한양대학교

답안지 (자연계)

답안지 바코드
316611

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:030401)	

수험생 유의사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

동전을 던진 횟수를 확률변수 X라 한다.

$\therefore$ 동전을 던진 횟수가 2022 이하일 확률

$= P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + \cdots + P(X=2022)$

H: 앞면 T: 뒷면

1. H로 시작할 때
   1) H-H
   2) H-T-T
   3) H-T-H-T-T

   ⋮

2. T로 시작할 때
   1) T-T
   2) T-H-H
   3) T-H-T-T

   ⋮

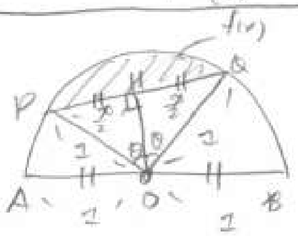
$\therefore P(X=n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + \cdots + P(X=2022)$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2021}$

$= \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2021}\right)}{1-\frac{1}{2}}$

$= 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2021}$



H는 반원의 중심 O에서 $\overline{PQ}$에 내린 수선의 발이다.

$\angle POH = \angle QOH = \theta$ 이다.

$\therefore \frac{x}{2} = \sin\theta, \quad x = 2\sin\theta$

$f(x) = \frac{1}{2} \times (1)^2 \times 2\theta - \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin 2\theta$

$= \theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta$

$f'(x) = (1-\cos 2\theta) \times \frac{d\theta}{dx}$

$\frac{dx}{d\theta} = 2\cos\theta$

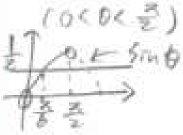
$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{2\cos\theta}$

$= \dfrac{1-\cos 2\theta}{2\cos\theta}$

$\frac{1}{2} = \sin\theta$

$(0<2\theta<\pi)$

$(0<\theta<\frac{\pi}{2})$



$x=1$ 일 때 $\theta = \frac{\pi}{6}$

$\therefore f'(1) = \dfrac{1-\cos\frac{\pi}{3}}{2\cos\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{6}}$

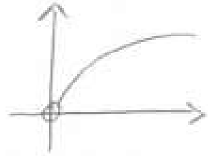
$f(x) = \ln(\ln(x+e))$

$f'(x) = \frac{1}{x+e} \times \frac{1}{\ln(x+e)} > 0 \quad (\because x>0)$

$f''(x) = \dfrac{-\{\ln(x+e) + (x+e)\times\frac{1}{x+e}\}}{\{(x+e)\ln(x+e)\}^2}$

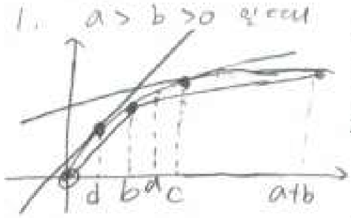
$= \dfrac{-(\ln(x+e)+1)}{\{(x+e)\ln(x+e)\}^2} < 0 \quad (\because x>0)$

$\therefore$



$f(0) = 0$

1. $a > b > 0$ 일 때



$f(a+b) < f(a) + f(b)$

$f(a+b) - f(a) < f(b)$

$\dfrac{f(a+b)-f(a)}{a+b-a} < \dfrac{f(b)-f(0)}{b-0} \quad (b>0)$

$(a<c<a+b) \quad \dfrac{f(a+b)-f(a)}{a+b-a} = f'(c)$

$(0<d<b) \quad \dfrac{f(b)-f(0)}{b-0} = f'(d)$

$f''(x)<0$ 이기 때문에 $f'(x)$는 감소한다.

$\therefore f'(c) < f'(d) \quad (c>d$ 이다$)$

$\therefore f(a+b) < f(a) + f(b)$ 이다.

2. $b > a > 0$ 일 때

위의 경우와 똑같이 적용된다.

3. $0<a=b$

$f(2a) < 2f(a)$

$\dfrac{f(2a)-f(a)}{2a-a} < \dfrac{f(a)-f(0)}{a-0} \quad (a>0)$

$(a<e<2a) \quad \dfrac{f(2a)-f(a)}{2a-a} = f'(e)$

$(0<h<a) \quad \dfrac{f(a)-f(0)}{a-0} = f'(h)$

$f''(x)<0$ 이기 때문에 $f'(x)$는 감소한다

$\therefore f'(e) < f'(h)$ 이다 $(e>h)$

$\therefore$ 양의 실수 a, b에 대하여 부등식

$f(a+b) < f(a) + f(b)$는 항상 성립한다.

한양대학교

답안지 (자연계)

답안지 바코드

311998

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:030401)	

수험생 유의사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

(1) i) 2번에 끝날 확률

(앞,앞), (뒤,뒤)

$2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

ii) 3번에 끝날 확률

(앞,뒤,뒤), (뒤,앞,앞)

$2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

iii) n번에 끝날 확률 (단, $n\le 3000$)

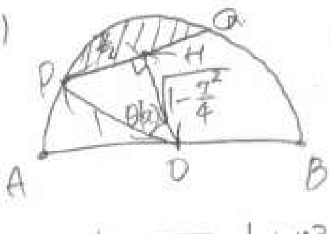
$2\times\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\cdots\times\frac{1}{2}}_{n개}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

따라서 2022번 이내에 끝날 확률은

$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{2021}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2021}\right)}{1-\frac{1}{2}}$

$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2021}$ 이다.

(2)



반원의 중심을 O라 하자

점 O에서 $\overline{PQ}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{PH}^2}$

$=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ 이다.

$\angle POH=\angle QOH=\theta(x)$라 하면

$\sin\theta(x)=\frac{x}{2}$이다

$f(x)$는 부채꼴 POQ의 넓이에서 $\triangle POQ$의 넓이를 뺀 값과 같으므로

$f(x)=\theta(x)-\frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ 임을 알 수 있다.

$f'(x)=\theta'(x)-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}+\frac{x^2}{8\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}$ 이고.

$\sin\theta(x)=\frac{x}{2}$ 였으므로 $\theta'(x)\cos\theta(x)=\frac{1}{2}\cdots$ ① 이고

$\sin\theta(1)=\frac{1}{2}$, $0<2\theta(x)<\pi$ 이므로

$\cos\theta(1)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

①번식에 대입하면 $\theta'(1)=\frac{1}{\sqrt{3}}$임을 알 수 있고

$f'(1)=\theta'(1)-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{4}}+\frac{1}{8\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$ 이다.

(3) $f(x)$는 두 번 미분 가능하므로

$f'(x)=\frac{1}{(x+e)\ln(x+e)}$

$f''(x)=-\frac{\ln(x+e)+1}{\{(x+e)\ln(x+e)\}^2}$ 이므로

$x>0$일 때 $f(x)$는 증가하고 $f'(x)$는 감소함을 알수있다

$f(x)$는 $x\ge 0$에서 연속이고 미분가능하므로

평균값 정리를 만족한다.

i) $a\ge b$

$\frac{f(a+b)-f(a)}{a+b-a}=f'(c_1)$ $(a<c_1<a+b)$

$\frac{f(b)}{b}=f'(c_2)$ $(0<c_2<b)$

$0<c_2<b\le a<c_1$ 이므로 $f'(c_2)>f'(c_1)$ 이고

$\frac{f(a+b)-f(a)}{b}<\frac{f(b)}{b}$ 이므로 $f(a+b)<f(a)+f(b)$가 성립한다.

ii) $a<b$

$\frac{f(a+b)-f(b)}{a+b-b}=f'(c_1)$ $(b<c_1<a+b)$, $\frac{f(a)}{a}=f'(c_2)$ $(0<c_2<a)$

라 하고 (i)과 같은 방법을 이용하면

$\frac{f(a+b)-f(b)}{a}<\frac{f(a)}{a}$ 이므로 $f(a+b)<f(a)+f(b)$가 성립한다