[광운대학교 2023학년도 논술고사 문제해설 - 자연 2교시 1번]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 2교시 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	일대일대응, 대칭이동, 판별식, 미분, 정적분
예상 소요 시간	60분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 일대일대응

함수 $f : X \rightarrow Y$에서 두 조건

(1) 일대일함수이다. (2) 치역과 공역이 같다.

를 모두 만족시킬 때, 함수 f를 일대일대응이라고 한다.

2. 직선 $y=x$에 대한 도형의 대칭이동

방정식 $f(x,y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(y,x)=0$

3. 미분가능한 함수의 극대와 극소의 판정

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서

(1) $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

(2) $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

[1] 두 집합 $A=\{x|x$는 6의 약수$\}$, $B=\{x|x$는 9 이하의 소수$\}$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 집합 A에서 집합 B로의 일대일대응인 함수 $f(x)$는 $x \in A$에 대하여 $x < f(x)$를 만족시킨다. 함수 f의 개수와 $\left(f^{-1} \circ f \circ f^{-1}\right)(5)$의 값을 구하시오. [4점]

(2) 집합 A에서 집합 B로의 일대일대응인 함수 $g(x)$는 $x \in A$에 대하여 $x \leq g(x)$를 만족시킨다. 함수 g의 개수를 구하시오. [6점]

[2] 방정식 $y=-x^2+px+q$가 나타내는 도형과 그 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형이 접할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, p, q는 실수)

(1) p, q에 대한 관계식을 구하시오. [4점]

(2) 점 (p, q)가 그리는 도형과 그 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형이 만나는 점의 개수를 구하시오. [5점]

[3] 다음 물음에 답하시오.

(1) 모든 실수에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 아래 등식이 성립함을 보이시오. (단, a는 실수) [5점]

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$$

(2) 정적분 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2023}x}{\sin^{2023}x+\cos^{2023}x}dx$를 구하시오. [9점]

[4] 함수 $f(x)=-|x-a^2|(x+a^2)+a^4$에 대하여 다음 물음에 답하시오. (단, $a>0$)

(1) 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오. [7점]

(2) $a \le x \le a+2$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 $g(a)$라고 할 때, 함수 $g(a)$를 구하고 함수 $g(a)$의 극값을 구하시오. [10점]

3. 출제 의도

[1] 조건제시법으로 주어진 집합을 원소나열법으로 나타낼 수 있는지를 평가한다. 집합 간에 일대일대응으로 주어진 함수의 조건을 파악하는 능력과 이를 활용하여 함수의 연산과 개수를 설명할 수 있는 능력을 평가한다.

[2] 이차함수의 그래프로 나타내는 도형과 이를 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형 간에 접하는 문제 상황을 이차함수와 직선과의 관계로 파악할 수 있는 능력을 평가한다. 이차함수에 있어서 판별식을 이해하고 활용하여 이차함수와 직선의 위치 관계를 해결해나가는 과정의 능력을 평가한다.

[3] 치환적분법에 이해와 이를 활용하여 간단한 등식의 성립 여부를 설명할 수 있는 능력을 판단한다. 주어진 등식을 활용하여 정적분 값을 계산해나가는 과정을 설명할 수 있는 능력을 평가한다.

[4] 절대값을 포함한 이차함수를 구간을 나누어 식을 다룰 수 있는 능력을 평가한다. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 정적분으로 계산할 수 있는 능력을 평가한다. 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구하고 미분을 활용하여 극값을 계산하고 설명하는 능력을 판단한다.

4. 출제 근거

1. 교육과정 근거

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문1	교육과정	[수학] - (4) 함수 - $\boxed{1}$ 함수
	성취기준	[10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다.
제시문2	교육과정	[수학] - (2) 기하 - $\boxed{4}$ 도형의 이동
	성취기준	[10수학02-09] 원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동의 의미를 이해한다.
제시문3	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용
	성취기준	[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
문항 [1](1)	교육과정	[수학] - (3) 수와 연산 - $\boxed{1}$ 집합 [수학] - (4) 함수 - $\boxed{1}$ 함수
	성취기준	[10수학03-01] 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다. [10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다.
문항 [1](2)	교육과정	[수학] - (3) 수와 연산 - $\boxed{1}$ 집합 [수학] - (4) 함수 - $\boxed{1}$ 함수
	성취기준	[10수학03-01] 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다. [10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다.
문항 [2](1)	교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - $\boxed{5}$ 이차방정식과 이차함수 [수학] - (2) 기하 - $\boxed{4}$ 도형의 이동
	성취기준	[10수학01-10] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다. [10수학02-09] 원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동의 의미를 이해한다.

문항 [2](2)	교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - 5 이차방정식과 이차함수 [수학] - (2) 기하 - 4 도형의 이동
	성취기준	[10수학01-10] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다. [10수학02-09] 원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동의 의미를 이해한다.
문항 [3](1)	교육과정	[미적분] - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법
	성취기준	[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항 [3](2)	교육과정	[미적분] - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법
	성취기준	[12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.
문항 [4](1)	교육과정	[수학Ⅱ] - (3) 적분 - 3 정적분의 활용
	성취기준	[12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
문항 [4](2)	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용
	성취기준	[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

*: 교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	김원경 외	비상	2022년	61, 148, 207
	수학Ⅱ	홍성복 외	지학사	2021년	88
	미적분	이준열 외	천재교육	2021년	147

5. 문항 해설

[1] (1) 주어진 두 집합을 원소나열법으로 나타내고 두 집합 간에 주어진 함수의 조건을 활용하여 일대일대응인 함수를 찾아내고 설명할 수 있는지를 묻는 문항이다. 찾아낸 함수의 정의에 따라 간단한 합성함수 값의 계산 능력을 묻는 문항이다.

(2) (1)과 같은 정의역과 치역에서 (1)과는 조금 다르게 주어진 함수의 조건을 활용하여 일대일대응인 함수를 모두 찾을 수 있는지를 묻는 문항이다.

[2] (1) 이차함수의 그래프로 나타내는 도형과 이를 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형이 서로 접한다는 사실을 이차함수와 직선과의 위치 관계로 파악하여 판별식을 활용할 수 있는지를 묻는 문항이다.

(2) (1)에서 구한 새로운 이차함수의 그래프로 나타나는 도형과 이를 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형이 서로 접한다는 사실을 이차함수와 직선과의 위치 관계로 파악하여 판별식을 활용할 수 있는지를 묻는 문항이다.

[3] (1) 치환적분법을 활용하여 등식이 성립 여부를 계산을 통해 설명할 수 있는지를 묻는 문항이다.

(2) (1)에서 얻은 등식을 활용하고 그 과정에서 삼각함수의 성질을 이용하여 정적분을 계산할 수 있는지를 묻는 문항이다.

[4] (1) 절대값을 포함한 함수에서 구간을 나누어 이차함수를 구할 수 있는지를 묻는다. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 정적분을 활용하여 계산할 수 있는지를 묻는 문항이다.

(2) 변수를 포함한 구간을 조건에 맞게 나누어 조사하여 원하는 함수를 찾을 수 있는지를 묻는다. 미분가능한 함수의 극대와 극소의 판정을 알고 활용할 수 있는지를 묻는 문항이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1](1) 4점	$a < f(a)$ $(a \in A)$를 만족하는 일대일대응을 모두 찾으면	2
	$(f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(5) = 3$의 값을 계산하면	2
[1](2) 6점	$a \le f(a)$ $(a \in A)$를 만족하는 일대일대응의 관계를 모두 찾으면	4
	조건을 만족하는 경우의 수를 모두 찾으면	2
[2](1) 4점	도형이 직선 $y = x$와 접하는 것을 이용해 식 $x = -x^2 + px + q$을 구하거나, 점 A의 좌표 $\left(\frac{p+1}{2}, \frac{p+1}{2}\right)$를 구한 경우	2
	p, q에 대한 관계식 $(1-p)^2 + 4q = 0$이나 $p^2 - 2p - 3 + 4q = 0$을 구한 경우	2
[2](2) 5점	점 (p, q)가 그리는 도형의 방정식 $y = -\frac{1}{4}(1-x)^2$이나 $y = -\frac{1}{4}(x-1)^2 + 1$을 구하면	2
	도형의 방정식을 연립하여 교점에 대한 식을 구하면	2
	두 도형이 만나는 점의 개수를 구하면	1
[3](1) 5점	함수의 변수를 $t = a - x$ 변수의 형태로 치환하면	2
	치환적분법을 이용하여 주어진 등식이 성립함을 보이면	3
[3](2) 9점	(1)의 관계를 이용하여 주어진 함수를 적절한 형태로 변형하면	3
	위의 결과를 이용하여 정적분을 적절히 전개하면	4
	정적분값 $\frac{\pi}{4}$을 구하면	2
[4](1) 7점	함수 $f(x)$를 2개의 구간 $x \ge a^2$과 $x < a^2$으로 나누면	2
	각 구간에서 함수 $f(x)$를 구하면	2
	도형의 넓이 $S = \frac{4}{3}(\sqrt{2} - 1)a^6$를 구하면	3
[4](2) 10점	함수 $f(x)$를 a에 대하여 3개의 구간으로 나누면	4
	각 구간에서 최댓값 함수 $g(a)$를 구하면	3
	함수 $g(a)$의 극솟값을 구하면	3

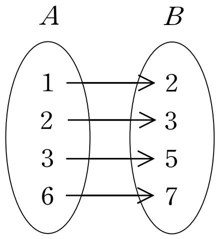
7. 예시 답안

[1]

(1) $a < f(a)$ $(a \in A)$를 만족하는 함수는

오직 $f(6)=7$, $f(3)=5$, $f(2)=3$, $f(1)=2$이므로

함수 f의 개수는 1개이다.



$$(f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(5) = (f^{-1} \circ f)(f^{-1}(5)) = (f^{-1} \circ f)(3)$$
$$= f^{-1}(f(3)) = f^{-1}(5) = 3$$

(다른 풀이)

$f \circ f^{-1} = I$ (항등함수)이므로

$(f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(5) = f^{-1}(5) = 3$

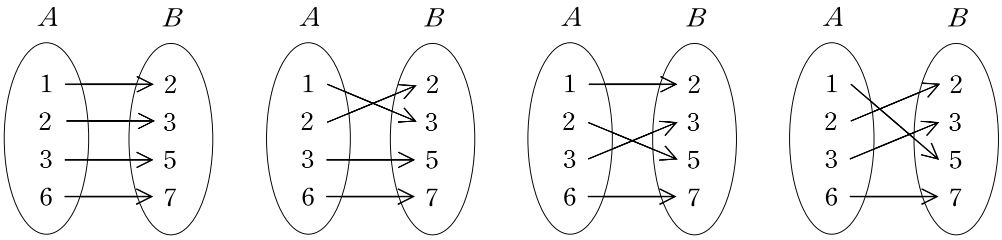
(2) $g(6)=7$

$g(3)=5$ 또는 $g(3)=3$이므로 2가지

$g(3)$의 각각의 경우에 대하여 $g(2)$는 남은 2개 원소 중 하나를 선택할 수 있다.

따라서 함수 g의 개수는 $2 \times 2 = 4$

(참고)



[2]

(1) 방정식 $y=-x^2+px+q$가 나타내는 도형이 직선 $y=x$와 접하는 경우, 방정식 $y=-x^2+px+q$가 나타내는 도형과 이 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형은 서로 접한다.

$x=-x^2+px+q$이라 하면 $x^2+(1-p)x-q=0$의 판별식 $D=0$에서

$(1-p)^2+4q=0$

(다른 풀이)

곡선 $y=-x^2+px+q$의 접선의 기울기가 -1인 점 A가 직선 $y=x$상에 놓이는 경우, 방정식 $y=-x^2+px+q$가 나타내는 도형과 이 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형은 점 A에서 접한다.

$\dfrac{dy}{dx}=-2x+p=-1$에서 $x=\dfrac{p+1}{2}$이므로 점 A의 좌표는 $\left(\dfrac{p+1}{2}, \dfrac{p+1}{2}\right)$

점 A의 좌표를 방정식 $y=-x^2+px+q$에 대입하면

$\frac{p+1}{2}=-\left(\frac{p+1}{2}\right)^2+p\left(\frac{p+1}{2}\right)+q$

이를 정리하면 $p^2-2p-3+4q=0$

(2) 점 (p,q)가 그리는 도형의 방정식은 $y=-\frac{1}{4}(1-x)^2$ …… ①

이 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $x=-\frac{1}{4}(1-y)^2$ …… ②

①과 ②의 교점은 두 함수의 그래프를 고려하면 ①과 $y=x$의 교점과 같다.

$x=-\frac{1}{4}(1-x)^2$ 라고 하면 $x^2+2x+1=(x+1)^2=0$에서 $x=-1$

따라서 두 도형이 만나는 점은 1개이다.

(다른 풀이)

점 (p,q)가 그리는 도형의 방정식은 $y=-\frac{1}{4}(x-1)^2+1$ …… ①

이 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $x=-\frac{1}{4}(y-1)^2+1$ …… ②

①과 ②의 교점은 두 함수의 그래프를 고려하면 ①과 $y=x$의 교점과 같다.

$x=-\frac{1}{4}(x-1)^2+1$ 이라고 하면 $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)=0$이므로 $x=1$ 또는 $x=-3$

따라서 두 도형이 만나는 점은 2개이다.

[3]

(1) $t=a-x$라고 하면 $\frac{dt}{dx}=-1$이고

$x=0$일 때 $t=a$, $x=a$일 때 $t=0$이므로

정적분의 치환적분법을 이용하면

$$\int_0^a f(a-x)dx=-\int_a^0 f(t)dt=\int_0^a f(t)dt=\int_0^a f(x)dx$$

(2) $a=\frac{\pi}{2}$와 $f(x)=\frac{\cos^{2023}x}{\sin^{2023}x+\cos^{2023}x}$ 일 때

(1)의 등식을 이용하면 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2023}x}{\sin^{2023}x+\cos^{2023}x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2023}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin^{2023}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos^{2023}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2023}x}{\cos^{2023}x+\sin^{2023}x}dx$$

위 식으로부터

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2023}x}{\sin^{2023}x+\cos^{2023}x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2023}x}{\sin^{2023}x+\cos^{2023}x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2023}x}{\sin^{2023}x+\cos^{2023}x}dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2023}x+\cos^{2023}x}{\sin^{2023}x+\cos^{2023}x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$$

따라서 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2023}x}{\sin^{2023}x+\cos^{2023}x}dx = \frac{\pi}{4}$

[4]

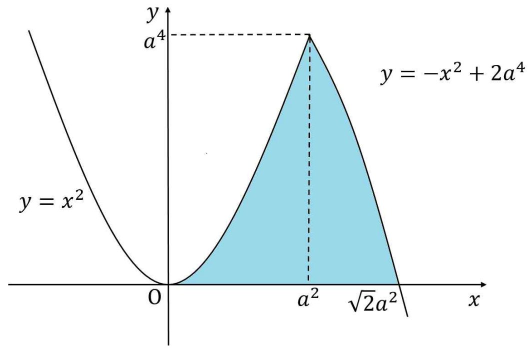
(1) (ⅰ) $x \ge a^2$ 일 때, 함수 $f(x) = -x^2+2a^4$

(ⅱ) $x < a^2$ 일 때, 함수 $f(x) = x^2$

(ⅰ)과 (ⅱ)로부터

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x < a^2) \\ -x^2+2a^4 & (x \ge a^2) \end{cases}$$

곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라고 하면



$$S = \int_0^{a^2} x^2dx + \int_{a^2}^{\sqrt{2}a^2}(-x^2+2a^4)dx$$

$$= \frac{1}{3}a^6 + \left[-\frac{1}{3}x^3+2a^4x\right]_{a^2}^{\sqrt{2}a^2}$$

$$= \left\{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)+2\sqrt{2}-2\right\}a^6 = \frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)a^6$$

(2) (ⅰ) $a+2 < a^2$ 일 때,

$a^2-a-2=(a+1)(a-2)>0$에서 $a<-1$, $a>2$

a는 양수이므로 $a>2$

최댓값 $g(a)=f(a+2)=(a+2)^2$

(ⅱ) $a \le a^2 \le a+2$ 일 때,

$a^2-a=a(a-1)\ge 0$ 이면 $a\le 0$, $a\ge 1$ …… ①

$a^2-a-2=(a+1)(a-2)\le 0$ 이면 $-1\le a\le 2$ …… ②

a는 양수이므로 ①과 ②로부터 $1\le a\le 2$

최댓값 $g(a)=f(a^2)=a^4$

(ⅲ) $a^2<a$ 일 때, $0<a<1$

최댓값 $g(a)=f(a)=2a^4-a^2$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)으로부터

$$g(a)=\begin{cases} 2a^4-a^2 & (0<a<1) \\ a^4 & (1 \leq a \leq 2) \\ (a+2)^2 & (a>2) \end{cases}$$

함수 $g(a)$는 $a>0$에서 연속이고 $a \geq 1$에서 증가하므로

$a \geq 1$에서 함수 $g(a)$는 극값을 갖지 않는다.

$0<a<1$에서 $g'(a)=8a^3-2a=2a(4a^2-1)=0$으로부터 $a=\frac{1}{2}$

$a=\frac{1}{2}$의 좌우에서 $g'(a)$의 부호가 음에서 양으로 변하므로

함수 $g(a)$의 극솟값은 $g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}$

[광운대학교 2023학년도 논술고사 문제해설 - 자연 2교시 2번]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 2교시 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 Ⅰ, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	로그함수, 극한, 이산확률분표, 다항식, 나머지정리
예상 소요 시간	60분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리
좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

2. 이산확률변수의 기댓값
이산확률변수 X의 확률분포가 $\mathrm{P}(X = x_i) = p_i \ (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$일 때, X의 기댓값은

$$\mathrm{E}(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \cdots + x_n p_n$$

3. 나머지정리
x에 대한 다항식 $P(x)$를 일차식 $x - a$로 나누었을 때의 나머지를 R라고 하면

$$R = P(a)$$

[1] 함수 $f(x) = \log_{|a-2|}(x^2 + 2ax + 4a + 5)$에 대하여 다음 물음에 답하시오. (단, a는 실수)

(1) 함수 $f(x)$가 정의되기 위한 실수 a의 값 중 정수를 모두 구하시오. [5점]

(2) $x \geq 0$에서 정의된 두 함수 $g(x) = \log_2(x^2 + 5)$, $h(x) = \sqrt{x}$ 라고 할 때, $(g \circ h)^{-1}(x) > \dfrac{6}{2^x}$ 를 만족하는 x값의 범위를 구하시오. [8점]

[2] 극한값 $\lim_{n \to \infty} n^{\frac{1}{3}}\left\{(n^2+n)^{\frac{1}{3}}-(n^2+1)^{\frac{1}{3}}\right\}$ 을 구하시오. [8점]

[3] 자연수 n에 대하여 $x+y=n$ $(x \geq 0,\ y \geq 0)$를 만족시키고, 점 (x, y)의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점들의 집합을 A_n이라고 하자. 집합 A_n에서 임의로 택한 한 점과 원점과의 거리의 제곱을

확률변수 X_n이라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 집합 A_n에서 임의로 택한 한 점의 x좌표가 k일 때, 이 점과 원점과의 거리의 제곱을 구하시오. [4점]

(2) 확률변수 X_n의 기댓값을 구하시오. [8점]

[4] 모든 실수 x에 대하여 다항식 $f(x)$는 아래 조건을 만족시킨다. 다음 물음에 답하시오.

$$x\{f'(x)+x\}\{f'(x)-x\}=f(x)+px^3+qx^2 \quad (p,\ q\text{는 실수})$$

(1) 위 조건을 만족시키는 일차 이상의 다항식 $f(x)$를 구하고, 이때 실수 p, q의 값 또는 p, q에 대한 관계식을 구하시오. [12점]

(2) $p=0$일 때, (1)에서 구한 각각의 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-2023$으로 나눈 나머지들의 합을 구하시오. [5점]

3. 출제 의도

[1] 로그함수가 성립하기 위해서 밑과 진수 조건을 이해하고 있는지의 여부를 평가하고, 함수의 합성을 통해 지수 함수를 포함한 부등식을 유도하고 계산할 수 있는 문제 해결 능력을 평가한다.

[2] 극한값을 계산하려는 다항식에 곱셈공식을 활용하는 능력을 평가하고 함수의 극한에 대한 성질을 활용하여 극한값을 계산할 수 있는 문제 해결 능력을 평가한다.

[3] 이산확률변수가 가질 수 있는 값을 평면좌표에서 두 점 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 표현할 수 있는 능력을 평가한다. 이를 이용하여 이산확률변수의 기댓값을 계산할 수 있는지를 평가한다.

[4] 다항식의 차수를 비교할 수 있는 능력과 다항식의 사칙연산을 할 수 있는 능력을 평가한다. 이것을 토대로 주어진 조건을 만족시키는 다항식과 그 관계식을 유도할 수 있는 능력을 평가한다. 나머지정리를 활용하는 능력도 함께 평가한다.

4. 출제 근거

1. 교육과정 근거

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문1	교육과정	[수학] - (2) 기하 - 1 평면좌표
	성취기준	[10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
제시문2	교육과정	[확률과통계] - (3) 통계 - 1 확률분포
	성취기준	[12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.
제시문3	교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - 2 나머지정리
	성취기준	[10수학01-03] 나머지정리의 의미를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
문항 [1](1)	교육과정	[수학Ⅰ] - (1) 지수함수와 로그함수 - 2 지수함수와 로그함수
	성취기준	[12수학Ⅰ01-06] 지수함수와 로그함수의 뜻을 안다.
문항 [1](2)	교육과정	[수학Ⅰ] - (1) 지수함수와 로그함수 - 2 지수함수와 로그함수
	성취기준	[12수학Ⅰ01-08] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
문항 [2]	교육과정	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - 2 함수의 극한
	성취기준	[12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.
문항 [3](1)	교육과정	[수학] - (2) 기하 - 1 평면좌표
	성취기준	[10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.

문항 [3](2)	교육과정	[확률과 통계] - (3) 통계 - ① 확률분포
	성취기준	[12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.
문항 [4](1)	교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - ② 나머지정리
	성취기준	[10수학01-02] 항등식의 성질을 이해한다.
문항 [4](2)	교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - ② 나머지정리
	성취기준	[10수학01-03] 나머지정리의 의미를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

*: 교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책 8] "수학과 교육과정"

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	김원경 외	비상	2022년	27, 100
	수학Ⅰ	최부림 외	천재교육	2021년	51
	확률과 통계	황선욱 외	미래엔	2021년	87

5. 문항 해설

[1] (1) 로그함수가 성립하기 위한 밑과 진수 조건에 대한 이해를 묻는 문항이다.
(2) 합성함수를 통해 지수 함수를 포함한 부등식을 유도하고 치환을 통해 이를 해결할 수 있는지를 묻는 문항이다.

[2] 극한값을 계산하고자 하는 다항식을 곱셈공식을 활용하여 다른 식으로 변형시키고, 그 변형된 식에 함수의 극한에 대한 성질을 적용할 수 있는지를 묻는 문항이다.

[3] (1) 평면좌표에서 두 점 사이의 거리를 구할 수 있는지를 묻는 문항이다.
(2) (1)에서 구한 식을 활용하여 이산확률변수의 기댓값을 구할 수 있는지를 묻는 문항이다.

[4] (1) 주어진 조건을 만족시키는 다항식의 차수를 조사하고 그 다항식을 구할 수 있는지와 그 과정에서 관계식을 찾아낼 수 있는지를 묻는 문항이다.
(2) 관계식을 이용하여 다항식을 확정하고 이에 나머지정리를 적용하여 나머지들의 합을 구할 수 있는지를 묻는 문항이다.

6. 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
[1](1) 5점	진수의 조건에서 $-1 < a < 5$를 구하면	2
	밑의 조건에서 $a \neq 1$, $a \neq 2$, $a \neq 3$을 구하면	2
	두 조건을 만족하는 정수 $a = 0$ 또는 $a = 4$를 구하면	1
[1](2) 8점	합성함수 $(g \circ h)(x) = \log_2(x+5)$를 구하면	2
	역함수 $(g \circ h)^{-1}(x) = 2^x - 5$를 구하면	3
	부등식을 풀어 $x > \log_2 6$을 구하면	3
[2] 8점	3차 항등식 $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$을 이용하여 식을 전개하면	3
	극한값 $\lim_{n \to \infty} n^{\frac{1}{3}}\left\{(n^2+n)^{\frac{1}{3}} - (n^2+1)^{\frac{1}{3}}\right\} = \frac{1}{3}$을 구하면	5
[3](1) 4점	점의 좌표 $(k, n-k)$를 구하면	2
	원점과의 거리의 제곱 $2k^2 - 2nk + n^2$을 구하면	2
[3](2) 8점	확률변수 X_n의 확률 $\frac{1}{n+1}$을 구하면	3
	기댓값 $\mathrm{E}(X_n)$의 식을 구하면	2
	기댓값 $\mathrm{E}(X_n) = \frac{n(2n+1)}{3}$을 구하면	3
[4](1) 12점	다항식 $f(x)$의 차수의 조건을 구하면	3
	$f(x)$가 1차식일 때 p, q의 값과 $f(x)$를 구하면	4
	$f(x)$가 2차식일 때 p, q의 관계식과 $f(x)$를 구하면	5
[4](2) 5점	$p = 0$일 때 다항식 $f(x)$를 모두 구하면	2
	나머지정리를 이용하여 나머지들의 합 $\sum_{i=1}^{4} f_i(2023) = 4046$을 구하면	3

7. 예시 답안

[1]

(1) 진수의 조건에서 $x^2+2ax+4a+5>0$이므로

판별식 $D=4a^2-4(4a+5)=4a^2-16a-20=4(a+1)(a-5)<0$에서

$-1<a<5$ …… ①

밑의 조건에서 $|a-2|>0$, $|a-2|\neq 1$이므로 $a\neq 1$, $a\neq 2$, $a\neq 3$ …… ②

①과 ②에서 $a=0$ 또는 $a=4$

(2) $(g\circ h)(x)=g(h(x))=g(\sqrt{x})=\log_2(x+5)$에서

$(g\circ h)^{-1}(x)=2^x-5$

$2^x-5>6\times 2^{-x}$에서 $2^x=X$라 하면

$X^2-5X-6=(X+1)(X-6)>0$이므로 $X<-1$ 또는 $X>6$

$X>0$ 이므로 $X=2^x>6$에서 $x>\log_2 6$

[2]

실수 a,b에 대하여 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$임을 이용하여 극한값을 구하면

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{3}}\left\{(n^2+n)^{\frac{1}{3}}-(n^2+1)^{\frac{1}{3}}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{3}}(n-1)}{(n^2+n)^{\frac{2}{3}}+(n^2+n)^{\frac{1}{3}}(n^2+1)^{\frac{1}{3}}+(n^2+1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3}$$

[3]

(1) $x+y=n$이므로 $x=k$이면 $y=n-k$

따라서 점의 좌표는 $(x,n-k)$

원점에서 점 $(k,n-k)$까지 거리의 제곱은 $k^2+(n-k)^2=2k^2-2nk+n^2$

(2) 집합 A_n의 원소의 개수는 $n+1$이고, 각 점이 선택될 확률은 모두 $\frac{1}{n+1}$로 같으므로

기댓값 $$\mathrm{E}(X_n)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(2k^2-2nk+n^2)=\frac{n^2}{n+1}+\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(2k^2-2nk+n^2)$$

$$=\frac{n^2}{n+1}+\frac{1}{n+1}\left\{2\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-2n\frac{n(n+1)}{2}+n^3\right\}=\frac{n(2n+1)}{3}$$

[4]

(1) $f(x)$를 n차 다항식이라고 하자. (단, $n \geq 1$)

$n \geq 3$이면 조건식 좌변의 차수는 $2n-1$, 우변의 차수는 n으로 좌변과 우변의 차수는 같지않다.

따라서 $f(x)$는 3차 이상의 다항식이 아니다.

(i) $f(x)=ax+b\ (a \neq 0)$라고 하고 조건식에 대입하면

$x(a^2-x^2)=ax+b+px^3+qx^2$

계수를 비교하면

$p=-1$, $q=0$, $a^2=a$, $b=0$

여기서 $a(a-1)=0$이고 $a \neq 0$이므로 $a=1$

따라서 $p=-1$, $q=0$이고 $f(x)=x$

(ii) $f(x)=rx^2+sx+t\ (r \neq 0)$라고 하고 조건식에 대입하면

$(4r^2-1)x^3+4rsx^2+s^2x=px^3+(q+r)x^2+sx+t$

계수를 비교하면

$4r^2-1=p$, $4rs=q+r\ \ s^2=s$, $t=0$

여기서 $s(s-1)=0$이므로 $s=0, 1$

① $s=0$이면

$r=-q\ \ (q \neq 0)$, $p=4q^2-1$

따라서 $p=4q^2-1\ \ (q \neq 0)$, $f(x)=-qx^2$

② $s=1$이면

$r=\dfrac{q}{3}\ \ (q \neq 0)$, $p=\dfrac{4}{9}q^2-1$

따라서 $p=\dfrac{4}{9}q^2-1\ \ (q \neq 0)$, $f(x)=\dfrac{q}{3}x^2+x$

(2) (1)의 결과에 따라

$p=4q^2-1\ \ (q \neq 0)$, $f(x)=-qx^2$ $\cdots\cdots$ ①

$p=\dfrac{4}{9}q^2-1\ \ (q \neq 0)$, $f(x)=\dfrac{q}{3}x^2+x$ $\cdots\cdots$ ②

$p=0$을 대입하면 ①과 ②로부터 각각

$q=\pm\dfrac{1}{2}$, $f_1(x)=-\dfrac{1}{2}x^2$, $f_2(x)=\dfrac{1}{2}x^2$

$q=\pm\dfrac{3}{2}$, $f_3(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x$, $f_4(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+x$

나머지정리를 적용하면 $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} f_i(2023)=4046$