수학 영역

가형

1. ④	2. ①	3. ④	4. ⑤	5. ②
6. ④	7. ③	8. ⑤	9. ②	10. ④
11. ①	12. ④	13. ④	14. ①	15. ④
16. ②	17. ③	18. ③	19. ④	20. ③
21. ③	22. 40	23. 45	24. 7	25. 12
26. 60	27. 50	28. 14	29. 35	30. 8

1. $\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-1}{\sin 2x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{4x}-1}{4x}\times\frac{2x}{\sin 2x}\times 2\right)=2$

2. 두 벡터 $\vec{a}=(k,\ 2)$, $\vec{b}=(-1,\ k+1)$이 서로 수직이므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(k,\ 2)\cdot(-1,\ k+1)=0$

$-k+(2k+2)=0\qquad\therefore\ k=-2$

3. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}4\sin x\,dx=4\Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=4\left\{0-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=2$

4. 조건부확률의 정의 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$에 의하여

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B|A)=\frac{5}{8}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{8}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{5}{8}-\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

5. 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 2,\ 3)$, $\mathrm{B}(4,\ -1,\ 2)$에서 x축에 내린 수선의 발은 각각 $\mathrm{A}'(1,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}'(4,\ 0,\ 0)$이다.

선분 $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$을 $1:2$로 내분하는 점을 C'이라 하면 점 C'의 x좌표가 구하는 수선의 발의 x좌표이므로

$\frac{1\times4+2\times1}{1+2}=2$

[다른 풀이]

선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 C의 좌표는

$\mathrm{C}\left(\frac{4+2}{1+2},\ \frac{-1+4}{1+2},\ \frac{2+6}{1+2}\right)$, 즉 $\mathrm{C}\left(2,\ 1,\ \frac{8}{3}\right)$

이므로 점 C에서 x축에 내린 수선의 발 $\mathrm{C}'(2,\ 0,\ 0)$의 x좌표는 2이다.

6. 짝수가 적힌 4개의 공 중 2개를 택하고, 홀수가 적힌 공 5개 중 3개를 택해야 하므로

${}_4\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_2=60$

이 공 5개를 원형으로 나열하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$60\times24=1440$

7. $1+\ln x=t$라 하면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$

$x=1$일 때 $t=1$이고, $x=e^2$일 때 $t=3$이므로

$\int_1^{e^2}\frac{1}{x(1+\ln x)^2}dx=\int_1^3\frac{1}{t^2}dt=\left[-\frac{1}{t}\right]_1^3$

$=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$

8. 직선 $\frac{x}{2}=1-y=\frac{z-3}{2}$, 즉 $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{2}$의 방향벡터는 $\vec{d_1}=(2,\ -1,\ 2)$

또, 직선 $x+2y+3=0$, $z=0$, 즉 $\frac{x+3}{2}=\frac{y}{-1}$, $z=0$의 방향벡터는 $\vec{d_2}=(2,\ -1,\ 0)$

두 직선이 이루는 각은 두 방향벡터가 이루는 각이므로

$\cos\theta=\frac{|\vec{d_1}\cdot\vec{d_2}|}{|\vec{d_1}||\vec{d_2}|}$

$=\frac{|(2,\ -1,\ 2)\cdot(2,\ -1,\ 0)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}\ \sqrt{2^2+(-1)^2+0^2}}$

$=\frac{5}{3\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

9. 직각삼각형 PFQ의 넓이가 $2\sqrt{3}$이고 $\angle\mathrm{PFQ}=\frac{\pi}{6}$이므로 $\overline{\mathrm{PF}}=a$라 하면

$\frac{1}{2}\times a\sin\frac{\pi}{6}\times a\cos\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}$

$a^2\times\frac{\sqrt{3}}{8}=2\sqrt{3}$, $a=4$

한편, 점 P의 x좌표를 k라 하고 점 P에서 준선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PF}}$이므로

$k+1=4\qquad\therefore\ k=3$

10. 동전 16개를 던져 앞면이 나오는 동전의 개수를 확률변수 Y라 하면

$X=500Y$이고 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(16,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$\mathrm{E}(Y)=16\times\frac{1}{2}=8$, $\sigma(Y)=\sqrt{16\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=2$

이므로

$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(500Y)=500\times8=4000$

$\sigma(X)=\sigma(500Y)=500\times\sigma(Y)=500\times2=1000$

$\therefore\ \mathrm{E}(X)+\sigma(X)=5000$

11. 제품 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 2^2)$을 따르므로 임의로 선택한 제품이 불량품으로 판정될 확률은

$\mathrm{P}(X\le27)+\mathrm{P}(X\ge34)$

$=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{27-30}{2}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{34-30}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le-1.5)+\mathrm{P}(Z\ge2)$

$=(0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le1.5))+(0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le2))$

$=(0.5-0.4332)+(0.5-0.4772)$

$=0.0896$

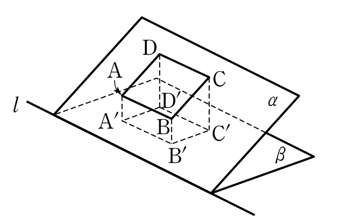
12. 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 두 사각형 ABCD, $\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'\mathrm{D}'$의 넓이가 각각 4, 2이므로

$4\cos\theta=2$, $\cos\theta=\frac{1}{2}$

한편, 교선 l과 평행한 정사각형 ABCD의 두 변을 AB, CD라 하면 그림의 두 변 AB, CD의 정사영의 길이는 각각 2이다.

또, 변 BC의 정사영의 길이는

$2\cos\theta=2\times\frac{1}{2}=1$



마찬가지로 변 AD의 정사영의 길이는 1이다.

따라서 사각형 $\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'\mathrm{D}'$의 둘레의 길이는

$2\times2+2\times1=6$

13. $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x-1}=\frac{1}{2}$에서 $f(1)=3$, $f'(1)=\frac{1}{2}$

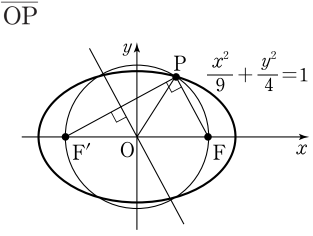
$g(x)$가 $f(x)$의 역함수이고, $g(3)=1$이므로

$g'(3)=\frac{1}{f'(g(3))}=\frac{1}{f'(1)}=2$

14. 초점 $\mathrm{F}(k,\ 0)\ (k>0)$이라 하면 $k=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$

또, 선분 PF'을 수직이등분한 직선이 원점을 지나므로

$\overline{\mathrm{OF}'}=\overline{\mathrm{OP}}$



그러므로 점 P는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{OF}}$ 즉, $\sqrt{5}$인 원 위의 점이다.

이때 삼각형 $\mathrm{PF}'\mathrm{F}$에서 $\angle\mathrm{FPF}'=\frac{\pi}{2}$이다.

$\overline{\mathrm{PF}}=a$, $\overline{\mathrm{PF}'}=b$라 하면 타원의 정의에 의해

$a+b=6$ …… ㉠

또, 직각삼각형 $\mathrm{PF}'\mathrm{F}$에서

$a^2+b^2=20$ …… ㉡

㉠에서 $b=6-a$이므로 ㉡에 대입하면

$a^2+(6-a)^2=20$, $2a^2-12a+36=20$

$a^2-6a+8=0$, $(a-2)(a-4)=0$

$\therefore\ a=2$ 또는 $a=4$

이때 $a<b$이므로 $a=2$, $b=4$이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{PF}}=2$

15. $f(x)=e^{2x}+ke^x+2x$에서 $f'(x)=2e^{2x}+ke^x+2$

$e^x=t\ (t>0)$라 하자. 함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 가지려면 $f'(x)=0$, 즉 $2t^2+kt+2=0$이 서로 다른 두 개의 양의 실근을 가져야 한다.

방정식 $2t^2+kt+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-16>0\qquad\therefore\ k<-4$ 또는 $k>4$ …… ㉠

방정식의 서로 다른 두 실근을 α, $\beta\ (\alpha>0,\ \beta>0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{k}{2}>0$, $\alpha\beta=1\qquad\therefore\ k<0$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $k<-4$

$e^p=\alpha$, $e^q=\beta$인 p, q는 다음을 만족시킨다.

$\alpha+\beta=e^p+e^q=-\frac{k}{2}$

$\alpha\beta=e^p\times e^q=e^{p+q}=1$

$\therefore\ p+q=0$

함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은

$f(p)+f(q)=(e^{2p}+ke^p+2p)+(e^{2q}+ke^q+2q)$

$=(e^p+e^q)^2-2e^pe^q+k(e^p+e^q)$

$+2(p+q)$

$=-\frac{k^2}{4}-2=-11$

$\therefore\ k=-6\ (\because\ k<-4)$

16. n장의 카드에서 동시에 3장의 카드를 뽑는 경우의 수는

${}_n\mathrm{C}_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

이다. 여사건을 생각하여 보면

(ⅰ) 3개의 수가 연속이 되는 경우

$(1,\ 2,\ 3)$, $(2,\ 3,\ 4)$, $\cdots$, $(n-2,\ n-1,\ n)$

따라서 3개의 수가 연속이 되는 경우의 수는 $n-2$(가지)

(ⅱ) 2개의 수만 연속이 되는 경우

뽑은 3장의 카드에 적힌 수를 a_1, a_2, $a_3\ (a_1<a_2<a_3)$라 하자.

a_1, a_2가 연속인 경우에 $a_1=k$라 하면 $a_2=k+1$이고 a_3은 $k+3$부터 n 이하의 값이어야 한다.

따라서 경우의 수는

$n-(k+3)+1=n-k-2$(가지)

그러므로 구하는 경우의 수는

$\sum_{k=1}^{n-3}(n-k-2)=\sum_{k=1}^{n-3}(n-2)-\sum_{k=1}^{n-3}k$

$=(n-2)(n-3)-\frac{(n-2)(n-3)}{2}$

$=\frac{(n-2)(n-3)}{2}$

또한 a_2, a_3이 연속인 경우도 위와 같은 방법으로

$\frac{(n-2)(n-3)}{2}$(가지)

따라서 2개의 수만 연속인 경우의 수는

$\boxed{(n-2)(n-3)}$(가지)

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 확률은

$1-\frac{(n-2)+\boxed{(n-2)(n-3)}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}$

$=\boxed{\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}}$

$\therefore\ f(n)=(n-2)(n-3)$,

$g(n)=\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}$

$\therefore\ f(10)+5g(6)=56+1=57$

17. $f'(x)=\dfrac{kx^{k-1}(x-1)-x^k}{(x-1)^2}=\dfrac{x^{k-1}\{(k-1)x-k\}}{(x-1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{k}{k-1}$

x	(1)	$\cdots$	$\frac{k}{k-1}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

위의 증감표에서 $f(x)$는 $x=\dfrac{k}{k-1}$일 때 최솟값을 갖는다.

$$g(k)=\frac{\left(\frac{k}{k-1}\right)^k}{\frac{k}{k-1}-1}=(k-1)\left(\frac{k}{k-1}\right)^k$$

$$\therefore \lim_{k\to\infty}\frac{g(k)}{k}=\lim_{k\to\infty}\frac{k-1}{k}\left(\frac{k}{k-1}\right)^k=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1}$$

$k-1=t$로 놓으면 $k\to\infty$일 때 $t\to\infty$이고

$\dfrac{k}{k-1}=1+\dfrac{1}{t}$이므로

$$\lim_{k\to\infty}\frac{g(k)}{k}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$$

18. 조건 (가)에서 갑이 처음 꺼낸 공과 을이 처음 꺼낸 공에 적힌 수의 합이 짝수이므로 다음과 같이 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

(i) 갑이 처음 꺼낸 공과 을이 처음 꺼낸 공에 적힌 수가 모두 짝수인 경우

조건 (나)에서 갑과 을이 두 번째로 꺼낸 공에 적힌 수의 곱이 짝수이고 주머니에 짝수가 적힌 공은 모두 3개이므로 순서쌍으로 나타내면 다음과 같다.

(짝수, 홀수, 짝수, 짝수), (짝수, 짝수, 짝수, 홀수)

이때 확률은

$$\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{4}$$
$$=\frac{24+24}{7\times6\times5\times4}=\frac{48}{7\times6\times5\times4}$$

(ii) 갑이 처음 꺼낸 공과 을이 처음 꺼낸 공에 적힌 수가 모두 홀수인 경우

조건 (나)에서 갑과 을이 두 번째로 꺼낸 공에 적힌 수의 곱이 짝수이므로 순서쌍으로 나타내면 다음과 같다.

(홀수, 홀수, 홀수, 짝수), (홀수, 짝수, 홀수, 홀수), (홀수, 짝수, 홀수, 짝수)

이때 확률은

$$\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}+\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$$
$$=\frac{72+72+72}{7\times6\times5\times4}=\frac{216}{7\times6\times5\times4}$$

따라서 구하는 확률은 (i), (ii)에서

$$\frac{48}{7\times6\times5\times4}+\frac{216}{7\times6\times5\times4}=\frac{264}{7\times6\times5\times4}=\frac{11}{35}$$

[다른 풀이]

조건 (가)에서 두 수의 합이 짝수이므로 다음 두 가지로 나눌 수 있다.

(i) 갑과 을이 처음 꺼낸 공에 적힌 수가 모두 짝수인 경우

갑과 을이 처음 꺼낸 공이 모두 짝수일 확률은 짝수는 2, 4, 6이므로

$$\frac{3\times2}{7\times6}=\frac{1}{7}$$

이때 두 번째로 꺼낸 공에 적힌 수의 곱이 짝수인 사건은 곱이 모두 홀수인 사건의 여사건이고 홀수는 1, 3, 5, 7이므로

$$1-\frac{4\times3}{5\times4}=\frac{2}{5}$$

확률은 $\dfrac{1}{7}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{35}$

(ii) 갑과 을이 처음 꺼낸 공에 적힌 수가 모두 홀수인 경우

갑과 을이 처음 꺼낸 공이 모두 홀수일 확률은 홀수는 1, 3, 5, 7이므로

$$\frac{4\times3}{7\times6}=\frac{2}{7}$$

이때 두 번째로 꺼낸 공에 적힌 수의 곱이 짝수인 사건은 곱이 모두 홀수인 사건의 여사건이고 남아 있는 홀수는 2개이므로

$$1-\frac{2\times1}{5\times4}=\frac{9}{10}$$

확률은 $\dfrac{2}{7}\times\dfrac{9}{10}=\dfrac{9}{35}$

따라서 (i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{2}{35}+\frac{9}{35}=\frac{11}{35}$$

19. $\overline{AB}=4$이고 $\angle APB=\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\overline{PB}=4\sin\theta$

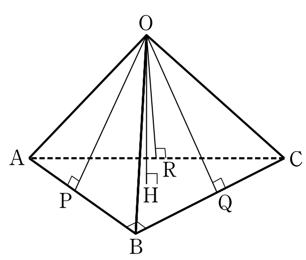
$$\angle QBP=\frac{\pi}{2}-\angle PQB=\frac{\pi}{2}-\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3}-\theta$$

$$\therefore \overline{PQ}=\overline{PB}\tan\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=4\sin\theta\tan\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$$

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times4\sin\theta\times4\sin\theta\tan\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=8\sin^2\theta\tan\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{8\sin^2\theta\tan\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}{\theta^2}=8\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\times\tan\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\right\}=8\tan\frac{\pi}{3}=8\sqrt{3}$$

20. 점 O에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H라 하자.



조건 (가)에서 $\overline{OP}=\overline{OQ}=\overline{OR}$이므로 세 직각삼각형 OPH, OQH, ORH는 합동이다.

$\overline{HP}=\overline{HQ}=\overline{HR}$

또, $\overline{OP}\perp\overline{AB}$, $\overline{OQ}\perp\overline{BC}$, $\overline{OR}\perp\overline{CA}$이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{PH}\perp\overline{AB}$, $\overline{QH}\perp\overline{BC}$, $\overline{RH}\perp\overline{CA}$

점 H는 삼각형 ABC의 내접원의 중심이고, 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면 직각삼각형 ABC에서

$\dfrac{1}{2}\times(3+4+5)\times r=\dfrac{1}{2}\times3\times4 \quad \therefore r=1$

$\overline{OP}=a$라 하면 조건 (나)에서 $S_1+S_2+S_3=2S$이므로

$\dfrac{1}{2}\times a\times(3+4+5)=2\times\dfrac{1}{2}\times3\times4 \quad \therefore a=2$

따라서 점 O와 평면 ABC 사이의 거리는

$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{PH}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

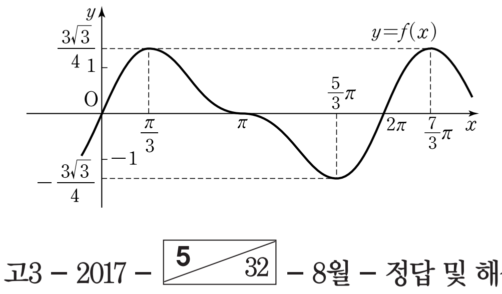
21. $f'(x)=\cos^2x-\sin^2x+\cos x$
$=2\cos^2x+\cos x-1$
$=(2\cos x-1)(\cos x+1)$

$0\le x\le2\pi$에서 $f'(x)=0$이면 $x=\dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	0

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



(i) $0\le t\le\dfrac{\pi}{3}$일 때

구간 $[t,\ t+\pi]$에 $\dfrac{\pi}{3}$가 포함되어 있으므로

$g(t)=f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

(ii) $\dfrac{\pi}{3}\le t\le\pi$일 때

$\dfrac{\pi}{3}\le t\le\pi$에서 $f(t)\ge0$이고 $f(t)$는 감소,

$\pi\le t\le2\pi$에서 $f(t)\le0$이므로

$g(t)=f(t)$

(iii) $\pi\le t\le\dfrac{4}{3}\pi$일 때

$2\pi\le t+\pi\le\dfrac{7}{3}\pi$에서 $f(t+\pi)\ge0$이고 $f(t+\pi)$는 증가하므로

$g(t)=f(t+\pi)=f(t-\pi)$

($\because$ $f(x)$는 주기가 2π인 주기함수)

(iv) $\dfrac{4}{3}\pi\le t\le2\pi$일 때

구간 $[t,\ t+\pi]$에 $\dfrac{7}{3}\pi$가 포함되어 있으므로

$g(t)=f\left(\dfrac{7}{3}\pi\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

ㄱ. (i)에서 $g(0)=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ $\quad\therefore$ 참

ㄴ. 함수 $g(t)$는 $\dfrac{\pi}{3}\le t\le\pi$에서는 감소하므로 $g'(t)<0$이지만 $\pi\le t\le\dfrac{4}{3}\pi$에서는 증가하므로 $g'(t)>0$이다.

$\therefore$ 거짓

ㄷ. $\displaystyle\int_0^{2\pi}g(t)dt$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{3\sqrt{3}}{4}dt+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}g(t)dt+\int_{\pi}^{\frac{4}{3}\pi}g(t)dt+\int_{\frac{4}{3}\pi}^{2\pi}\frac{3\sqrt{3}}{4}dt$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\pi}{3}+2\pi-\frac{4}{3}\pi\right)+\int_0^{\pi}(\sin t\cos t+\sin t)dt$$

$$\left(\because \int_{\pi}^{\frac{4}{3}\pi}g(t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}f(t)dt\right)$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{4}\pi+\int_{-1}^{1}(s+1)ds$$

($\because$ $\cos t=s$라 하면 $-\sin t=\dfrac{ds}{dt}$, $t=0$이면 $s=1$, $t=\pi$이면 $s=-1$)

$$=\frac{3\sqrt{3}}{4}\pi+\left[\frac{1}{2}s^2+s\right]_{-1}^{1}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\pi+2 \quad \therefore \text{참}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

22. 로그의 진수 조건에 의하여 $x-5>0$, $x-2>0$

$\therefore x>5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

주어진 부등식에서 밑을 같게 하면

$\log_2(x-5)<\dfrac{1}{2}\log_2(x-2)+1$

$\log_2(x-5)^2<\log_2(x-2)+2$

$\therefore \log_2(x-5)^2<\log_2 4(x-2)$

로그의 밑이 1보다 크므로

$(x-5)^2<4(x-2)$, $x^2-14x+33<0$

$(x-3)(x-11)<0$

$\therefore 3<x<11$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $5<x<11$이므로 주어진 부등식을 만족시키는 모든 정수 x는 6, 7, 8, 9, 10이고 그 합은

$6+7+8+9+10=40$

23. $(x+1)^{10}(x^2-x+1)^{10}$

$=\{(x+1)(x^2-x+1)\}^{10}=(x^3+1)^{10}$

$(x^3+1)^{10}$의 전개식의 일반항은

${}_{10}C_r(x^3)^r\times1^{10-r}$ (단, $r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10$)

따라서 x^6의 계수는 $r=2$인 경우이므로

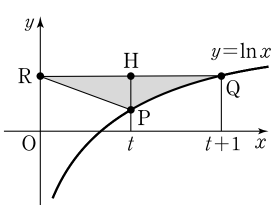
${}_{10}C_2=\dfrac{10\times9}{2\times1}=45$

24. $\sin^2 x=1-\cos^2 x$에서 주어진 방정식은
$2\cos^2 x-3\cos x=k$
$\cos x=t$라 하면 $-1\le t\le 1$이다.
$f(t)=2t^2-3t$라 하면
$f(t)=2t^2-3t=2\left(t-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$에서
$f\left(\frac{3}{4}\right)=-\frac{9}{8}$, $f(-1)=5$ ∴ $-\frac{9}{8}\le f(t)\le 5$
$f(t)=k$이므로 주어진 방정식의 실근이 존재하도록 하는 정수 k는 $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$이다.
따라서 구하는 모든 정수 k의 개수는 7이다.

25. $\int_0^{\pi} f(t)\cos t\,dt=k$ (단, k는 상수)라 하면
$f(x)=x-k$이므로
$k=\int_0^{\pi}(t-k)\cos t\,dt$
$=\Big[(t-k)\sin t\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin t\,dt=\Big[\cos t\Big]_0^{\pi}=-2$
따라서 $f(x)=x+2$이므로 $f(10)=12$이다.

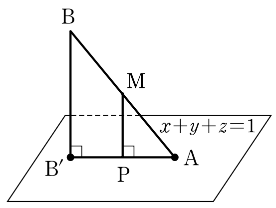
26. $\{f(a)+f(b)+f(c)\}\times\{f(d)+f(e)\}=5$이므로 다음과 같이 두가지 경우로 나눌 수 있다.
(i) $f(a)+f(b)+f(c)=1$, $f(d)+f(e)=5$
$f(a)+f(b)+f(c)=1$인 경우의 수는
${}_3\mathrm{H}_1={}_{3+1-1}\mathrm{C}_1={}_3\mathrm{C}_1=3$
이 각각에 대하여 $f(d)+f(e)=5$인 경우의 수는
${}_2\mathrm{H}_5={}_{2+5-1}\mathrm{C}_5={}_6\mathrm{C}_5={}_6\mathrm{C}_1=6$
그러므로 구하는 경우의 수는
$3\times6=18$
(ii) $f(a)+f(b)+f(c)=5$, $f(d)+f(e)=1$
$f(a)+f(b)+f(c)=5$인 경우의 수는
${}_3\mathrm{H}_5={}_{3+5-1}\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$
이 각각에 대하여 $f(d)+f(e)=1$인 경우의 수는
${}_2\mathrm{H}_1={}_{2+1-1}\mathrm{C}_1={}_2\mathrm{C}_1=2$
그러므로 구하는 경우의 수는
$21\times2=42$
따라서 (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$18+42=60$

27.



점 P에서 선분 QR에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\triangle\mathrm{PRH}=\frac{1}{2}\times t\{\ln(t+1)-\ln t\}=\frac{t}{2}\ln\frac{t+1}{t}$
도형 PQH의 넓이는
$\int_t^{t+1}\{\ln(t+1)-\ln x\}dx$
$=\Big[x\ln(t+1)-(x\ln x-x)\Big]_t^{t+1}$
$=-t\{\ln(t+1)-\ln t\}+1$
$=1-t\ln\frac{t+1}{t}$
따라서
$S(t)=\triangle\mathrm{PRH}+(\text{도형 PQH의 넓이})$
$=1-\frac{t}{2}\ln\frac{t+1}{t}$ (단, $t>0$)
∴ $\lim_{t\to\infty}S(t)=\lim_{t\to\infty}\left\{1-\frac{t}{2}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right\}$
$=\lim_{t\to\infty}\left\{1-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right\}=\frac{1}{2}$
∴ $100\lim_{t\to\infty}S(t)=50$

28. 선분 AB의 중점을 M이라 하면
$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=2\overrightarrow{\mathrm{PM}}$
이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$의 값이 최소가 되기 위해서는 점 P는 점 M에서 평면 $x+y+z=1$에 내린 수선의 발이어야 한다.



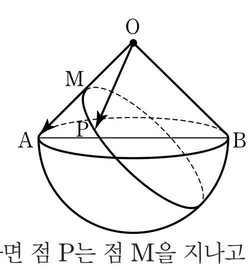
점 M은 선분 AB의 중점이므로
$\mathrm{M}\left(\frac{0+2}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{1+1}{2}\right)$, 즉 $\mathrm{M}(1, 2, 1)$
점 M과 평면 $x+y+z=1$ 사이의 거리는
$\overline{\mathrm{PM}}=\frac{|1+2+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\sqrt{3}$
$\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{(1-0)^2+(2-0)^2+(1-1)^2}=\sqrt{5}$이므로
직각삼각형 AMP에서
$\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AM}}^2-\overline{\mathrm{PM}}^2}=\sqrt{5-3}=\sqrt{2}$
점 B에서 평면 $x+y+z=1$에 내린 수선의 발을 B′이라 하면 $\overline{\mathrm{BB'}}=2\overline{\mathrm{PM}}=2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{B'P}}=\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{2}$이므로
$|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2=\overline{\mathrm{BP}}^2=\overline{\mathrm{BB'}}^2+\overline{\mathrm{B'P}}^2=(2\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2=14$

29. 주머니에서 1개의 공을 꺼내어 공에 적힌 수를 확률변수 X라 하면
$\mathrm{P}(\overline{X}=1)=\{\mathrm{P}(X=1)\}^3$
$\mathrm{P}(\overline{X}=6)=\{\mathrm{P}(X=6)\}^3$
이때 조건에서 $\mathrm{P}(\overline{X}=1)=\frac{1}{8}$, $\mathrm{P}(\overline{X}=6)=\frac{1}{27}$이므로
$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(X=6)=\frac{1}{3}$
∴ $\mathrm{P}(X=3)=1-\{\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=6)\}$
$=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$
그러므로 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

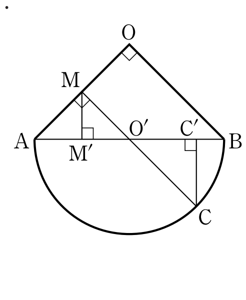
X	1	3	6	계
$\mathrm{P}(X)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{3}{6}+3\times\frac{1}{6}+6\times\frac{2}{6}=3$
$\mathrm{V}(X)=\left(1^2\times\frac{3}{6}+3^2\times\frac{1}{6}+6^2\times\frac{2}{6}\right)-3^2=5$
$\mathrm{E}(\overline{X})=3$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{5}{3}$
∴ $\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2=\frac{5}{3}+3^2=\frac{32}{3}$
∴ $p+q=35$

30. $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2$에서 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면



$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\theta=2$
$2|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\theta=2$
$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\theta=1$
선분 OA의 중점을 M이라 하면 점 P는 점 M을 지나고 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$에 수직인 평면과 이 입체도형이 만나는 도형의 내부 또는 경계 위의 점이다.
선분 AB의 중점을 O′이라 하고 직선 MO′이 반구와 만나는 점을 C, 두 점 M, C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 각각 M′, C′이라 하자.



내적 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$에서 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$가 이루는 각의 크기를 θ'이라 하면
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\theta'$
$=2\sqrt{2}|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\theta'$
이므로 점 P가 점 M일 때 최솟값을, 점 P가 점 C일 때 최댓값을 가진다.
한편, $\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{2}$이므로
$\angle\mathrm{M'O'M}=\frac{\pi}{4}$, $\angle\mathrm{C'O'C}=\frac{\pi}{4}$이므로
$\overline{\mathrm{O'M'}}=\overline{\mathrm{O'M}}\cos\frac{\pi}{4}=1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\overline{\mathrm{O'C'}}=\overline{\mathrm{O'C}}\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$
그러므로 내적 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$의 최솟값과 최댓값은
$m=\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AM'}}=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2$
$M=\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC'}}=2\sqrt{2}\times(\sqrt{2}+1)=4+2\sqrt{2}$
∴ $m+M=6+2\sqrt{2}$
∴ $a+b=8$

나형

1. ④	2. ①	3. ④	4. ⑤	5. ①
6. ④	7. ②	8. ⑤	9. ②	10. ③
11. ①	12. ③	13. ⑤	14. ④	15. ⑤
16. ②	17. ②	18. ②	19. ⑤	20. ②
21. ④	22. 21	23. 27	24. 2	25. 8
26. 13	27. 81	28. 24	29. 625	30. 351

1. $8\times\sqrt{2^{-4}}=2^3\times(2^{-4})^{\frac{1}{2}}=2^3\times2^{-2}=2$

2. $(A^C\cup B)^C=(A^C)^C\cap B^C=A\cap B^C=A-B$
이때 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$이므로
$A-B=\{1, 2, 3, 4, 5\}-\{2, 3, 5, 7\}=\{1, 4\}$
따라서 모든 원소의 합은 5이다.

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+4n}{3n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{4}{n}}{3-\frac{1}{n^2}}=\frac{5}{3}$

4. 조건부확률의 정의 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$에 의하여
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B|A)=\frac{5}{8}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{8}$
∴ $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\frac{5}{8}-\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

5. $\log_2 3\times\log_3 6+\log_2\frac{1}{3}$
$=\log_2 3\times\frac{\log_2 6}{\log_2 3}+\log_2\frac{1}{3}=\log_2 6+\log_2\frac{1}{3}$
$=\log_2\left(6\times\frac{1}{3}\right)=\log_2 2=1$

6. $\int_0^2(3x^2-2x+8)dx=\Big[x^3-x^2+8x\Big]_0^2$
$=8-4+16=20$

7. $\lim_{x\to0+}f(x)=-1$, $\lim_{x\to1+}f(x)=1$
∴ $\lim_{x\to0+}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)=-1+1=0$

8. $(a_1+a_{10})^2=a_1^2+2a_1a_{10}+a_{10}^2=29+20=49$
이때 모든 항이 양수이므로
$a_1+a_{10}=7$
따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은
$\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=\frac{10\times7}{2}=35$

9. 1, 2, 3을 사용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수는
${}_3\Pi_4=3^4=81$
각 자리 숫자의 합이 10이 되는 경우를 순서쌍으로 나타내면 (3, 3, 3, 1), (3, 3, 2, 2)의 두 가지 경우이므로 경우의 수는
$\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{2!2!}=4+6=10$
따라서 구하는 확률은 $\frac{10}{81}$이다.

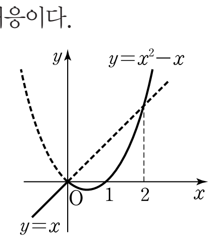
10. 함수 $y=(x-k)^2(k<0)$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 한 점에서 만나므로 함수 $y=(x-k)^2$의 그래프와 직선 $y=x$는 한 점에서 만나야 한다.

따라서 방정식 $(x-k)^2=x$, 즉
$x^2-(2k+1)x+k^2=0$은 중근을 가져야 한다.
이 방정식의 판별식을 D라 하면
$$D=(2k+1)^2-4k^2=4k+1=0$$
$$\therefore k=-\frac{1}{4}$$

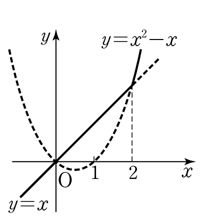
11. 제품 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 2^2)$을 따르므로 임의로 선택한 제품이 불량품으로 판정될 확률은
$$\mathrm{P}(X\le 27)+\mathrm{P}(X\ge 34)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{27-30}{2}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{34-30}{2}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\le -1.5)+\mathrm{P}(Z\ge 2)$$
$$=(0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5))+(0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2))$$
$$=(0.5-0.4332)+(0.5-0.4772)=0.0896$$

12. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로 미분가능하지 않고 $x\ne 1$인 실수 전체의 집합에서는 미분가능하다.
함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(i) 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이 되려면
$$\lim_{x\to 1+}f(x)g(x)$$
$$=\lim_{x\to 1+}(x^2-2x+4)(x^2+ax+b)$$
$$=3(1+a+b)$$
$$\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)$$
$$=\lim_{x\to 1-}(x+1)(x^2+ax+b)=2(1+a+b)$$
$$f(1)g(1)=3(1+a+b)$$
따라서 $3(1+a+b)=2(1+a+b)$에서
$$a+b+1=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$
즉, $f(1)g(1)=0$
(ii) 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 미분계수가 존재하려면
$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}\frac{(x^2-2x+4)(x^2+ax+b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}\frac{(x^2-2x+4)(x-1)(x+1+a)}{x-1}\ (\because ㉠)$$
$$=3(2+a)$$
$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}\frac{(x+1)(x^2+ax+b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}\frac{(x+1)(x-1)(x+1+a)}{x-1}$$
$$=2(2+a)$$
$3(2+a)=2(2+a)$에서 $a=-2$이다.
㉠에서 $b=1$
$$\therefore a^2+b^2=(-2)^2+1^2=5$$

13. 함수 $f(x)$가 일대일 대응이려면 함수 $f(x)$는 연속이어야 한다.
이때 $k^2-k=k$, $k(k-2)=0$
$k=0$ 또는 $k=2$
[그림 1]과 같이 $k=0$일 때 함수 $f(x)$는 일대일 대응이 아니고 [그림 2]와 같이 $k=2$일 때 함수 $f(x)$는 일대일 대응이다.



[그림 1]

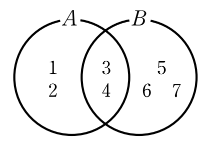


[그림 2]

$\therefore k=2$

14. 6개의 점 A_1, A_2, $\cdots$, A_6에서 서로 다른 세 개의 점을 택하는 방법의 수가
$${}_6\mathrm{C}_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$
이므로 세 점을 택하여 만들 수 있는 삼각형의 개수는 20이다.
이 삼각형 중에서 원점 O가 삼각형의 외부 또는 삼각형의 변 위에 있는 사건을 A라 하면 원점 O가 삼각형 내부에 존재하는 사건은 A^C이다. 원점 O가 삼각형 내부에 존재하려면 예각삼각형이므로 삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3\mathrm{A}_5$와 삼각형 $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_4\mathrm{A}_6$ 두 개이다.
따라서 구하는 확률을 $\mathrm{P}(A)$라 하면
$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{20}=\frac{9}{10}$$

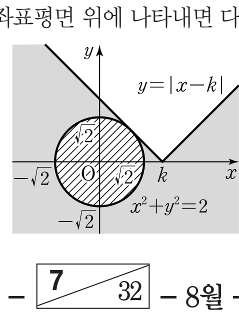
15. 조건 (나)에서 $A\cap X=X$이고 $Y-B=\varnothing$이므로
$X\subset A$, $Y\subset B$
또, 두 집합 X, Y는 집합 C와 서로소이므로
$X\subset(A-B)$, $Y\subset(B-A)$



조건 (가)에서
$X\cup Y\cup C=A\cup B$이므로
$X=A-B$, $Y=B-A$
따라서 $X=\{1,\ 2\}$, $Y=\{5,\ 6,\ 7\}$이므로
$b-a=18-3=15$

16. n장의 카드에서 동시에 3장의 카드를 뽑는 경우의 수는
$${}_n\mathrm{C}_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$
이다. 여사건을 생각하여 보면
(i) 3개의 수가 연속이 되는 경우
$(1,\ 2,\ 3)$, $(2,\ 3,\ 4)$, $\cdots$, $(n-2,\ n-1,\ n)$
따라서 3개의 수가 연속이 되는 경우의 수는 $n-2$(가지)
(ii) 2개의 수만 연속이 되는 경우
뽑은 3장의 카드에 적힌 수를 a_1, a_2, $a_3(a_1<a_2<a_3)$라 하자.
a_1, a_2가 연속인 경우에 $a_1=k$라 하면 $a_2=k+1$이고 a_3은 $k+3$부터 n 이하의 값이어야 한다.
따라서 경우의 수는
$n-(k+3)+1=n-k-2$(가지)
그러므로 구하는 경우의 수는
$$\sum_{k=1}^{n-3}(n-k-2)=\sum_{k=1}^{n-3}(n-2)-\sum_{k=1}^{n-3}k$$
$$=(n-2)(n-3)-\frac{(n-2)(n-3)}{2}$$
$$=\frac{(n-2)(n-3)}{2}$$
또한 a_2, a_3이 연속인 경우도 위와 같은 방법으로
$$\frac{(n-2)(n-3)}{2}$$
따라서 2개의 수만 연속인 경우의 수는
$\boxed{(n-2)(n-3)}$(가지)
(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은
$$1-\frac{(n-2)+\boxed{(n-2)(n-3)}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}$$
$$=\boxed{\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}}$$
$\therefore f(n)=(n-2)(n-3)$,
$$g(n)=\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}$$
$$\therefore f(10)+5g(6)=56+1=57$$

17. 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2\le 2\}$
$Q=\{(x,\ y)\,|\,y\le|x-k|\}$
조건 p가 조건 q이기 위한 충분조건이므로 $P\subset Q$이다.
$y\le|x-k|=\begin{cases}-(x-k) & (x<k)\\ x-k & (x\ge k)\end{cases}$이므로 두 집합 P, Q의 영역을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



직선 $y=-x+k$와 원 $x^2+y^2=2$이 접할 때는 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $x+y-k=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{2}$와 같아야 하므로
$$\frac{|0+0-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}\qquad \therefore k=2\ (\because k>0)$$
따라서 p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 양수 k의 값의 범위는 $k\ge 2$이므로 최솟값은 2이다.

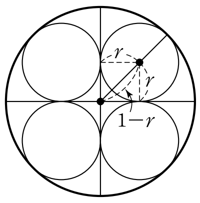
18. $f(x)=\frac{bx}{x-a}=\frac{ab}{x-a}+b$
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\frac{ab}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다.
그러므로 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=b$이다.
한편, 조건 (가)에서
$$y=(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x-1) \qquad \cdots\cdots ㉠$$
이므로 ㉠의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
이때 점근선의 방정식은 $x=a+1$, $y=b$이다.
그런데 ㉠의 그래프는 직선 $x=2$와 만나지 않으므로
$a+1=2$, $a=1$
또, 조건 (나)에서
$$y=(h\circ f)(x)=f(x)+2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$
이므로 ㉡의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
이때 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=b+2$이다.
그런데 ㉡의 그래프는 직선 $y=3$이 만나지 않으므로
$b+2=3$, $b=1$
$\therefore a+b=2$

19. $|t^2-x^2|=\begin{cases}t^2-x^2 & (|t|\ge x)\\ x^2-t^2 & (|t|\le x)\end{cases}$이므로
(i) $0<x<2$일 때
$$f(x)=\int_0^2|t^2-x^2|dt$$
$$=\int_0^x(x^2-t^2)dt+\int_x^2(t^2-x^2)dt$$
$$=\left[x^2t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^x+\left[\frac{1}{3}t^3-x^2t\right]_x^2$$
$$=\frac{4}{3}x^3-2x^2+\frac{8}{3}$$
(ii) $x\ge 2$일 때
$$f(x)=\int_0^2|t^2-x^2|dt=\int_0^2(x^2-t^2)dt$$
$$=\left[x^2t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^2=2x^2-\frac{8}{3}$$
$$\therefore f(x)=\begin{cases}\frac{4}{3}x^3-2x^2+\frac{8}{3} & (0<x<2)\\ 2x^2-\frac{8}{3} & (x\ge 2)\end{cases}$$
ㄱ. $f(2)=8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$ $\quad\therefore$ 참
ㄴ. $\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2+}f(x)=\frac{16}{3}$이고 $f(2)=\frac{16}{3}$이므로 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.
$$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2-}\frac{\frac{4}{3}x^3-2x^2+\frac{8}{3}-\frac{16}{3}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2-}\frac{\frac{2}{3}(x-2)(2x^2+x+2)}{x-2}=8$$
$$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{2x^2-\frac{8}{3}-\frac{16}{3}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2+}\frac{2(x-2)(x+2)}{x-2}=8$$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다. $\therefore$ 참
ㄷ. $f'(x)=\begin{cases}4x^2-4x & (0<x<2)\\ 4x & (x\ge 2)\end{cases}$
$f'(x)=0$에서 $x=1$이므로 $x=1$에서 극소이면서 최솟값을 갖는다.

최솟값은 $f(1)=\frac{4}{3}-2+\frac{8}{3}=2$ ∴ 참

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

20. 그림 R_1에서 부채꼴에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면



$\sqrt{2}r=1-r$

$\therefore r=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$

따라서 $S_1=4\times\left(r^2-\frac{1}{4}\pi r^2\right)$

$=\frac{4-\pi}{(\sqrt{2}+1)^2}$

한편, 그림 R_n의 한 원의 반지름의 길이를 r_n이라 하고 원을 4등분한 영역에 각각 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_{n+1}이라 하면 $\sqrt{2}r_{n+1}=r_n-r_{n+1}$에서 $r_{n+1}=\frac{r_n}{\sqrt{2}+1}$

즉, 도형의 닮음비가 $1:\frac{1}{\sqrt{2}+1}$이므로

넓이의 비는 $1:\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2$이고 ✧ 모양의 개수가 4배씩 많아지므로 공비는 $\frac{4}{(\sqrt{2}+1)^2}$이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{4-\pi}{(\sqrt{2}+1)^2}}{1-\frac{4}{(\sqrt{2}+1)^2}}=\frac{4-\pi}{2\sqrt{2}-1}$$

$$=\frac{1}{7}(2\sqrt{2}+1)(4-\pi)$$

21. $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값, $x=\beta$에서 극솟값을 가지므로 $f'(x)=9x^2+2ax+b=0$의 두 실근이 α, β $(\alpha<\beta)$이다. 따라서 근과 계수의 관계에 의하여 다음이 성립한다.

$\alpha+\beta=-\frac{2a}{9}$, $\alpha\beta=\frac{b}{9}$ …… ㉠

또한 두 점 $(\alpha, f(\alpha))$와 $(\beta, f(\beta))$가 점 $(0, 1)$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=0$, $\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}=1$ …… ㉡

따라서 $\beta=-\alpha$이고 ㉠에서 $a=0$

$f(\alpha)+f(\beta)=3\alpha^3+b\alpha+c+3\beta^3+b\beta+c$

$=3(\alpha^3+\beta^3)+b(\alpha+\beta)+2c$

$=3\{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\}+b(\alpha+\beta)+2c$

$=2c$

이므로 ㉡에서 $c=1$

㉠에서 $b=-9\alpha^2$이므로

조건 (나)에 의하여

$f(\alpha)-f(\beta)=f(\alpha)-f(-\alpha)$

$=3\alpha^3+b\alpha+1-(-3\alpha^3-b\alpha+1)$

$=6\alpha^3+2b\alpha=6\alpha^3-18\alpha^3$

$=-12\alpha^3=\frac{32}{9}$

$\therefore \alpha^3=-\frac{8}{27}$

따라서 $\alpha=-\frac{2}{3}$이므로 $b=-4$

$\therefore a^2+b^2+c^2=0+16+1=17$

22. $\frac{{}_9P_3}{4!}=\frac{9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=21$

23. $f(t)=t^4+t^3+3$으로 놓고, $\int f(t)dt=F(t)$라 하면

$\int_2^x f(t)dt=F(x)-F(2)$이다.

$\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x(t^4+t^3+3)dt$

$=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}=f(2)=2^4+2^3+3=27$

24. 세 수 1, $a\sqrt{a}$, $10-a$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(a\sqrt{a})^2=1\times(10-a)$, $a^3=10-a$

$a^3+a-10=0$, $(a-2)(a^2+2a+5)=0$

따라서 양수 a의 값은 2이다.

25. 조건 (가)에 의하여 다항함수 $f(x)$가 삼차항의 계수가 1, 이차항의 계수도 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x^3+x^2+ax+b$(단, a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

조건 (나)에 의하여 (분자) → 0이고, 극한값이 0이 아니므로 (분모) → 0이어야 한다.

$\therefore \lim_{x\to0}f(x)=b=0$

$\therefore f(x)=x^3+x^2+ax$

$\lim_{x\to0}\frac{x}{f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x^3+x^2+ax}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2+x+a}=\frac{1}{a}=-\frac{1}{2}$

에서 $a=-2$

따라서 $f(x)=x^3+x^2-2x$이고

$f(2)=8+4-4=8$

26. $\log 6^{10}=10\log6=10(\log2+\log3)$

$=10(0.3010+0.4771)$

$=10\times0.7781=7+0.7810$

$=\log10^7+\log6.04$

$=\log(6.04\times10^7)$

이므로

$6^{10}=6.04\times10^7$

따라서 $n=7$, $a=6$이므로

$n+a=13$

27. 집합 X의 두 부분집합 A, B가 $A\cap B^C=\varnothing$을 만족시키면 $A\subset B$이다.

(i) $A=\varnothing$일 경우, 집합 B는 집합 X의 모든 부분집합이 가능하다.
따라서 순서쌍 (A, B)의 개수는 $2^4=16$

(ii) 집합 A가 한 개의 원소만 가질 경우, 집합 B의 개수는 집합 A의 원소를 제외한 나머지 원소로 만들 수 있는 모든 부분집합의 개수와 같으므로 순서쌍 (A, B)의 개수는
${}_4C_1\times2^3=32$

(iii) 집합 A가 두 개의 원소만 가질 경우, 위와 같은 방법으로 순서쌍 (A, B)의 개수는
${}_4C_2\times2^2=24$

(iv) 집합 A가 세 개의 원소만 가질 경우, 위와 같은 방법으로 순서쌍 (A, B)의 개수는
${}_4C_3\times2=8$

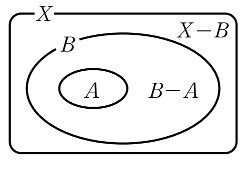
(v) $A=X$인 경우, $B=X$이므로 순서쌍 (A, B)의 개수는 1이다.

(i)~(v)에 의하여 모든 순서쌍 (A, B)의 개수는

$16+32+24+8+1=81$

[다른 풀이]

$A\subset B\subset X$를 만족시키는 집합 A, B를 벤 다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



이때 순서쌍 (A, B)를 결정하는 것은 집합 X의 원소 각각이 세 부분집합 A, $B-A$, $X-B$ 중 어느 집합에 속하는지와 같다.

따라서 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는 $3^4=81$이다.

28. 세 장의 카드에 적혀 있는 수를 각각 x, y, z라 하고, $x'=x-1$, $y'=y-1$, $z'=z-1$이라 하면

$x+y+z=20$이므로

$x'+y'+z'=17$ (단, x', y', z'은 음이 아닌 정수)

x, y, z의 순서쌍의 개수는 x', y', z'의 순서쌍의 개수와 같으므로

${}_3H_{17}={}_{19}C_{17}={}_{19}C_2=\frac{19\times18}{2\times1}=171$

x, y, z 중 같은 숫자가 없어야 하므로 서로 같은 두 장이 있는 경우를 생각해 보자.

$x=y$이면 $2x+z=20$

$z=2(10-x)$

따라서 x의 값이 될 수 있는 경우는 1, 2, …, 9의 9가지가 있다.

$y=z$, $z=x$인 경우도 마찬가지이다.

그러므로 세 장의 카드가 모두 다르고 그 합이 20인 경우의 수는 $171-3\times9=144$

또한 카드의 순서를 생각하지 않으므로

$\frac{144}{3!}=24$

29. y좌표가 $k(k=1, 2, \cdots, 10)$일 때, 구하는 점의 개수는

$k=1$일 때 $100-1^2+1$

$k=2$일 때 $100-2^2+1$

$k=3$일 때 $100-3^2+1$

⋮

$k=10$일 때 $100-10^2+1$

따라서 구하는 점의 개수는

$\sum_{k=1}^{10}(100-k^2+1)=\sum_{k=1}^{10}(101-k^2)$

$=101\times10-\frac{10\times11\times21}{6}$

$=625$

30. 조건 (가)에 의하여 $f(x)=x^3+ax^2+bx$라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

점 $P(t, t^3+at^2+bt)$에서의 접선의 방정식은

$y-(t^3+at^2+bt)=(3t^2+2at+b)(x-t)$

접선이 y축과 만나는 점의 y좌표 $g(t)$는

$g(t)=-2t^3-at^2$

$\therefore h(t)=8|t(-2t^3-at^2)|=8|t^3(2t+a)|$

$k(t)=t^3(2t+a)$라 하면

$k'(t)=3t^2(2t+a)+t^3\times2=t^2(8t+3a)$

$k'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=-\frac{3}{8}a$

함수 $k(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

(i) $-\frac{3}{8}a<0$일 경우

t	…	$-\frac{3}{8}a$	…	0	…
$k'(t)$	−	0	+	0	+
$k(t)$	↘	극소	↗	0	↗

함수 $k(t)$의 그래프 개형에서 함수 $h(t)$는 $t=2$에서 미분가능하다.

(ii) $-\frac{3}{8}a>0$일 경우

t	…	0	…	$-\frac{3}{8}a$	…
$k'(t)$	−	0	−	0	+
$k(t)$	↘	0	↘	극소	↗

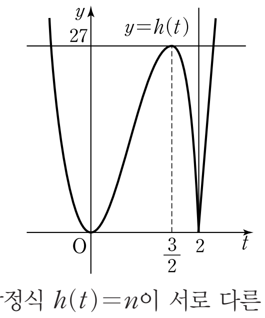
함수 $k(t)$의 그래프 개형에서 함수 $h(t)$가 $t=2$에서 미분가능하지 않으므로

$-\frac{a}{2}=2$ ∴ $a=-4$

또한 함수 $h(t)$는 $t=-\frac{3}{8}a=\frac{3}{2}$에서 극댓값

$h\left(\frac{3}{2}\right)=8\left|\left(\frac{3}{2}\right)^3\left(2\times\frac{3}{2}-4\right)\right|=27$

을 갖고 $y=h(t)$의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 방정식 $h(t)=n$이 서로 다른 네 실근을 갖도록 하는 모든 자연수 n은 1, 2, …, 26이다.

$\therefore \sum_{n=1}^{26}n=\frac{26\times27}{2}=351$