2020학년도 서강대학교

모의논술 자료집

- 자연계열 -

서강대학교 입학처

목 차

■ 유의사항
1. 시험시간은 50분입니다.

제시문

[가] 좌표평면 위를 움직이는 점 P에 대하여 시각 t에서 점 P의 위치벡터의 성분이 (x, y)이고, x, y는 t를 매개변수로 하는 함수 $x = f(t)$, $y = g(t)$로 나타내어질 때, 시각 t에 대한 미분을 이용하여 속력과 속도의 크기를 구할 수 있다.

[나] 미분 가능한 두 함수의 크기를 비교하기 위한 좋은 방법은 미분을 이용한 기울기를 계산하는 것이다. 예를 들어, $x > 1$에서 $y = x^2$은 $y = x$ 보다 항상 크다. 1에서 두 함수는 같고 1보다 클 때 $y = x^2$의 도함수 $2x$가 $y = x$의 도함수 1 보다 항상 크기 때문이다.

[다] 수열은 자연수 집합에서 정의된 함숫값, 즉 n에서 a_n으로 대응되는 함수로 이해할 수도 있다. 매 초마다 변하는 온도 등이 일예가 될 수 있다. 더욱이 온도의 변화에 따른 냉방기의 가동 등은 함수의 합성으로 이해 될 수 있으므로 수열에 대한 함숫값의 극한을 해석할 수 있다.

[라] 자취의 방정식이란 특정한 조건을 만족하는 점의 집합을 말한다. 예를 들어 공간에서 두 점으로부터 같은 거리에 있는 점들은 평면이 되고 한 점에서 동일한 거리의 점들은 구가 된다.

문제

[1] $x^2+4y^2=1$ 위를 움직이는 점 $P(x,y)$가 있다. 삼각함수 $x=\cos t$와 $y=\sin t$를 이용하여 얻어지는 매개변수 방정식의 점 $(1,0)$에서 속력과 가속도의 크기를 구하여라.

[2] 교점에서 두 접선의 기울기가 같으면 동일한 접선이 된다. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b)$과 $y=\cos x$의 두 곡선이 $0<x<a$, $0<y<b$에서 동일한 접선을 가질 수 없음을 보여라.

[3] 동서를 직선으로 연결된 횡단 철도를 생각한다. 동서는 $12\,km$ 떨어져 있고, 동부 승무원은 시간당 $5\,km$로, 서부 승무원은 시간당 $7\,km$로 각각 마주보는 방향으로 이동하면서 철도점검일을 한다. 철도 관계자는 동부에서 객차로 시간당 $20\,km$로 출발하여 서부 승무원 또는 동부 승무원 사이를 오가며 운행 정보를 기록한다, 단, 동부 또는 서부 승무원과 마주칠 때마다 대기 시간 없이 객차 방향이 바뀐다고 가정하고, 양쪽 승무원과 객차는 동시에 출발한다. 객차가 처음 출발하여 서부 승무원을 만날 때까지 걸린 시간을 t_1, 다시 방향을 바꾸어 동부 승무원을 만날 때까지 걸린시간을 t_2라고 하면 연속되어 걸린 시간 t_n을 정의할 수 있다. 이 때, t_n을 구하고 누적 시간 $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$을 계산하여라.

[4] 3차원 공간의 두 점 $A(1,8,3)$와 $B(4,5,0)$에 대하여, $\overline{PA}:\overline{PB}=2:1$인 점의 자취는 구가된다. 점 $Q(5,8,3)$에서 이 구에 접선들을 그을 때 발생하는 접점들의 자취와 겹치는 부분을 제외한 나머지 부피를 구하여라.

▢ 출제의도 및 채점기준

1. 출제의도

· 매개변수방정식을 이해하고 이로부터 속력 및 속도의 크기를 계산할 수 있다.
· 타원의 방정식, 음함수와 삼각함수의 미분, 접선 등의 개념을 이해를 바탕으로 주어진 문제를 해결 할 수 있는 지 평가한다.
· 수열이 주어진 함수의 함숫값으로 나타날 때, 수열의 성질을 이용하여 다양한 복합문제를 해결할 수 있다.
· 공간 도형에서 구의 외부의 한 점에서 구에 접선들을 그을 때 발생하는 접점들의 자취에 의해 형성된 도형을 유추하고 정적분의 정의를 이해하고 이를 활용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있어야 한다.
· 수열과 관련된 다양한 복합 응용문제들을 해결할 수 있다.
· 수리적 논리로 문제 해결과정을 잘 서술할 수 있어야 한다.

2. 문항해설

문제 [1]: 삼각함수의 성질, $\sin t^2 + \cos t^2 = 1$이라는 성질과 삼각함수의 미분을 정확히 알고 있어야 한다,
문제 [2]: 미분을 이용한 두 함수의 대소관계를 밝힐 수 있어야 한다,
문제 [3]: 수열의 응용문제로서 속도와 거리의 관계를 얻고 시간에 관한 수열의 일반항을 얻고 극한값을 정확히 계산할 수 있어야 한다.
문제 [4]: 공간 도형의 자취에 관한 문제로서 자취에 대한 개념을 알고 적분을 통해 알려진 도형의 부피를 계산할 수 있어야 한다,

3. 채점기준

정확한 결과의 도출과 계산 과정이 잘 나타나 있어야 함.

(유의사항)

풀이를 서술하는 과정에서 인과관계를 정확하게 표현할 수 있는 능력을 살피는 것도 중요하므로 정확한 수리적 문장을 사용하지 않으면 요소요소마다 감점 처리함.

4. 예시답안 및 예시답안에 대한 근거

※ 다음 풀이는 축약된 모범답안으로서 풀이과정에서 반드시 포함되어야 함.

[1] $x(t)=\sin t$, $y(t)=\frac{1}{2}\cos t$라고 두면 $x^2+4y^2=1$을 만족하고, 위치 벡터 P는 시각 $t=\frac{\pi}{2}$일 때 이다. 그리고

$\frac{dx}{dt}=\cos t$, $\frac{d^2x}{dt^2}=-\sin t$ 그리고 $\frac{dy}{dt}=-\frac{1}{2}\sin t\,\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{1}{2}\cos t$

이므로

속도는 $(\cos t,\ -\frac{1}{2}\sin t)$, 가속도는 $(-\sin t,\ -\frac{1}{2}\cos t)$이다. 그런데 P는 시각 $t=\frac{\pi}{2}$일 때 이므로, 구하고자하는 속력과 가속도의 크기는 각각

$\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$, $\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\cos^2\frac{\pi}{2}}=1$ 이다.

[2] 공통 접선이 존재하기 위해서는 교점이 존재하고 그 교점에서 접선의 기울기가 같아야 한다.

먼저 교점이 존재하면, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, y=\cos x$. 따라서, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{\cos^2 x}{b^2}=1$.

$\cos^2 x=t$로 치환하면, $x^2=a^2(1-\frac{t}{b^2})$ (1)

그리고, 타원에서 접선의 기울기를 구하기 위해 미분하면, $\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}y'=0\ \therefore y'=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$.

$y=\cos x$에서 접선의 기울기는 $y'=-\sin x$.

두 접선의 기울기가 같으면,

$\therefore -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}=-\sin x=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{\cos x}$. 즉, $\sin x\cos x=\frac{b^2}{a^2}x$.

양변 제곱하면, $x^2=\frac{a^4}{b^4}(1-\cos^2 x)\cos^2 x=\frac{a^4}{b^4}(1-t)t$ (2)

(1), (2)에서

$x^2=\frac{a^4}{b^4}(1-t)t=a^2(1-\frac{t}{b^2})$. 즉, $a^2t^2-(a^2+b^2)t-b^4=0$

$$\therefore t=\frac{a^2+b^2\pm\sqrt{(a^2+b^2)^2+4a^2b^4}}{2a^2}$$

$0\le t\le 1$이 므 로,

$$\therefore t=\frac{a^2+b^2+\sqrt{(a^2+b^2)^2+4a^2b^4}}{2a^2}>\frac{a^2+b^2+\sqrt{(a^2+b^2)^2}}{2a^2}>\frac{2a^2+2b^2}{2a^2}>1$$

따라서, 서로 모순되므로 해가 존재하지 않는다. 즉, 공통 접선이 존재하지 않는다.

[3] 시간의 누적 합에 관한 문제이므로, 시각 t에서 객차가 움직일 수 있는 서부와 동부 사이의 거리는 $12-(5+7)t$이다. 동부와 서부에서 거리를 좁혀오므로 객차가 동부에서 서부로 갈 때의 상대속도는 $(20+7)km=27km/h$이고 객차가 서부에서 동부로 갈 때의 성대속도는 $(20+5)km=25km/h$이다. 그리고 n번째 시간의 이동거리는 $12km$ $(n=1)$, $12-12(t_1+t_2\ \cdots\ +t_{n-1})$ $(n>1)$이다. 자세히 살펴보면, n이 홀수일 때 n번째 시간의 이동거리는 $27t_n$이고, n이 짝수일 때 n번째 시간의 이동거리는 $25t_n$이다. 따라서
다음의 식들을 얻는다:

$$\begin{aligned}12&=27t_1\\12-12t_1&=25t_2\\12-12(t_1+t_2)&=27t_3\\&\vdots\end{aligned}$$

즉,

$$\begin{aligned}12&=27t_1\\15t_1&=25t_2\\13t_2&=27t_3\\15t_3&=25t_4\\&\vdots\end{aligned}$$

다시 말해

$$t_1=\frac{12}{27}$$
$$t_2=\frac{12}{27}\times\frac{15}{25}$$
$$t_3=\frac{12}{27}\times\frac{13}{27}\times\frac{13}{27}$$
$$t_4=\frac{12}{27}\times\frac{15}{25}\times\frac{13}{27}\times\frac{15}{25}$$
$$\vdots$$

이제 $r=\frac{15}{25}\times\frac{13}{27}$이라고 두면,

$$t_{2n+2}=r^{n+1}\times\frac{12}{13}$$
$$t_{2n+1}=r^n\times\frac{12}{27}$$

이 된다. 그리고 전체 이동 시간은

$$\begin{aligned}\lim_{b\to\infty}(t_1+t_2+\ \cdots\ t_n)&=\sum_{n=0}^{\infty}t_{2n+1}+t_{2n+2}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}r^{n+1}\times\frac{12}{13}+\sum_{n=0}^{\infty}r^n\times\frac{12}{27}\\&=\frac{12/27(15/25+1)}{1-15/25\times13/27}\\&=1.\end{aligned}$$

[4] 1.1.두 점 A(1, 8, 3)와 B(4,5, 0)에 대하여, $\overline{PA}:\overline{PB}=2:1$인 점을 P($x$,$y$, z)라고 하면, $\overline{PA}=\sqrt{(x-1)^2+(y-8)^2+(z-3)^2}$, $\overline{PB}=\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2+z^2}$이고, $\overline{PA}=2\overline{PB}$이므로,

$\sqrt{(x-1)^2+(y-8)^2+(z-3)^2}=2\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2+z^2}$이다.

양변을 제곱하여 정리하면,

$(x-1)^2+(y-8)^2+(z-3)^2=4(x-4)^2+4(y-5)^2+4z^2$

$3x^2-30x+63+3y^2-24y+36+3z^2+6z-9=0$

$(x-5)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=12$

따라서, 점 P(x, y, z)의 자취는 중심이 (5,4, −1)이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$인 구이다.

점 Q(5, 8, 3)에서 구 $(x-5)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=12$ 에 그어진 접선들에 의해 원뿔이 형성되고, 접점들의 자취는 원을 형성하게된다. 구의 중심을 C(5, 4, −1), 접점을 T(x, y, z)라 하면, 피타고라스의정리에 의해

$\overline{QT}^2=\overline{QC}^2-12$ 즉, $\overline{QT}^2=4^2+4^2-12=20$,

$2\sqrt{3}\cdot\overline{QT}=r\cdot\overline{QC}$

로부터 $r^2=15/2$를 얻고, 구의 중심에서 접점들에 의해 형성된 원 단면까지의 거리는 피타고라스정리에 의해 구할 수 있다. 즉, $a=\sqrt{12-\frac{15}{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$. 따라서, 1.1.원뿔과 겹치는 부분을 제외한 구의 부피는 $V=\int_{-2\sqrt{3}}^{3/\sqrt{2}}\pi y^2\,dx=\int_{-2\sqrt{3}}^{3/\sqrt{2}}\pi\left(\sqrt{12-x^2}\right)^2dx=\pi\left(12x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2\sqrt{3}}^{3/\sqrt{2}}$

$V=\pi\left|12\left(3/\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{27}{2\sqrt{2}}+24\sqrt{3}\right)\right|=\pi\left(\frac{63}{4}\sqrt{2}+16\sqrt{3}\right)$