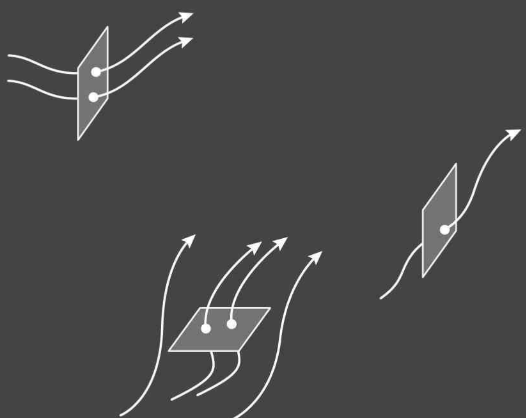
8강

맥스웰 방정식



연습 문제 8.1:

정지해 있는 전기 전하를 생각해 보자. 추가적인 전기장이나 자기장은 없다. 정지틀 성분 (E_x, E_y, E_z)을 써서 표현했을 때 음의 x 방향으로 v의 속도로 움직이는 관측자에게 전기장의 x 성분은 무엇인가? y와 z 성분은 무엇인가? 그에 대응하는 자기장 성분은 무엇인가?

해답:

정지해 있는 전하이므로 자기장 $B_x = B_y = B_z = 0$이고 $F^{\mu\nu}$는 다음과 같이 주어진다.

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & 0 & 0 \\ -E_y & 0 & 0 & 0 \\ -E_z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

또한 $-v$로 움직이는 기준틀의 $L^{\mu}_{\ \nu}$는 다음과 같이 주어진다.

$$L^{\mu}_{\ \nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

※식 8.2: $(F')^{\mu\nu} = L^{\mu}_{\ \sigma} L^{\nu}_{\ \tau} F^{\sigma\tau}$

식 8.2를 따라 $F^{\sigma\tau}$가 0이 아닌 항만 성분별로 계산하면 다

음과 같다.

$$(E')_x = (F')^{01} = L^0{}_\sigma L^1{}_\tau F^{\sigma\tau}$$

$$= L^0{}_0 L^1{}_1 F^{01} + L^0{}_0 L^1{}_2 F^{02} + L^0{}_0 L^1{}_3 F^{03} + L^0{}_1 L^1{}_0 F^{10}$$

$$+ L^0{}_2 L^1{}_0 F^{20} + L^0{}_3 L^1{}_0 F^{30}$$

$$= \gamma^2 E_x - v^2\gamma^2 E_x = (1-v^2)\gamma^2 E_x = E_x$$

$$(E')_y = (F')^{02} = L^0{}_\sigma L^2{}_\tau F^{\sigma\tau}$$

$$= L^0{}_0 L^2{}_1 F^{01} + L^0{}_0 L^2{}_2 F^{02} + L^0{}_0 L^2{}_3 F^{03} + L^0{}_1 L^2{}_0 F^{10}$$

$$+ L^0{}_2 L^2{}_0 F^{20} + L^0{}_3 L^2{}_0 F^{30}$$

$$= \gamma E_y$$

$$(E')_z = (F')^{03} = L^0{}_\sigma L^3{}_\tau F^{\sigma\tau}$$

$$= L^0{}_0 L^3{}_1 F^{01} + L^0{}_0 L^3{}_2 F^{02} + L^0{}_0 L^3{}_3 F^{03} + L^0{}_1 L^3{}_0 F^{10}$$

$$+ L^0{}_2 L^3{}_0 F^{20} + L^0{}_3 L^3{}_0 F^{30}$$

$$= \gamma E_z$$

$$(B')_x = (F')^{23} = L^2{}_\sigma L^3{}_\tau F^{\sigma\tau}$$

$$= L^2{}_0 L^3{}_1 F^{01} + L^2{}_0 L^3{}_2 F^{02} + L^2{}_0 L^3{}_3 F^{03} + L^2{}_1 L^3{}_0 F^{10}$$

$$+ L^2{}_2 L^3{}_0 F^{20} + L^2{}_3 L^3{}_0 F^{30}$$

$$= 0$$

$$(B')_y = (F')^{31} = L^3{}_\sigma L^1{}_\tau F^{\sigma\tau}$$

$$= L^3{}_0 L^1{}_1 F^{01} + L^3{}_0 L^1{}_2 F^{02} + L^3{}_0 L^1{}_3 F^{03} + L^3{}_1 L^1{}_0 F^{10}$$

$$+ L^3{}_2 L^1{}_0 F^{20} + L^3{}_3 L^1{}_0 F^{30}$$

$$= -\gamma v E_z$$

$$(B')_z = (F')^{12} = L^1{}_\sigma L^2{}_\tau F^{\sigma\tau}$$

$$= L^1{}_0 L^2{}_1 F^{01} + L^1{}_0 L^2{}_2 F^{02} + L^1{}_0 L^2{}_3 F^{03} + L^1{}_1 L^2{}_0 F^{10}$$

$$+ L^1{}_2 L^2{}_0 F^{20} + L^1{}_3 L^2{}_0 F^{30}$$

$$= \gamma v E_y.$$

연습 문제 8.2:
기차가 지나갈 때 아트는 기차역에 앉아 있다. 레니의 장 성분을 이용해 표현했을 때 아트가 관측한 E의 x 성분은 무엇인가? y와 z 성분은 무엇인가? 아트가 보는 자기장의 성분들은 무엇인가?

해답:
(본문 105쪽, 2강 '속도와 4-벡터'에서)

"아트가 기차역에 정지해 있다고 생각해 보자. 레니를 태운 기차가 광속의 90퍼센트로 아트를 지나 쌩하고 지나간다. 이들의 상대 속도는 $0.9c$이다. (중략)"

레니의 장 성분을 (E_x, E_y, E_z), 아트가 관측한 장 성분을 $((E')_x, (E')_y, (E')_z)$로 표현하자. 연습 문제 8.1의 결과에 $v = 0.9$, $\gamma \approx 0.294$를 대입하면 다음과 같다.

$$(E')_x = E_x$$

$$(E')_y = \gamma E_y \approx 0.294 E_y$$

$$(E')_z = \gamma E_z \approx 0.294 E_z$$

$$(B')_x = 0$$

$$(B')_y = -\gamma v E_z \approx -0.265 E_z$$

$$(B')_z = \gamma v E_y \approx 0.265 E_y.$$

연습 문제 8.3:
아인슈타인의 예에서 모든 전기장 및 자기장 성분을 전자 정지틀에서 계산하라.

해답:
아인슈타인의 예에서 B_z를 제외하고 나머지 성분은 0이므로 $F^{\mu\nu}$는 다음과 같이 주어진다.

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_z & 0 \\ 0 & -B_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

또한 v로 움직이는 전자 기준틀의 $L^{\mu}_{\ \nu}$는 다음과 같이 주어진다.

$$L^{\mu}_{\ \nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

※식 8.2: $(F')^{\mu\nu} = L^{\mu}_{\ \sigma} L^{\nu}_{\ \tau} F^{\sigma\tau}$

식 8.2를 따라 $F^{\sigma\tau}$가 0이 아닌 항만 성분별로 계산하면 다음과 같다.

$$(E')_x = (F')^{01} = L^0{}_\sigma L^1{}_\tau F^{\sigma\tau}$$

$$= L^0{}_1 L^1{}_2 F^{12} + L^0{}_2 L^1{}_1 F^{21}$$

$$= 0$$

$$(E')_y = (F')^{02} = L^0{}_\sigma L^2{}_\tau F^{\sigma\tau}$$

$$= L^0{}_1 L^2{}_2 F^{12} + L^0{}_2 L^2{}_1 F^{21}$$

$$= - v\gamma B_z$$

$$(E')_z = (F')^{03} = L^0{}_\sigma L^3{}_\tau F^{\sigma\tau}$$

$$= L^0{}_1 L^3{}_2 F^{12} + L^0{}_2 L^3{}_1 F^{21}$$

$$= 0$$

$$(B')_x = (F')^{23} = L^2{}_\sigma L^3{}_\tau F^{\sigma\tau}$$

$$= L^2{}_1 L^3{}_2 F^{12} + L^2{}_2 L^3{}_1 F^{21}$$

$$= 0$$

$$(B')_y = (F')^{31} = L^3{}_\sigma L^1{}_\tau F^{\sigma\tau}$$

$$= L^3{}_1 L^1{}_2 F^{12} + L^3{}_2 L^1{}_1 F^{21}$$

$$= 0$$

$$(B')_z = (F')^{12} = L^1{}_\sigma L^2{}_\tau F^{\sigma\tau}$$

$$= L^1{}_1 L^2{}_2 F^{12} + L^1{}_2 L^2{}_1 F^{21}$$

$$= \gamma B_z.$$

연습 문제 8.4:

표 8.1에서 맥스웰 방정식의 두 번째 그룹과 8.2.1절의 벡터 항등식 2개를 이용해 연속 방정식을 유도하라.

※연속 방정식: $\dfrac{\partial \rho}{\partial t}+\overrightarrow{\nabla}\cdot\vec{j}=0$

※표 8.1의 두 번째 그룹

(a) $\overrightarrow{\nabla}\cdot E=\rho$

(b) $\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{B}-\dfrac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{E}=\vec{j}$

※8.2.1절의 벡터 항등식 2개

(c) $\overrightarrow{\nabla}\cdot(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A})=0$

(d) $\overrightarrow{\nabla}\times(\overrightarrow{\nabla}S)=0$

해답:

먼저 식 (a)의 양변을 시간에 대해 미분하고, 좌변과 우변을 바꾼다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{E}).$$

이때 우변의 시간 미분은 전기장의 발산과 순서를 바꿀 수 있다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{E})=\overrightarrow{\nabla}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}.$$

식 (b)를 우변에 대입하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \overrightarrow{\nabla}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} = \overrightarrow{\nabla}\cdot(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{B} - \vec{j}).$$

식 (c)를 이용하면 $\overrightarrow{\nabla}\cdot(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{B}) = 0$이므로,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \overrightarrow{\nabla}\cdot(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{B} - \vec{j}) = -\overrightarrow{\nabla}\cdot\vec{j}.$$

우변의 식을 좌변으로 넘기면 원하는 연속 방정식을 얻는다.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla}\cdot\vec{j} = 0.$$