

## 2022학년도 모의 논술고사 (자연계열)

### 1. 출제문제

※ <문제 1>에서부터 <문제 4>까지 총 4개의 문제가 있고, 각 문제마다 3개의 세부 문항이 있습니다. 답안지의 지정된 양식 안에 각 세부 문항 별로 해당 문항 번호를 쓰고 답을 작성하십시오. 수식과 논리를 명확히 전개하고 근거와 과정을 제시하십시오.

(시험 시간: 100분, 답안 분량: 지정된 답안 양식 내 작성)

**문제 1**  $N(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \times \sin(\theta x) \times \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta x\right)$ 일 때, 다음 질문에 답하십시오. [총25점]

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{N(x)}{x}$ 를 구하십시오. [7점]

(2)  $\theta = \frac{\pi}{4}$ 일 때, 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} |N(n)|$ 의 합을 구하십시오. [8점]

(3)  $\theta = \frac{\pi}{8}$ 일 때, 급수  $\sum_{n=1}^{20} \log_2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \cos(2\theta n) \times N(n)\right)$ 의 합을 구하십시오. [10점]

**문제 2** 주어진 3차 함수  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 는 다음 조건을 만족한다.

가. 모든 실수  $x$ 에 대해  $f(-x) = -f(x)$

나.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 8$

질문에 답하십시오. [총25점]

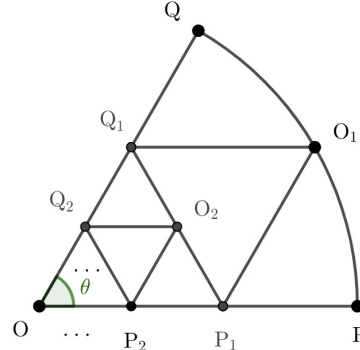
(1)  $f(x)$ 를 구하십시오. [5점]

(2)  $y = f(x)$ 와  $y = 2x^2 + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만날  $k$ 의 조건을 찾고, 이 중  $k < 0$ 인 경우에 이 두 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하십시오. [10점]

(3) 직선  $y = x$ 와 평행한 직선 중 곡선  $y = f(x)$ 와 접하는 두 직선과, 직선  $y = -x$ 와 평행한 직선 중 곡선  $y = f(x)$ 와 접하는 두 직선으로 둘러싸인 직사각형의 넓이를 구하십시오. [10점]

**문제 3** 다음 질문에 답하십시오. [총25점]

오른쪽 그림과 같이 반지름이  $a$ 이고 중심각이  $\theta$ 인 부채꼴  $POQ$ 에 내접하는 정삼각형  $\triangle O_1P_1Q_1$ 의 꼭지점 중 호  $PQ$ 의 중점을  $O_1$ , 선분  $OP$  위의 점을  $P_1$ , 선분  $OQ$  위의 점을  $Q_1$ 이라 하자. 그리고 삼각형  $\triangle OP_1Q_1$ 에 내접하는 정삼각형  $\triangle O_2P_2Q_2$ 의 꼭지점 중 선분  $P_1Q_1$ 의 중점을  $O_2$ , 선분  $OP_1$  위의 점을  $P_2$ , 선분  $OQ_1$  위의 점을  $Q_2$ 라 하자. 이러한 작업은 무한히 반복할 수 있다. (단,  $a > 0$ 이고  $0 < \theta < \pi$ 이다).



- (1) 자연수  $n$ 에 대하여 정삼각형  $\triangle O_nP_nQ_n$ 의 한 변의 길이를  $r_n$ 이라 할 때,  $r_1, r_2$ 의 값을 구하십시오. [7점]
- (2) 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ 의 합은 각  $\theta$ 와 상관없이 일정함을 보이시오. [8점]
- (3) 자연수  $n$ 에 대하여 정삼각형  $\triangle O_nP_nQ_n$ 의 넓이  $A_n$ 의 합  $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 을 구하고 이 값은  $\frac{a^2}{\sqrt{3}}$ 보다 작음을 보이시오. [10점]

**문제 4** 다음 질문에 답하십시오. [총25점]

- (1)  $f(x) = \log_2 x, g(x) = \log_4 x$ 이고  $n \in \{x \mid 1 \leq x \leq 10 \text{인 자연수}\}$ 에 대하여 집합  $A_n$ 을  $A_n = \{k \mid g(n) \leq k \leq f(n) \text{인 정수}\}$ 으로 정의할 때,  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{10}$ 의 원소 개수를 구하십시오. [7점]
- (2)  $N_k$ 를  $k \log_2 2$ 가 자연수가 되는 2보다 크거나 같은 자연수  $n$ 의 개수라 할 때,  $1 \leq k \leq 10$ 인 각각의 자연수  $k$ 에 대하여  $N_k$ 를 구하십시오. [10점]
- (3) 위 (2)의  $N_k$ 에 대하여  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot N_2^{k+1}}$ 의 값을 구하십시오. [8점]