpha}{\sqrt{100}}$$

이것이 $62 \leq m \leq 68$ 과 같으므로

$$\bar{x} - 2 \times \frac{\alpha}{\sqrt{100}} = 62 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\bar{x} + 2 \times \frac{\alpha}{\sqrt{100}} = 68 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$\bar{x} = 65, \alpha = 15$$

답 15

315

표본의 크기 n 이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 4를 사용할 수 있고, 표본평균이 60이므로 모평균 m 의 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$60 - 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{n}} \leq m \leq 60 + 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{n}}$$

이것이 $59.02 \leq m \leq a$ 와 같으므로

$$60 - 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{n}} = 59.02 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$60 + 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{n}} = a \quad \dots \textcircled{2}$$

①에서

$$1.96 \times \frac{4}{\sqrt{n}} = 0.98 \quad \therefore n = 64$$

이를 ②에 대입하면 $a = 60.98$

$$\therefore n + a = 124.98$$

답 124.98

316

정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 100인 표본의 표본평균을 \bar{x} 라 하면 모평균 m 의 신뢰도 95%의 신뢰구간은

간은

$$\bar{x} - 2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}} \leq m \leq \bar{x} + 2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}}, \text{ 즉}$$

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{5} \leq m \leq \bar{x} + \frac{\sigma}{5}$$

$$\text{이므로 } b - a = \frac{2\sigma}{5}$$

또한 $P(|Z| \leq k) = \frac{a}{100}$ 라 하면 모평균 m 의 신뢰도 $a\%$ 의 신뢰구간은

$$\bar{x} - k \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}} \leq m \leq \bar{x} + k \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}}, \text{ 즉}$$

$$\bar{x} - k \times \frac{\sigma}{10} \leq m \leq \bar{x} + k \times \frac{\sigma}{10}$$

$$\text{이므로 } d - c = k \times \frac{\sigma}{5}$$

이때 $b - a = 2(d - c)$ 에서

$$\frac{2\sigma}{5} = 2 \times k \times \frac{\sigma}{5} \quad \therefore k = 1$$

따라서 $P(|Z| \leq 1) = \frac{a}{100}$ 이고 표준정규분포표에서

$$P(0 \leq Z \leq 1) = 0.34, \text{ 즉 } P(|Z| \leq 1) = 0.68 \text{ 이므로}$$

$$\frac{a}{100} = 0.68$$

$$\therefore a = 68$$

답 68

tip

$P(-k \leq Z \leq k) = \frac{a}{100}$ 일 때, 모평균 m 의 신뢰도 $a\%$ 의 신뢰구간은

$$\bar{x} - k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

317

이 모집단에서 크기가 n 인 표본의 표본평균을 \bar{x}_1 라 하면 모평균 m 의 신뢰도 18.2%의 신뢰구간은

$$\bar{x}_1 - 0.23 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x}_1 + 0.23 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\text{이므로 } b - a = 2 \times 0.23 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

또한 이 모집단에서 크기가 kn 인 표본의 표본평균을 \bar{x}_2 라 하면 모평균 m 의 신뢰도 93.4%의 신뢰구간은

$$\bar{x}_2 - 1.84 \times \frac{\sigma}{\sqrt{kn}} \leq m \leq \bar{x}_2 + 1.84 \times \frac{\sigma}{\sqrt{kn}}$$

$$\text{이므로 } d - c = 2 \times 1.84 \times \frac{\sigma}{\sqrt{kn}}$$

이때 $b - a \leq d - c$ 에서

$$2 \times 0.23 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 2 \times 1.84 \times \frac{\sigma}{\sqrt{kn}}$$

$$\sqrt{k} \leq 8 \quad \therefore k \leq 64$$

따라서 구하는 k 의 최댓값은 64이다.

답 64

318

이 모집단에서 크기가 n 인 표본의 표본평균을 \bar{x} 라 하면

① $n=100$, $\alpha=95$ 이므로 신뢰구간은

$$\bar{x} - 2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}} \leq m \leq \bar{x} + 2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}}$$

$$\therefore b-a = 2 \times 2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}} = \frac{2}{5}\sigma$$

② $n=100$, $\alpha=99$ 이므로 신뢰구간은

$$\bar{x} - 3 \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}} \leq m \leq \bar{x} + 3 \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}}$$

$$\therefore b-a = 2 \times 3 \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}} = \frac{3}{5}\sigma$$

③ $n=400$, $\alpha=95$ 이므로 신뢰구간은

$$\bar{x} - 2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{400}} \leq m \leq \bar{x} + 2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{400}}$$

$$\therefore b-a = 2 \times 2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{400}} = \frac{1}{5}\sigma$$

④ $n=400$, $\alpha=99$ 이므로 신뢰구간은

$$\bar{x} - 3 \times \frac{\sigma}{\sqrt{400}} \leq m \leq \bar{x} + 3 \times \frac{\sigma}{\sqrt{400}}$$

$$\therefore b-a = 2 \times 3 \times \frac{\sigma}{\sqrt{400}} = \frac{3}{10}\sigma$$

⑤ $n=900$, $\alpha=95$ 이므로 신뢰구간은

$$\bar{x} - 2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{900}} \leq m \leq \bar{x} + 2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{900}}$$

$$\therefore b-a = 2 \times 2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{900}} = \frac{2}{15}\sigma$$

따라서 $b-a$ 의 값이 가장 큰 것은 ②이다.

답 ②

319

연간 주행거리를 확률변수 X , 모표준편차를 σ 라 하면 X 는 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따른다.

이때 이 모집단에서 크기가 16인 표본의 표본평균을 \bar{x} 라 하면 모평균 m 의 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

$$\text{이므로 } c = 1.96 \times \frac{\sigma}{4} = 0.49\sigma$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X \leq m+c) &= P(X - m \leq c) \\ &= P\left(\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{c}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{0.49\sigma}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

$$= P(Z \leq 0.49)$$

$$= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 0.49)$$

$$= 0.5 + 0.1879 = 0.6879$$

답 ③

320

표본의 크기를 n , 표본평균을 \bar{x} 라 하면 모표준편차가 100이므로 모평균 m 의 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 2.58 \times \frac{100}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 2.58 \times \frac{100}{\sqrt{n}}$$

$$\text{이므로 } \beta - \alpha = 2 \times 2.58 \times \frac{100}{\sqrt{n}} \leq 80$$

$$\sqrt{n} \geq 6.45 \quad \therefore n \geq 41.6025$$

따라서 적어도 42판의 피자를 조사해야 한다.

답 42

321

정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 n 인 표본의 표본평균을 \bar{x} 라 하면 모평균 m 의 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$-1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m - \bar{x} \leq 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore |m - \bar{x}| \leq 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이때 모평균 m 과 표본평균 \bar{x} 의 차가 $\frac{1}{5}\sigma$ 이하이어야 하므로

$$1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{5}\sigma, \sqrt{n} \geq 9.8$$

$$\therefore n \geq 96.04$$

따라서 n 의 최솟값은 97이다.

답 97

tip

$P(-k \leq Z \leq k) = \frac{\alpha}{100}$ 일 때, 모평균 m 을 신뢰도 $\alpha\%$ 로 추정

하면 모평균 m 과 표본평균 \bar{x} 의 차는

$$|m - \bar{x}| \leq k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

322

정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르는 모집단에서

$P(-k_1 \leq Z \leq k_1) = \frac{\alpha}{100}$ 일 때, 크기가 n_1 인 표본의 표본평균

을 \bar{x}_1 라 하면 모평균 m 의 신뢰도 $\alpha\%$ 의 신뢰구간은

$$\bar{x}_1 - k_1 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}} \leq m \leq \bar{x}_1 + k_1 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$$

$$\text{이므로 } b-a = 2k_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$$

또한 이 모집단에서 $P(-k_2 \leq Z \leq k_2) = \frac{\beta}{100}$ 일 때, 크기가 n_2

인 표본의 표본평균을 \bar{x}_2 라 하면 모평균 m 의 신뢰도 $\beta\%$ 의 신뢰구간은

$$\bar{x}_2 - k_2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}} \leq m \leq \bar{x}_2 + k_2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$$

이므로 $d - c = 2k_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$

ㄱ. 표본의 크기가 같을 때, 신뢰도가 높아지면 신뢰구간의 길이가 길어지므로 $n_1 = n_2$, $\alpha < \beta$ 이면 $b - a < d - c$ 이다.

(거짓)

ㄴ. 신뢰도가 같을 때, 표본의 크기가 커지면 신뢰구간의 길이가 짧아지므로 $n_1 < n_2$, $\alpha = \beta$ 이면 $b - a > d - c$ 이다. (참)

ㄷ. 신뢰도가 같을 때, $n_1 = 9n_2$ 이면

$$b - a = 2k_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}} = 2k_1 \frac{\sigma}{\sqrt{9n_2}} = \frac{2}{3} k_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$$

$$d - c = 2k_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}} = 2k_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$$

이므로 $3(b - a) = d - c$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

