531 Project Hyper

정답과 풀이

수학 Ⅱ

Speed Check • 빠른 정답 체크 •

I 함수의 극한과 연속

01 함수의 극한

| 개념 & 대표 유형 짚어보기 | 본문 08 ~ 09쪽

01 ③ 02 2 03 $\frac{1}{2}$ 04 ④ 05 ④ 06 14
07 11 08 ⑤ 09 2

| 심화 유형 도전하기 | 본문 10 ~ 11쪽

01 ② 02 ④ 03 28 04 ④ 05 ③ 06 320

02 함수의 연속

| 개념 & 대표 유형 짚어보기 | 본문 12 ~ 13쪽

01 ⑤ 02 ④ 03 ① 04 ⑤ 05 ② 06 14
07 ④ 08 ① 09 ③

| 심화 유형 도전하기 | 본문 14 ~ 15쪽

01 ④ 02 ③ 03 ③ 04 ④ 05 ② 06 ④

II 미분

01 미분계수와 도함수

| 개념 & 대표 유형 짚어보기 | 본문 18 ~ 19쪽

01 $\frac{1}{2}$ 02 ① 03 ② 04 ① 05 ⑤ 06 40
07 72 08 ② 09 ①

| 심화 유형 도전하기 | 본문 20 ~ 21쪽

01 ① 02 ④ 03 13 04 ③ 05 ④ 06 8

02 도함수의 활용 (1)

| 개념 & 대표 유형 짚어보기 | 본문 22 ~ 23쪽

01 ② 02 ① 03 ⑤ 04 ④ 05 ④ 06 ④
07 ② 08 ③ 09 ④

| 심화 유형 도전하기 | 본문 24 ~ 26쪽

01 ④ 02 30 03 ② 04 484 05 ③ 06 ②
07 ③ 08 ⑤ 09 ⑤

03 도함수의 활용 (2)

| 개념 & 대표 유형 짚어보기 | 본문 27 ~ 28쪽

01 ⑤ 02 ① 03 3 04 ② 05 ③ 06 ③
07 ③

| 심화 유형 도전하기 | 본문 29 ~ 31쪽

01 ② 02 3 03 15 04 ① 05 ④ 06 ④
07 ② 08 28 09 ⑤

04 도함수의 활용 (3)

| 개념 & 대표 유형 짚어보기 | 본문 32 ~ 33쪽

01 ① 02 ③ 03 ① 04 7 05 ③ 06 ③
07 71

| 심화 유형 도전하기 | 본문 34 ~ 35쪽

01 21 02 19 03 ③ 04 ⑤ 05 30 06 ③

III 적분

01 부정적분과 정적분

| 개념 & 대표 유형 짚어보기 | 본문 38 ~ 40쪽

01 23 02 -4 03 4 04 ② 05 ④ 06 8
07 ② 08 17 09 ③ 10 ③ 11 16 12 ⑤

| 심화 유형 도전하기 | 본문 41 ~ 43쪽

01 ③ 02 ② 03 ④ 04 17 05 ⑤ 06 ⑤
07 54 08 20 09 43

02 정적분의 활용

| 개념 & 대표 유형 짚어보기 | 본문 44 ~ 45쪽

01 ③ 02 ③ 03 18 04 ② 05 ② 06 78
07 ③

| 심화 유형 도전하기 | 본문 46 ~ 47쪽

01 20 02 ① 03 ② 04 10 05 ① 06 1

Ⅰ. 함수의 극한과 연속

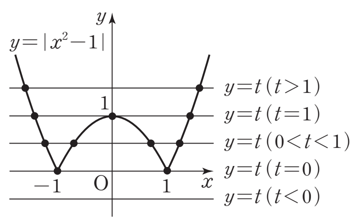
01 함수의 극한

개념 & 대표 유형 짚어보기 본문 08 ~ 09쪽

01 ③ **02** 2 **03** $\frac{1}{2}$ **04** ④ **05** ④ **06** 14
07 11 **08** ⑤ **09** 2

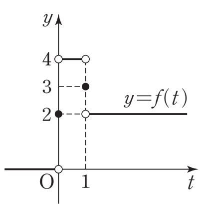
01

함수 $y=|x^2-1|$의 그래프와 직선 $y=t$는 다음 그림과 같다.



이때, $f(t)$는 함수 $y=|x^2-1|$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수이므로

$$f(t)=\begin{cases} 0 & (t<0) \\ 2 & (t=0) \\ 4 & (0<t<1) \\ 3 & (t=1) \\ 2 & (t>1) \end{cases}$$



$\therefore \lim\limits_{t\to 1-} f(t)+f(1)+\lim\limits_{t\to 1+} f(t)$
$=4+3+2=9$ 답 ③

02

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-x}=3$에서

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 1}\left\{\frac{f(x)}{x-1}\times\frac{1}{x}\right\}=3$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=3$ …… ㉠

㉠에서 극한값이 존재하고, $x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

$\therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$

$f(x)=t$로 놓으면 $x\to 1$일 때 $t\to 0$이므로

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(f(x))}{x^3-1}$
$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(f(x))}{(x-1)(x^2+x+1)}$
$=\lim\limits_{x\to 1}\left\{\frac{f(f(x))}{f(x)}\times\frac{f(x)}{x-1}\times\frac{1}{x^2+x+1}\right\}$
$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(f(x))}{f(x)}\times\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}\times\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x^2+x+1}$
$=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}\times\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}\times\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x^2+x+1}$
$=2\times 3\times\frac{1}{3}=2$ 답 2

03

$x>1$에서 $x-1>0$이므로 주어진 부등식의 각 변을 $x-1$로 나누면

$$\frac{x^2-1}{(x-1)(2x+1)}<\frac{f(x)}{x-1}<\frac{x^3+x^2-x-1}{(x-1)(2x^2+1)}$$

이때,

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{(x-1)(2x+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(2x+1)}$
$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x+1}$
$=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2-x-1}{(x-1)(2x^2+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x+1)^2}{(x-1)(2x^2+1)}$
$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{2x^2+1}$
$=\frac{1}{2}$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x-1}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

04

ㄱ. $g(x)=t$로 놓으면 $x\to -1+$일 때 $t=2$, $x\to -1-$일 때 $t=1$이므로
$\lim\limits_{x\to -1+} f(g(x))=f(2)=2$,
$\lim\limits_{x\to -1-} f(g(x))=f(1)=2$
$\therefore \lim\limits_{x\to -1} f(g(x))=2$ (참)

ㄴ. $g(x)=t$로 놓으면 $x\to 0+$일 때 $t\to 1+$, $x\to 0-$일 때 $t=2$이므로
$\lim\limits_{x\to 0+} f(g(x))=\lim\limits_{t\to 1+} f(t)=1$,
$\lim\limits_{x\to 0-} f(g(x))=f(2)=2$
즉, 우극한과 좌극한이 다르므로 극한값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\to 1+$일 때 $t\to 1+$, $x\to 1-$일 때 $t\to 0+$이므로
$\lim\limits_{x\to 1+} g(f(x))=\lim\limits_{t\to 1+} g(t)=1$,
$\lim\limits_{x\to 1-} g(f(x))=\lim\limits_{t\to 0+} g(t)=1$
$\therefore \lim\limits_{x\to 1} g(f(x))=1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

05

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$에서 극한값이 존재하고, $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$이므로 $f(0)=0$ …… ㉠

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=-1$에서 극한값이 존재하고, $x\to-1$일 때
(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to-1}f(x)=0$이므로 $f(-1)=0$ …… ㉡
㉠, ㉡에 의하여 다항식 $f(x)$는 x, $x+1$을 인수로 갖는다.
$f(x)=x(x+1)Q(x)$라 하면
$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$이므로 $Q(0)=2$
$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=-1$이므로 $-Q(-1)=-1$ $\therefore Q(-1)=1$
$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4+2x+1}=3$에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 3인 사차함수이므로
$Q(x)=3x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$Q(0)=2$에서 $b=2$ …… ㉢
$Q(-1)=1$에서 $3-a+b=1$ …… ㉣
㉢을 ㉣에 대입하면 $a=4$
따라서 $Q(x)=3x^2+4x+2$이므로
$f(x)=x(x+1)(3x^2+4x+2)$
$$\therefore \lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}x(x+1)(3x^2+4x+2)$$
$$=1\times2\times(3+4+2)=18$$
답 ④

06

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x(x-1)}=3$에서 극한값이 존재하고, $x\to0$일 때
(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to0}f(x)=0$이므로 $f(0)=0$ …… ㉠
$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x(x-1)}=6$에서 극한값이 존재하고, $x\to1$일 때
(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-1\}=0$이므로 $f(1)-1=0$
$\therefore f(1)=1$ …… ㉡
㉠, ㉡에 의하여
$f(x)-x=x(x-1)(ax+b)$ (a, b는 상수)라 할 수 있으므로
$f(x)=x(x-1)(ax+b)+x$를 주어진 식에 각각 대입하면
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x(x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{x(x-1)(ax+b)+x}{x(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(x-1)(ax+b)+1}{x-1}$$
$$=\frac{-b+1}{-1}=3$$
$\therefore b=4$ …… ㉢
$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)(ax+b)+x-1}{x(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x(ax+b)+1}{x}$$
$$=a+b+1=6$$
$\therefore a+b=5$ …… ㉣
㉢을 ㉣에 대입하면 $a=1$
따라서 $f(x)=x(x-1)(x+4)+x$이므로
$f(2)=2\times(2-1)\times(2+4)+2=14$ 답 14

07

조건 (나)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=1$이므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이고, 조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 $f(x)$의 홀수차항의 계수는 0이다.
따라서 $f(x)=x^2+a$ (a는 상수)라 할 수 있다.
방정식 $f(x)=2x+1$, 즉 이차방정식 $x^2-2x+a-1=0$이 단 하나의 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-(a-1)=2-a=0$ $\therefore a=2$
따라서 $f(x)=x^2+2$이므로
$f(3)=3^2+2=11$ 답 11

08

점 $P(t, \sqrt{t})$에 대하여 $\overline{OP}=\sqrt{t^2+t}$
$\overline{OP}=\overline{OQ}$이므로 점 Q의 좌표는 $(0, \sqrt{t^2+t})$
직선 PQ의 방정식은
$y-\sqrt{t^2+t}=\frac{\sqrt{t}-\sqrt{t^2+t}}{t}x$
따라서 점 R의 x좌표는 $-\frac{t\sqrt{t^2+t}}{\sqrt{t}-\sqrt{t^2+t}}$이므로
$\overline{OR}=\frac{t\sqrt{t^2+t}}{\sqrt{t^2+t}-\sqrt{t}}$
$$\therefore \lim_{t\to0+}\overline{OR}=\lim_{t\to0+}\frac{t\sqrt{t^2+t}}{\sqrt{t^2+t}-\sqrt{t}}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{t\sqrt{t^2+t}(\sqrt{t^2+t}+\sqrt{t})}{(t^2+t)-t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{t^2+t}(\sqrt{t^2+t}+\sqrt{t})}{t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\left(\frac{\sqrt{t^2+t}}{\sqrt{t}}\times\frac{\sqrt{t^2+t}+\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right)$$
$$=\lim_{t\to0+}\sqrt{t+1}\,(\sqrt{t+1}+1)$$
$$=1\times(1+1)=2$$
답 ⑤

09

점 $C(0, 1)$이고, 점 $P(a, 1-a^2)(0<a<1)$에 대하여 직선 CP의 방정식은
$y=\frac{1-a^2-1}{a-0}x+1$ $\therefore y=-ax+1$
따라서 점 Q의 좌표는 $\left(\frac{1}{a}, 0\right)$
또한 점 $A(-1, 0)$이므로 직선 AP의 방정식은
$y=\frac{1-a^2-0}{a+1}(x+1)$ $\therefore y=(1-a)(x+1)$
$x=\frac{1}{a}$일 때, $y=(1-a)\left(\frac{1}{a}+1\right)=\frac{1-a^2}{a}$이므로 점 R의 좌표는 $\left(\frac{1}{a}, \frac{1-a^2}{a}\right)$
한편, 점 $B(1, 0)$이므로 $\overline{BQ}=\frac{1}{a}-1$

또한 $\overline{\mathrm{QR}}=\dfrac{1-a^2}{a}$이므로

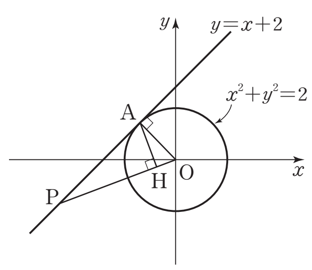
$$\lim_{a\to1-}\frac{\overline{\mathrm{QR}}}{\overline{\mathrm{BQ}}}=\lim_{a\to1-}\frac{\frac{1-a^2}{a}}{\frac{1}{a}-1}$$
$$=\lim_{a\to1-}\frac{1-a^2}{1-a}$$
$$=\lim_{a\to1-}\frac{(1-a)(1+a)}{1-a}$$
$$=\lim_{a\to1-}(1+a)=2$$

답 2

심화 유형 도전하기 본문 10 ~ 11쪽

01 ② **02** ④ **03** 28 **04** ④ **05** ③ **06** 320

01



$x^2+y^2=2$에 $y=x+2$를 대입하면

$x^2+(x+2)^2=2$, $2x^2+4x+2=0$

$(x+1)^2=0$ $\quad\therefore x=-1$

따라서 점 A의 좌표는 $(-1, 1)$이다.

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(t+1)^2+(t+1)^2}=-\sqrt{2}(t+1)$ $(\because t<-1)$

삼각형 OAP의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\{-\sqrt{2}(t+1)\}=-(t+1)$

한편, $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+(t+2)^2}=\sqrt{2t^2+4t+4}$

이때, 삼각형 OAP와 삼각형 AHP는 닮음이고 닮음비는

$\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{2t^2+4t+4}:\{-\sqrt{2}(t+1)\}$

이므로 삼각형 OAP와 삼각형 AHP의 넓이의 비는

$(2t^2+4t+4):2(t+1)^2$

$$\therefore S(t)=-(t+1)\times\frac{2(t+1)^2}{2t^2+4t+4}$$
$$=\frac{-2(t+1)^3}{2t^2+4t+4}$$
$$\therefore \lim_{t\to-1-}\frac{S(t)}{(t+1)^3}=\lim_{t\to-1-}\frac{-2(t+1)^3}{(t+1)^3(2t^2+4t+4)}$$
$$=\lim_{t\to-1-}\frac{-2}{2t^2+4t+4}$$
$$=\frac{-2}{2}=-1$$

답 ②

02

조건 (나)에서 $n=1$일 때 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=0$이고, $g(1)=0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=0$이어야 한다.

따라서 $f(x)=(x-1)p(x)$, $g(x)=(x-1)q(x)$ …… ㉠

($p(x)$, $q(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수)

로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)p(x)}{(x-1)q(x)}=\lim_{x\to1}\frac{p(x)}{q(x)}=0$$

에서

$$p(1)=\lim_{x\to1}p(x)=\lim_{x\to1}\left\{\frac{p(x)}{q(x)}\times q(x)\right\}=0\times q(1)=0 \quad\cdots\cdots ㉡$$

또한 조건 (나)에서 $n=2$일 때, $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{g(x)}=0$이므로

$$f(2)=\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\times g(x)\right\}=0\times g(2)=0 \quad\cdots\cdots ㉢$$

㉠, ㉡, ㉢에서 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$는

$f(x)=(x-1)^2(x-2)$

조건 (나)에서 $n=3$일 때, $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{g(x)}=2$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{(x-1)^2(x-2)}{(x-1)q(x)}=\frac{2}{q(3)}=2$에서 $q(3)=1$

$q(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$q(3)=9+3a+b=1$ $\quad\therefore 3a+b=-8$ …… ㉣

조건 (가)에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-g(x)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^2(x-2)-(x-1)(x^2+ax+b)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)\{-(3+a)x+(2-b)\}}{x^2}$$
$$=-(3+a)=4$$

이므로 $a=-7$ …… ㉤

㉤을 ㉣에 대입하면 $b=13$

$\therefore g(x)=(x-1)(x^2-7x+13)$

$\therefore (f\circ g)(2)=f(g(2))=f(3)=4$

답 ④

03

삼차함수 $f(x)$의 삼차항의 계수를 a라 하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-(x-1)(x^2-1)}{f(x)+(x-1)(x^2-1)}=\frac{a-1}{a+1}=\frac{1}{3}$$

에서 $3a-3=a+1$ $\quad\therefore a=2$

한편, $f(1)\neq0$이면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-(x-1)(x^2-1)}{f(x)+(x-1)(x^2-1)}=\frac{f(1)}{f(1)}=1\neq\frac{1}{5}$$

이므로 $f(1)=0$이다.

따라서

$f(x)=(x-1)g(x)$ ($g(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수)

로 놓을 수 있다.

이때,

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-(x-1)(x^2-1)}{f(x)+(x-1)(x^2-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)g(x)-(x-1)(x^2-1)}{(x-1)g(x)+(x-1)(x^2-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-(x^2-1)}{g(x)+(x^2-1)}=\frac{1}{5}$$
에서 $g(1)\neq0$이면
$$\lim_{x\to1}\frac{g(x)-(x^2-1)}{g(x)+(x^2-1)}=\frac{g(1)}{g(1)}=1\neq\frac{1}{5}$$
이므로 $g(1)=0$이다.
따라서 $g(x)=(x-1)(2x-b)$ (b는 상수)로 놓을 수 있다.
이때,
$$\lim_{x\to1}\frac{g(x)-(x^2-1)}{g(x)+(x^2-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x-b)-(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x-b)+(x-1)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(2x-b)-(x+1)}{(2x-b)+(x+1)}$$
$$=\frac{-b}{4-b}=\frac{1}{5}$$
에서 $-5b=4-b$, $b=-1$
따라서 $g(x)=(x-1)(2x+1)$이므로
$f(x)=(x-1)^2(2x+1)$
$\therefore f(3)=2^2\times7=28$

답 28

04

$x\geq a$일 때
$$f(x)=\frac{a}{2}\{(x-a)+(x-a)\}+\frac{1}{a}\{(x-a)-(x-a)\}$$
$$=a(x-a) \quad \cdots\cdots ㉠$$
$x<a$일 때
$$f(x)=\frac{a}{2}\{(x-a)-(x-a)\}+\frac{1}{a}\{(x-a)+(x-a)\}$$
$$=\frac{2}{a}(x-a) \quad \cdots\cdots ㉡$$
(i) $h\to0+$일 때

㉠에서 $f(a+h)=a(a+h-a)=ah$,

㉡에서 $f(a-h)=\frac{2}{a}(a-h-a)=-\frac{2h}{a}$

이므로
$$\lim_{h\to0+}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{ah+\frac{2h}{a}}{h}=a+\frac{2}{a}$$
(ii) $h\to0-$일 때

㉡에서 $f(a+h)=\frac{2}{a}(a+h-a)=\frac{2h}{a}$,

㉠에서 $f(a-h)=a(a-h-a)=-ah$

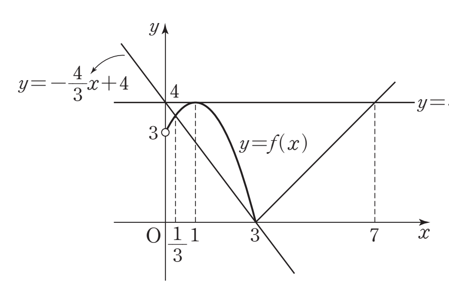
이므로
$$\lim_{h\to0-}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{\frac{2h}{a}+ah}{h}=\frac{2}{a}+a$$
(i), (ii)에서
$$g(a)=\left(a+\frac{2}{a}\right)+\left(\frac{2}{a}+a\right)=2\left(a+\frac{2}{a}\right)$$
a는 양의 실수이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$$a+\frac{2}{a}\geq2\sqrt{a\times\frac{2}{a}}=2\sqrt{2}$$
$$\left(\text{단, 등호는 } a=\frac{2}{a}\text{, 즉 } a=\sqrt{2}\text{일 때 성립}\right)$$
따라서 함수 $g(a)$의 최솟값은
$2\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

답 ④

05

$t\{f(x)-4\}=x\{f(t)-4\}$에서
$$f(x)=\frac{f(t)-4}{t}x+4 \quad \cdots\cdots ㉠$$
㉠에서 $\frac{f(t)-4}{t}=\frac{f(t)-4}{t-0}$는 두 점 $(0,\ 4)$, $(t,\ f(t))$를 지나는 직선의 기울기이고, $y=\frac{f(t)-4}{t}x+4$는 두 점 $(0,\ 4)$, $(t,\ f(t))$를 지나는 직선의 방정식이다.
따라서 ㉠을 만족시키는 양수 x의 개수 $g(t)$는 $x>0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 두 점 $(0,\ 4)$, $(t,\ f(t))$를 지나는 직선이 만나는 점의 개수와 같다.

한편, $f(x)=\begin{cases}-(x+1)(x-3) & (0<x\leq3)\\ x-3 & (x>3)\end{cases}$에서
$f(1)=4$, $f(7)=4$, $f(3)=0$
두 점 $(0,\ 4)$, $(3,\ f(3))$을 지나는 직선의 방정식은
$$y=\frac{f(3)-4}{3-0}x+4 \qquad \therefore y=-\frac{4}{3}x+4$$
직선 $y=-\frac{4}{3}x+4$와 곡선 $y=-(x+1)(x-3)$의 교점의 x좌표는 $-x^2+2x+3=-\frac{4}{3}x+4$에서
$3x^2-10x+3=0$, $(3x-1)(x-3)=0$
$\therefore x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=3$



[그림 1]

[그림 1]에서 t의 값의 범위에 따라 함수 $g(t)$의 값을 조사하면 다음과 같다.

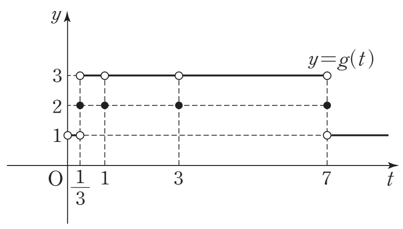
$0<t<\frac{1}{3}$일 때, $g(t)=1$

$\frac{1}{3}<t<7$ $(t\neq1,\ t\neq3)$일 때, $g(t)=3$

$t>7$일 때, $g(t)=1$

$t=\frac{1}{3}$, $t=1$, $t=3$, $t=7$일 때 $g(t)=2$

따라서 $y=g(t)$ $(t>0)$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

$\lim_{t\to\frac{1}{3}+} g(t)=3$, $\lim_{t\to\frac{1}{3}-} g(t)=1$이므로

$\lim_{t\to\frac{1}{3}+} g(t)\neq \lim_{t\to\frac{1}{3}-} g(t)$

$\lim_{t\to7+} g(t)=1$, $\lim_{t\to7-} g(t)=3$이므로

$\lim_{t\to7+} g(t)\neq \lim_{t\to7-} g(t)$

이고, $a\neq\frac{1}{3}$, $a\neq7$일 때 $\lim_{t\to a+} g(t)=\lim_{t\to a-} g(t)$이므로 구하는 모든 양수 a의 값의 합은

$\frac{1}{3}+7=\frac{22}{3}$ 답 ③

06

$h(x)$가 이차식이고 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{h(x)}=\frac{5}{4}$이므로 $f(x)$는 이차식이다.

$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=\{h(x)\}^2$에서

$$\begin{aligned}\{f(x)+g(x)\}\{f(x)-g(x)\}&=(2x^2-6x+4)^2\\&=\{2(x^2-3x+2)\}^2\\&=\{2(x-1)(x-2)\}^2\end{aligned}$$

$f(x)+g(x)=a(x-1)(x-2)$,

$f(x)-g(x)=b(x-1)(x-2)$ $(ab=4)$로 놓으면

$f(x)=\frac{a+b}{2}(x-1)(x-2)$, $g(x)=\frac{a-b}{2}(x-1)(x-2)$이므로 $f(x)=kg(x)$

문제의 조건에서 $f(x)\neq kg(x)$이므로

$f(x)+g(x)=a(x-1)^2$, $f(x)-g(x)=b(x-2)^2$ $(ab=4)$

또는

$f(x)+g(x)=a(x-2)^2$, $f(x)-g(x)=b(x-1)^2$ $(ab=4)$

로 놓을 수 있다.

$\therefore f(x)=\frac{a(x-1)^2+b(x-2)^2}{2}$,

$g(x)=\frac{a(x-1)^2-b(x-2)^2}{2}$ $(ab=4)$

또는 $f(x)=\frac{a(x-2)^2+b(x-1)^2}{2}$,

$g(x)=\frac{a(x-2)^2-b(x-1)^2}{2}$ $(ab=4)$

한편, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{h(x)}=\frac{5}{4}$이므로 $f(x)$의 이차항의 계수는 $\frac{5}{2}$이다.

$\therefore a+b=5$

$ab=4$, $a+b=5$를 연립하여 풀면

$a=1$, $b=4$ 또는 $a=4$, $b=1$

(i) $f(x)=\frac{a(x-1)^2+b(x-2)^2}{2}$,

$g(x)=\frac{a(x-1)^2-b(x-2)^2}{2}$인 경우

㉠ $a=1$, $b=4$일 때

$f(x)=\frac{(x-1)^2+4(x-2)^2}{2}$이므로 $f(4)=\frac{9+16}{2}=\frac{25}{2}$

$g(x)=\frac{(x-1)^2-4(x-2)^2}{2}$이므로 $g(4)=\frac{9-16}{2}=-\frac{7}{2}$

따라서 $g(4)$가 양의 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

㉡ $a=4$, $b=1$일 때

$f(x)=\frac{4(x-1)^2+(x-2)^2}{2}$이므로 $f(4)=\frac{36+4}{2}=20$

$g(x)=\frac{4(x-1)^2-(x-2)^2}{2}$이므로 $g(4)=\frac{36-4}{2}=16$

㉠, ㉡에서 $f(4)=20$, $g(4)=16$

(ii) $f(x)=\frac{a(x-2)^2+b(x-1)^2}{2}$,

$g(x)=\frac{a(x-2)^2-b(x-1)^2}{2}$인 경우

㉠ $a=1$, $b=4$일 때

$f(x)=\frac{(x-2)^2+4(x-1)^2}{2}$이므로 $f(4)=\frac{4+36}{2}=20$

$g(x)=\frac{(x-2)^2-4(x-1)^2}{2}$이므로 $g(4)=\frac{4-36}{2}=-16$

따라서 $g(4)$가 양의 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

㉡ $a=4$, $b=1$일 때

$f(x)=\frac{4(x-2)^2+(x-1)^2}{2}$이므로 $f(4)=\frac{16+9}{2}=\frac{25}{2}$

$g(x)=\frac{4(x-2)^2-(x-1)^2}{2}$이므로 $g(4)=\frac{16-9}{2}=\frac{7}{2}$

따라서 $g(4)$가 양의 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

㉠, ㉡에서 조건을 만족시키는 경우는 없다.

(i), (ii)에서 $f(4)=20$, $g(4)=16$이므로

$f(4)g(4)=20\times16=320$ 답 320

02 함수의 연속

개념 & 대표 유형 짚어보기 본문 12 ~ 13쪽

01 ⑤ **02** ④ **03** ① **04** ⑤ **05** ② **06** 14
07 ④ **08** ① **09** ③

01

① $f(0)$이 정의되지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

② $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}[x]=0$

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}[x]=-1$

에서 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

③ $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{[x+1]}{x+1}=1$

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}\frac{[x+1]}{x+1}=0$

에서 $\lim_{x\to0}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

④ $f(0)$이 정의되지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

⑤ $f(0)=\frac{[0-1]}{[0]^2+1}=\frac{-1}{1}=-1$이고,

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{[x-1]}{[x]^2+1}=\frac{-1}{0+1}=-1$

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}\frac{[x-1]}{[x]^2+1}=\frac{-2}{(-1)^2+1}=-1$

에서 $\lim_{x\to0}f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다. 답 ⑤

02

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)=\alpha$

$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0-}g(x)=g(0)=\beta$

라 하자.

$x>0$일 때, $f(x)+g(x)=x^2+2x+3$이므로

$\lim_{x\to0+}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to0+}f(x)+\lim_{x\to0+}g(x)$

$=\alpha+\beta=3$ …… ㉠

$x<0$일 때, $f(x)-g(x)=-x^2-x-1$이므로

$\lim_{x\to0-}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to0-}f(x)-\lim_{x\to0-}g(x)$

$=\alpha-\beta=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\alpha=1$, $\beta=2$

$\therefore f(0)g(0)=\alpha\beta=2$ 답 ④

03

ㄱ. 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$이다.

$x-a=t$로 놓으면 $x\to a$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to a}f(x-a)=\lim_{t\to0}f(t)=f(0)$

따라서 $f(x-a)$는 $x=a$에서 연속이다. (참)

ㄴ. [반례] $f(x)=\begin{cases}1 & (x\ge0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}-1 & (x\ge0)\\ 1 & (x<0)\end{cases}$

이면 $f(x)+g(x)=0$이므로 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

그러나 $f(x)-g(x)=\begin{cases}2 & (x\ge0)\\ -2 & (x<0)\end{cases}$이므로 $f(x)-g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. [반례] $f(x)=0$, $g(x)=\begin{cases}-1 & (x\ge1)\\ 1 & (x<1)\end{cases}$이면

$f(x)g(x)=0$이므로 두 함수 $f(x)$, $f(x)g(x)$는 모두 $x=1$에서 연속이지만 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

04

ㄱ. $\lim_{x\to-1+}f(x)g(x)=(-1)\times1=-1$

$\lim_{x\to-1-}f(x)g(x)=(-1)\times(-1)=1$

$\therefore \lim_{x\to-1+}f(x)g(x)\ne\lim_{x\to-1-}f(x)g(x)$

즉, $\lim_{x\to-1}f(x)g(x)$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. $\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=1\times1=1$

$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=(-1)\times(-1)=1$

$\therefore \lim_{x\to1}f(x)g(x)=1$ (참)

ㄷ. ㄱ에 의하여 함수 $f(x)g(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

또한 $f(1)g(1)=1\times(-1)=-1$이고,

ㄴ에 의하여 $\lim_{x\to1}f(x)g(x)=1$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)g(x)\ne f(1)g(1)$

즉, 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

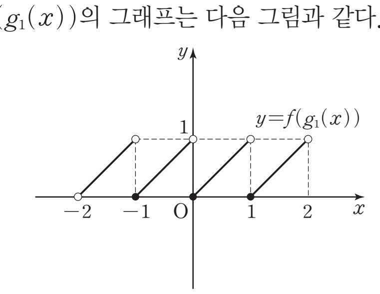
그러므로 함수 $y=f(x)g(x)$의 불연속점은 $x=-1$, $x=1$의 2개이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

05

(i) $y=f(g_1(x))=f(x)=x-[x]$이므로

함수 $y=f(g_1(x))$의 그래프는 다음 그림과 같다.

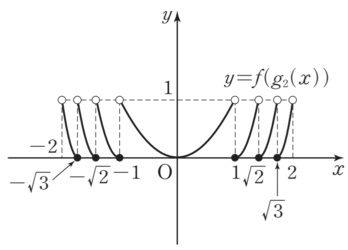


즉, $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서 불연속이므로

$a_1=3$

(ii) $y=f(g_2(x))=f(x^2)=x^2-[x^2]$이므로

함수 $y=f(g_2(x))$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, $x=\pm1$, $x=\pm\sqrt{2}$, $x=\pm\sqrt{3}$에서 불연속이므로

$a_2=6$

(i), (ii)에 의하여

$a_1+a_2=3+6=9$ 답 ②

06

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & (0\le x<2) \\ x^2+x+1 & (2\le x\le 4)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=f(2)$이다.

$\lim_{x\to2+}(x^2+x+1)=2^2+2+1=7$

$\lim_{x\to2-}(ax+b)=2a+b$

$f(2)=2^2+2+1=7$

에서

$2a+b=7$ …… ㉠

또한 $f(x)=f(x+4)$이므로 $f(0)=f(4)$에서

$b=4^2+4+1$ $\quad\therefore b=21$

㉠에 $b=21$을 대입하면 $2a+21=7$

$\therefore a=-7$

따라서 $f(x)=\begin{cases} -7x+21 & (0\le x<2) \\ x^2+x+1 & (2\le x\le 4)\end{cases}$이므로

$f(13)=f(4\times3+1)=f(1)$

$=-7\times1+21=14$ 답 14

07

$(x^2-1)f(x)=x^4+ax+b$에서

$x=1$일 때, $0=1+a+b$ $\quad\therefore a+b=-1$ …… ㉠

$x=-1$일 때, $0=1-a+b$ $\quad\therefore a-b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=0$, $b=-1$

따라서 $(x^2-1)f(x)=x^4-1$이므로

$x\ne-1$, $x\ne1$일 때, $f(x)=x^2+1$이다.

주어진 조건에서 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x=-1$, $x=1$에서 연속이어야 한다.

$x=-1$에서 연속이려면 $\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$이어야 하므로

$f(-1)=\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}(x^2+1)=2$

$x=1$에서 연속이려면 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이어야 하므로

$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(x^2+1)=2$

$\therefore f(-1)+f(1)=2+2=4$ 답 ④

08

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$에서 연속이면 되므로

$\lim_{x\to a+}f(x)g(x)=\lim_{x\to a+}x^2(x+a+2)$

$=a^2(2a+2)$

$\lim_{x\to a-}f(x)g(x)=\lim_{x\to a-}(6x-9)(x+a+2)$

$=(6a-9)(2a+2)$

$f(a)g(a)=(6a-9)(2a+2)$

에서

$a^2(2a+2)=(6a-9)(2a+2)$, $(a^2-6a+9)(2a+2)=0$

$(a-3)^2(2a+2)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은

$-1\times3=-3$ 답 ①

09

$h(x)=f(x-2)+2$라 하면

$h(-1)=f(-3)+2=-1<0$, $h(0)=f(-2)+2=5>0$

$h(1)=f(-1)+2=1>0$, $h(2)=f(0)+2=-2<0$

$h(3)=f(1)+2=1>0$, $h(4)=f(2)+2=4>0$

$h(5)=f(3)+2=5>0$

사잇값의 정리에 의하여 방정식 $h(x)=0$은 열린구간 $(-1, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 구하는 실근의 개수의 최솟값은 3이다. 답 ③

심화 유형 도전하기 본문 14 ~ 15쪽

01 ④ **02** ③ **03** ③ **04** ④ **05** ② **06** ④

01

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 한다.

따라서 $\lim_{x\to0}\frac{|x-a|-b}{x}=c$를 만족시키는 세 상수 a, b, c가 존재해야 한다.

$\lim_{x\to0}\frac{|x-a|-b}{x}=c$에서 극한값이 존재하고, $x\to0$일 때

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}(|x-a|-b)=|-a|-b=0$이므로

$b=|-a|=|a|$ …… ㉠

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{|x-a|-b}{x}=\lim_{x\to0}\frac{|x-a|-|a|}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{|x-a|^2-|a|^2}{x(|x-a|+|a|)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-2ax}{x(|x-a|+|a|)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x-2a}{|x-a|+|a|} \quad \cdots\cdots ㉡$$

ㄱ. $a=0$이면 ㉠에서 $b=0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{|x-a|-b}{x}=\lim_{x\to0}\frac{|x-0|-0}{x}=\lim_{x\to0}\frac{|x|}{x}$$

이때,

$$\lim_{x\to0+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{x}{x}=1,$$
$$\lim_{x\to0-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{-x}{x}=-1$$

이므로 $\lim_{x\to0}\frac{|x|}{x}$의 값은 존재하지 않는다.

즉, 상수 c는 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. ㉡에서 $a>0$이면

$$\lim_{x\to0}\frac{x-2a}{-(x-a)+a}=\lim_{x\to0}\frac{x-2a}{-(x-2a)}=-1$$

이므로 $c=-1$이다. (참)

ㄷ. ㉡에서 $a<0$이면

$$\lim_{x\to0}\frac{x-2a}{(x-a)-a}=\lim_{x\to0}\frac{x-2a}{x-2a}=1$$

이므로 $c=1$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

02

함수 $f(x)$는 $x\neq0$인 모든 실수 x에서 연속이고, 함수 $g(x)$는 $x\neq b$인 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=0$과 $x=b$ $(b>1)$에서 연속이어야 한다.

(i) 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to0+}f(x)g(x)=\lim_{x\to0-}f(x)g(x)=f(0)g(0)$$
$$\lim_{x\to0+}f(x)g(x)=\lim_{x\to0+}(x-4)(-x+a-1)\ (\because b>1)$$
$$=-4(a-1)$$
$$\lim_{x\to0-}f(x)g(x)=\lim_{x\to0-}(-x+2)(-x+a-1)\ (\because b>1)$$
$$=2(a-1)$$

$f(0)g(0)=-4(a-1)$

에서

$-4(a-1)=2(a-1)$, $6(a-1)=0$ $\quad\therefore a=1$

$$\therefore g(x)=\begin{cases}-x & (x<b)\\ x-1 & (x\geq b)\end{cases}$$

(ii) 함수 $f(x)g(x)$가 $x=b$에서 연속이려면

$$\lim_{x\to b+}f(x)g(x)=\lim_{x\to b-}f(x)g(x)=f(b)g(b)$$
$$\lim_{x\to b+}f(x)g(x)=\lim_{x\to b+}(x-4)(x-1)\ (\because b>1)$$
$$=(b-4)(b-1)$$
$$\lim_{x\to b-}f(x)g(x)=\lim_{x\to b-}(x-4)(-x)\ (\because b>1)$$
$$=(b-4)(-b)$$

$f(b)g(b)=(b-4)(b-1)$

에서

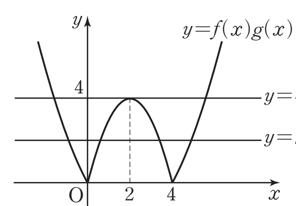
$(b-4)(b-1)=(b-4)(-b)$, $(b-4)(2b-1)=0$

$\therefore b=4$ $(\because b>1)$

이때, $g(x)=\begin{cases}-x & (x<4)\\ x-1 & (x\geq4)\end{cases}$이므로

$$f(x)g(x)=\begin{cases}x(x-2) & (x<0)\\ -x(x-4) & (0\leq x<4)\\ (x-1)(x-4) & (x\geq4)\end{cases}$$

이고, 함수 $y=f(x)g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



방정식 $f(x)g(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 3 이상이 되려면 함수 $y=f(x)g(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 3 이상이 되어야 하므로 위의 그림에서 $0<k\leq4$이다.

따라서 모든 정수 k의 값의 합은

$1+2+3+4=10$ 답 ③

03

함수 $h(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0+}h(x)=\lim_{x\to0-}h(x)=h(0)$$
$$\lim_{x\to0+}h(x)=\lim_{x\to0+}(x^2+x+a)^2$$
$$=a^2$$
$$\lim_{x\to0-}h(x)=\lim_{x\to0-}(x^2-3x+2+a)^2$$
$$=(2+a)^2$$

$h(0)=a^2$

에서

$a^2=(2+a)^2$, $4+4a=0$ $\quad\therefore a=-1$

조건 ㈏에서 $x<0$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x)=h(x)=(x^2-3x+1)^2$

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$g(0)=\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0-}(x^2-3x+1)^2=1$

조건 ㈎에서 $x=0$일 때 $f(0)g(0)=0$에서

$g(0)=1$이므로 $f(0)=0$

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$를

$f(x)=x(x^2+bx+c)$ (b, c는 상수)
라 하면 조건 (가)에서 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여

$$g(x)=\frac{x(x+4)}{f(x)}=\frac{x+4}{x^2+bx+c}$$

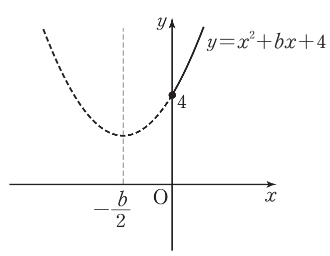
함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0+}\frac{x+4}{x^2+bx+c}=\frac{4}{c}=g(0)=1$$

$$\therefore c=4,\ g(x)=\frac{x+4}{x^2+bx+4}\ (x\ge0)$$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x\ge0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)$의 분모인 x^2+bx+4가 0이 아니어야 한다.
즉, $x\ge0$일 때, $x^2+bx+4>0$이어야 한다. …… ㉠

(ⅰ) $b\ge0$, 즉 $-\frac{b}{2}\le0$일 때,
$y=x^2+bx+4$ $(x\ge0)$의 최솟값은 $x=0$일 때
$y=4>0$이므로 ㉠을 만족시킨다.

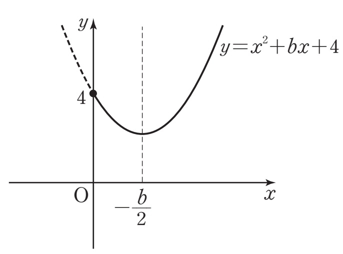


[그림 1]

(ⅱ) $b<0$, 즉 $-\frac{b}{2}>0$일 때,
$y=x^2+bx+4$ $(x\ge0)$의 최솟값은 $x=-\frac{b}{2}$일 때

$$y=\left(-\frac{b}{2}\right)^2+b\left(-\frac{b}{2}\right)+4$$
$$=-\frac{b^2}{4}+4>0$$

즉, $b^2<16$, $-4<b<0$이어야 ㉠을 만족시킨다.



[그림 2]

(ⅰ), (ⅱ)에서 ㉠을 만족시키려면 $b>-4$ …… ㉡
한편, $f(x)=x(x^2+bx+4)$, $g(0)=1$이므로
$(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(1)=b+5$
이 값이 10 이하의 정수이므로 b는 5 이하의 정수이다. …… ㉢
㉡, ㉢에서 b는 $-3\le b\le5$인 정수이다. 이때,

$(g\circ g)(0)=g(g(0))=g(1)=\frac{5}{b+5}$이므로

$(g\circ g)(0)$의 최댓값은 $\frac{5}{-3+5}=\frac{5}{2}$이고, 최솟값은 $\frac{5}{5+5}=\frac{1}{2}$이다.
따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$$\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$$

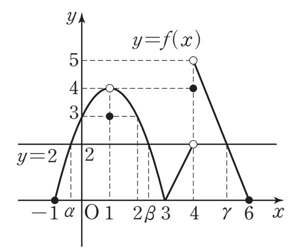
답 ③

04

함수 $y=g(g(x))$가 $x=1$에서 연속이 되려면
$\lim_{x\to1}g(g(x))=g(g(1))=g(a)$이어야 한다.
$x\ne1$일 때 $g(x)=f(x)$이고, $f(x)=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to4-$이므로

$$\lim_{x\to1}g(g(x))=\lim_{t\to4-}g(t)=\lim_{t\to4-}f(t)=2$$

$\therefore g(a)=2$
그런데 $a=1$이면 $g(g(1))=g(1)=1$이므로 $a\ne1$이어야 한다.
따라서 $y=g(g(x))$가 $x=1$에서 연속이려면 $f(a)=2$인 a의 값을 구하면 된다.



위의 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2$의 교점의 x좌표를 각각 α, β, γ라 하면 $a=\alpha$ 또는 $a=\beta$ 또는 $a=\gamma$

$\frac{\alpha+\beta}{2}=1$ $\quad\therefore \alpha+\beta=2$

두 점 $(6, 0)$, $(4, 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{5-0}{4-6}(x-6)$ $\quad\therefore y=-\frac{5}{2}x+15$

이 식에 $x=\gamma$, $y=2$를 대입하면

$2=-\frac{5}{2}\gamma+15$ $\quad\therefore \gamma=\frac{26}{5}$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$$\alpha+\beta+\gamma=2+\frac{26}{5}=\frac{36}{5}$$

답 ④

05

ㄱ. $x_i\ge0$이므로

$$f(0)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$2-x_i\ge0$이므로

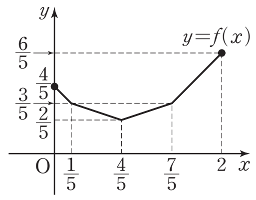
$$f(2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2-x_i)=2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=2-f(0)$$

$\therefore f(0)+f(2)=2$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 $f(0)+f(2)=2$이므로
(ⅰ) $f(0)>1$, $f(2)<1$ 또는 $f(0)<1$, $f(2)>1$일 때
함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이고 $f(0)\ne f(2)$이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(x)=1$을 만족시키는 x가 닫힌구간 $[0, 2]$에 존재한다.
(ⅱ) $f(0)=1$, $f(2)=1$일 때
$x=0$, $x=2$일 때 $f(x)=1$이므로 $f(x)=1$을 만족시키는 x가 닫힌구간 $[0, 2]$에 존재한다. (참)

ㄷ. [반례] $f(x)=\frac{1}{3}\left(\left|x-\frac{1}{5}\right|+\left|x-\frac{4}{5}\right|+\left|x-\frac{7}{5}\right|\right)$이라 하면
$y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 $f(x)=\frac{4}{3}$를 만

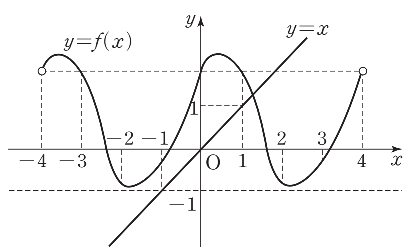
족시키는 x가 닫힌구간 [0, 2]에 존재하지 않는다. (거짓)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

06

ㄱ. [반례]



위의 그림과 같이 $f(1)>1$, $-1<f(2)<0$, $-1<f(3)<0$, $f(0)>0$인 함수 $f(x)$는 주어진 조건을 만족시키지만 열린구간 $(-1, 1)$에서 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 만나지 않으므로 방정식 $f(x)-x=0$은 열린구간 $(-1, 1)$에서 실근을 갖지 않는다. (거짓)

ㄴ. $F(x)=f(x-1)-f(x)$라 하면 함수 $F(x)$는 닫힌구간 [2, 3]에서 연속이다.

(ⅰ) $f(1)>0$인 경우

$f(2)<f(3)<0$이고

$F(2)=f(1)-f(2)>0$

$F(3)=f(2)-f(3)<0$

(ⅱ) $f(1)<0$인 경우

$0<f(3)<f(2)$이고

$F(2)=f(1)-f(2)<0$

$F(3)=f(2)-f(3)>0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $F(x)=0$, 즉 $f(x-1)=f(x)$가 열린구간 $(2, 3)$에서 실근을 가지므로 열린구간 $(2, 5)$에서 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. $G(x)=f(2x+1)+2f(x+1)$이라 하면 함수 $G(x)$는 닫힌구간 [0, 1]에서 연속이다.

(ⅰ) $f(1)>0$인 경우

$f(2)<f(3)<0$이고

$G(0)=f(1)+2f(1)=3f(1)>0$

$G(1)=f(3)+2f(2)<0$

(ⅱ) $f(1)<0$인 경우

$0<f(3)<f(2)$이고

$G(0)=f(1)+2f(1)=3f(1)<0$

$G(1)=f(3)+2f(2)>0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $G(x)=0$, 즉 $f(2x+1)+2f(x+1)=0$은 열린구간 $(0, 1)$에서 실근을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

개념 확장 & 수리논술 · 창의사고력 문제 본문 16쪽

함수 $f(x)$가 $x=1$, $x=2$, $x=3$에서만 불연속이므로 함수 $f(x)-a$도 $x=1$, $x=2$, $x=3$에서만 불연속이다.

따라서 함수 $|f(x)-a|$가 $x=k$에서 불연속이 될 수 있는 실수 k의 값은 1, 2, 3뿐이다.

(ⅰ) 함수 $|f(x)-a|$가 $x=1$에서 연속인 경우

$\lim_{x\to1+}|f(x)-a|=|2-a|$

$\lim_{x\to1-}|f(x)-a|=|-a|$

$|f(1)-a|=|-a|$

에서

$|2-a|=|-a|$

양변을 제곱하면

$(2-a)^2=a^2$

$\therefore a=1$

(ⅱ) 함수 $|f(x)-a|$가 $x=2$에서 연속인 경우

$\lim_{x\to2+}|f(x)-a|=|1-a|$

$\lim_{x\to2-}|f(x)-a|=|1-a|$

$|f(2)-a|=|-a|$

에서

$|1-a|=|-a|$

양변을 제곱하면

$(1-a)^2=a^2$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

(ⅲ) 함수 $|f(x)-a|$가 $x=3$에서 연속인 경우

$\lim_{x\to3+}|f(x)-a|=|1-a|$

$\lim_{x\to3-}|f(x)-a|=|-a|$

$|f(3)-a|=|1-a|$

에서

$|1-a|=|-a|$

양변을 제곱하면

$(1-a)^2=a^2$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

(ⅰ)~(ⅲ)에서

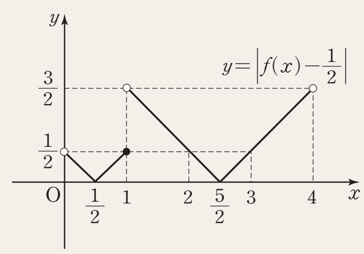
$a=1$이면 함수 $|f(x)-a|$는 $x=1$에서 연속이고 $x=2$, $x=3$에서 불연속이다.

$a=\frac{1}{2}$이면 함수 $|f(x)-a|$는 $x=2$, $x=3$에서 연속이고 $x=1$에서 불연속이다.

$a\neq1$, $a\neq\frac{1}{2}$이면 함수 $|f(x)-a|$는 $x=1$, $x=2$, $x=3$에서 불연속이다.

따라서 $a=\frac{1}{2}$일 때 함수 $|f(x)-a|$가 $x=k$에서 불연속이 되도록 하는 실수 k $(0<k<4)$의 개수가 1이다.

이때, 함수 $y=\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



방정식 $\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|=t$의 서로 다른 실근의 개수 $g(t)$는 함수 $y=\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수이므로

$$g(t)=\begin{cases} 0 \ (t<0) \\ 2 \ (t=0) \\ 4 \left(0<t<\frac{1}{2}\right) \\ 3 \left(t=\frac{1}{2}\right) \\ 2 \left(\frac{1}{2}<t<\frac{3}{2}\right) \\ 0 \left(t\geq\frac{3}{2}\right) \end{cases}$$

따라서 함수 $g(t)$는 $t=0$, $t=\frac{1}{2}$, $t=\frac{3}{2}$에서 불연속이므로 불연속점의 개수는 3이다. 답 3

01 미분계수와 도함수

개념 & 대표 유형 짚어보기 본문 18 ~ 19쪽

01 $\frac{1}{2}$ **02** ① **03** ② **04** ① **05** ⑤ **06** 40
07 72 **08** ② **09** ①

01

x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율이 2이므로

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=2 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이때, 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이고

$f(a)=2$, $f(b)=6$이므로

$g(2)=a$, $g(6)=b$

이를 ㉠에 대입하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{6-2}{g(6)-g(2)}=2$$

따라서 x의 값이 2에서 6까지 변할 때의 함수 $g(x)$의 평균변화율은

$$\frac{g(6)-g(2)}{6-2}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

02

조건 (가)에서 $f(x)=-f(-x)$이므로

$f(1)=-f(-1)$

조건 (나)에서

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)+f(1)}{3h}&=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{3h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}\times\frac{1}{3}\\&=f'(-1)\times\frac{1}{3}=4\end{aligned}$$

이므로 $f'(-1)=12$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to-1}\frac{f(x)+f(1)}{x^2-1}&=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{(x-1)(x+1)}\\&=\lim_{x\to-1}\left\{\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}\times\frac{1}{x-1}\right\}\\&=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}\times\lim_{x\to-1}\frac{1}{x-1}\\&=f'(-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\\&=12\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-6\end{aligned}$$

답 ①

03

조건 (가)에서

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+4xy \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

㉠에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=0$ …… ㉡

$$\therefore f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+4xh-f(x)}{h}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+4xh}{h}$$
$$=4x+f'(0)\ (\because ㉡)$$

조건 (나)에서 $f'(1)=7$이므로

$f'(1)=4+f'(0)=7 \qquad \therefore f'(0)=3$

$\therefore f'(x)=4x+3$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x+1)-f(2)}{x^2-1}$에서 $x+1=t$로 놓으면 $x=t-1$이고,

$x\to 1$일 때 $t\to 2$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x+1)-f(2)}{x^2-1}=\lim_{t\to 2}\frac{f(t)-f(2)}{(t-1)^2-1}$$
$$=\lim_{t\to 2}\frac{f(t)-f(2)}{t(t-2)}$$
$$=\lim_{t\to 2}\frac{1}{t}\times\lim_{t\to 2}\frac{f(t)-f(2)}{t-2}$$
$$=\frac{1}{2}f'(2)$$
$$=\frac{1}{2}(4\times 2+3)=\frac{11}{2}$$

답 ②

04

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=a$에서 미분가능하다.

$g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $x=a$에서 연속이므로

$\lim_{x\to a+}g(x)=\lim_{x\to a-}g(x)=g(a)$이어야 한다.

$\lim_{x\to a+}g(x)=\lim_{x\to a+}\{b-f(x)\}=b-f(a)$

$\lim_{x\to a-}g(x)=\lim_{x\to a-}f(x)=f(a)$

$g(a)=f(a)$에서

$b-f(a)=f(a)$

$\therefore b=2f(a)$ …… ㉠

또한 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$이어야 한다.

$$\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{b-f(x)-f(a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a+}\frac{f(a)-f(x)}{x-a}\ (\because ㉠)$$
$$=-f'(a)$$
$$\lim_{x\to a-}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
$$=f'(a)$$

에서

$-f'(a)=f'(a) \qquad \therefore f'(a)=0$

$f'(x)=3x^2-4x$이므로

$f'(a)=3a^2-4a=0 \qquad \therefore a=0\ (\because a$는 정수)

$a=0$을 ㉠에 대입하면

$b=2f(0)=2\times 2=4$

$\therefore a+b=0+4=4$

/ 보충 설명 /

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=a$에서도 미분가능하기 때문에

$$g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (x<a) \\ -f'(x) & (x>a)\end{cases}$$

에서 $\lim_{x\to a+}\{-f'(x)\}=\lim_{x\to a-}f'(x)$를 이용하여

조건을 만족시키는 a의 값을 구할 수도 있다.

답 ①

05

함수 $g(x)=|x+1|f(x)$에서

$$g(x)=\begin{cases} (x+1)f(x) & (x\ge -1) \\ -(x+1)f(x) & (x<-1)\end{cases}$$

$g(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to -1+}\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1-}\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}$이어야 한다.

$$\lim_{x\to -1+}\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1+}\frac{(x+1)f(x)-0}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1+}f(x)=f(-1)$$
$$\lim_{x\to -1-}\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1-}\frac{-(x+1)f(x)-0}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1-}\{-f(x)\}=-f(-1)$$

에서

$f(-1)=-f(-1) \qquad \therefore f(-1)=0$

한편, 문제의 조건에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이고 $f(1)=0$이므로

$f(x)=(x+1)(x-1)=x^2-1$

$$\therefore g(x)=\begin{cases} (x+1)(x^2-1) & (x\ge -1) \\ -(x+1)(x^2-1) & (x<-1)\end{cases}$$

$\therefore g(2)=(2+1)(2^2-1)=9$

답 ⑤

06

조건 (가)에서 극한값이 존재하고, $x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}\{xf(x)-x^3\}=0$이므로

$2f(2)-8=0 \qquad \therefore f(2)=4$

$h(x)=xf(x)-x^3$이라 하면

$h(2)=2f(2)-8=0$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{xf(x)-x^3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=h'(2)$$

$\therefore h'(2)=2$

$h'(x)=\{xf(x)-x^3\}'=f(x)+xf'(x)-3x^2$이므로

$h'(2)=f(2)+2f'(2)-12=2$에서

$2f'(2)=14-f(2)=14-4=10$
$\therefore\ f'(2)=5$
조건 (나)에서 $g(x)=\{f(x)\}^2$이므로
$g'(x)=2f(x)f'(x)$
$\therefore\ g'(2)=2f(2)f'(2)=2\times4\times5=40$ 답 40

07
조건 (가)에서 $g(x)=2x^2f(x)$이므로
$g'(x)=4xf(x)+2x^2f'(x)$
조건 (나)에서
$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)$
$=2x^2f(x)f'(x)-f(x)\{4xf(x)+2x^2f'(x)\}$
$=-4x\{f(x)\}^2=-64x^3$
$\therefore\ f(x)=4x$ 또는 $f(x)=-4x$
조건 (다)에서 $f(1)>0$이므로
$f(x)=4x$
따라서 $g(x)=2x^2\times4x=8x^3$이므로
$f(2)+g(2)=4\times2+8\times2^3=72$ 답 72

08
$f(x)$를 n차식이라 하면 $f'(x)$는 $n-1$차식이고, $f(x)$의 최고차항의 계수의 부호와 $f'(x)$의 최고차항의 계수의 부호가 서로 같으므로 $xf(x)+(x^2+2)f'(x)$는 $n+1$차식이다.
주어진 등식이 성립하려면 $n+1=3$
$\therefore\ n=2$
따라서 $f(x)$는 이차식이므로
$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)이라 하면
$f'(x)=2ax+b$
$xf(x)+(x^2+2)f'(x)=x(ax^2+bx+c)+(x^2+2)(2ax+b)$
$\qquad=3ax^3+2bx^2+(4a+c)x+2b$
따라서 x에 대한 항등식
$3ax^3+2bx^2+(4a+c)x+2b=3x^3-4x^2+7x-4$에서
$a=1$, $b=-2$, $c=3$
따라서 $f(x)=x^2-2x+3$이므로
$f(3)=3^2-2\times3+3=6$ 답 ②

09
조건 (가)에서 $x=0$을 대입하면 $f(1)=-f(1)$
$2f(1)=0\qquad\therefore\ f(1)=0$
조건 (다)에서 $f(x)=f'(x)\left(\dfrac{x-1}{3}\right)+R(x)$
$f(x)$가 삼차함수이므로 $f'(x)$는 이차함수이다.
따라서 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$f(x)=f'(x)\left(\dfrac{x-1}{3}\right)+ax+b$ …… ㉠
㉠에 $x=1$을 대입하면
$f(1)=a+b=0$ …… ㉡

조건 (나)에서 극한값이 존재하고, $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to0}f(x)=0$이므로 $f(0)=0$
$\therefore\ \lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=6$
㉠에 $x=0$을 대입하면
$f(0)=f'(0)\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)+b=-2+b=0$ …… ㉢
㉡, ㉢에서 $a=-2$, $b=2$
따라서 $R(x)=-2x+2$이므로
$R(3)=-4$ 답 ①

심화 유형 도전하기
본문 20 ~ 21쪽

01 ① 02 ④ 03 13 04 ③ 05 ④ 06 8

01
$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{(x-1)f'(x)}=a\ (a\neq1)$ …… ㉠
에서 극한값이 존재하고, $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다. 즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$
$\therefore\ f(1)=0$
문제의 조건에서 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f(2)=0$이므로
$f(x)=(x-1)(x-2)(x-k)$ (k는 상수)로 놓을 수 있다.
$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{(x-1)f'(x)}$
$=\lim_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-k)}{(x-1)f'(x)}$
$=\lim_{x\to1}\dfrac{(x-2)(x-k)}{f'(x)}$
$=\lim_{x\to1}\dfrac{(x-2)(x-k)}{(x-2)(x-k)+(x-1)(x-k)+(x-1)(x-2)}$
(i) $k\neq1$일 때
$\lim_{x\to1}\dfrac{(x-2)(x-k)}{(x-2)(x-k)+(x-1)(x-k)+(x-1)(x-2)}$
$=\dfrac{(1-2)(1-k)}{(1-2)(1-k)}=1$
이므로 $a=1$
문제의 조건에서 $a\neq1$이므로 모순이다.
(ii) $k=1$일 때
$\lim_{x\to1}\dfrac{(x-2)(x-k)}{(x-2)(x-k)+(x-1)(x-k)+(x-1)(x-2)}$
$=\lim_{x\to1}\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x-1)+(x-1)^2+(x-1)(x-2)}$
$=\lim_{x\to1}\dfrac{x-2}{(x-2)+(x-1)+(x-2)}$
$=\dfrac{-1}{(-1)+0+(-1)}=\dfrac{1}{2}$
(i), (ii)에 의하여 $a=\dfrac{1}{2}$ 답 ①

02

함수 $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

따라서 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=g(0)$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}$$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}$에서 극한값이 존재하고, $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

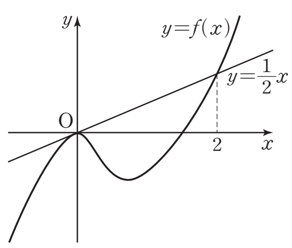
즉, $\lim_{x\to 0}f(x)=0$이므로 $f(0)=0$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=\frac{1}{2}$$

또한 $g(0)=g(2)$에서 $\frac{1}{2}=\frac{f(2)}{2}$이므로 $f(2)=1$

$$\therefore \frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{1}{2}$$

따라서 함수 $y=f(x)$에 대하여 원점에서의 접선의 기울기와 닫힌구간 $[0, 2]$에서의 평균변화율이 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, $f(x)-\frac{1}{2}x=x^2(x-2)$이므로

$$f(x)=x^2(x-2)+\frac{1}{2}x$$

$$\therefore g(x)=\begin{cases} x^2-2x+\frac{1}{2} & (x\neq 0) \\ \frac{1}{2} & (x=0) \end{cases}$$

닫힌구간 $[0, n]$에서 함수 $y=g(x)$의 평균변화율이 $h(n)$이므로

$$h(n)=\frac{g(n)-g(0)}{n-0}=\frac{\left(n^2-2n+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}}{n}$$

$$=\frac{n^2-2n}{n}=n-2$$

$h(n)\le 5$에서 $n-2\le 5$

$\therefore n\le 7$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수는 7이다.

/ 보충 설명 /

함수 $f(x)$를 다음과 같이 구할 수도 있다.

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고

$f(0)=0$, $f'(0)=\frac{1}{2}$이므로

$f(x)=x^3+ax^2+\frac{1}{2}x$ (a는 상수)로 놓을 수 있고, $f(2)=1$이므로 $f(2)=2^3+a\times 2^2+\frac{1}{2}\times 2=8+4a+1=1$에서 $a=-2$

$\therefore f(x)=x^3-2x^2+\frac{1}{2}x$

답 ④

03

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)+f(a)-f(a-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\times 2+\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$$

$$=2f'(a)+f'(a)=3f'(a)$$

이므로 $3f'(a)=-12$

$\therefore f'(a)=-4$

$f(x)=x^3-nx+2$에서 $f'(x)=3x^2-n$이므로

$f'(a)=3a^2-n=-4$

$\therefore a^2=\frac{n-4}{3}$

(i) $1\le n\le 3$일 때, $a^2<0$이므로 실수 a는 존재하지 않는다.

$\therefore a_n=0$

(ii) $n=4$일 때, $a^2=0$이므로 실수 a는 0의 1개이다.

$\therefore a_n=1$

(iii) $n\ge 5$일 때, $a^2>0$이므로 실수 a는 $a=\pm\sqrt{\frac{n-4}{3}}$의 2개이다.

$\therefore a_n=2$

(i)~(iii)에 의하여

$$\sum_{n=1}^{10}a_n=0\times 3+1\times 1+2\times 6$$

$$=13$$

답 13

04

ㄱ. 조건 (나)에서

$f(s+t)+st=f(s)+f(t)+1$

위 식에 $s=t=0$을 대입하면

$f(0)=2f(0)+1$

$\therefore f(0)=-1$ (참)

ㄴ. $f(0)=-1$이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-h)+1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(-h)-(-1)}{h}$$

$$=-\lim_{h\to 0}\frac{f(-h)-f(0)}{-h}$$

$$=-f'(0)$$

$=-1$ ($\because$ 조건 (가)) (참)

ㄷ. $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+1-xh-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+1-xh}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}-x$$

$$=-x+f'(0)$$

$$=-x+1$$

$0<x<1$일 때, $f'(x)>0$이고 $f(0)=-1$이므로

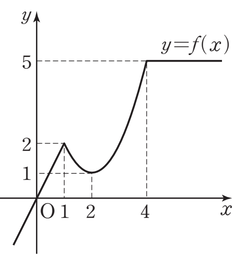
$f(1)>-1$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

05

함수 $f(x)=\begin{cases} 2x & (x<1) \\ x^2-4x+5 & (1\le x<4) \\ 5 & (x\ge 4) \end{cases}$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



한편, $\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}$는 두 점 $(t,\ f(t))$, $(t+h,\ f(t+h))$를 지나는 직선의 기울기이므로

$\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}\le k$를 만족시키는 실수 k의 최솟값은

두 점 $(t,\ f(t))$, $(t+h,\ f(t+h))$를 지나는 직선의 기울기의 최댓값이다.

(i) $t<1$일 때,

두 점 $(t,\ f(t))$, $(1,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기는 2이다.

두 점 $(t,\ f(t))$, $(4,\ 5)$를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{5-f(t)}{4-t}=\frac{5-2t}{4-t}$$
$$=2+\frac{3}{t-4}$$

$t<1$이므로 $2+\dfrac{3}{t-4}<2$

$\therefore g(t)=2$

(ii) $1\le t<4$일 때,

두 점 $(t,\ f(t))$, $(4,\ 5)$를 지나는 직선의 기울기가 최대이므로

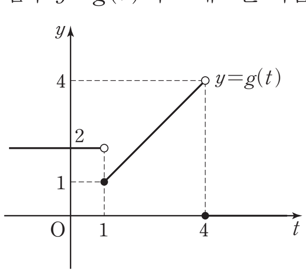
$$g(t)=\frac{5-f(t)}{4-t}$$
$$=\frac{5-(t^2-4t+5)}{4-t}$$
$$=\frac{t^2-4t}{t-4}$$
$$=t$$

(iii) $t\ge 4$일 때,

직선의 기울기는 항상 0이므로

$g(t)=0$

(i)~(iii)에 의하여 함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $g(t)$는 $t=1$, $t=4$에서 불연속이고 미분가능하지 않으므로 함수 $g(t)$의 불연속점의 개수와 미분가능하지 않은 점의 개수의 합은 4이다. 답 ④

06

조건 ㈎에서 극한값이 존재하고, $x\to 3-$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 3-} g(x)=0$이므로

$\lim_{x\to 3-} f(x)h(x)=0$

이때, $x\to 3-$이면 $f(x)=1$이므로

$h(3)=0$ …… ㉠

한편, 조건 ㈏에서 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 미분가능하려면 $x=2$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 2+} g(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)h(x)=h(2)$

$\lim_{x\to 2-} g(x)=\lim_{x\to 2-} f(x)h(x)=0$

$g(2)=f(2)h(2)=0$에서

$h(2)=0$ …… ㉡

또한 $g'(2)$가 존재하므로

$$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)h(x)-f(2)h(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2+}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}\ (\because ㉡)$$
$$=h'(2)$$

$$\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)h(x)-f(2)h(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2-}\frac{0-0}{x-2}$$
$$=0$$

에서 $h'(2)=0$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여

$h(x)=a(x-2)^2(x-3)$ (a는 0이 아닌 상수)

로 놓을 수 있다.

이때, $\lim_{x\to 3-}\dfrac{g(x)}{x-3}=1$에서

$$\lim_{x\to 3-}\frac{af(x)(x-2)^2(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3-}\{af(x)(x-2)^2\}$$
$$=a\times 1\times 1^2$$
$$=a=1$$

$\therefore h(x)=(x-2)^2(x-3)$

따라서 $g(x)=f(x)(x-2)^2(x-3)$이고 $f(4)=2$이므로

$g(4)=2\times 2^2\times 1=8$

/ 보충 설명 /

양수 x에 대하여 x보다 작은 자연수 중 소수의 개수가 $f(x)$이므로 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 구하면 각각 다음과 같다.

2보다 작은 자연수 중 소수는 없으므로

$f(2)=0$

3보다 작은 자연수 중 소수는 2의 1개이므로

$f(3)=1$

4보다 작은 자연수 중 소수는 2, 3의 2개이므로

$f(4)=2$ 답 8

531_수학H_해설(001-048)ok.indd 18 19. 7. 12. 오후 1:52

02 도함수의 활용 (1)

개념 & 대표 유형 짚어보기

본문 22 ~ 23쪽

01 ② 02 ① 03 ⑤ 04 ④ 05 ④ 06 ④
07 ② 08 ③ 09 ④

01

서로 다른 두 점 $A(a,\ f(a))$, $B(b,\ f(b))$에서의 접선이 서로 평행하므로 $f'(a)=f'(b)$이다.

$f(x)=x^3-x^2$에서 $f'(x)=3x^2-2x$

$f'(a)=f'(b)$이므로

$3a^2-2a=3b^2-2b$

$3a^2-3b^2-2a+2b=0$

$3(a^2-b^2)-2(a-b)=0$

$3(a-b)(a+b)-2(a-b)=0$

$(a-b)\{3(a+b)-2\}=0$

이때, $a\neq b$이므로

$3(a+b)-2=0 \qquad \therefore a+b=\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned}\therefore f(a)+f(b)&=a^3-a^2+b^3-b^2\\&=(a^3+b^3)-(a^2+b^2)\\&=(a+b)^3-3ab(a+b)-(a+b)^2+2ab\\&=\left(\frac{2}{3}\right)^3-3ab\times\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^2+2ab\\&=\left(\frac{2}{3}\right)^3-\left(\frac{2}{3}\right)^2\\&=\frac{8}{27}-\frac{4}{9}=-\frac{4}{27}\end{aligned}$$

답 ②

02

$f(x)=3x^2$이라 하면 $f'(x)=6x$

점 $A(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=6$이므로 이 접선에 수직인 직선 l의 기울기는 $-\frac{1}{6}$이다.

따라서 직선 l의 방정식은

$y-3=-\frac{1}{6}(x-1) \qquad \therefore y=-\frac{1}{6}x+\frac{19}{6}$

또한 점 $B(a,\ 3a^2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=6a$이므로 이 접선에 수직인 직선 m의 기울기는 $-\frac{1}{6a}$이다.

따라서 직선 m의 방정식은

$y-3a^2=-\frac{1}{6a}(x-a) \qquad \therefore y=-\frac{1}{6a}x+3a^2+\frac{1}{6}$

이때, 두 직선 l, m의 교점의 x좌표를 구하면

$-\frac{1}{6}x+\frac{19}{6}=-\frac{1}{6a}x+3a^2+\frac{1}{6}$에서

$\left(\frac{1}{6a}-\frac{1}{6}\right)x=3(a^2-1) \qquad \therefore x=-18a(a+1)\ (\because a\neq 1)$

따라서 $f(a)=-18a(a+1)$이므로

$\lim_{a\to 1}f(a)=\lim_{a\to 1}\{-18a(a+1)\}=-36$

답 ①

03

직선 $y=mx+2$가 곡선 $y=x^3+2x$에 접하는 접점의 좌표를 $(t,\ t^3+2t)$라 하면 $y'=3x^2+2$이므로

곡선 $y=x^3+2x$ 위의 점 $(t,\ t^3+2t)$에서의 접선의 방정식은

$y-(t^3+2t)=(3t^2+2)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+2)x-2t^3$

위의 접선이 직선 $y=mx+2$와 일치해야 하므로

$-2t^3=2,\ 3t^2+2=m$

$-2t^3=2$에서 $t=-1$이므로

$m=3\times(-1)^2+2=5$

답 ⑤

04

$f(x)=x^3-3x^2+1$이라 하면 $f'(x)=3x^2-6x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-3t^2+1)$이라 하면 접선의 방정식은

$y-(t^3-3t^2+1)=(3t^2-6t)(x-t)$

이 접선이 점 $P\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$을 지나므로

$\frac{3}{2}-(t^3-3t^2+1)=(3t^2-6t)\times(-t)$

$4t^3-6t^2+1=0,\ (2t-1)(2t^2-2t-1)=0$

$\therefore t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

한편, 접점 $(t,\ t^3-3t^2+1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2-6t=3(t-1)^2-3$

따라서 $t=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$일 때 기울기는 최대이고 그때의 최댓값은

$3\times\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2-6\times\frac{1-\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

답 ④

05

$f(x)=\frac{2}{27}x^3-x+1$이라 하면 $f'(x)=\frac{2}{9}x^2-1$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{2}{27}t^3-t+1\right)$이라 하면 접선의 기울기는

$\frac{2}{9}t^2-1$이므로 접선의 방정식은

$y-\left(\frac{2}{27}t^3-t+1\right)=\left(\frac{2}{9}t^2-1\right)(x-t)$

이 접선이 점 $P(2,\ -1)$을 지나므로

$-1-\left(\frac{2}{27}t^3-t+1\right)=\left(\frac{2}{9}t^2-1\right)(2-t)$

$-1-\frac{2}{27}t^3+t-1=\frac{4}{9}t^2-2-\frac{2}{9}t^3+t$

$\frac{4}{27}t^3-\frac{4}{9}t^2=0,\ \frac{4}{27}t^2(t-3)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=3$

따라서 접점의 좌표는 $(0,\ 1)$ 또는 $(3,\ 0)$이다.

한편, 두 접선의 기울기는 각각 $f'(0)=-1$, $f'(3)=1$이므로 두 접선은 서로 수직이다. 즉, 삼각형 PAB는 선분 AB를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

이때, 삼각형 PAB의 외접원의 지름은 $\overline{AB}$이고

$\overline{AB}=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$

이므로 외접원의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{10}}{2}$이다.

따라서 구하는 외접원의 넓이는 $\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2\pi=\frac{5}{2}\pi$

/ 보충 설명 /

직각삼각형에서 외접원의 중심은 빗변의 중점이므로 외접원의 반지름의 길이는 $\frac{(\text{빗변의 길이})}{2}$이다.

답 ④

06

$f(x)=x^3-3x^2+3x+1$에서 $f'(x)=3x^2-6x+3$

(i) 점 $(a, f(a))$ $(a\neq0)$에서의 접선의 방정식 l_2는

$y-(a^3-3a^2+3a+1)=(3a^2-6a+3)(x-a)$

이 접선이 점 $P(0, 1)$을 지나므로

$1-a^3+3a^2-3a-1=-a(3a^2-6a+3)$

$2a^3-3a^2=0$, $a^2(2a-3)=0$

$\therefore a=\frac{3}{2}$ $(\because a\neq0)$

(ii) 점 $P(0, 1)$에서의 접선의 방정식 l_1은

$y-1=f'(0)(x-0)$, 즉 $y=3x+1$이다.

이때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3x+1$의 점 P가 아닌 교점의 x좌표를 구하면

$x^3-3x^2+3x+1=3x+1$에서

$x^3-3x^2=0$, $x^2(x-3)=0$

$\therefore x=3$ $(\because x\neq0)$

(i), (ii)에서 구하는 x좌표의 합은

$\frac{3}{2}+3=\frac{9}{2}$

답 ④

07

두 곡선 $y=x^3+ax+4$, $y=-x^2+bx+c$가 점 $(2, 0)$을 지나므로

$f(x)=x^3+ax+4$, $g(x)=-x^2+bx+c$라 하면

$f(2)=8+2a+4=0$

$\therefore a=-6$ …… ㉠

$g(2)=-4+2b+c=0$

$\therefore 2b+c=4$ …… ㉡

두 곡선 위의 점 $(2, 0)$에서의 접선이 서로 일치하므로

$f'(2)=g'(2)$

$f'(x)=3x^2+a=3x^2-6$ $(\because$ ㉠$)$

에서

$f'(2)=3\times2^2-6=6$

$g'(x)=-2x+b$에서

$g'(2)=-4+b$이므로

$-4+b=6$ $\quad\therefore b=10$

$b=10$을 ㉡에 대입하면

$c=-16$

$\therefore a+b+c=(-6)+10+(-16)=-12$

답 ②

08

곡선 $y=-x^2-4x$에 접하는 직선의 접점의 좌표를 $(a, -a^2-4a)$라 하면 $y'=-2x-4$이므로 접선의 방정식은

$y=(-2a-4)(x-a)+(-a^2-4a)$

$\therefore y=(-2a-4)x+a^2$ …… ㉠

곡선 $y=x^2-6x+5$에 접하는 직선의 접점의 좌표를 (b, b^2-6b+5)라 하면 $y'=2x-6$이므로 접선의 방정식은

$y=(2b-6)(x-b)+b^2-6b+5$

$\therefore y=(2b-6)x-b^2+5$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 구한 접선의 방정식이 일치해야 하므로

$-2a-4=2b-6$, $a^2=-b^2+5$

위의 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-1$ 또는 $a=-1$, $b=2$

따라서 두 곡선에 모두 접하는 두 직선의 방정식은

$y=-8x+4$, $y=-2x+1$

이므로 두 직선 중 기울기가 큰 직선의 방정식은

$y=-2x+1$이고 y절편은 1이다.

답 ③

09

$\frac{3}{x}=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to0+}\left\{f\left(\frac{3+2x}{x}\right)-f\left(\frac{3-2x}{x}\right)\right\}$$
$$=\lim_{x\to0+}\left\{f\left(\frac{3}{x}+2\right)-f\left(\frac{3}{x}-2\right)\right\}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\{f(t+2)-f(t-2)\}$$

함수 $f(x)$가 미분가능한 함수이므로 $f(x)$는 닫힌구간 $[t-2, t+2]$에서 연속이고 열린구간 $(t-2, t+2)$에서 미분가능하다. 따라서 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(t+2)-f(t-2)}{(t+2)-(t-2)}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(t-2, t+2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때, $t\to\infty$이면 $c\to\infty$이므로

$$\lim_{t\to\infty}\{f(t+2)-f(t-2)\}=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t+2)-f(t-2)}{(t+2)-(t-2)}\times4$$
$$=4\lim_{t\to\infty}f'(c)$$
$$=4\lim_{c\to\infty}f'(c)$$
$$=4\times3=12$$

답 ④

심화 유형 도전하기

본문 24 ~ 26쪽

01 ④ **02** 30 **03** ② **04** 484 **05** ③ **06** ②
07 ③ **08** ⑤ **09** ⑤

01

$f(x)=\begin{cases} 0 & (x\le a) \\ x^3+3x^2 & (x>a) \end{cases}$에서

$f'(x)=\begin{cases} 0 & (x<a) \\ 3x^2+6x & (x>a) \end{cases}$

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이므로

$\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a-} f(x)=f(a)$이어야 한다.

$\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a+}(x^3+3x^2)=a^3+3a^2$

$\lim_{x\to a-} f(x)=0$

$f(a)=0$에서

$a^3+3a^2=0$, $a^2(a+3)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=-3$ …… ㉠

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to a+} f'(x)=\lim_{x\to a-} f'(x)$이어야 한다.

$\lim_{x\to a+} f'(x)=\lim_{x\to a+}(3x^2+6x)=3a^2+6a$

$\lim_{x\to a-} f'(x)=0$에서

$3a^2+6a=0$, $a(a+2)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시켜야 하므로

$a=0$

$a=0$이고 문제의 조건에서 $a<b$이므로

$b>0$

따라서 $f(x)=\begin{cases} 0 & (x\le 0) \\ x^3+3x^2 & (x>0) \end{cases}$,

$f'(x)=\begin{cases} 0 & (x\le 0) \\ 3x^2+6x & (x>0) \end{cases}$이다.

한편, 점 $(b,\ f(b))$에서의 접선의 방정식이

$y=24(x-c)$이므로

$f'(b)=3b^2+6b=24$에서

$b^2+2b-8=0$, $(b+4)(b-2)=0$

$\therefore b=2$ ($\because b>0$)

이때, $f(b)=f(2)=2^3+3\times 2^2=20$

직선 $y=24(x-c)$와 곡선 $y=f(x)$가 $x=b$에서 만나므로

$f(b)=24(b-c)=20$

$\frac{5}{6}=2-c$, $c=\frac{7}{6}$

$\therefore a+b+c=0+2+\frac{7}{6}=\frac{19}{6}$

답 ④

02

$f(x)=x^3+2ax^2+3x$에서 $f'(x)=3x^2+4ax+3$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-(t^3+2at^2+3t)=(3t^2+4at+3)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+4at+3)x-2t^3-2at^2$

위의 식에 $x=0$을 대입하면

$y=-2t^3-2at^2$

$\therefore \mathrm{P}(0,\ -2t^3-2at^2)$

따라서 원점에서 점 P까지의 거리 $g(t)$는

$g(t)=|-2t^3-2at^2|=|-2t^2(t+a)|$

함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$t=-a$에서 미분가능하다.

즉, $\lim_{t\to -a+}\frac{g(t)-g(-a)}{t-(-a)}=\lim_{t\to -a-}\frac{g(t)-g(-a)}{t-(-a)}$이어야 하므로

$$\lim_{t\to -a+}\frac{g(t)-g(-a)}{t-(-a)}=\lim_{t\to -a+}\frac{2t^2(t+a)}{t+a}$$
$$=\lim_{t\to -a+}(2t^2)=2a^2$$
$$\lim_{t\to -a-}\frac{g(t)-g(-a)}{t-(-a)}=\lim_{t\to -a-}\frac{-2t^2(t+a)}{t+a}$$
$$=\lim_{t\to -a-}(-2t^2)=-2a^2$$

에서

$2a^2=-2a^2$ $\therefore a=0$

따라서 $f(x)=x^3+3x$, $g(t)=|-2t^3|$이므로

$f(2)=2^3+3\times 2=14$, $g(2)=|-2\times 2^3|=16$

$\therefore f(2)+g(2)=14+16=30$

답 30

03

$y=x^2$에서 $y'=2x$이므로 점 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$에서의 접선 l의 방정식은

$y-a^2=2a(x-a)$ $\therefore y=2ax-a^2$

접선 l이 x축과 만나는 점 B의 좌표는

$0=2ax-a^2$에서 $x=\frac{a}{2}$

$\therefore \mathrm{B}\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$

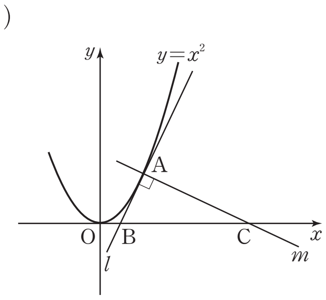
한편, 점 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$을 지나고 접선 l과 수직인 직선 m의 방정식은

$y-a^2=-\frac{1}{2a}(x-a)$ $\therefore y=-\frac{1}{2a}x+\frac{1}{2}+a^2$

직선 m이 x축과 만나는 점 C의 좌표는

$0=-\frac{1}{2a}x+\frac{1}{2}+a^2$에서 $x=2a^3+a$

$\therefore \mathrm{C}(2a^3+a,\ 0)$



점 B를 지나는 직선이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 두 점 A, C의 중점을 지나야 한다.

두 점 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$, $\mathrm{C}(2a^3+a,\ 0)$의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는

$\left(a^3+a,\ \frac{a^2}{2}\right)$

따라서 두 점 $B\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$, $M\left(a^3+a,\ \frac{a^2}{2}\right)$을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{\frac{a^2}{2}-0}{a^3+a-\frac{a}{2}}=\frac{a}{2a^2+1}$$

문제의 조건에서 이 직선의 기울기가 $\frac{1}{3}$이므로

$\frac{a}{2a^2+1}=\frac{1}{3}$, $2a^2-3a+1=0$

$(2a-1)(a-1)=0 \qquad \therefore a=1 \left(\because a>\frac{1}{2}\right)$ 답 ②

04

삼각형 ABC의 넓이가 최소가 되기 위해서는 점 A와 직선 $y=12x-24$ 사이의 거리가 최소이어야 한다.

즉, 곡선 위의 점 A에서의 접선의 기울기가 12이어야 한다.

$y=\frac{1}{2}x^4-x^2+3$에서 $y'=2x^3-2x$이므로

$2x^3-2x=12$에서 $2x^3-2x-12=0$

$2(x-2)(x^2+2x+3)=0$

$\therefore x=2\ (\because x^2+2x+3>0)$

따라서 삼각형 ABC의 넓이가 최소일 때의 점 A의 좌표는 $(2,\ 7)$

점 $A(2,\ 7)$과 직선 $y=12x-24$, 즉 $12x-y-24=0$ 사이의 거리를 h라 하면

$$h=\frac{|24-7-24|}{\sqrt{12^2+(-1)^2}}=\frac{7}{\sqrt{145}}$$

이때, 삼각형 ABC가 정삼각형이므로 한 변의 길이를 a라 하면

$a:h=2:\sqrt{3} \qquad \therefore a=\frac{2}{\sqrt{3}}h=\frac{14}{\sqrt{435}}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이의 최솟값 S는

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{14^2}{435}=\frac{49\sqrt{3}}{435}$$

이므로 $p=435$, $q=49$

$\therefore p+q=484$ 답 484

05

ㄱ. $2x^2=-x^2+2x-a$에서 $3x^2-2x+a=0$

두 곡선이 만나지 않으므로 이 방정식은 실근을 갖지 않는다.

따라서 이차방정식 $3x^2-2x+a=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=1-3a<0 \qquad \therefore a>\frac{1}{3}$ (참)

ㄴ. $f(x)=2x^2$이라 하면 $f'(x)=4x$이므로 곡선 C_1 위의 점 $(t,\ 2t^2)$에서의 접선의 방정식은

$y-2t^2=4t(x-t) \qquad \therefore y=4tx-2t^2$

이 직선이 곡선 C_2에 접하려면 x에 대한 방정식 $-x^2+2x-a=4tx-2t^2$이 중근을 가져야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2+2(2t-1)x+a-2t^2=0$의 판별식을 D_1이라 할 때,

$\frac{D_1}{4}=(2t-1)^2-(a-2t^2)$

$=6t^2-4t+1-a=0$ …… ㉠

$\therefore a=6t^2-4t+1$ (참)

ㄷ. 두 곡선 C_1, C_2에 모두 접하는 두 직선을 각각 l, m이라 하고, 두 직선 l, m이 곡선 C_1과 접하는 점의 x좌표를 각각 t_1, t_2라 하면 t_1, t_2는 t에 대한 이차방정식 ㉠의 해이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$t_1t_2=\frac{1-a}{6}$ …… ㉡

두 직선 l, m이 서로 수직이므로 기울기의 곱은 -1이다.

즉, $(4t_1)\times(4t_2)=-1$이므로

$t_1t_2=-\frac{1}{16}$ …… ㉢

㉡, ㉢에서

$\frac{1-a}{6}=-\frac{1}{16} \qquad \therefore a=\frac{11}{8}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

06

$y=x^3-ax^2$에서 $y'=3x^2-2ax$

접선의 기울기가 m이므로 $y'=m$에서

$3x^2-2ax=m \qquad \therefore 3x^2-2ax-m=0$ …… ㉠

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β라 하면 α, β는 이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{2a}{3}$, $\alpha\beta=-\frac{m}{3}$ …… ㉡

기울기가 m으로 같은 두 접선은 서로 평행하므로 두 접선 사이의 거리와 선분 PQ의 길이가 같아지려면 두 접점 $P(\alpha,\ \alpha^3-a\alpha^2)$, $Q(\beta,\ \beta^3-a\beta^2)$을 지나는 직선과 접선이 서로 수직이어야 한다.

따라서 $m\times\frac{(\beta^3-a\beta^2)-(\alpha^3-a\alpha^2)}{\beta-\alpha}=-1$이므로

$$m\times\frac{(\beta^3-\alpha^3)-a(\beta^2-\alpha^2)}{\beta-\alpha}=-1$$

$m\times\{(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)-a(\beta+\alpha)\}=-1$

$m\times\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta-a(\alpha+\beta)\}=-1$

위 식에 ㉡을 대입하면

$$m\times\left\{\left(\frac{2a}{3}\right)^2-\left(-\frac{m}{3}\right)-a\times\frac{2a}{3}\right\}=-1$$

$$m\times\left(\frac{m}{3}-\frac{2a^2}{9}\right)=-1$$

$3m^2-2a^2m+9=0$ …… ㉢

실수 m의 값이 오직 하나 존재하므로 m에 대한 이차방정식 ㉢의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a^2)^2-27=0$, $a^4=27$

$\therefore a^2=3\sqrt{3}$

이것을 ㉢에 대입하면 $3m^2-6\sqrt{3}m+9=0$, $m=\sqrt{3}$

$\therefore a^2+m^2=3\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=3+3\sqrt{3}$ 답 ②

07

$y=x^3-3x^2$에서 $y'=3x^2-6x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-3t^2)$으로 놓으면 이 점에서의 접선의 기울기는 $3t^2-6t$이므로 접선의 방정식은

$y=(3t^2-6t)(x-t)+t^3-3t^2$

$\therefore\ y=(3t^2-6t)x-2t^3+3t^2$

이 직선이 점 $(n,\ 0)$을 지나므로

$0=(3t^2-6t)n-2t^3+3t^2$

$2t^3-3(n+1)t^2+6nt=0$

$t\{2t^2-3(n+1)t+6n\}=0$

n이 자연수이므로 $t=0$은 이차방정식 $2t^2-3(n+1)t+6n=0$의 근이 될 수 없다.

따라서 이차방정식 $2t^2-3(n+1)t+6n=0$의 서로 다른 실근의 개수에 1을 더한 값이 접선의 개수 a_n이 된다.

이차방정식 $2t^2-3(n+1)t+6n=0$의 판별식을 D라 하면

$D=9(n+1)^2-4\times2\times6n=9n^2-30n+9$

(i) $D>0$일 때

$9n^2-30n+9>0,\ 3n^2-10n+3>0$

$(3n-1)(n-3)>0$

$\therefore\ n>3$ ($\because$ n은 자연수)

$\therefore\ a_n=3\ (n\geq4)$

(ii) $D=0$일 때

$9n^2-30n+9=0,\ 3n^2-10n+3=0$

$(3n-1)(n-3)=0$

$\therefore\ n=3$ ($\because$ n은 자연수)

$\therefore\ a_n=2\ (n=3)$

(iii) $D<0$일 때

$9n^2-30n+9<0,\ 3n^2-10n+3<0$

$(3n-1)(n-3)<0$

즉, $\frac{1}{3}<n<3$이고 n은 자연수이므로 $n=1,\ 2$

$\therefore\ a_n=1\ (n=1,\ 2)$

(i)~(iii)에 의하여

$\sum_{n=1}^{10}a_n=1\times2+2+3\times7=25$ 답 ③

08

곡선 $y=x^2-2x$와 직선 $y=mx\ (m\neq-2)$의 교점의 x좌표를 구하면 $x^2-2x=mx$에서

$x(x-2-m)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=m+2$

$\therefore\ \mathrm{O}(0,\ 0),\ \mathrm{P}(m+2,\ m^2+2m)$ ······ ㉠

한편, $f(x)=x^2-2x$라 하면 $f'(x)=2x-2$이므로

점 O에서의 접선의 방정식은

$y=-2x$ ······ ㉡

또한 점 P에서의 접선의 방정식은

$y-(m^2+2m)=(2m+2)(x-m-2)$

$\therefore\ y=2(m+1)x-(m+2)^2$ ······ ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$-2x=2(m+1)x-(m+2)^2$

$2(m+2)x=(m+2)^2$

두 접선의 교점의 x좌표가 3이므로 위의 방정식의 근은 $x=3$이다.

이때, $m\neq-2$이므로

$x=\frac{m+2}{2}=3$ ······ ㉣

ㄱ. ㉣에서 $m+2=6$이므로 $m=4$이다. (참)

ㄴ. ㉠에 $m=4$를 대입하면

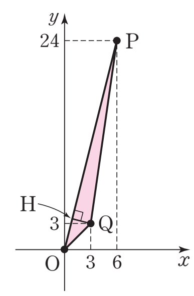
점 $\mathrm{P}(6,\ 24)$이므로 $a=6,\ b=24$

$\therefore\ a+b=6+24=30$ (참)

ㄷ. 직선 OP의 기울기와 곡선 $y=x^2-2x$ 위의 점 $\mathrm{Q}(q,\ q^2-2q)$에서의 접선의 기울기가 같으므로

$\frac{24}{6}=2q-2$에서 $q=3$

즉, 점 $\mathrm{Q}(3,\ 3)$이므로 오른쪽 그림에서 $\overline{\mathrm{QH}}$는 직선 OP, 즉 $4x-y=0$과 점 $\mathrm{Q}(3,\ 3)$ 사이의 거리이다.



$\therefore\ \overline{\mathrm{QH}}=\frac{|4\times3-3|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\frac{9}{\sqrt{17}}$

또한 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{6^2+24^2}=6\sqrt{17}$이므로

삼각형 OPQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{QH}}=\frac{1}{2}\times6\sqrt{17}\times\frac{9}{\sqrt{17}}$

$=27$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

09

ㄱ. $h(x)=f(x)-x$라 하면 함수 $h(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 연속이고,

$h(0)=f(0)-0=1>0,\ h(3)=f(3)-3=-1<0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여

$h(a)=0$, 즉 $f(a)=a$

인 a가 열린구간 $(0,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다. (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$가 미분가능한 함수이므로 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 4)$에서 미분가능하다.

따라서 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=f'(b)$

인 b가 열린구간 $(0,\ 4)$에 적어도 하나 존재한다.

$\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{4-1}{4-0}=\frac{3}{4}$

이므로 $f'(b)=\frac{3}{4}$인 b가 열린구간 $(0,\ 4)$에 적어도 하나 존재한다. (참)

ㄷ. 함수 $f(x)$가 미분가능한 함수이므로

$g(x)=\{f(x)\}^2-x^2$도 미분가능하다. 즉, 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[3,\ 4]$에서 연속이고 열린구간 $(3,\ 4)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{g(4)-g(3)}{4-3}=g'(c)$

인 c가 열린구간 $(3,\ 4)$에 적어도 하나 존재한다.

즉, $g'(c)=5$인 c가 열린구간 $(0,\ 4)$에 적어도 하나 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

03 도함수의 활용 (2)

개념 & 대표 유형 짚어보기

본문 27 ~ 28쪽

01 ⑤ **02** ① **03** 3 **04** ② **05** ③ **06** ③ **07** ③

01

$f'(x)=3x^2+2ax+a-1$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-\{t^3+at^2+(a-1)t\}=(3t^2+2at+a-1)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+2at+a-1)x-2t^3-at^2$

$x=0$일 때, $y=g(t)$이므로

$g(t)=-2t^3-at^2$

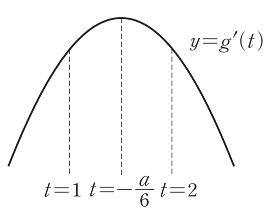
함수 $g(t)$가 닫힌구간 $[1, 2]$에서 감소하려면 $1\le t\le 2$에서 $g'(t)\le 0$이어야 한다.

$g'(t)=-6t^2-2at$

$\quad=-6\left(t+\frac{a}{6}\right)^2+\frac{a^2}{6}$

이므로

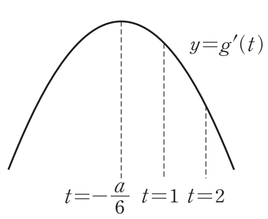
(i) $1\le -\frac{a}{6}\le 2$, 즉 $-12\le a\le -6$일 때,



$g'\left(-\frac{a}{6}\right)=\frac{a^2}{6}\le 0$이어야 하므로 $a=0$

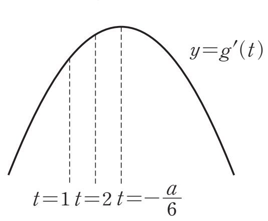
그런데 $-12\le a\le -6$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $-\frac{a}{6}<1$, 즉 $a>-6$일 때,



$g'(1)=-6-2a\le 0$이어야 하므로 $a\ge -3$

(iii) $-\frac{a}{6}>2$, 즉 $a<-12$일 때,



$g'(2)=-24-4a\le 0$이어야 하므로 $a\ge -6$

그런데 $a<-12$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(i)~(iii)에 의하여 조건을 만족시키는 실수 a의 값의 범위는

$a\ge -3$ 답 ⑤

02

조건 (가)에서 함수 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다. 이때, 역함수가 존재하기 위한 필요충분조건이 일대일대응이므로 삼차항의 계수가 음수인 삼차함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 감소해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=-x^2+2a^2x+a\le 0$이어야 한다.

이차방정식 $-x^2+2a^2x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^4+a\le 0$, $a(a+1)(a^2-a+1)\le 0$

이때, $a^2-a+1>0$이므로 $a(a+1)\le 0$

$\therefore -1\le a\le 0$ …… ㉠

조건 (나)에서 $g(-1)=3$이고 함수 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로

$f(3)=-1$

즉, $-9+9a^2+3a+2=-1$이므로

$9a^2+3a-6=0$, $3a^2+a-2=0$

$(a+1)(3a-2)=0$

$\therefore a=-1$ ($\because$ ㉠)

따라서 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2-x+2$이므로

$f(1)=-\frac{1}{3}+1-1+2=\frac{5}{3}$

/ 보충 설명 /

이차부등식이 항상 성립할 조건

(1) 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 성립하려면 $a>0$, $b^2-4ac<0$

(2) 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$이 성립하려면 $a<0$, $b^2-4ac<0$ 답 ①

03

조건 (가)에 의하여 $f'(1)=0$, $f(1)=\frac{7}{2}$

조건 (나)에서 곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 1)$을 지나고 이 점에서의 접선의 기울기가 6이므로

$f'(0)=6$, $f(0)=1$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+1$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f'(0)=6$에서 $c=6$

$f'(1)=0$에서 $3a+2b+c=0$

$\therefore 3a+2b=-6$ …… ㉠

$f(1)=\frac{7}{2}$에서 $a+b+c+1=\frac{7}{2}$

$\therefore a+b=-\frac{7}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=-\frac{9}{2}$

따라서 $f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x+1$이다.

$f'(x)=3x^2-9x+6=3(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값을 가지므로 극솟값은

$f(2)=2^3-\frac{9}{2}\times 2^2+6\times 2+1=3$ 답 3

04

조건 (가)에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 삼차함수이다. 따라서 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 6인 이차함수이다.

조건 (나)에서 $f'(1)=0$, $f'(3)=0$이므로

$f'(x)=6(x-1)(x-3)$

$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\frac{f(2-2h)-f(2)}{-2h}\times 2\right\}$

$=f'(2)+2f'(2)$

$=3f'(2)$

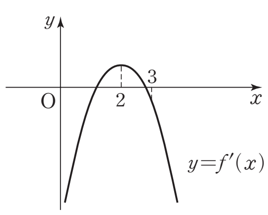
$=3\times 6\times 1\times(-1)=-18$ 답 ②

05

열린구간 $(0, 3)$에서 함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 열린구간 $(0, 3)$에서 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f'(x)=-3x^2+12x+a$

$\quad=-3(x-2)^2+a+12$



이차함수 $f'(x)$의 그래프의 축이 직선 $x=2$이므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 열린구간 $(0, 3)$에서 x축과 서로 다른 두 점에서 만나려면 $f'(2)>0$, $f'(0)<0$, $f'(3)<0$이어야 한다.

$f'(2)=a+12>0$에서 $a>-12$

$f'(0)=-3\times(-2)^2+a+12<0$에서 $a<0$

$f'(3)=-3\times 1^2+a+12<0$에서 $a<-9$

$\therefore -12<a<-9$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 -11, -10이므로 그 합은 -21이다. 답 ③

06

$f(x)=-x^3+2x^2+5x$에서

$f'(x)=-3x^2+4x+5$

$f'(-1)=-2$이므로 점 $A(-1, -2)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-2)=-2(x+1)$ $\quad\therefore y=-2x-4$

$\therefore g(x)=-2x-4$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근과 같으므로

$-x^3+2x^2+5x=-2x-4$에서

$x^3-2x^2-7x-4=0$, $(x+1)^2(x-4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

이때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$의 교점 $B(a, b)$에서 $a\neq-1$이므로 $a=4$

$g(4)=-2\times 4-4=-12$이므로 $b=-12$

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=-x^3+2x^2+5x-(-2x-4)$

$\quad=-x^3+2x^2+7x+4$

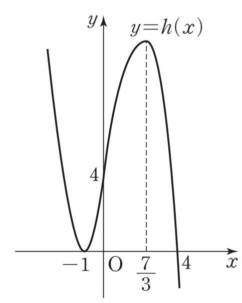
$\therefore h'(x)=-3x^2+4x+7$

$\quad=-(x+1)(3x-7)$

$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=\frac{7}{3}$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{7}{3}$	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↘	극소	↗	극대	↘



따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 위의 그림과 같으므로 함수 $h(x)$는 $x=\frac{7}{3}$에서 극댓값을 갖는다.

$\therefore k=\frac{7}{3}$

$\therefore a+b+k=4-12+\frac{7}{3}=-\frac{17}{3}$ 답 ③

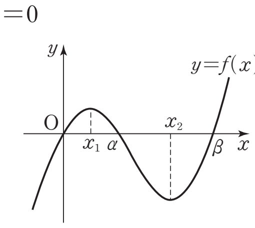
07

ㄱ. $g(x)=f(a)+(b-a)f'(x)$이므로

$g(x)=f(a)$에서

$f(a)+(b-a)f'(x)=f(a)$

$\therefore (b-a)f'(x)=0$



위의 그림에서 함수 $f(x)$는 $x=x_1$에서 극대, $x=x_2$에서 극소이므로

$f'(x_1)=0$, $f'(x_2)=0$

따라서 $b-a>0$이고, 방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 x_1, x_2이므로 x에 대한 방정식 $g(x)=f(a)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. $h(x)=g(x)-f(a)=(b-a)f'(x)$라 하면

$h(a)=g(a)-f(a)=(b-a)f'(a)$

$b-a>0$이고, $a<0$에서 $f'(a)>0$이므로 $h(a)>0$

531_수학H_해설(001-048)ok.indd 25 19. 7. 12. 오후 1:52

$\therefore f(a)<g(a)$ (참)

ㄷ. $b-a>0$이고,

$h(x)=g(x)-f(a)=(b-a)f'(x)$에서

$h(b)=g(b)-f(a)=(b-a)f'(b)$

b가 α와 극솟값을 갖는 x_2 사이에 존재하면

$f'(b)<0$

b가 극솟값을 갖는 x_2와 β 사이에 존재하면

$f'(b)>0$

즉, b의 값에 따라 $h(b)$의 부호가 달라지므로 $f(a)<g(b)$라 할 수 없다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

심화 유형 도전하기 본문 29 ~ 31쪽

01 ②	02 3	03 15	04 ①	05 ④	06 ④
07 ②	08 28	09 ⑤			

01

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

이차방정식 $3x^2+2ax+b=0$의 두 근이 1, α $(\alpha>1)$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$1+\alpha=-\dfrac{2a}{3}$, $1\times\alpha=\dfrac{b}{3}$

$\therefore a=-\dfrac{3}{2}(1+\alpha)$, $b=3\alpha$ …… ㉠

두 점 $\mathrm{A}(1,\ 1+a+b+c)$, $\mathrm{B}(\alpha,\ \alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c)$를 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{(\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c)-(1+a+b+c)}{\alpha-1}$

$=\dfrac{(\alpha^3-1)+a(\alpha^2-1)+b(\alpha-1)}{\alpha-1}$

$=\alpha^2+\alpha+1+a(\alpha+1)+b$

$=\alpha^2+\alpha+1-\dfrac{3}{2}(\alpha+1)^2+3\alpha$ ($\because$ ㉠)

$=-\dfrac{1}{2}\alpha^2+\alpha-\dfrac{1}{2}$

이때, 이 직선의 기울기가 -2이므로

$-\dfrac{1}{2}\alpha^2+\alpha-\dfrac{1}{2}=-2$

$\alpha^2-2\alpha-3=0$

$(\alpha-3)(\alpha+1)=0$

$\therefore \alpha=3$ ($\because \alpha>1$)

이것을 ㉠에 대입하면 $a=-6$, $b=9$

따라서 $f(x)=x^3-6x^2+9x+c$이므로 극댓값과 극솟값의 차는

$f(1)-f(3)=(1-6+9+c)-(27-54+27+c)$

$=4$ 답 ②

02

$g(x)=|f(x)-f(2)|$에서

$g(x)=\begin{cases} f(x)-f(2) & (f(x)\ge f(2)) \\ -f(x)+f(2) & (f(x)<f(2)) \end{cases}$

$g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (f(x)>f(2)) \\ -f'(x) & (f(x)<f(2)) \end{cases}$

조건 ㈎에서 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 미분가능하므로

$f'(2)=-f'(2)$

$\therefore f'(2)=0$ …… ㉠

조건 ㈏에서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극값 4를 가지고 $f(0)=0$이므로 $g(0)=|f(0)-f(2)|=4$에서

$f(2)=4$ 또는 $f(2)=-4$

또한 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 0이 아닌 극값을 가지므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 또는 극솟값을 가진다.

$\therefore f'(0)=0$ …… ㉡

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$

㉠, ㉡에서

$f'(0)=c=0$

$f'(2)=32+12a+4b=0$ $\therefore 3a+b=-8$ …… ㉢

(i) $f(2)=4$일 때,

$f(2)=16+8a+4b=4$이므로

$2a+b=-3$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$a=-5$, $b=7$

즉, $f(x)=x^4-5x^3+7x^2$이므로

$f(1)=1-5+7=3$

(ii) $f(2)=-4$일 때,

$f(2)=16+8a+4b=-4$이므로

$2a+b=-5$ …… ㉤

㉢, ㉤을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=1$

즉, $f(x)=x^4-3x^3+x^2$이므로

$f(1)=1-3+1=-1$

(i), (ii)에서 $f(1)$의 최댓값은 3이다. 답 3

03

$g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (f(x)>2x) \\ 2 & (f(x)<2x) \end{cases}$에서 함수 $g(x)$는 $f(x)\ne 2x$인 모든 실수 x에서 미분가능하다.

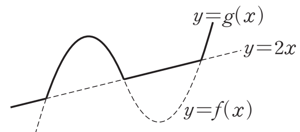
조건 ㈏에서 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 미분가능하지 않으므로

$f(2)=4$, $f'(2)\ne 2$

또한 $f(0)=0$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x$는 $x=0$, $x=2$에서 만난다.

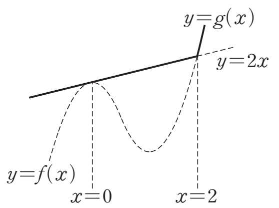
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같이 나누어 생각해 볼 수 있다.

(i) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x$가 세 점에서 만나는 경우

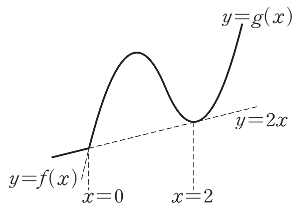


위의 경우 함수 $g(x)$가 극값을 가지므로 조건 ㈎를 만족시키지 않는다.

(ii) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x$가 두 점에서 만나는 경우



[그림 1]



[그림 2]

[그림 1]의 경우 함수 $g(x)$가 극값을 갖지 않으므로 조건 ㈎를 만족시킨다.

또한 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x$가 $x=0$, $x=2$일 때 만나고 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 미분가능하지 않으려면 [그림 1]의 경우와 같아야 한다.

따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x$가 $x=0$에서 접하고 $x=2$에서 만나므로

$f(x)-2x=x^2(x-2)$

$\therefore f(x)=x^2(x-2)+2x$

$\therefore f(3)=3^2\times1+2\times3=15$ 답 15

04

$f(x)=x^3+3x^2-9x-4$에서

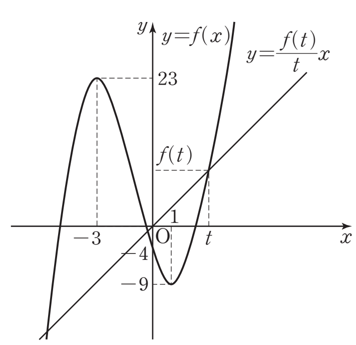
$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값 $f(-3)=23$, $x=1$에서 극솟값 $f(1)=-9$를 가지므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$y=\dfrac{f(t)}{t}x$는 원점과 점 $(t,\ f(t))$를 지나는 직선이므로 위의 그림과 같다.

원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 x좌표를 α라 하고, 이 접선과 곡선 $y=f(x)$가 만나는 접점이 아닌 점의 x좌표를 β라 하자.

$t>\beta$일 때 $g(t)=3$이고, $t=\beta$일 때 $g(t)=2$이므로 함수 $g(t)$가 구간 $(a,\ \infty)$에서 연속이기 위한 a의 최솟값은 β이다.

접점의 좌표가 $(\alpha,\ \alpha^3+3\alpha^2-9\alpha-4)$이고, 접선의 기울기는 $f'(\alpha)=3\alpha^2+6\alpha-9$이므로 접선의 방정식은

$y=(3\alpha^2+6\alpha-9)(x-\alpha)+\alpha^3+3\alpha^2-9\alpha-4$

이 접선이 원점을 지나므로

$0=-3\alpha^3-6\alpha^2+9\alpha+\alpha^3+3\alpha^2-9\alpha-4$

$2\alpha^3+3\alpha^2+4=0$

$(\alpha+2)(2\alpha^2-\alpha+2)=0$

$\therefore \alpha=-2\ (\because 2\alpha^2-\alpha+2>0)$

따라서 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 방정식은

$y=-9x$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-9x$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^3+3x^2-9x-4=-9x$에서

$x^3+3x^2-4=0$, $(x-1)(x+2)^2=0$

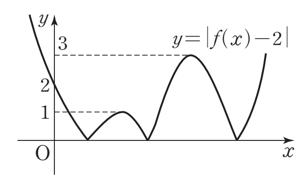
이 방정식의 근이 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$이고 $\alpha=-2$이므로 $\beta=1$

따라서 $m=1$이므로

$f(m)=f(1)=1+3-9-4=-9$ 답 ①

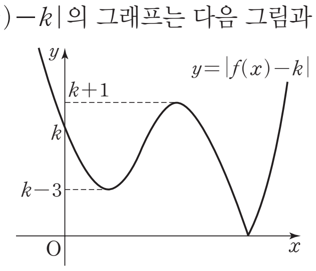
05

ㄱ. $y=f(x)-2$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=|f(x)-2|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



위의 그림에서 $a_2=1+3=4$, $b_2=0+0+0=0$이므로 $a_2+b_2=4$ (참)

ㄴ. $y=f(x)-k$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 $-k$만큼 평행이동한 것이므로 $k\geq3$일 때 함수 $y=|f(x)-k|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



위의 그림에서 $a_k=k+1\ (k\geq3)$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=a_1+a_2+\sum_{k=3}^{10}(k+1)$$
$$=4+4+\frac{8(4+11)}{2}$$
$$=4+4+60=68\ (\text{거짓})$$

531_수학H_해설(001-048)ok.indd 27 19. 7. 12. 오후 1:52

ㄷ. ㄴ의 그림에서 $b_k=k-3\ (k\ge3)$이므로

$a_k+b_k=2k-2\ (k\ge3)$

$\therefore \sum_{k=1}^{20}(a_k+b_k)=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\sum_{k=3}^{20}(2k-2)$

$=4+4+\dfrac{18(4+38)}{2}$

$=4+4+378=386$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

06

ㄱ. 조건 (가)에 의하여 함수 $g(x)=f(x+4)-k$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 $-k$만큼 평행이동한 것이다.

그런데 조건 (다)에서 함수 $g(x)$가 $x=4$에서 극값 0을 가지므로 함수 $f(x)$는 $x=8$에서 극값 k를 갖는다.

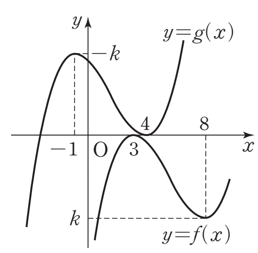
따라서 조건 (나)에 의하여 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극댓값 0을 갖고, $x=8$에서 극솟값 k를 갖는다.

삼차함수 $f(x)$의 극솟값은 극댓값보다 작으므로

$k<0$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극댓값 0을 가지므로 함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $-k$를 갖는다. 또한 함수 $f(x)$는 $x=8$에서 극솟값 k를 가지므로 함수 $f(x)$의 극솟값과 함수 $g(x)$의 극댓값의 합은 $k+(-k)=0$이다. (거짓)

ㄷ. 다음 그림과 같이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 서로 만나지 않는다. (참)



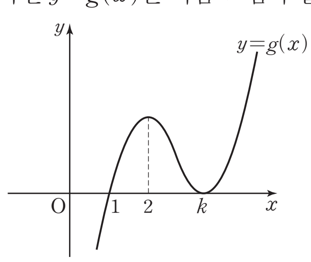
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

07

$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-k)^2$ …… ㉠

에서 방정식 $f(x)g(x)=0$, 즉 $f(x)=0$ 또는 $g(x)=0$의 모든 실근이 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=k$이다.

이때, 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $g(x)$가 $x=2$에서 극댓값 2를 가지려면 곡선 $y=g(x)$는 다음 그림과 같아야 한다.



따라서 ㉠으로부터

$g(x)=a(x-1)(x-k)^2$ (단, $a>0$),

$f(x)=\dfrac{1}{a}(x-1)(x-2)^2$

으로 놓을 수 있다.

$g'(x)=a(x-k)^2+2a(x-1)(x-k)$

$=a(x-k)(3x-k-2)$

$g'(2)=0$이고 $k>2$이므로

$\dfrac{k+2}{3}=2,\ k=4$

$\therefore g(x)=a(x-1)(x-4)^2$

$g(2)=2$이므로

$a(2-4)^2=2,\ a=\dfrac{1}{2}$

$\therefore f(x)=2(x-1)(x-2)^2,\ g(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)(x-4)^2$

방정식 $f(x)=g(x)$에서

$2(x-1)(x-2)^2=\dfrac{1}{2}(x-1)(x-4)^2$

$(x-1)\{4(x-2)^2-(x-4)^2\}=0$

$x(x-1)(3x-8)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{8}{3}$

따라서 가장 큰 실근 α는 $\dfrac{8}{3}$이다.

이때, $f'(x)=2(x-2)^2+4(x-1)(x-2)$이므로

$f'(\alpha)=f'\left(\dfrac{8}{3}\right)$

$=2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+4\times\dfrac{5}{3}\times\dfrac{2}{3}$

$=\dfrac{8}{9}+\dfrac{40}{9}=\dfrac{16}{3}$ 답 ②

08

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족시키므로

$f(x)=x^4+bx^2+c$ (b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=4x^3+2bx$

점 $(0,\ a)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^4+bt^2+c)$라 하면 $f'(t)=4t^3+2bt$이므로 접선의 방정식은

$y=(4t^3+2bt)(x-t)+t^4+bt^2+c$

이 접선이 점 $(0,\ a)$를 지나므로

$a=(4t^3+2bt)\times(-t)+t^4+bt^2+c$

$=-3t^4-bt^2+c$ …… ㉠

이때, 접선의 개수는 t에 대한 사차방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

$h(t)=-3t^4-bt^2+c$라 하면

$h'(t)=-12t^3-2bt=-2t(6t^2+b)$

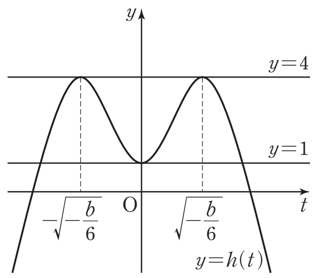
$b\ge0$이면 사차함수 $h(t)$가 극값을 오직 하나 가지므로 함수 $g(a)$가 불연속인 점이 오직 하나이다.

문제의 조건에서 불연속점은 두 개이므로 $b<0$이어야 한다.

$h'(t)=0$에서 $t=-\sqrt{-\dfrac{b}{6}}$ 또는 $t=0$ 또는 $t=\sqrt{-\dfrac{b}{6}}$

함수 $h(t)$가 극댓값 두 개와 극솟값 한 개를 갖고 함수 $g(a)$가

$a=1$, $a=4$에서만 불연속이므로 함수 $y=h(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$h(0)=c$에서 $c=1$

$h\left(\sqrt{-\frac{b}{6}}\right)=\frac{b^2}{12}+c=4$에서 $b^2=36$

$\therefore b=-6$ ($\because b<0$)

따라서 $f(x)=x^4-6x^2+1$이므로

$f(3)=81-54+1=28$ 　　　　답 28

09

ㄱ. $h(x)=f(x)-f(x-p)$에서

$h'(x)=f'(x)-f'(x-p)$

함수 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<0) \\ f(x-p) & (x\geq 0)\end{cases}$이 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to 0-} g(x)=g(0)$에서

$\lim_{x\to 0+} f(x-p)=\lim_{x\to 0-} f(x)=f(-p)$, $f(0)=f(-p)$

$\therefore h(0)=0$

또한 $g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (x<0) \\ f'(x-p) & (x>0)\end{cases}$이고, 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 0+} g'(x)=\lim_{x\to 0-} g'(x)$에서

$\lim_{x\to 0+} f'(x-p)=\lim_{x\to 0-} f'(x)$

$f'(-p)=f'(0)$ 　　$\therefore h'(0)=0$

함수 $h(x)$는 이차함수이고 $h(0)=h'(0)=0$이므로

$h(x)=kx^2$ (단, k는 상수)

따라서 곡선 $y=h(x)$는 원점에서 x축과 접한다. (참)

ㄴ. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$를

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$$\begin{aligned}f(x-p)&=(x-p)^3+a(x-p)^2+b(x-p)+c\\&=(x^3-3px^2+3p^2x-p^3)+a(x^2-2px+p^2)\\&\qquad+b(x-p)+c\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}h(x)&=f(x)-f(x-p)\\&=3px^2+(2ap-3p^2)x+(p^3-ap^2+bp)\end{aligned}$$

ㄱ의 결과로부터

$2ap-3p^2=0$이고 $p^3-ap^2+bp=0$

$p>0$이므로 $a=\frac{3}{2}p$, $b=\frac{1}{2}p^2$이다.

이때,

$f(x)=x^3+\frac{3}{2}px^2+\frac{1}{2}p^2x+c$에서

$f'(x)=3x^2+3px+\frac{1}{2}p^2$

$f'(x)=0$에서

$3x^2+3px+\frac{1}{2}p^2=0$

위의 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(3p)^2-4\times 3\times\frac{1}{2}p^2=3p^2>0$

따라서 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 삼차함수 $f(x)$는 극값을 갖는다. (참)

ㄷ. ㄱ, ㄴ에서

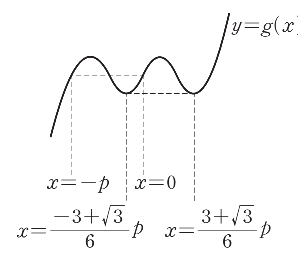
$f(0)=f(-p)$이고

$f'(0)=f'(-p)=\frac{1}{2}p^2>0$

ㄴ에서 방정식 $f'(x)=0$의 두 실근은

$x=\frac{-3-\sqrt{3}}{6}p$, $x=\frac{-3+\sqrt{3}}{6}p$이므로 함수 $f(x)$는

$x=\frac{-3+\sqrt{3}}{6}p$에서 극솟값을 갖는다.



함수 $f(x-p)$는 $x=\frac{-3+\sqrt{3}}{6}p+p$, 즉 $x=\frac{3+\sqrt{3}}{6}p$에서 극솟값을 가지므로

$$\begin{aligned}\alpha+\beta&=\frac{-3+\sqrt{3}}{6}p+\frac{3+\sqrt{3}}{6}p\\&=\frac{\sqrt{3}}{3}p\end{aligned}$$

$\alpha+\beta=\sqrt{3}$에서 $\frac{\sqrt{3}}{3}p=\sqrt{3}$

$\therefore p=3$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 　　　　답 ⑤

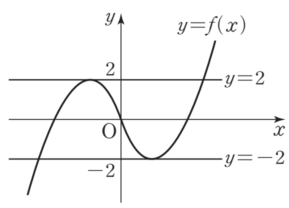
04 도함수의 활용 (3)

개념 & 대표 유형 짚어보기 본문 32 ~ 33쪽

01 ① **02** ③ **03** ① **04** 7 **05** ③ **06** ③
07 71

01

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시키고
방정식 $\{f(x)\}^2=4$가 서로 다른 4개의 실근을 가지므로 두 방정식 $f(x)=-2$와 $f(x)=2$는 각각 서로 다른 2개의 실근을 갖는다.
따라서 다음 그림과 같이 함수 $f(x)$는 극값을 갖고 극솟값은 -2, 극댓값은 2이다.



$f(x)=x^3-ax\ (a>0)$이라 하면
$f'(x)=3x^2-a$이므로 $f'(x)=0$에서
$3x^2-a=0 \qquad \therefore x=-\sqrt{\dfrac{a}{3}}$ 또는 $x=\sqrt{\dfrac{a}{3}}$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{\dfrac{a}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{a}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

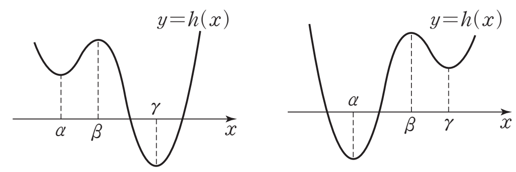
함수 $f(x)$가 $x=\sqrt{\dfrac{a}{3}}$에서 극솟값 -2를 가지므로
$f\left(\sqrt{\dfrac{a}{3}}\right)=\left(\sqrt{\dfrac{a}{3}}\right)^3-a\times\sqrt{\dfrac{a}{3}}=-\dfrac{2a\sqrt{a}}{3\sqrt{3}}=-2$
$a\sqrt{a}=3\sqrt{3} \qquad \therefore a=3$
따라서 $f(x)=x^3-3x$이므로
$f(1)=1-3=-2$ 답 ①

02

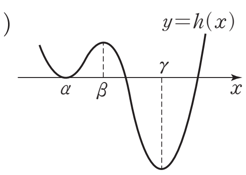
$\lim_{x\to\infty} f'(x)=\infty$이므로 $f'(x)$, $f(x)$의 최고차항의 계수는 양수이다.
$\lim_{x\to\infty} g'(x)=-\infty$이므로 $g'(x)$, $g(x)$의 최고차항의 계수는 음수이다.
그러므로 $h(x)=f(x)-g(x)$의 최고차항의 계수는 양수이다.
또한 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$이고
$h'(x)=0$에서 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$ 또는 $x=\gamma$
함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

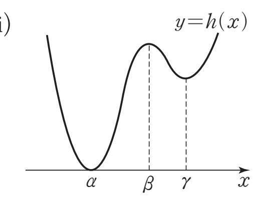
x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

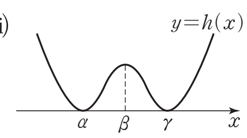
따라서 함수 $h(x)$는 $x=\alpha$, $x=\gamma$에서 극솟값, $x=\beta$에서 극댓값을 갖는다.
ㄱ. $h(\alpha)h(\gamma)<0$이면 두 극솟값의 부호가 서로 다르므로 $y=h(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다. 즉, 방정식 $h(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)



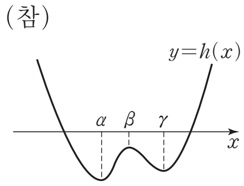
ㄴ. $h(\alpha)h(\gamma)=0$이면 $h(\alpha)=0$일 때, $y=h(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다. 즉, 방정식 $h(x)=0$은 (ii) 단 하나의 실근을 가질 수도 있고 (iii) 서로 다른 두 실근을 가질 수도 있다. (거짓)

(i)


(ii)


(iii)


ㄷ. $h(\beta)<0$이면 $y=h(x)$의 그래프가 다음 그림과 같이 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $h(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)



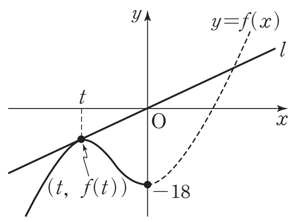
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

03

$x^3+4x^2-ax-18\le 0$에서
$x^3+4x^2-18\le ax$
이때, $f(x)=x^3+4x^2-18$이라 하면
$f'(x)=3x^2+8x=x(3x+8)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-\dfrac{8}{3}$
$x\le 0$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\dfrac{8}{3}$	$\cdots$	0
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	↗	극대	↘	-18

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선을 l, 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 하면 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-(t^3+4t^2-18)=(3t^2+8t)(x-t)$

$\therefore\ y=(3t^2+8t)x-2t^3-4t^2-18$ …… ㉠

이 접선이 원점을 지나므로

$0=-2t^3-4t^2-18,\ 2t^3+4t^2+18=0$

$2(t+3)(t^2-t+3)=0$

$\therefore\ t=-3\ (\because\ t^2-t+3>0)$

$t=-3$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은 $y=3x$

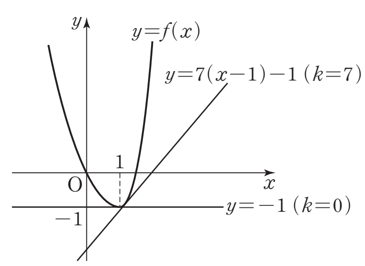
주어진 부등식이 항상 성립하려면 곡선 $y=f(x)$가 $x\le0$에서 직선 $y=ax$에 접하거나 그 아래에 위치해야 하므로

$a\le3$

따라서 실수 a의 최댓값은 3이다. 답 ①

04

$f(x)=\begin{cases} x^2-2x & (x<1) \\ x^3+2x^2-4 & (x\ge1) \end{cases}$에서 $f(1)=-1$이고 직선 $y=k(x-1)-1$이 k의 값에 관계없이 점 $(1,\ -1)$을 지나므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge k(x-1)-1$이 성립하기 위해서는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=k(x-1)-1$과 $x=1$에서만 만나야 한다.



(i) $x<1$일 때

$f'(x)=2x-2$이고, x가 1에 가까워지면 접선의 기울기는 0에 가까워진다. 따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=k(x-1)-1$과 $x=1$에서만 만나려면 $k\ge0$이어야 한다.

(ii) $x>1$일 때

$f'(x)=3x^2+4x$이고, x가 1에 가까워지면 접선의 기울기는 7에 가까워진다. 따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=k(x-1)-1$과 $x=1$에서만 만나려면 $k\le7$이어야 한다.

(i), (ii)에서 $0\le k\le7$이므로 정수 k의 최댓값과 최솟값의 합은

$7+0=7$ 답 7

05

$x(t)=t^3-\frac{15}{2}t^2+12t$에서 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=x'(t)=3t^2-15t+12=3(t-1)(t-4)$

가속도를 $a(t)$라 하면

$a(t)=v'(t)=6t-15$

ㄱ. 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$v(t)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=4$

또한 $t<1$일 때 $v(t)>0$, $1<t<4$일 때 $v(t)<0$, $t>4$일 때 $v(t)>0$이므로

$t=1$, $t=4$일 때 점 P는 운동 방향을 바꾼다. (참)

ㄴ. $t=2$일 때, 점 P의 가속도는

$a(2)=6\times2-15=-3$ (참)

ㄷ. $v(t)=3t^2-15t+12=3\left(t-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{27}{4}$

이므로 속력은

$|v(t)|=3\left|\left(t-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right|$

이때, $|v(2)|=3\times|-2|=6$, $\left|v\left(\frac{5}{2}\right)\right|=3\times\left|-\frac{9}{4}\right|=\frac{27}{4}$,

$|v(5)|=3\times|4|=12$이므로 $2\le t\le5$일 때 점 P의 최대 속력은 12이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

/ 보충 설명 /

물체의 속도와 운동 방향

(1) 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가 $x=f(t)$일 때, 시각 t에서의 점 P의 속도를 $v=f'(t)$라 하면

① $v>0$ ➡ 점 P가 양의 방향으로 움직인다.

② $v<0$ ➡ 점 P가 음의 방향으로 움직인다.

③ $v=0$ ➡ 점 P가 운동 방향을 바꾸거나 정지한다.

(2) 수직으로 던져 올린 물체의 운동에서

① 최고점에 도달할 때 ➡ 속도 $v=0$

② 땅에 떨어질 때 ➡ 높이 $h=0$ 답 ③

06

t초 후의 점 P의 좌표는 $(2t,\ 0)$이므로 직선 BP의 기울기는 $-\frac{1}{t}$이고 직선 PQ는 직선 BP에 수직이므로 직선 PQ의 기울기는 t이다.

따라서 직선 PQ의 방정식은

$y=t(x-2t)$ $\quad\therefore\ y=tx-2t^2$

점 Q의 좌표가 $(6,\ 6t-2t^2)$이므로 삼각형 PAQ의 넓이를 $f(t)$라 하면

$f(t)=\frac{1}{2}\times\overline{PA}\times\overline{AQ}$

$=\frac{1}{2}(6-2t)(6t-2t^2)$

$=2t(t-3)^2$

$=2t^3-12t^2+18t$

$\therefore\ f'(t)=6t^2-24t+18$

삼각형 PAQ가 직각이등변삼각형이 되려면 $\overline{PA}=\overline{AQ}$이어야 하므로

$6-2t=6t-2t^2$에서

$2t^2-8t+6=0$

$t^2-4t+3=0$, $(t-1)(t-3)=0$

$\therefore t=1$ ($\because 0<t<3$)

따라서 $t=1$일 때, 삼각형 PAQ의 넓이의 변화율은

$f'(1)=6-24+18=0$ 답 ③

07

t초 후에 $\overline{EP}=t$, $\overline{FQ}=t$, $\overline{HR}=2t$이므로

삼각형 HPQ의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=10^2-\left\{\frac{1}{2}\times 10t+\frac{1}{2}(10-t)t+\frac{1}{2}\times 10(10-t)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}t^2-5t+50$$

따라서 세 점 P, Q, R가 출발한 지 t초 후 사면체 R$-$HPQ의 부피를 $V(t)$라 하면

$$V(t)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}t^2-5t+50\right)\times 2t$$

$$=\frac{1}{3}(t^3-10t^2+100t)$$

$V'(t)=\frac{1}{3}(3t^2-20t+100)$이므로

$V'(4)=\frac{1}{3}(48-80+100)=\frac{68}{3}$

따라서 $p=3$, $q=68$이므로

$p+q=3+68=71$ 답 71

심화 유형 도전하기 본문 34 ~ 35쪽

01 21 **02** 19 **03** ③ **04** ⑤ **05** 30 **06** ③

01

$f(x)=t$로 놓으면

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(t)$이므로

$(g\circ f)(x)=0$에서

$t^3-(n-1)t^2-nt=0$

$t(t+1)(t-n)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=0$ 또는 $t=n$

$\therefore f(x)=-1$ 또는 $f(x)=0$ 또는 $f(x)=n$

방정식 $(g\circ f)(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 세 방정식 $f(x)=-1$, $f(x)=0$, $f(x)=n$의 서로 다른 실근의 개수의 합과 같다.

$f(x)=2x^3-6x^2+k$에서

$f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$

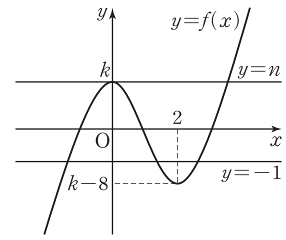
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	$-$	0	+
$f(x)$	↗	k	↘	$k-8$	↗

방정식 $(g\circ f)(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 8이므로 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖고, 두 방정식 $f(x)=-1$, $f(x)=n$ 중 하나는 서로 다른 세 실근을, 다른 하나는 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

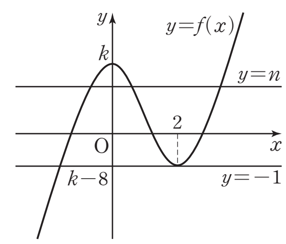
(i) 방정식 $f(x)=-1$이 서로 다른 세 실근을 갖고, 방정식 $f(x)=n$이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우



$k-8<-1<k$, $k=n$이므로 $-1<k<7$, $k=n$

$\therefore n=1, 2, 3, \cdots, 6$

(ii) 방정식 $f(x)=n$이 서로 다른 세 실근을 갖고, 방정식 $f(x)=-1$이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우



$k-8<n<k$, $k-8=-1$이므로 $k=7$, $-1<n<7$

$\therefore n=1, 2, 3, \cdots, 6$

(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$1+2+3+\cdots+6=\frac{6\times 7}{2}=21$ 답 21

02

$f(x)=x^3+ax^2-4x$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-4$

점 $P(t, f(t))$에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2+2at-4$이므로 접선의 방정식은

$y=(3t^2+2at-4)(x-t)+t^3+at^2-4t$

위의 식에 $x=0$을 대입하면 $y=-2t^3-at^2$

$\therefore Q(0, -2t^3-at^2)$

삼각형 OPQ의 넓이가 $g(t)$이므로

$g(t)=\frac{1}{2}|t(-2t^3-at^2)|=\frac{1}{2}|t^3(2t+a)|$

$y=\frac{1}{2}t^3(2t+a)$에서

$y'=\frac{1}{2}\{3t^2(2t+a)+t^3\times 2\}=\frac{1}{2}t^2(8t+3a)$

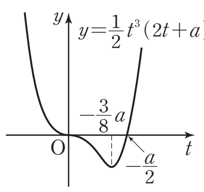
$y'=0$에서 $t=0$ 또는 $t=-\frac{3}{8}a$

함수 $g(t)$가 오직 $t=4$일 때만 미분가능하지 않으므로 $a<0$이다.

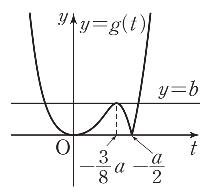
함수 $y=\frac{1}{2}t^3(2t+a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\frac{3}{8}a$	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$	0	$+$
y	↘	0	↘	극소	↗

함수 $y=\frac{1}{2}t^3(2t+a)$의 그래프는 [그림 1]과 같고, 함수 $y=g(t)$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

함수 $g(t)$가 $t=4$에서 미분가능하지 않으므로

$-\frac{a}{2}=4$ $\quad\therefore a=-8$

함수 $g(t)$가 $t=-\frac{3}{8}a=3$에서 극대이므로 극댓값은

$g(3)=\frac{1}{2}|27\times(-2)|=27$

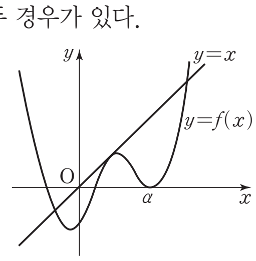
방정식 $g(t)=b$의 서로 다른 실근의 개수가 3이려면 $b=27$이어야 하므로

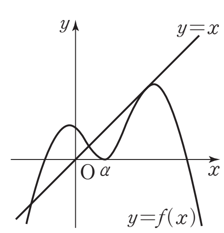
$a+b=-8+27=19$

답 19

03

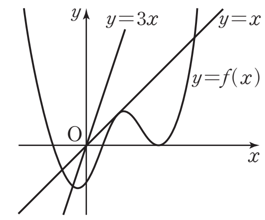
조건 ㈎~㈐를 종합하면 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 양의 실근과 하나의 음의 실근을 갖는다. 즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축의 양의 방향과 두 점에서 만나고 x축의 음의 방향과 한 점에서 만난다. 마찬가지로 방정식 $f(x)=x$도 서로 다른 두 양의 실근과 하나의 음의 실근을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$와 $x>0$일 때 두 점에서 만나고 $x<0$일 때 한 점에서 만난다. 위를 종합하면 사차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같이 두 경우가 있다.

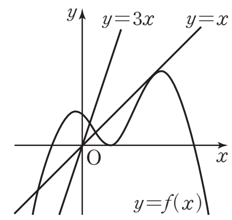




ㄱ. 두 그래프에서 모두 사차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축의 양의 부분과 접한다.
이때, 사차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 접점의 x좌표를 α라 하면 $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$이 모두 성립하므로 방정식 $f(x)=0$과 $f'(x)=0$은 $x=\alpha$ $(\alpha>0)$을 공통근으로 갖는다. (참)

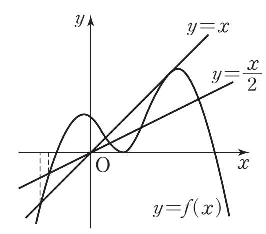
ㄴ. 두 그래프에서 모두 다음 그림과 같이 사차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=3x$의 교점의 x좌표 중 한 개는 음수이고, 한 개는 양수이므로 방정식 $f(x)=3x$는 양의 실근 한 개와 음의 실근 한 개를 갖는다.





즉, 모든 실근의 곱은 0보다 작다. (참)

ㄷ. 방정식 $f(x)=\frac{x}{2}$의 음의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{2}$의 교점 중에서 x좌표가 음수인 점의 x좌표이다.
그런데 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같은 경우에는 방정식 $f(x)=\frac{x}{2}$의 음의 실근이 방정식 $f(x)=x$의 음의 실근보다 크다. (거짓)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

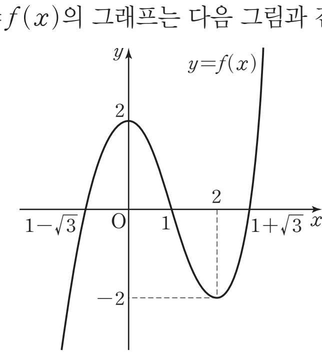
답 ③

04

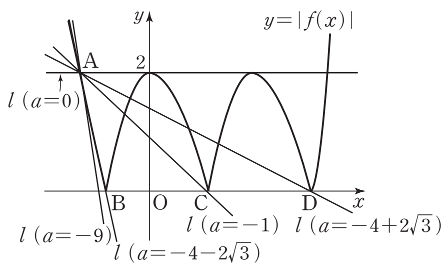
$|x^3-3x^2+2|-2=a(x+1)$에서
$|x^3-3x^2+2|=a(x+1)+2$
이때, $f(x)=x^3-3x^2+2$라 하면
$f(x)=(x-1)\{x-(1-\sqrt{3})\}\{x-(1+\sqrt{3})\}$
$f(x)=0$에서
$x=1-\sqrt{3}$ 또는 $x=1$ 또는 $x=1+\sqrt{3}$
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$이므로
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



한편, 직선 $l: y=a(x+1)+2$는 a의 값에 관계없이 항상 점 $A(-1, 2)$를 지나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 다음 그림과 같이 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 l의 교점의 개수와 같다.

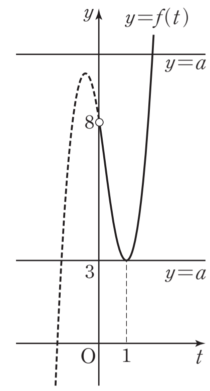


이때, $\mathrm{A}(-1,\ 2)$, $\mathrm{B}(1-\sqrt{3},\ 0)$, $\mathrm{C}(1,\ 0)$, $\mathrm{D}(1+\sqrt{3},\ 0)$이므로
점 A에서 $y=|f(x)|$의 그래프에 그은 접선의 기울기는
$y=-f(x)$에서 $y'=-f'(x)$이므로
$-f'(-1)=-\{-3\times(-3)\}=-9$
또한 직선 AB의 기울기는
$$\frac{0-2}{1-\sqrt{3}-(-1)}=\frac{-2}{2-\sqrt{3}}=-4-2\sqrt{3}$$
직선 AC의 기울기는
$$\frac{0-2}{1-(-1)}=\frac{-2}{2}=-1$$
직선 AD의 기울기는
$$\frac{0-2}{1+\sqrt{3}-(-1)}=\frac{-2}{2+\sqrt{3}}=-4+2\sqrt{3}$$
따라서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 l의 교점의 개수는
(i) $a\le-9$일 때, $N(a)=1$
(ii) $-9<a<-1$일 때, $N(a)=2$
(iii) $a=-1$일 때, $N(a)=3$
(iv) $-1<a<-4+2\sqrt{3}$일 때, $N(a)=4$
(v) $a=-4+2\sqrt{3}$일 때, $N(a)=5$
(vi) $-4+2\sqrt{3}<a<0$일 때, $N(a)=6$
(vii) $a=0$일 때, $N(a)=4$
(viii) $a>0$일 때, $N(a)=2$
ㄱ. (i)~(viii)에서 $N(a)$의 최솟값은 1, 최댓값은 6이다. (참)
ㄴ. $-1<a<-4+2\sqrt{3}$일 때, $N(a)=4$이다. (참)
ㄷ. $N(a)=2$를 만족시키는 경우는
$-9<a<-1$, $a>0$
이므로 음의 정수 a의 최댓값은 -2이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

05
두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치가 각각
$x_{\mathrm{P}}(t)=t^3-t^2+at$, $x_{\mathrm{Q}}(t)=t^4-4t^2+8t$
이므로 시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도는 각각
$x_{\mathrm{P}}'(t)=3t^2-2t+a$, $x_{\mathrm{Q}}'(t)=4t^3-8t+8$
$x_{\mathrm{P}}'(t)=x_{\mathrm{Q}}'(t)$에서
$3t^2-2t+a=4t^3-8t+8$
$\therefore\ 4t^3-3t^2-6t+8=a$
$f(t)=4t^3-3t^2-6t+8$로 놓으면
$f'(t)=12t^2-6t-6=6(2t+1)(t-1)$
$f'(t)=0$에서 $t=1$ ($\because\ t>0$)
$t>0$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘	3	↗

두 점 P, Q가 원점을 출발한 후 속도가 같아지는 순간이 오직 한 번뿐이므로 방정식 $4t^3-3t^2-6t+8=a$의 양의 실근이 오직 하나이다. 즉, 함수 $y=f(t)$의 그래프와 직선 $y=a$가 $t>0$일 때 오직 한 점에서 만난다.



$\therefore\ a=3$ 또는 $a\ge8$
이때, a는 10 이하의 정수이므로
$a=3,\ 8,\ 9,\ 10$
그러므로 구하는 모든 정수 a의 값의 합은
$3+8+9+10=30$
답 30

06
t초 후
$\overline{\mathrm{AP}}=t$, $\overline{\mathrm{PB}}=8-t$, $\overline{\mathrm{BQ}}=2t$, $\overline{\mathrm{QC}}=10-2t$, $\overline{\mathrm{CR}}=t$, $\overline{\mathrm{RD}}=8-t$
이므로 삼각형 PQR의 넓이를 $S(t)$라 하면
$$S(t)=8\times10-\frac{1}{2}\times(8-t)\times2t-\frac{1}{2}\times(10-2t)\times t$$
$$-\frac{1}{2}\times(t+8-t)\times10$$
$$=80-(8t-t^2)-(5t-t^2)-40$$
$$=2t^2-13t+40$$
그런데 $\angle\mathrm{PQR}=\frac{\pi}{2}$이면 $\angle\mathrm{QPB}=\angle\mathrm{RQC}$이므로
삼각형 PBQ와 삼각형 QCR는 닮음이다.
이때, $\overline{\mathrm{PB}}:\overline{\mathrm{QC}}=\overline{\mathrm{BQ}}:\overline{\mathrm{CR}}$이므로
$(8-t):(10-2t)=2t:t$
$2t(10-2t)=t(8-t)$
$3t^2-12t=0$, $3t(t-4)=0$
$\therefore\ t=4$ ($\because\ t>0$)
$S(t)=2t^2-13t+40$에서
$S'(t)=4t-13$
따라서 $t=4$일 때 삼각형 PQR의 넓이의 시간(초)에 대한 변화율은
$S'(4)=4\times4-13=3$ 답 ③

개념 확장 & 수리논술 · 창의사고력 문제 본문 36쪽

$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\ge0) \\ c-f(x) & (x<0) \end{cases}$에서
함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로
$\lim\limits_{x\to0+}g(x)=\lim\limits_{x\to0-}g(x)=g(0)$
$c-f(0)=f(0)$, $c=2f(0)$

$f(x)=8x^3-ax^2+bx+36$이므로

$c=2f(0)=2\times36=72$

$g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (x>0) \\ -f'(x) & (x<0) \end{cases}$에서

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to0+}g'(x)=\lim_{x\to0-}g'(x)$

$\lim_{x\to0+}g'(x)=f'(0)$, $\lim_{x\to0-}g'(x)=-f'(0)$이므로

$f'(0)=-f'(0)\qquad\therefore f'(0)=0$

$f'(x)=24x^2-2ax+b$이므로

$b=f'(0)=0$

$\therefore f(x)=8x^3-ax^2+36$

한편, $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\ge0) \\ 72-f(x) & (x<0) \end{cases}$에서

$x<0$일 때, $g(x)=72-f(x)$이므로 $\dfrac{f(x)+g(x)}{2}=36$

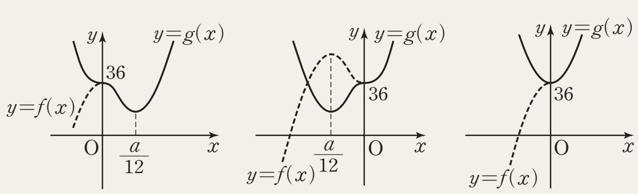
따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=36$에 대하여 대칭이다.

$f'(x)=24x^2-2ax=24x\left(x-\dfrac{a}{12}\right)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\dfrac{a}{12}$

조건 ㈐를 만족시키는 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

($a>0$일 때) ($a<0$일 때) ($a=0$일 때)



따라서 조건 ㈏를 만족시키려면 $x=t\ (t>0)$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=4x$와 접해야 한다.

$g(t)=4t$에서 $8t^3-at^2+36=4t$ …… ㉠

$g'(t)=4$에서 $24t^2-2at=4$, $a=\dfrac{12t^2-2}{t}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$8t^3-\left(\dfrac{12t^2-2}{t}\right)t^2+36=4t$

$2t^3+t-18=0$, $(t-2)(2t^2+4t+9)=0$

$\therefore t=2\ (\because 2t^2+4t+9\neq0)$, $a=23$

따라서 $a+b+c=23+0+72=95$ 답 95

01 부정적분과 정적분

개념 & 대표 유형 짚어보기 본문 38 ~ 40쪽

01 23	**02** -4	**03** 4	**04** ②	**05** ④	**06** 8
07 ②	**08** 17	**09** ③	**10** ③	**11** 16	**12** ⑤

01

$f_1(x)=1$이고, $f_{n+1}(0)=0$이므로

$f_2(x)=2\int f_1(x)\,dx=2\int 1\,dx=2x$

$f_3(x)=3\int f_2(x)\,dx=3\int 2x\,dx=3x^2$

$\vdots$

$f_n(x)=n\int f_{n-1}(x)\,dx=n\int(n-1)x^{n-2}dx$

$=nx^{n-1}$

$\therefore F_{20}(x)=\int\{f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\cdots+f_{20}(x)\}\,dx$

$=\int(1+2x+3x^2+\cdots+20x^{19})\,dx$

$=x+x^2+x^3+\cdots+x^{20}+C$ (단, C는 적분상수)

$F_n(0)=3$에서 $F_{20}(0)=3$이므로 $C=3$

$\therefore F_{20}(x)=x+x^2+x^3+\cdots+x^{20}+3$

$\therefore F_{20}(1)=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{20\text{개}}+3=23$ 답 23

02

$f(x)g'(x)+f'(x)g(x)=\{f(x)g(x)\}'$이므로

조건 ㈎의 $f(x)g'(x)+f'(x)g(x)=3x^2-10x+8$에서

$f(x)g(x)=\int(3x^2-10x+8)\,dx$

$=x^3-5x^2+8x+C$ (단, C는 적분상수)

조건 ㈏의 $f(x)=(x-1)g(x)$에서 $f(1)=0$이므로

$f(1)g(1)=1-5+8+C=0$

$\therefore C=-4$

$\therefore f(x)g(x)=x^3-5x^2+8x-4$

$=(x-1)(x-2)^2$

$g(x)$를 n차식이라 하면 $f(x)$는 $n+1$차식이고 $f(x)g(x)$가 3차식이므로

$2n+1=3\qquad\therefore n=1$

따라서 $g(x)$는 1차식이고 조건 ㈐에서 $g(0)>0$이므로

$g(x)=-x+2$ ($\because$ 조건 ㈏)

$\therefore f(x)=(x-1)(-x+2)$

$\therefore f(3)+g(4)=2\times(-1)+(-2)=-4$

/ 보충 설명 /

$f(x)g(x)$의 최고차항의 계수가 1이고,

$f(x)=(x-1)g(x)$이므로

$f(x)$, $g(x)$의 최고차항의 계수는

1 또는 -1만 가능하다. 답 -4

03

$$f'(x)=\begin{cases} -1 & (x<-2) \\ x^2-1 & (-2<x<2) \\ -1 & (x>2) \end{cases}$$ 이므로

$$f(x)=\begin{cases} -x+C_1 & (x<-2) \\ \frac{1}{3}x^3-x+C_2 & (-2<x<2) \\ -x+C_3 & (x>2) \end{cases}$$

(단, C_1, C_2, C_3은 적분상수)

$f(0)=2$이므로 $C_2=2$이고, $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$f(-2)=2+C_1=-\frac{8}{3}+2+2$

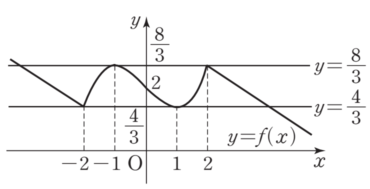
$\therefore C_1=-\frac{2}{3}$

$f(2)=-2+C_3=\frac{8}{3}-2+2$

$\therefore C_3=\frac{14}{3}$

즉, 함수 $f(x)$와 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases} -x-\frac{2}{3} & (x<-2) \\ \frac{1}{3}x^3-x+2 & (-2\le x<2) \\ -x+\frac{14}{3} & (x\ge 2) \end{cases}$$



따라서 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖기 위한 실수 k의 값은 $\frac{4}{3}$, $\frac{8}{3}$이므로 그 합은

$\frac{4}{3}+\frac{8}{3}=4$ 답 4

04

구간 $[a, b]$에서 $f(x)$는 증가하므로 $f'(x)\ge 0$이고, 구간 $[b, c]$에서 $f(x)$는 감소하므로 $f'(x)\le 0$이다.

$$\therefore \int_a^c |f'(x)|\,dx=\int_a^b f'(x)\,dx-\int_b^c f'(x)\,dx$$
$$=\{f(b)-f(a)\}-\{f(c)-f(b)\}$$
$$=-\{f(a)+f(c)\}+2f(b)$$
$$=15+2\times(-2)\ (\because \text{조건 (나), (다)})$$
$$=11$$

답 ②

05

이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$\int_{-3}^{-1} f(x)\,dx=\int_3^5 f(x)\,dx$, $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_1^3 f(x)\,dx$이다.

$\int_{-1}^{5} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx+\int_1^3 f(x)\,dx+\int_3^5 f(x)\,dx=11$,

$\int_{-3}^{1} f(x)\,dx=\int_{-3}^{-1} f(x)\,dx+\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=8$이므로

$\int_{-3}^{-1} f(x)\,dx=A$, $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=B$라 하면

$2B+A=11$, $A+B=8$

두 식을 연립하여 풀면 $A=5$, $B=3$이므로

$\int_{-3}^{-1} f(x)\,dx+\int_1^5 f(x)dx=2A+B=13$ 답 ④

06

조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 차수가 홀수인 항으로만 이루어진 삼차함수이다.

따라서 $f(x)=mx^3+nx$ (m, n은 상수)로 놓으면

$f'(x)=3mx^2+n$

조건 (나)에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 4를 가지므로

$f'(1)=3m+n=0$ …… ㉠

$f(1)=m+n=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$m=-2$, $n=6$

따라서 $f'(x)=-6x^2+6$이므로

$$\int_{-1}^{1} |f'(x)|\,dx=\int_{-1}^{1} |-6x^2+6|\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1} (-6x^2+6)\,dx$$
$$=2\int_0^1 (-6x^2+6)\,dx$$
$$=2\Big[-2x^3+6x\Big]_0^1$$
$$=2(-2+6)=8$$

답 8

07

조건 (가)의 양변에 $x=0$을 대입하면

$\int_2^0 f(t)dt=-1 \quad \therefore \int_0^2 f(t)dt=1$ …… ㉠

조건 (나)에 ㉠을 대입하면

$g(x)=x^2-2x+3$이므로

$$\int_2^x f(t)dt=xg(x)+kx-1$$
$$=x(x^2-2x+3)+kx-1$$

위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=6+2k-1$

$\therefore k=-\frac{5}{2}$ 답 ②

08

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 조건 (가)에서

$h'(x)=f'(x)-g'(x)>0$이므로 함수 $h(x)$는 증가함수이다.

또한 조건 (나)에서

$h(3)=f(3)-g(3)=0$

즉, $x<3$일 때 $h(x)<0$, $x>3$일 때 $h(x)>0$이므로

$\int_0^3 |f(x)-g(x)|\,dx=-\int_0^3 \{f(x)-g(x)\}\,dx=3$

$$\int_0^7 |f(x)-g(x)|\,dx$$
$$=-\int_0^3 \{f(x)-g(x)\}\,dx+\int_3^7 \{f(x)-g(x)\}\,dx$$
$$=3+\int_3^7 \{f(x)-g(x)\}\,dx=20$$
$$\therefore \int_3^7 \{f(x)-g(x)\}\,dx=17$$

답 17

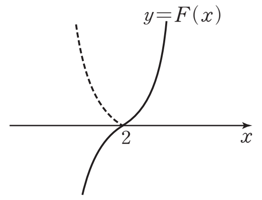
09

$F(x)=\int_2^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$
$=3x^2-12x+k$
$=3(x-2)^2+k-12$

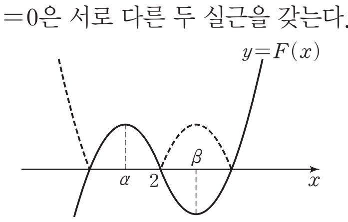
$F(x)=\int_2^x f(t)dt$에서 $F(2)=\int_2^2 f(t)dt=0$

(i) $k>12$일 때,
$F'(x)=3(x-2)^2+k-12>0$이고 $F(2)=0$이므로
함수 $y=F(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



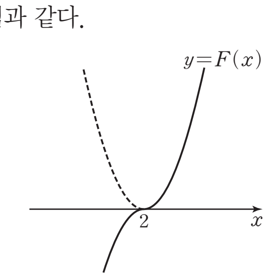
따라서 함수 $|F(x)|$는 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

(ii) $k<12$일 때,
$F'(x)=3(x-2)^2+k-12$에서 $k-12<0$이므로
방정식 $F'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.



$F'(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β $(\alpha<2<\beta)$라 하면 $F(x)$는 $x=\alpha$에서 극댓값, $x=\beta$에서 극솟값을 갖는다. 따라서 함수 $|F(x)|$는 $x=2$와 다른 두 꺾인 점에서 미분가능하지 않다.

(iii) $k=12$일 때,
$F'(x)=3(x-2)^2$이고 $F(2)=0$이므로 함수 $y=F(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $|F(x)|$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $|F(x)|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(i)~(iii)에 의하여 조건을 만족시키는 상수 k의 값은 12이다.

답 ③

10

조건 (가)에 의하여 $f(x)=ax^3+bx$ (a, b는 상수, $a\neq0$)으로 놓으면

$f'(x)=3ax^2+b$

조건 (나)에서 $f(1)=-1-2=-3$, $f'(1)=-1$
이므로

$a+b=-3$, $3a+b=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=-4$

$\therefore f'(x)=3x^2-4$

$f'(-x)=3x^2-4=f'(x)$에서

$|f'(-x)|=|f'(x)|$이므로

함수 $y=|f'(x)|$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

$g(x)=x|f'(x)|$라 하면

$g(-x)=-x|f'(-x)|=-x|f'(x)|=-g(x)$이므로

함수 $y=g(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$$\therefore \int_{-1}^1 (x-3)|f'(x)|dx$$
$$=\int_{-1}^1 \{x|f'(x)|-3|f'(x)|\}dx$$
$$=0-3\int_{-1}^1 |f'(x)|dx$$
$$=3\times2\int_0^1 (3x^2-4)dx$$
$$=6\Big[x^3-4x\Big]_0^1=-18$$

답 ③

11

$\{tf(x)-1\}^2=t^2\{f(x)\}^2-2tf(x)+1$이므로

$$\int_0^1 \{tf(x)-1\}^2dx$$
$$=t^2\int_0^1 \{f(x)\}^2dx-2t\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 1\,dx$$

즉, t에 대한 이차방정식

$$t^2\int_0^1 \{f(x)\}^2dx-2t\int_0^1 f(x)\,dx+1=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

의 실근이 오직 하나이므로 중근을 가져야 한다.

방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\left\{\int_0^1 f(x)\,dx\right\}^2-\int_0^1 \{f(x)\}^2dx=0$$
$$\therefore \left\{\int_0^1 f(x)\,dx\right\}^2=\int_0^1 \{f(x)\}^2dx$$

조건 (가)에서 $\int_0^1 f(x)dx=4$이므로

$$\int_0^1 \{f(x)\}^2dx=4^2=16$$

답 16

12

ㄱ. $F(x)=\int_a^x f(t)f'(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)f'(t)dt$

$=f(x)f'(x)$

$f(x)=k(x-a)(x-b)$ $(k<0)$으로 놓으면

$f'(x)=2k\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)$이므로

$F'(x)=f(x)f'(x)$

$=2k^2(x-a)(x-b)\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)$

$\therefore F'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0$ (참)

ㄴ. $\left[\dfrac{1}{2}\{f(x)\}^2\right]'=\dfrac{1}{2}\times 2f(x)f'(x)$

$=f(x)f'(x)=F'(x)$

이므로

$F(x)=\dfrac{1}{2}\{f(x)\}^2+C$

$=\dfrac{1}{2}k^2(x-a)^2(x-b)^2+C$ (단, C는 적분상수)

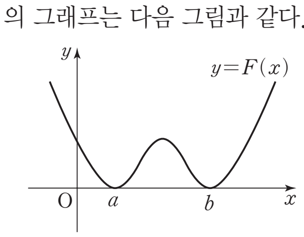
한편, $F(a)=\int_a^a f(t)f'(t)dt=0$이므로

$C=0$

$\therefore F(x)=\dfrac{1}{2}k^2(x-a)^2(x-b)^2$

$\therefore F(b)=0$ (참)

ㄷ. 함수 $y=F(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, 함수 $y=F(x)$의 그래프는 $x=a$, $x=b$에서 x축에 접하므로 모든 실수 x에 대하여 $F(x)\geq 0$이 성립한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

심화 유형 도전하기 본문 41 ~ 43쪽

01 ③ **02** ② **03** ④ **04** 17 **05** ⑤ **06** ⑤
07 54 **08** 20 **09** 43

01

다항함수 $f(x)$의 차수를 n이라 하면 좌변의 차수는 n^2이고, 우변의 차수는 $n+1$ 또는 2 또는 1이다.

이때, $n^2=n+1$, $n^2=2$를 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

따라서 $n^2=1$이고 n은 자연수이므로 $n=1$이다.

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)이라 하면

$f(f(x))=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$ …… ㉠

$\int_0^x f(t)dt=\int_0^x (at+b)dt$

$=\left[\dfrac{a}{2}t^2+bt\right]_0^x=\dfrac{a}{2}x^2+bx$ …… ㉡

㉠, ㉡을 주어진 식에 대입하면

$a^2x+ab+b=\left(\dfrac{a}{2}-1\right)x^2+(b-1)x+15$ …… ㉢

㉢은 x에 대한 항등식이므로

$\dfrac{a}{2}-1=0$, $a^2=b-1$, $ab+b=15$

$\therefore a=2$, $b=5$

따라서 $f(x)=2x+5$이므로

$f(5)=15$

/ 다른 풀이 / 미적분 과목 : 합성함수의 미분법 이용

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)이라 하면

$f'(x)=a$ …… ㉠

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(f(x))f'(x)=f(x)-2x-1$

㉠을 대입하면

$a^2=(ax+b)-2x-1$

$a^2=(a-2)x+b-1$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a-2=0$, $a^2=b-1$

$\therefore a=2$, $b=5$ 답 ③

02

$f(x)=x^3-3x+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

따라서 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 세 실근은 $x<-1$, $-1<x<1$, $x>1$에서 각각 하나씩 존재한다.

$\therefore \alpha<-1$, $\beta>1$

$\int_\alpha^\beta 3|x^2-1|\,dx$

$=\int_\alpha^{-1}(3x^2-3)\,dx+\int_{-1}^{1}(3-3x^2)\,dx+\int_1^\beta(3x^2-3)\,dx$

$=\left[x^3-3x\right]_\alpha^{-1}+\left[3x-x^3\right]_{-1}^{1}+\left[x^3-3x\right]_1^\beta$

$=\{2-(\alpha^3-3\alpha)\}+\{2-(-2)\}+\{(\beta^3-3\beta)-(-2)\}$

$=-(\alpha^3-3\alpha)+(\beta^3-3\beta)+8$

이때, $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$에서

$\alpha^3-3\alpha+1=0$, $\beta^3-3\beta+1=0$

이므로

$\int_\alpha^\beta 3|x^2-1|\,dx=-(-1)+(-1)+8=8$ 답 ②

03

$f(x+y)=f(x)+f(y)-2xy(x+y)+2$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=2f(0)+2 \qquad \therefore f(0)=-2$ …… ㉠

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)-2xh(x+h)+2-f(x)}{h} \\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+2-2xh(x+h)}{h} \\ &=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(0+h)-f(0)}{h}-2x(x+h)\right\}\ (\because ㉠) \\ &=f'(0)-2x^2 \end{aligned}$$ …… ㉡

$f(x)=-\frac{2}{3}x^3+f'(0)x+C$ (C는 적분상수)에서

$f(0)=C=-2$

$\therefore f(x)=-\frac{2}{3}x^3+f'(0)x-2$ …… ㉢

ㄱ. ㉢에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=-\frac{2}{3}+f'(0)-2=f'(0)-\frac{8}{3}$ (거짓)

ㄴ. $f'(2)=-6$이면 ㉡에서

$-6=f'(0)-8$, $f'(0)=2$

$\therefore f'(x)=-2x^2+2$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 극값을 갖는다. (참)

ㄷ. 함수 $f(x)$가 삼차함수이고 극값을 가지므로 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

㉡에서 $f'(0)-2x^2=0$, $x^2=\frac{f'(0)}{2}$

방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 α, $-\alpha$라 하면 ㉢에서 함수 $f(x)$의 모든 극값의 합은

$f(\alpha)+f(-\alpha)$

$=\left\{-\frac{2}{3}\alpha^3+f'(0)\alpha-2\right\}+\left\{\frac{2}{3}\alpha^3-f'(0)\alpha-2\right\}$

$=-4$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

04

$$\begin{aligned} f(3)&=k\int_0^6|3-t|\,dt \\ &=k\left\{\int_0^3(3-t)dt+\int_3^6(t-3)dt\right\} \\ &=k\left\{\left[3t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^3+\left[\frac{1}{2}t^2-3t\right]_3^6\right\} \\ &=9k \end{aligned}$$

$9k=3$에서 $k=\frac{1}{3}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}\int_0^6|x-t|\,dt$

(ⅰ) $0\le x\le 6$일 때,

$0\le t\le 6$에 대하여

$|x-t|=\begin{cases} x-t & (0\le t\le x) \\ t-x & (x<t\le 6) \end{cases}$

이므로

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{1}{3}\int_0^6|x-t|\,dt \\ &=\frac{1}{3}\left\{\int_0^x(x-t)dt+\int_x^6(t-x)dt\right\} \\ &=\frac{1}{3}\left\{\left[xt-\frac{1}{2}t^2\right]_0^x+\left[\frac{1}{2}t^2-xt\right]_x^6\right\} \\ &=\frac{1}{3}\left\{\left(x^2-\frac{1}{2}x^2\right)+\left(18-6x-\frac{1}{2}x^2+x^2\right)\right\} \\ &=\frac{1}{3}(x^2-6x+18) \end{aligned}$$

(ⅱ) $x>6$일 때,

$0\le t\le 6$에 대하여

$|x-t|=x-t$이므로

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{1}{3}\int_0^6(x-t)dt \\ &=\frac{1}{3}\left[xt-\frac{1}{2}t^2\right]_0^6 \\ &=\frac{1}{3}(6x-18) \\ &=2x-6 \end{aligned}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$$\begin{aligned} \int_0^9 kf(x)\,dx&=\frac{1}{3}\left\{\int_0^6\frac{1}{3}(x^2-6x+18)\,dx+\int_6^9(2x-6)\,dx\right\} \\ &=\frac{1}{9}\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+18x\right]_0^6+\frac{1}{3}\left[x^2-6x\right]_6^9 \\ &=\frac{1}{9}\times 72+\frac{1}{3}\times 27 \\ &=17 \end{aligned}$$

답 17

05

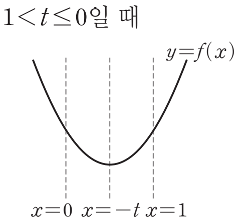
$f(0)=1$, $f(1)=2t+2$이고 $f(x)=(x+t)^2-t^2+1$

$0\le x\le 1$에서 $f(x)$의 최댓값은 $f(0)$, $f(1)$ 중 큰 값이므로

$g(t)=\begin{cases} 1 & \left(t<-\frac{1}{2}\right) \\ 2t+2 & \left(t\ge -\frac{1}{2}\right) \end{cases}$

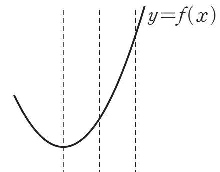
또한 $h(t)$는 $0\le x\le 1$에서 $f(x)$의 최솟값이므로

(ⅰ) $0\le -t<1$, 즉 $-1<t\le 0$일 때



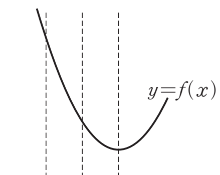
$h(t)=f(-t)=-t^2+1$

(ⅱ) $-t<0$, 즉 $t>0$일 때



$h(t)=f(0)=1$

(iii) $-t\geq1$, 즉 $t\leq-1$일 때



$h(t)=f(1)=2t+2$

(i)~(iii)에서

$$h(t)=\begin{cases} 2t+2 & (t\leq-1) \\ -t^2+1 & (-1<t\leq0) \\ 1 & (t>0) \end{cases}$$

따라서

$$\int_{-2}^{2}\{g(t)-h(t)\}dt$$

$$=\int_{-2}^{-1}\{1-(2t+2)\}dt+\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\{1-(-t^2+1)\}dt$$

$$+\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\{(2t+2)-(-t^2+1)\}dt+\int_{0}^{2}\{(2t+2)-1\}dt$$

$$=\int_{-2}^{-1}(-2t-1)dt+\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}t^2\,dt$$

$$+\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(t^2+2t+1)dt+\int_{0}^{2}(2t+1)dt$$

$$=\Big[-t^2-t\Big]_{-2}^{-1}+\Big[\frac{1}{3}t^3\Big]_{-1}^{-\frac{1}{2}}+\Big[\frac{1}{3}t^3+t^2+t\Big]_{-\frac{1}{2}}^{0}+\Big[t^2+t\Big]_{0}^{2}$$

$$=2+\frac{7}{24}+\frac{7}{24}+6$$

$$=\frac{103}{12}$$

답 ⑤

06

$g(x)=\int_0^x tf(t)dt$이므로 $g'(x)=xf(x)$

$$f(x)=\begin{cases} -x & (x<0) \\ x & (0\leq x<1) \\ 2-x & (x\geq1) \end{cases}$$

ㄱ. $g'(x)=\begin{cases} -x^2 & (x<0) \\ x^2 & (0<x<1) \\ x(2-x) & (x>1) \end{cases}$에서

$\lim_{x\to0+}g'(x)=\lim_{x\to0+}x^2=0$, $\lim_{x\to0-}g'(x)=\lim_{x\to0-}(-x^2)=0$

이므로

$\lim_{x\to0+}g'(x)=\lim_{x\to0-}g'(x)$ …… ㉠

또한 $\lim_{x\to1+}g'(x)=\lim_{x\to1+}x(2-x)=1$,

$\lim_{x\to1-}g'(x)=\lim_{x\to1-}x^2=1$

이므로

$\lim_{x\to1+}g'(x)=\lim_{x\to1-}g'(x)$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 함수 $g(x)$는 $x=0$, $x=1$에서 미분가능하므로 $g(x)$는 모든 실수 x에서 미분가능하다. (참)

ㄴ. (i) $x<0$일 때, $g(x)=\int_0^x(-t^2)dt=-\frac{1}{3}x^3$

(ii) $0\leq x<1$일 때, $g(x)=\int_0^x t^2dt=\frac{1}{3}x^3$

(iii) $x\geq1$일 때,

$$g(x)=\int_0^1 t^2dt+\int_1^x t(2-t)dt$$

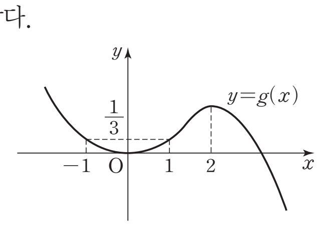
$$=\frac{1}{3}+\Big[t^2-\frac{1}{3}t^3\Big]_1^x=-\frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{1}{3}$$

에서 $g(2)=1>0$, $g(3)=-\frac{1}{3}<0$이고 $g(x)$가 닫힌구간 $[2, 3]$에서 연속이므로

방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(2, 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. ㄱ, ㄴ에서 $g(x)=\begin{cases} -\frac{1}{3}x^3 & (x<0) \\ \frac{1}{3}x^3 & (0\leq x<1) \\ -\frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{1}{3} & (x\geq1) \end{cases}$이고

$g'(0)=0$, $g'(2)=0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



즉, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

07

조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소하는 연속함수이다. 한편, 함수 $y=f(x+2)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 모든 실수 a에 대하여

$$\int_a^{a+2}f(x)dx=\int_{a-2}^{a}f(x+2)dx$$

이때, 조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)-6$이므로

$$\int_a^{a+2}f(x)dx=\int_{a-2}^{a}f(x)dx-\int_{a-2}^{a}6\,dx$$

$$=\int_{a-2}^{a}f(x)dx-\Big[6x\Big]_{a-2}^{a}$$

$$=\int_{a-2}^{a}f(x)dx-12 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$f(9)=0$이므로 조건 (가)에서 $x\leq9$일 때 $f(x)\geq0$이고,

$x>9$일 때 $f(x)<0$이다.

이때, $\int_7^9 |f(x)|dx=\int_9^{11} |f(x)|dx$에서

$$\int_7^9 f(x)dx=-\int_9^{11} f(x)dx=-\int_7^9 f(x)dx+12 \ (\because \text{㉠})$$

$$\therefore \int_7^9 f(x)dx=6$$

따라서 ㉠에서

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 |f(x)|dx&=\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_1^3 f(x)dx+12\\&=\int_3^5 f(x)dx+24=\int_5^7 f(x)dx+36\\&=\int_7^9 f(x)dx+48\\&=6+48=54\end{aligned}$$

답 54

08

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(t)(x-t)+f(t)$

조건 ㈎에서 이 접선이 점 $(2t,\ g(2t))$를 지나므로

$g(2t)=f'(t)(2t-t)+f(t)$

$\therefore g(2t)=f(t)+tf'(t)$ …… ㉠

한편, $\{tf(t)\}'=f(t)+tf'(t)$이고

$g(2t)=a\times(2t)^3+3\times(2t)+2=8at^3+6t+2$

이므로 ㉠에서

$\{tf(t)\}'=8at^3+6t+2$

$$\begin{aligned}\therefore tf(t)&=\int(8at^3+6t+2)dt\\&=2at^4+3t^2+2t+C \ (\text{단, } C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

양변에 $t=0$을 대입하면

$C=0$

$\therefore tf(t)=2at^4+3t^2+2t$ …… ㉡

$f(t)$는 다항함수이므로

$f(t)=2at^3+3t+2$

$f(0)=2$이고 $a>0$이므로 $t>0$일 때

$f'(t)=6at^2+3>0$

따라서 $t>0$일 때 $f(t)$가 증가함수이므로 $f(t)>0$, 즉 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$는 제1사분면 위의 점이다.

조건 ㈏와 ㉡으로부터

$$\begin{aligned}S(t)&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OQ}}\times\overline{\mathrm{PQ}}\\&=\frac{1}{2}tf(t)=at^4+\frac{3}{2}t^2+t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^2 S(t)dt&=\left[\frac{a}{5}t^5+\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_1^2\\&=\frac{31}{5}a+5=36\end{aligned}$$

따라서 $a=5$이므로

$f(x)=10x^3+3x+2,\ g(x)=5x^3+3x+2$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^2 |f(x)-g(x)|dx&=\int_0^2 5x^3\,dx\\&=\left[\frac{5}{4}x^4\right]_0^2=20\end{aligned}$$

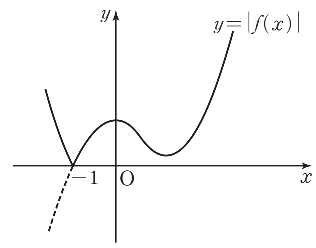
답 20

09

조건 ㈎에서 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 갖고 조건 ㈏에서 함수 $|f(x)|$가 $x=-1$에서 미분가능하지 않으므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프 개형은 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

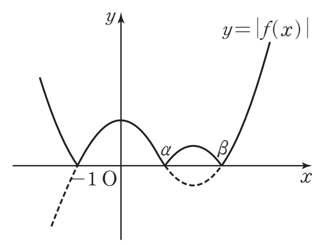
함수 $f(x)$의 극솟값을 k라 하면

(i) $k\geq0$일 때



$x>0$일 때 $f(x)\geq0$이므로 함수 $g(t)=\int_0^{t^2} f(x)dx$는 $t>0$에서 증가함수이다. 즉, $t>0$에서 극솟값을 갖지 않으므로 조건에 모순이다.

(ii) $k<0$일 때



함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 $\alpha,\ \beta(-1<\alpha<\beta)$라 하면 함수 $g(t)=\int_0^{t^2} f(x)dx$는 $t^2=\beta$일 때 극솟값을 가지므로

$\beta=3$

$f(-1)=0,\ f(\alpha)=0,\ f(3)=0$이므로

$f(x)=(x+1)(x-\alpha)(x-3)$에서

$f'(x)=(x-\alpha)(x-3)+(x+1)(x-3)+(x+1)(x-\alpha)$

조건 ㈎에서 $f'(0)=0$이므로

$f'(0)=2\alpha-3=0 \qquad \therefore \alpha=\frac{3}{2}$

따라서

$$\begin{aligned}f(x)&=(x+1)\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-3)\\&=x^3-\frac{7}{2}x^2+\frac{9}{2}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}12g(1)&=12\int_0^1\left(x^3-\frac{7}{2}x^2+\frac{9}{2}\right)dx\\&=\left[3x^4-14x^3+54x\right]_0^1=43\end{aligned}$$

답 43

02 정적분의 활용

개념 & 대표 유형 짚어보기 본문 44 ~ 45쪽

01 ③ 02 ③ 03 18 04 ② 05 ② 06 78
07 ③

01

극댓값을 갖는 점의 x좌표를 α라 하면 도함수 $y=f'(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

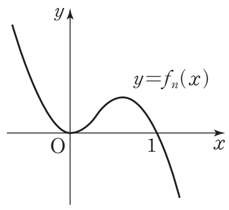
$$\int_2^6 |f'(x)|\,dx=\int_2^\alpha f'(x)\,dx-\int_\alpha^6 f'(x)\,dx$$
$$=f(\alpha)-f(2)-f(6)+f(\alpha)$$
$$=3-(-2)-1+3=7$$

답 ③

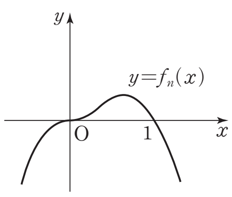
02

$f_n(x)=x^n(1-x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.

(i) n이 짝수일 때



(ii) n이 홀수일 때



위의 그림과 같이 $0\le x\le 1$에서 $f_n(x)\ge 0$이므로

$$S_n=\int_0^1 f_n(x)dx$$

ㄱ. $S_1=\int_0^1 f_1(x)dx=\int_0^1 x(1-x)\,dx=\frac{1}{6}$ (참)

ㄴ. $f_n(x)-f_{n+1}(x)=x^n(1-x)-x^{n+1}(1-x)$
$$=x^n(1-x)^2\ge 0\ (0\le x\le 1)$$

이므로

$$\int_0^1\{f_n(x)-f_{n+1}(x)\}\,dx>0$$
$$\int_0^1 f_n(x)\,dx>\int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx$$

$\therefore S_n>S_{n+1}$ (참)

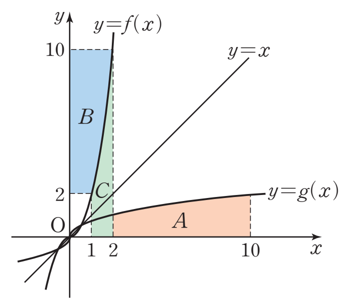
ㄷ. $S_n=\int_0^1 (x^n-x^{n+1})\,dx$
$$=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}-\frac{1}{n+2}x^{n+2}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{10} S_k=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{12}=\frac{5}{12}\ (\text{거짓})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

03

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 $f(x)=x^3+x$에서 $f(1)=2$, $f(2)=10$이므로 $g(2)=1$, $g(10)=2$이다.



따라서 위의 그림에서 (A 부분의 넓이)=(B 부분의 넓이)이므로

$$\int_2^{10} g(x)dx-\int_2^1 f(x)dx=\int_2^{10} g(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$$
$$=(B\text{ 부분의 넓이})+(C\text{ 부분의 넓이})$$
$$=10\times 2-2\times 1=18$$

답 18

04

점 B의 좌표를 B$(\beta,\ 0)$이라 하면

$\int_0^\beta (-x^3+x+a)\,dx=0$이므로

$$\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+ax\right]_0^\beta=-\frac{1}{4}\beta^4+\frac{1}{2}\beta^2+a\beta=0$$

$\beta>0$이므로 $\beta^3-2\beta-4a=0$ …… ㉠

점 B$(\beta,\ 0)$은 곡선 $y=-x^3+x+a$ 위에 있으므로

$-\beta^3+\beta+a=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-3\beta^3+2\beta=0$

$\therefore \beta=\sqrt{\frac{2}{3}}\ (\because \beta>0)$

$\therefore a=\beta^3-\beta=-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}=-\frac{\sqrt{6}}{9}$

답 ②

05

$f(x)=x^3-4x^2+x+2$라 하면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-3x+a$가 서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-3x+a$가 접해야 한다.

접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 하면

$f'(x)=3x^2-8x+1$에서

$f'(t)=3t^2-8t+1=-3$

$3t^2-8t+4=0$, $(3t-2)(t-2)=0$

$\therefore t=\frac{2}{3}$ 또는 $t=2$

(i) $t=\frac{2}{3}$일 때

$f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{27}-\frac{16}{9}+\frac{2}{3}+2=-2+a$에서

$\frac{32}{27}=-2+a \qquad \therefore a=\frac{86}{27}$

(ii) $t=2$일 때

$f(2)=8-16+2+2=-6+a$에서

$-4=-6+a \qquad \therefore a=2$

문제의 조건에서 $a<3$이므로

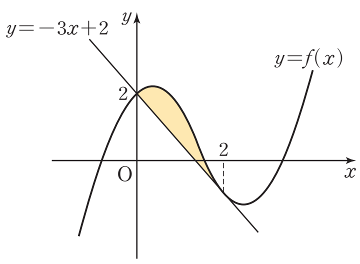
$a=2$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-3x+2$가 만나는 점의 x좌표는

$x^3-4x^2+x+2=-3x+2$에서

$x^3-4x^2+4x=0,\ x(x-2)^2=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^2\{(x^3-4x^2+x+2)-(-3x+2)\}dx$$
$$=\int_0^2(x^3-4x^2+4x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+2x^2\right]_0^2$$
$$=\frac{1}{4}\times2^4-\frac{4}{3}\times2^3+2\times2^2=\frac{4}{3}$$

답 ②

06

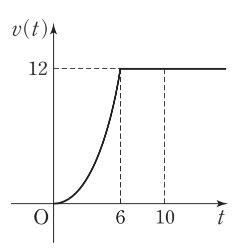
$v(t)=\frac{1}{6}t^2+t$이므로 자동차가 출발 후 a분 동안 30 km를 움직였다고 하면

$$\int_0^a|v(t)|dt=\int_0^a\left(\frac{1}{6}t^2+t\right)dt$$
$$=\left[\frac{1}{18}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^a$$
$$=\frac{1}{18}a^3+\frac{1}{2}a^2=30$$

$a^3+9a^2-540=0,\ (a-6)(a^2+15a+90)=0$

$\therefore a=6$

$v(6)=\frac{1}{6}\times6^2+6=12$이므로 $v(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



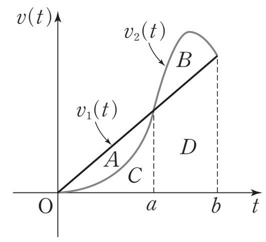
따라서 출발 후 10분 동안 자동차가 움직인 거리는

$\int_0^6|v(t)|dt+(10-6)\times12=30+48=78$

답 78

07

다음 그림의 네 부분 A, B, C, D의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3, S_4라 하자.



ㄱ. 두 점 P, Q가 같은 지점에서 동시에 출발하여 동시에 같은 지점에 도착하였으므로 위치의 변화량과 시간은 같다.
즉, 평균 속도는 같다. (참)

ㄴ. $t=a$에서 점 P의 위치는 S_1+S_3이고 점 Q의 위치는 S_3이므로 점 P가 S_1만큼 앞서 있다. (거짓)

ㄷ. $\int_0^b v_1(t)dt=\int_0^b v_2(t)dt$이므로

$S_1+S_3+S_4=S_3+S_2+S_4 \qquad \therefore S_1=S_2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

심화 유형 도전하기 본문 46 ~ 47쪽

01 20 **02** ① **03** ② **04** 10 **05** ① **06** 1

01

직선 l의 방정식을 $y=mx+n$ (m, n은 상수)라 하자.

$x^2-x-\frac{1}{4}=mx+n$에서 $x^2-(m+1)x-\left(n+\frac{1}{4}\right)=0$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(m+1)^2+4\left(n+\frac{1}{4}\right)=0$ ...... ㉠

$x^2-5x+\frac{15}{4}=mx+n$에서 $x^2-(m+5)x+\left(\frac{15}{4}-n\right)=0$

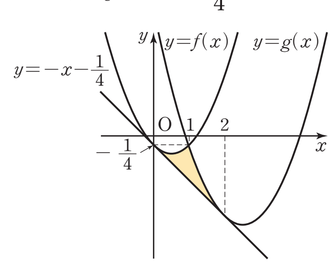
이 이차방정식도 중근을 가져야 하므로 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(m+5)^2-4\left(\frac{15}{4}-n\right)=0$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$m=-1,\ n=-\frac{1}{4}$

따라서 직선 l의 방정식은 $y=-x-\frac{1}{4}$



직선 l은 곡선 $y=f(x)$와 $x=0$에서 접하고, 곡선 $y=g(x)$와 $x=2$에서 접한다. 또한 $x^2-x-\frac{1}{4}=x^2-5x+\frac{15}{4}$에서 $x=1$이므로 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 $x=1$에서 만난다.

$$S=\int_0^1\left\{\left(x^2-x-\frac{1}{4}\right)-\left(-x-\frac{1}{4}\right)\right\}dx+\int_1^2\left\{\left(x^2-5x+\frac{15}{4}\right)-\left(-x-\frac{1}{4}\right)\right\}dx$$

$$=\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^2(x^2-4x+4)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$\therefore 30S=30\times\frac{2}{3}=20$ 답 20

02

원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서의 접선 l의 방정식은

$\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y=1$

$\therefore y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$

$-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-3)(x-\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$에서

$(x-3)(x-\alpha)+x-2=0$

$x^2-(2+\alpha)x+3\alpha-2=0$ …… ㉠

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

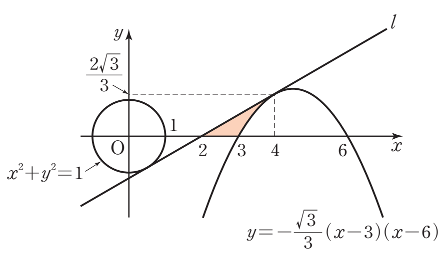
$D=(2+\alpha)^2-4(3\alpha-2)$

$=\alpha^2-8\alpha+12=(\alpha-2)(\alpha-6)=0$

$\therefore \alpha=6$ ($\because \alpha>3$)

㉠에 대입하면 $x^2-8x+16=0$에서 $x=4$

따라서 직선 l과 곡선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-3)(x-6)$의 접점의 좌표는 $\left(4,\ \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$이다.



따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\times2\times\frac{2\sqrt{3}}{3}-\int_3^4\left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-3)(x-6)\right\}dx$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\int_3^4(x^2-9x+18)\,dx$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{9}{2}x^2+18x\right]_3^4$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{37}{3}-\frac{63}{2}+18\right)$$

$$=\frac{5\sqrt{3}}{18}$$

답 ①

03

두 곡선의 교점의 x좌표는

$-2x^2=-x^2+2x-35$에서

$x^2+2x-35=0$, $(x+7)(x-5)=0$

$\therefore \alpha=-7$, $\beta=5$

$-7\le t\le5$이고, $x=t$에서의 곡선 $y=-x^2+2x-35$의 접선의 방정식은

$y-(-t^2+2t-35)=(-2t+2)(x-t)$

$\therefore y=(-2t+2)x+t^2-35$

이 접선과 곡선 $y=-2x^2$의 교점의 x좌표는

$-2x^2=(-2t+2)x+t^2-35$에서

$2x^2+(-2t+2)x+t^2-35=0$ …… ㉠

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-t+1)^2-2(t^2-35)=-t^2-2t+71$

$=-(t+1)^2+72$

$-7\le t\le5$에서 $\frac{D}{4}>0$이므로 이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이 두 실근을 a, b $(a<b)$라 하면

$$S(t)=\int_a^b\{-2x^2-(-2t+2)x-t^2+35\}dx$$

$$=-2\int_a^b(x-a)(x-b)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}(b-a)^3$$

㉠에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b=t-1$, $ab=\frac{t^2-35}{2}$이므로

$(b-a)^2=(b+a)^2-4ab$

$=(t-1)^2-4\times\frac{t^2-35}{2}$

$=-t^2-2t+71$

$=-(t+1)^2+72$

$\therefore S(t)=\frac{1}{3}(b-a)^3$

$=\frac{1}{3}\{-(t+1)^2+72\}^{\frac{3}{2}}$

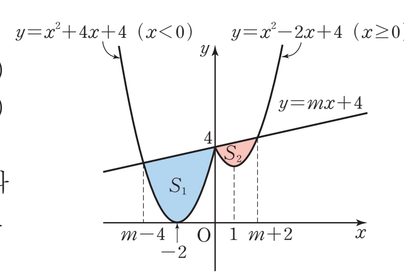
따라서 $S(t)$는 $t=-1$일 때 최댓값을 가지고 그 최댓값은

$\frac{1}{3}\times72^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}\times3^3\times2^{\frac{9}{2}}=144\sqrt{2}$ 답 ②

04

$y=x^2+x+4-|3x|$

$=\begin{cases}x^2+4x+4 & (x<0)\\ x^2-2x+4 & (x\ge0)\end{cases}$



(i) $x<0$일 때

곡선 $y=x^2+4x+4$와 직선 $y=mx+4$의 교점의 x좌표는

$x^2+4x+4=mx+4$에서

$x^2-(m-4)x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=m-4$

곡선 $y=x^2+4x+4$와 직선 $y=mx+4$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하자.

$m-4\geq 0$일 때, $S_1=0$

$m-4<0$, 즉 $m<4$일 때

$$S_1=\int_{m-4}^{0}\{(mx+4)-(x^2+4x+4)\}\,dx$$
$$=\int_{m-4}^{0}\{-x^2+(m-4)x\}\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{m-4}{2}x^2\right]_{m-4}^{0}$$
$$=\frac{1}{3}(m-4)^3-\frac{1}{2}(m-4)^3$$
$$=-\frac{1}{6}(m-4)^3$$

(ii) $x\geq 0$일 때

곡선 $y=x^2-2x+4$와 직선 $y=mx+4$의 교점의 x좌표는

$x^2-2x+4=mx+4$에서 $x^2-(m+2)x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=m+2$

곡선 $y=x^2-2x+4$와 직선 $y=mx+4$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자.

$m+2\leq 0$일 때, $S_2=0$

$m+2>0$, 즉 $m>-2$일 때

$$S_2=\int_{0}^{m+2}\{(mx+4)-(x^2-2x+4)\}\,dx$$
$$=\int_{0}^{m+2}\{-x^2+(m+2)x\}\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{m+2}{2}x^2\right]_{0}^{m+2}$$
$$=-\frac{1}{3}(m+2)^3+\frac{1}{2}(m+2)^3$$
$$=\frac{1}{6}(m+2)^3$$

(i), (ii)에서 S_1과 S_2의 합을 $S(m)$이라 하면

$$S(m)=\begin{cases} S_1 & (m\leq -2) \\ S_1+S_2 & (-2<m<4) \\ S_2 & (m\geq 4)\end{cases}$$

$m\leq -2$일 때,

$S(m)=-\frac{1}{6}(m-4)^3\geq 36$

$-2<m<4$일 때,

$$S(m)=\frac{1}{6}(m+2)^3-\frac{1}{6}(m-4)^3$$
$$=3m^2-6m+12$$
$$=3(m-1)^2+9\geq 9$$

$m\geq 4$일 때,

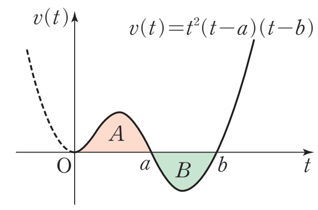
$S(m)=\frac{1}{6}(m+2)^3\geq 36$

따라서 $S(m)$은 $m=1$일 때 최솟값 9를 갖는다.

$\therefore k=1,\ S=9$

$\therefore k+S=10$ 답 10

05



$0<t<a$에서 $v(t)>0$이므로 점 P는 출발하여 양의 방향으로 거리 $\int_0^a|v(t)|dt\ (=A)$만큼 움직인다.

$v(a)=0$이고 $a<t<b$에서 $v(t)<0$이므로 점 P는 $t=a$일 때 운동 방향을 바꿔 음의 방향으로, 즉 출발점의 방향으로 $\int_a^b|v(t)|dt\ (=B)$만큼 돌아오게 된다.

조건에서 점 P는 출발점으로 되돌아오지 않으므로 $A>B$, 즉

$$\int_0^a|v(t)|dt>\int_a^b|v(t)|dt$$
$$\int_0^a v(t)dt>-\int_a^b v(t)dt$$
$$\int_0^a v(t)dt+\int_a^b v(t)dt>0$$
$$\therefore \int_0^b v(t)dt>0$$

따라서 $\int_0^b\{t^4-(a+b)t^3+abt^2\}dt>0$이므로

$$\left[\frac{1}{5}t^5-\frac{a+b}{4}t^4+\frac{ab}{3}t^3\right]_0^b$$
$$=\frac{b^5}{5}-\frac{(a+b)b^4}{4}+\frac{ab\times b^3}{3}>0$$
$$\frac{b}{5}-\frac{a+b}{4}+\frac{a}{3}>0\ (\because b>0)$$
$$5a>3b$$
$$\therefore \frac{b}{a}<\frac{5}{3}$$

따라서 $\frac{b}{a}$의 값으로 가능한 것은 ①이다. 답 ①

06

브레이크를 밟은 후 정지할 때까지의 자동차의 가속도가 $-a\ \mathrm{m/s^2}$이므로 브레이크를 밟은 시점부터 t초 후의 자동차의 속도 $v(t)$는

$v(t)=20-at\ (\mathrm{m/s})$

정지할 때의 속도가 0이므로

$v(t)=20-at=0$에서 $t=\frac{20}{a}$

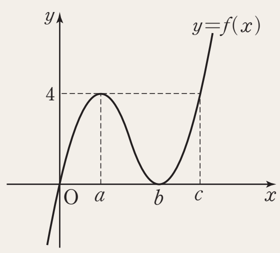
따라서 이 자동차가 장애물과 부딪히기 전에 정지하기 위해서는 브레이크를 밟은 후 $\frac{20}{a}$초 동안 움직인 거리가 300 m 미만이어야 하므로

$$\int_0^{\frac{20}{a}}|20-at|dt=\frac{1}{2}\times\frac{20}{a}\times 20<300$$
$$\frac{200}{a}<300,\ a>\frac{2}{3}$$

따라서 구하는 자연수 a의 최솟값은 1이다. 답 1

개념 확장 & 수리논술 · 창의사고력 문제 본문 48쪽

함수 $y=g(t)$의 그래프를 바탕으로 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



$f(0)=f(b)=0$, $f'(b)=0$이므로

$f(x)=px(x-b)^2$ $(p>0)$으로 놓을 수 있다.

이때,

$$f'(x)=p(x-b)^2+2px(x-b)$$
$$=p(x-b)(3x-b)$$

이므로

$f'(x)=0$에서 $x=b$ 또는 $x=\dfrac{b}{3}$

$f'(a)=0$이므로 $a=\dfrac{b}{3}$ $\quad\therefore b=3a$ $(\because 0<a<b)$

$\therefore f(x)=px(x-3a)^2$

이때, $f(a)=4pa^3=4$ $\quad\therefore pa^3=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

한편, 방정식 $f(x)=f(a)$에서

$px^3-6pax^2+9pa^2x-4pa^3=0$

$x^3-6ax^2+9a^2x-4a^3=0$

$(x-a)^2(x-4a)=0$

$\therefore x=a$ 또는 $x=4a$

$x=a$가 중근이고 $x=c$가 다른 한 실근이어야 하므로

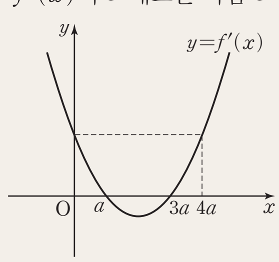
$c=4a$

$\therefore a+c=a+4a=5a$

또한 $f'(x)=p(x-3a)(3x-3a)$

$\qquad\qquad=3p(x-a)(x-3a)$

이므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$$\therefore \int_0^{a+c}|f'(x)|dx$$
$$=\int_0^{5a}|f'(x)|dx$$
$$=\int_0^{a}f'(x)dx-\int_a^{3a}f'(x)dx+\int_{3a}^{5a}f'(x)dx$$
$$=\Big[f(x)\Big]_0^a-\Big[f(x)\Big]_a^{3a}+\Big[f(x)\Big]_{3a}^{5a}$$
$$=f(a)-f(0)-f(3a)+f(a)+f(5a)-f(3a)$$
$$=f(5a)+8\ (\because f(0)=f(3a)=0,\ f(a)=4)$$

한편, $f(5a)=p(5a)(2a)^2$

$\qquad\qquad=20pa^3=20$ $(\because$ ㉠$)$

이므로

$\displaystyle\int_0^{a+c}|f'(x)|dx=20+8=28$

답 28

Memo

Memo