2022학년도 신입학 수시모집

논술고사 문제지 (자연계열-2교시)

※ 본 논술문제에 대한 지적 소유권은 광운대학교에 있으며, 시험 종료 후 답안지와 함께 제출하여야 합니다.

지원학과(부)			
수 험 번 호		성 명	

※ 답안 작성 시 유의 사항

■ 시험시간은 2시간(120분)입니다.

■ 답안지에 모집단위, 성명, 수험번호, 주민등록번호 앞자리를 “**검정색볼펜**”으로 정확히 기재하고 진하게 마킹하기 바랍니다.

■ 답안 작성란은 “**검정색볼펜**” 또는 “**검정색 연필(샤프)**”로 작성하십시오.
※ 검정색 이외(빨간색, 파란색 등) 사용 금지
※ **지우개, 수정액, 수정테이프 사용 가능**

■ 답안지에는 제목을 쓰지 마십시오.

■ 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 하지 마십시오.

■ 답안지 1장 이내에 답안을 작성해야 합니다.

■ 현 수학 교과과정과 교과서에서 다룬 내용과 방법을 이용한 풀이를 정당한 풀이로 인정합니다.

광운대학교
KwangWoon University

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 이차방정식의 근의 판별

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$에서 $D=b^2-4ac$라고 할 때,

$D>0$이면 서로 다른 두 실근이 있다.

$D=0$이면 중근이 있다.

$D<0$이면 서로 다른 두 허근이 있다.

2. 치환적분법을 이용한 정적분

미분가능한 함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$를 포함하는 열린구간에서 연속이고, $g(a)=\alpha$와 $g(b)=\beta$에 대하여 함수 $f(x)$가 α와 β를 포함하는 구간에서 연속일 때 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$$

[1] (1) 다음 조건 (i)과 (ii)를 만족시키는 두 실수 b와 c에 대해 $(b,\,c)$를 좌표로 하는 점 전체로 이루어진 영역을 그림 또는 식으로 나타내시오. [3점]

(i) $0\le b\le 2$, $0\le c\le 2$

(ii) 이차방정식 $x^2+bx+c=0$의 실근이 있다.

(2) 점 $\mathrm{A}(2,0)$을 지나는 직선이 (1)의 영역을 왼쪽과 오른쪽으로 넓이의 비가 $5:11$이 되도록 나눌 때, 그 직선의 방정식을 찾으시오. [6점]

[2] 함수 $f(x)$가 $0\le x\le \pi$에서 정의된 연속함수일 때, 다음 물음에 답하시오.

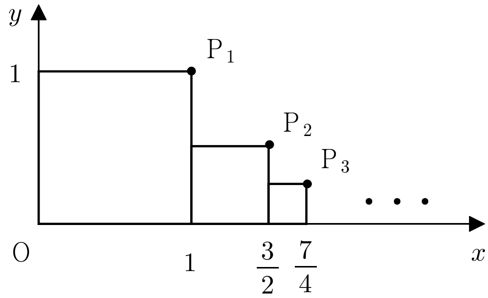
(1) 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 뒤에, x축의 방향으로 π만큼 평행이동한 것이 그래프인 함수를 $g(x)$라고 할 때, $\int_0^\pi f(x)\,dx=\int_0^\pi g(x)\,dx$임을 증명하시오. [6점]

(2) 정적분 $\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$의 값을 찾으시오. [6점]

(3) 위의 결과를 이용하여 정적분 $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$의 값을 찾으시오. [7점]

<다음 장 계속>

[3] 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 두 변이 두 좌표축에 놓여 있다. 이 정사각형의 오른쪽으로 x축에 놓이면서 한 변의 길이가 절반인 정사각형들을 계속해서 추가한다. n번째 정사각형의 오른쪽 위 꼭짓점을 $\mathrm{P}_n(a_n, b_n)$이라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.



(1) 점 P_n의 좌표 (a_n, b_n)을 찾고, 모든 자연수 n에 대하여 $\dfrac{a_n}{b_n}$이 홀수임을 증명하시오. [6점]

(2) n번째 정사각형의 넓이를 S_n이라고 할 때, $\dfrac{\sum_{k=n+1}^{\infty} S_k}{S_n}$의 값을 찾으시오. [4점]

(3) $n \geq 2$일 때, 다음을 만족시키는 양수 d_n을 찾으시오. [6점]

원점 O와 점 P_n을 지나는 직선과 직선 $y = d_n x$ 사이의 각의 크기는 $45°$이다.

[4] 다음 식의 값을 찾으시오. [6점]

$$\frac{4}{1+2^2+2^4}+\frac{6}{1+3^2+3^4}+\frac{8}{1+4^2+4^4}+\cdots+\frac{20}{1+10^2+10^4}$$

<다음 장 계속>

[문제 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 타원의 접선의 방정식

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 있는 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x_1 x}{a^2}+\frac{y_1 y}{b^2}=1$$

2. 합의 법칙

두 사건 A와 B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A와 사건 B가 일어나는 경우의 수가 각각 m과 n이면, 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$이다.

3. 수학적 확률

표본공간 S에서 각각의 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 사건 A가 일어날 확률은 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

4. 수학적 귀납법

자연수 n에 관한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

[1] 타원 $\frac{x^2}{a}+y^2=1$ $(a>0)$의 제1사분면에 있는 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에 대하여, 점 P에서의 접선이 x축과 점 A에서 만나고 y축과 점 B에서 만난다고 하자. 원점 O와 두 점 A와 B가 꼭짓점인 삼각형 OAB가 직각이등변삼각형일 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 점 P의 좌표를 a에 관한 식으로 나타내시오. [6점]

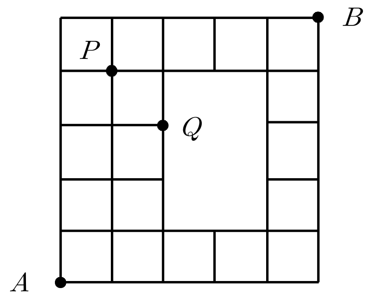
(2) 삼각형 OAP의 넓이가 삼각형 OBP의 넓이의 2배가 되는 타원의 방정식을 찾으시오. [4점]

(3) (2)의 타원의 두 초점 F와 F'에 대하여 다음을 만족시키는 타원에 있는 점 Q의 좌표를 모두 찾으시오. [6점]

$$\overrightarrow{\mathrm{FQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{F'Q}}=0$$

<다음 장 계속>

[2] 오른쪽 그림과 같이 합동인 정사각형들을 변끼리 이어붙인 모양의 도로망이 있다. 이 도로를 따라 이동할 때 다음 물음에 답하시오.



(1) A지점에서 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수를 찾으시오. [5점]

(2) 수철이는 A지점에서 B지점까지 최단거리로, 연수는 B지점에서 A지점까지 최단거리로 이동한다. 수철이와 연수가 P지점에서 만나고 목적지까지 가는 확률과 Q지점에서 만나고 목적지까지 가는 확률을 각각 찾으시오. (단, 두 사람은 동시에 출발하여 같은 속력으로 이동한다.) [7점]

[3] 다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$을 생각하자.

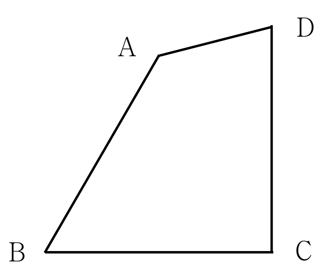
$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + (n^2 + 2n + 2) \times (n+1)! \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

다음 물음에 답하시오. (단, $n! = n(n-1)(n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$ 이다.)

(1) a와 b는 실수이고 n에 관한 이차식 $g(n) = an^2 + bn$이 있어서 모든 자연수 n에서 $a_n = g(n) \times n!$이 성립한다고 할 때, 이차식 $g(n)$을 찾으시오. [4점]

(2) (1)에서 얻은 $g(n)$에 대하여 모든 자연수 n에서 $a_n = g(n) \times n!$임을 수학적 귀납법으로 증명하시오. [7점]

[4] 오른쪽 그림의 사각형 ABCD에서 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{CD}} = 2$이고 $\angle \mathrm{CDA} = 75°$이며 $\angle \mathrm{DAB} = 135°$이다. 다음 물음에 답하시오.



(1) 귀류법을 이용하여 $\overline{\mathrm{AC}} = 2$임을 증명하시오. [6점]

(2) $\overline{\mathrm{AD}}$의 길이를 찾으시오. [5점]

<끝>

2022학년도 광운대학교 논술고사 문제 해설
[자연계열-2교시-문제 1]

출제 의도

[1] 좌표평면에서 조건을 만족시키는 영역을 이해하고 이를 수식으로 표현할 수 있는 능력을 평가한다. 그리고 직선과 이차곡선의 위치 관계를 이해하고 정적분의 개념을 이용하여 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가한다.

[2] 연속함수의 대칭이동과 평행이동을 이해하고 이를 수식으로 표현할 수 있는 능력을 평가한다. 그리고 치환적분법을 이용한 정적분의 계산 능력과 주어진 조건을 적용하여 새로운 응용문제를 해결할 수 있는 능력을 평가한다.

[3] 수열의 개념을 이해하고 등비수열의 특징을 이용하여 문제의 조건에 맞는 좌표평면의 점의 좌표를 수학적으로 표현할 수 있는 능력과 등비급수의 합을 계산하는 능력을 평가한다. 그리고 좌표평면에서 두 직선 사이의 위치 관계를 이해하고 삼각함수를 이용하여 이를 표현할 수 있는 능력을 평가한다.

[4] 규칙성이 있는 수열의 합을 일반적인 식으로 표현하고 이를 계산할 수 있는 능력을 평가한다.

출제 근거

1. 교육과정 근거

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문1	교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - ④ 복소수와 이차방정식
	성취기준	[10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다.
제시문2	교육과정	[미적분] - (3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법
	성취기준	[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항 [1](1)	교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - ④ 복소수와 이차방정식
	성취기준	[10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다.
문항 [1](2)	교육과정	[수학] - (2) 기하 - ② 직선의 방정식 [수학Ⅱ] - (3) 적분 - ③ 정적분의 활용
	성취기준	[10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
문항 [2](1)	교육과정	[수학] - (2) 기하 - ④ 도형의 이동 [수학Ⅱ] - (3) 적분 - ② 정적분
	성취기준	[10수학02-08] 평행이동의 의미를 이해한다. [10수학02-09] 원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동의 의미를 이해한다. [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다.

문항 [2](2)	교육과정	[미적분] - (3) 적분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 적분법
	성취기준	[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항 [2](3)	교육과정	[수학Ⅱ] - (3) 적분 - $\boxed{2}$ 정적분
	성취기준	[12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다.
문항 [3](1)	교육과정	[수학Ⅰ] - (3) 수열 - $\boxed{1}$ 등차수열과 등비수열
	성취기준	[12수학Ⅰ03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
문항 [3](2)	교육과정	[미적분] - (1) 수열의 극한 - $\boxed{2}$ 급수
	성취기준	[12미적01-05] 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다.
문항 [3](3)	교육과정	[미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 함수의 미분
	성취기준	[12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.
문항 [4]	교육과정	[수학Ⅰ] - (3) 수열 - $\boxed{2}$ 수열의 합
	성취기준	[12수학Ⅰ03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.

*: 교육과학기술부 고시 제2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	홍성복 외	㈜지학사	2020	58, 128, 155, 157
	수학Ⅰ	김원경 외	㈜비상교육	2020	128, 142
	수학Ⅱ	류희찬 외	㈜천재교과서	2020	123, 133
	미적분	황선욱 외	㈜미래엔	2021	35, 69, 148

문항 해설

[1] (1) 주어진 조건을 이해하고 이를 만족시키는 좌표평면의 점의 영역을 수식으로 표현할 수 있다.
(2) 조건에 맞는 직선의 방정식을 얻고 이차곡선과 교점을 계산하며 이차곡선의 정적분을 계산할 수 있다.

[2] (1) 좌표평면에서의 도형의 이동을 이해하고 이를 함수의 식으로 표현할 수 있다.
(2) 치환적분법을 이용한 정적분을 계산할 수 있다.
(3) (1)의 결과에 나타난 정적분의 특징을 이해하고 이를 응용하여 정적분을 계산할 수 있다.

[3] (1) 등비수열의 특징을 이용해 규칙성이 있는 점들을 수식으로 표현하고 이의 성질을 이해할 수 있다.
(2) 등비급수의 합을 계산할 수 있다.
(3) 좌표평면에서 두 직선의 위치 관계를 이해하고 이를 수식으로 표현할 수 있다.

[4] 규칙성이 있는 수열의 합을 일반적인 식으로 표현하고 이를 계산할 수 있다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1](1)	두 실수 b와 c 사이의 관계식 $c \le \frac{b^2}{4}$을 얻으면	1
	조건의 영역 $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le \frac{x^2}{4}$ 을 그림이나 식으로 표현하면	2
[1](2)	영역의 넓이를 변수를 이용하여 표현하면 (예) $S_1 = \frac{a^3}{12} + \frac{1}{8}a^2(2-a) = -\frac{a^3}{24} + \frac{a^2}{4} - \frac{5}{24}$	2
	넓이의 비를 이용하여 방정식을 얻고 알맞은 a를 찾으면 (예) $a^3 - 6a^2 + 5 = 0$, $a = 1$	3
	직선의 방정식 $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ 을 얻으면	1
[2](1)	대칭이동후 평행이동된 함수 $g(x) = f(\pi - x)$를 얻으면	3
	$\int_0^\pi f(x)\,dx = \int_0^\pi g(x)\,dx$임을 증명하면	3
[2](2)	치환적분법을 이용하여 적분식을 표현하면 (예) $\cos x = t$ 또는 $t = \tan\theta$	2
	정적분 $\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dt = \frac{\pi}{2}$을 얻으면	4
[2](3)	치환적분법으로 문제의 정적분과 (2)의 정적분과의 관계를 얻으면 (예) $\pi - x = t$	4
	정적분 $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{\pi^2}{4}$ 을 얻으면	3
[3](1)	점 P_n의 x좌표 $a_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$을 얻으면	2
	점 P_n의 y좌표 $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$을 얻으면	2
	$\frac{a_n}{b_n} = 2^n - 1$을 얻고 홀수임을 증명하면	2
[3](2)	n번째 정사각형의 넓이 $S_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$을 얻으면	2
	등비급수의 합을 계산하여 $\sum_{k=n+1}^{\infty} S_k / S_n = \frac{1}{3}$을 얻으면	2
[3](3)	직선 $\overline{\mathrm{OP}_n}$와 직선 $y = d_n x$ 간의 기울기의 관계를 표현하면 (예) $d_n = \tan(45° + \theta_n)$	3
	직선의 기울기 $d_n = \frac{2^n}{2^n - 2} = \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}-1}$를 얻으면	3
[4]	부분분수 $\frac{2n}{1+n^2+n^4} = \frac{1}{1+(n-1)n} - \frac{1}{1+n(n+1)}$ 식을 얻으면	4
	주어진 식의 값 $\frac{12}{37}$을 얻으면	2

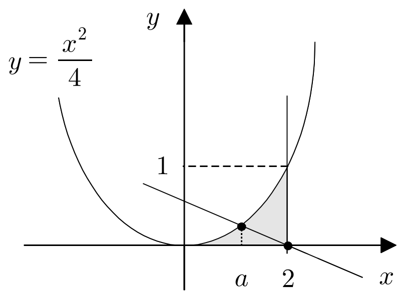
예시 답안

[1]

(1) 이차방정식 $x^2+bx+c=0$의 실근이 있기 위한 필요충분 조건은 $b^2-4c \geq 0$ 이므로 $c \leq \frac{b^2}{4}$이다.

조건 (i)에서 $0 \leq b \leq 2$이고 $0 \leq c \leq 2$이므로 $0 \leq c \leq \frac{b^2}{4}$ 이다.

따라서 문제의 조건을 모두 만족시키는 영역은 오른쪽 그림과 같이 포물선 $y=\frac{x^2}{4}$과 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 영역이다.



이를 "$0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq \frac{x^2}{4}$" 또는 $\left\{(x,y)\,|\,0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq \frac{x^2}{4}\right\}$과 같이 나타낼 수도 있다.

(2) (1)의 영역의 넓이는 $S=\int_0^2 \frac{x^2}{4}\,dx=\left[\frac{x^3}{12}\right]_0^2=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$이다.

점 $\mathrm{A}(2,0)$를 지나는 직선이 포물선 $y=\frac{x^2}{4}$과 만나는 점의 x좌표를 a라 하면

이 직선이 나눈 (1)의 영역의 왼쪽 부분의 넓이는

$S_1=\int_0^a \frac{x^2}{4}\,dx+\frac{1}{2}\times(2-a)\times\frac{a^2}{4}=\frac{a^3}{12}+\frac{1}{8}a^2(2-a)$이다.

이 직선이 (1)의 영역의 넓이를 $5:11$로 나누므로 $S_1=\frac{5}{16}S$에서 다음을 얻는다.

$$\frac{a^3}{12}+\frac{1}{8}a^2(2-a)=\frac{5}{16}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{24},\ -\frac{a^3}{24}+\frac{a^2}{4}-\frac{5}{24}=0,\ a^3-6a^2+5=(a-1)(a^2-5a-5)=0$$

a의 값이 될 수 있는 1 또는 $\frac{5\pm3\sqrt{5}}{2}$ 중에서, 조건 $0 \leq a \leq 2$를 만족시키는 a의 값은 1뿐이다.

따라서 직선과 포물선의 교점은 $\left(1,\frac{1}{4}\right)$이므로, 찾는 직선의 방정식은 $y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$ 이다.

[2]

(1) 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대칭이동한 식은 $y=f(-x)$이다. 이것을 다시 x축의 방향으로 π만큼 평행이동한 식은 $y=f(-(x-\pi))=f(\pi-x)$이다.

따라서 $g(x)=f(\pi-x)$이다.

여기서 $\pi-x=t$로 치환하면 $\frac{dt}{dx}=-1$이므로 다음을 얻는다.

$$\int_0^\pi g(x)\,dx=\int_0^\pi f(\pi-x)\,dx=-\int_\pi^0 f(t)\,dt=\int_0^\pi f(t)\,dt=\int_0^\pi f(x)\,dx$$

(2) 정적분 $\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$에서 $\cos x = t$로 치환하면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$이고 적분의 아래끝은 1이며 위끝은 -1로 바뀌므로 다음이 성립한다.

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = -\int_1^{-1}\frac{1}{1+t^2}dt = \int_{-1}^{1}\frac{1}{1+t^2}dt = 2\int_0^{1}\frac{1}{1+t^2}dt$$

이제 $t=\tan\theta$ $\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\right)$로 치환하면 $\frac{dt}{d\theta}=\sec^2\theta$이고 적분의 아래끝은 0이며 위끝은 $\frac{\pi}{4}$로 바뀌므로

$2\int_0^{1}\frac{1}{1+t^2}dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta = \frac{\pi}{2}$이다.

따라서 $\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}$이다.

(3) 삼각함수의 성질에서 $\sin x = \sin(\pi - x)$이고 $\cos x = -\cos(\pi - x)$이므로 (1)의 결과를 이용하면 주어진 식은 다음과 같다.

$$I = \int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_0^{\pi}\frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)}dx = \int_0^{\pi}\frac{(\pi - x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx - I$$

따라서 (2)의 결과에 의해 찾는 적분값은 $I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$ 이다.

[3]

(1) 점 P_n의 y좌표는 첫째항이 1이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로 $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이고

점 P_n의 x좌표는 $a_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

점 P_n의 좌표는 $\left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$이다.

따라서 $\frac{a_n}{b_n} = \frac{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = 2^n - 1$이고 모든 자연수 n에서 2^n은 짝수이므로 $\frac{a_n}{b_n} = 2^n - 1$은 홀수이다.

(2) n번째 정사각형의 넓이는 $S_n = b_n^2 = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$이므로

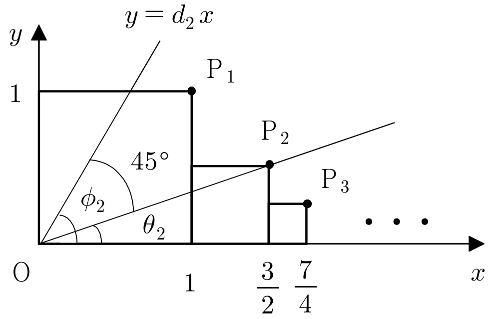
$\sum_{k=n+1}^{\infty} S_k = \sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$이다.

따라서 $\frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} S_k}{S_n} = \frac{\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}} = \frac{1}{3}$이다.

(3) 원점 O과 점 P_n $(n \geq 2)$을 지나는 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 θ_n이라고 하면

$\tan\theta_n = \dfrac{b_n}{a_n} = \dfrac{1}{2^n - 1}$ 이다.

직선 $y = d_n x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각을 ϕ_n이라고 하면 $\tan\phi_n = d_n$ $(d_n > 0)$이므로 다음을 얻는다.



$$d_n = \tan\phi_n = \tan(45° + \theta_n) = \frac{\tan 45° + \tan\theta_n}{1 - \tan 45° \cdot \tan\theta_n} = \frac{1 + \dfrac{1}{2^n - 1}}{1 - \dfrac{1}{2^n - 1}} = \frac{2^n}{2^n - 2} = \frac{2^{n-1}}{2^{n-1} - 1}$$

(다른 풀이)

$$\tan(\phi_n - \theta_n) = \frac{\tan\phi_n - \tan\theta_n}{1 + \tan\phi_n \tan\theta_n} = \frac{d_n - \dfrac{1}{2^n - 1}}{1 + \dfrac{d_n}{2^n - 1}} = \frac{d_n(2^n - 1) - 1}{(2^n - 1) + d_n} = \tan 45° = 1$$

따라서 $d_n = \dfrac{(2^n - 1) + 1}{(2^n - 1) - 1} = \dfrac{2^n}{2^n - 2} = \dfrac{2^{n-1}}{2^{n-1} - 1}$ 이다.

[4]

모든 자연수 n에 대하여 $1 + n^2 + n^4 = (1 + n^2)^2 - n^2 = (1 - n + n^2)(1 + n + n^2)$이므로 다음이 성립한다.

$$\frac{2n}{1 + n^2 + n^4} = \frac{1}{1 - n + n^2} - \frac{1}{1 + n + n^2} = \frac{1}{1 + (n-1)n} - \frac{1}{1 + n(n+1)}$$

그러므로 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}
&\frac{4}{1 + 2^2 + 2^4} + \frac{6}{1 + 3^2 + 3^4} + \frac{8}{1 + 4^2 + 4^4} + \cdots + \frac{20}{1 + 10^2 + 10^4} \\
&= \left(\frac{1}{1 + 1 \times 2} - \frac{1}{1 + 2 \times 3}\right) + \left(\frac{1}{1 + 2 \times 3} - \frac{1}{1 + 3 \times 4}\right) + \left(\frac{1}{1 + 3 \times 4} - \frac{1}{1 + 4 \times 5}\right) + \\
&\qquad \cdots + \left(\frac{1}{1 + 9 \times 10} - \frac{1}{1 + 10 \times 11}\right) \\
&= \frac{1}{1 + 1 \times 2} - \frac{1}{1 + 10 \times 11} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{111} = \frac{37 - 1}{111} = \frac{36}{111} = \frac{12}{37}
\end{aligned}$$

2022학년도 광운대학교 논술고사 문제 해설
[자연계열-2교시-문제 2]

출제 의도

[1] 좌표평면에서 타원의 접선의 방정식을 이해하고 조건을 활용하여 타원의 방정식을 결정하는 능력을 평가한다. 그리고 벡터의 내적과 타원의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 점들의 집합을 나타낼 수 있는 능력을 평가한다.

[2] 조합의 개념을 이해하여 경우의 수를 계산하고 이를 적용해서 응용 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가한다. 그리고 확률의 개념을 이해하고 독립 사건이 일어날 수 있는 경우의 수를 계산하여 사건이 일어날 확률을 계산하는 능력을 평가한다.

[3] 귀납적으로 정의된 수열의 특성을 이해하여 항들을 계산할 수 있는 능력과 수학적 귀납법을 이용하여 모든 자연수에 대하여 정의된 응용 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가한다.

[4] 평면도형의 성질을 이해하고 귀류법을 이용하여 명제를 증명할 수 있는 능력을 평가한다. 그리고 삼각함수의 여러 가지 성질을 이용하여 주어진 도형의 길이를 계산할 수 있는 능력을 평가한다.

출제 근거

1. 교육과정 근거

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문1	교육과정	[기하] - (1) 이차곡선 - ① 이차곡선
	성취기준	[12기하01-04] 이차곡선과 직선의 위치 관계를 이해하고, 접선의 방정식을 구할 수 있다.
제시문2	교육과정	[수학] - (5) 확률과 통계 – ① 경우의 수
	성취기준	[10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.
제시문3	교육과정	[확률과 통계] - (2) 확률 - ① 확률의 뜻과 활용
	성취기준	[12확통02-01] 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다.
제시문4	교육과정	[수학Ⅰ] - (3) 수열 - ③ 수학적 귀납법
	성취기준	[12수학Ⅰ03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다.
문항 [1](1)	교육과정	[기하] - (1) 이차곡선 - ① 이차곡선
	성취기준	[12기하01-04] 이차곡선과 직선의 위치 관계를 이해하고, 접선의 방정식을 구할 수 있다.
문항 [1](2)	교육과정	[기하] - (1) 이차곡선 - ① 이차곡선
	성취기준	[12기하01-02] 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.

문항 [1](3)	교육과정	[수학] - (2) 기하 - 3 원의 방정식 [기하] - (2) 평면벡터 - 2 평면벡터의 성분과 내적
	성취기준	[10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다. [12기하02-04] 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
문항 [2](1)	교육과정	[확률과 통계] - (1) 경우의 수 - 1 순열과 조합
	성취기준	[12확통01-02] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다.
문항 [2](2)	교육과정	[확률과 통계] - (1) 경우의 수 - 1 순열과 조합
	성취기준	[12확통01-02] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다.
문항 [3](1)	교육과정	[수학Ⅰ] - (3) 수열 - 3 수학적 귀납법
	성취기준	[12수학Ⅰ03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다.
문항 [3](2)	교육과정	[수학Ⅰ] - (3) 수열 - 3 수학적 귀납법
	성취기준	[12수학Ⅰ03-08] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.
문항 [4](1)	교육과정	[수학] - (3) 수와 연산 - 2 명제
	성취기준	[10수학03-07] 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다.
문항 [4](2)	교육과정	[미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분 [수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수
	성취기준	[12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

*: 교육과학기술부 고시 제2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”

2. 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	홍성복 외	㈜지학사	2020	142, 205, 260
	수학Ⅰ	김원경 외	㈜비상교육	2020	96, 100, 145, 148
	미적분	황선욱 외	㈜미래엔	2021	67
	기하	김원경 외	㈜비상교육	2020	19, 41, 84
	확률과 통계	홍성복 외	㈜지학사	2020	19, 48

문항 해설

[1] (1) 타원의 접선의 방정식을 이용하여 접점의 좌표를 변수로 표현할 수 있다.
(2) 조건을 만족시키는 타원의 방정식을 계산할 수 있다.
(3) 타원의 성질과 벡터의 내적을 이용하여 조건을 만족시키는 점들의 좌표를 계산할 수 있다.
[2] (1) 조합을 이용한 경우의 수를 계산할 수 있다.
(2) 독립 사건의 경우의 수를 계산하여 사건이 일어날 수 있는 확률을 계산할 수 있다.
[3] (1) 귀납적으로 정의된 수열의 항들을 계산할 수 있다.
(2) 수학적 귀납법을 이용하여 모든 자연수에서 정의된 응용 문제를 증명할 수 있다.
[4] (1) 귀류법과 도형의 성질을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.
(2) 삼각함수의 성질을 이용하여 주어진 도형의 선분의 길이를 계산할 수 있다.

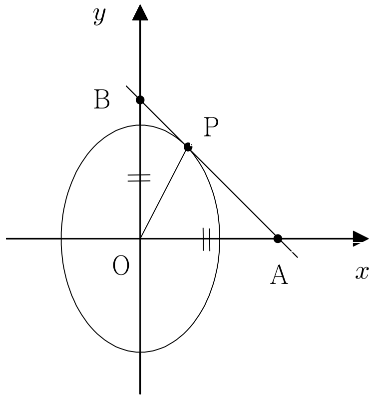
채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
[1](1)	접점 P 의 좌표를 a 로 표현하면 (예) $\mathrm{P}\left(x_1, \dfrac{x_1}{a}\right)$	3
	직각이등변삼각형 조건을 이용하여 접점 $\mathrm{P}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a+1}}, \dfrac{1}{\sqrt{a+1}}\right)$를 얻으면	3
[1](2)	두 삼각형의 넓이를 이용하여 방정식을 얻으면 (예) $\dfrac{1}{\sqrt{a+1}} = 2 \times \dfrac{a}{\sqrt{a+1}}$	2
	타원의 방정식 $2x^2+y^2=1$을 얻으면	2
[1](3)	$\angle \mathrm{FQF}'=90°$ 을 이용하여 원의 방정식 $x^2+y^2=\dfrac{1}{2}$을 얻으면	3
	점 Q의 좌표 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$과 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$을 모두 얻으면	3
[2](1)	A 에서 B 까지 가는 경우의 수 92 를 얻으면 (세부기준) 일부 구간의 경우의 수만 계산하는 경우에는 비례하여 부분 점수를 부여	5
[2](2)	P 지점에서 만나는 경우의 수 625 를 얻으면	2
	Q 지점에서 만나는 경우의 수 1600 을 얻으면	2
	P 와 Q 지점에서 만나는 확률 $\dfrac{625}{8464}$ 와 $\dfrac{100}{529}$ 을 얻으면	3
[3](1)	임의의 두 항을 이용하여 관계식을 얻으면 (예) $a+b=2,\ 2a+b=3$	2
	연립 방정식을 풀어 $g(n)=n^2+n$ 을 얻으면	2
[3](2)	제시문 (i)에 따라 $n=1$일 때 성립함을 보이면	2
	제시문 (ii)에 따라 $n=k+1$일 때 성립함을 보이면	4
	(i)과 (ii)에 따라 모든 자연수에 대하여 성립한다고 결론 지으면	1
[4](1)	귀류법으로 증명하기 위해 결론을 부정하여 $\overline{\mathrm{AC}} \neq 2$ 라고 가정하면	1
	삼각형에서 내각의 크기가 크면(작으면) 대변의 길이가 길다(작다)를 이용하여 증명하면 (세부기준) $\overline{\mathrm{AC}}>2$ 와 $\overline{\mathrm{AC}}<2$ 로 나누어 각각의 경우를 증명해야 하며 증명의 일부분만 설명하는 경우 비례하여 부분 점수를 부여	4
	결론을 부정한 것이 모순임을 언급하며 $\overline{\mathrm{AC}}=2$ 라고 결론 지으면	1
[4](2)	삼각형 ACD 가 이등변삼각형임을 언급하면	2
	삼각함수의 성질을 이용하여 $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}\left(=\sqrt{8-4\sqrt{3}}\right)$을 얻으면	3

예시 답안

[1]

(1) 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은 $\dfrac{x_1 x}{a}+y_1 y=1$이므로



$\mathrm{A}\left(\dfrac{a}{x_1}, 0\right)$이고 $\mathrm{B}\left(0, \dfrac{1}{y_1}\right)$이다.

삼각형 OAB가 직각이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$이고

이에 따라 $y_1=\dfrac{x_1}{a}$이다.

접점 $\mathrm{P}\left(x_1, \dfrac{x_1}{a}\right)$는 타원의 점이므로

$\dfrac{x_1^2}{a}+y_1^2=\dfrac{x_1^2}{a}+\left(\dfrac{x_1}{a}\right)^2=\dfrac{a+1}{a^2}x_1^2=1$이고

제1사분면에 있으므로 $x_1=\dfrac{a}{\sqrt{a+1}}$이고 $y_1=\dfrac{x_1}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}$이다.

따라서 접점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a+1}}, \dfrac{1}{\sqrt{a+1}}\right)$이다.

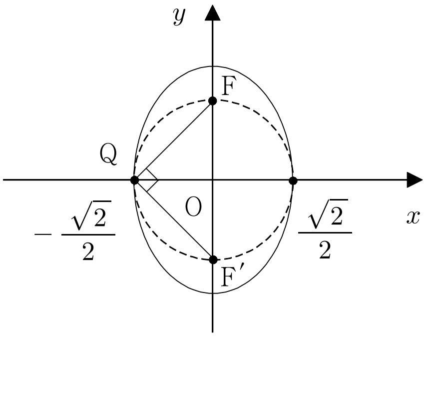
(2) 삼각형 OAP의 넓이는 $S_1=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}$이고

삼각형 OBP의 넓이는 $S_2=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\dfrac{a}{\sqrt{a+1}}$이다.

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$이고 $S_1=2\times S_2$이므로 $\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}=2\times\dfrac{a}{\sqrt{a+1}}$이고, $a=\dfrac{1}{2}$이다.

따라서 타원의 방정식은 $2x^2+y^2=1$이다.

(3) 타원의 두 초점을 $\mathrm{F}(0, c)$와 $\mathrm{F}'(0, -c)$라고 하면



$c^2=1-a=\dfrac{1}{2}$이므로 $\mathrm{F}\left(0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$와 $\mathrm{F}'\left(0, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$이다.

타원의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{FQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{F'Q}}=0$이므로

$\angle\mathrm{FQF'}=90^\circ$이다.

따라서 점 Q는 타원의 두 초점을 지름의 양 끝점으로 하는

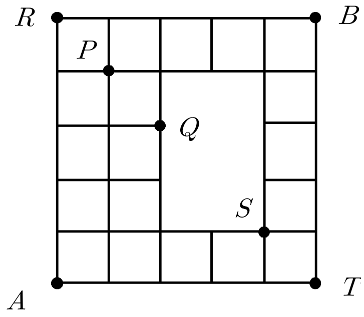
원 $x^2+y^2=\dfrac{1}{2}$과 타원의 교점이 된다.

타원의 식과 원의 식을 연립하여 풀면 찾는 점 Q의 좌표는

$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$과 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$이다.

[2]

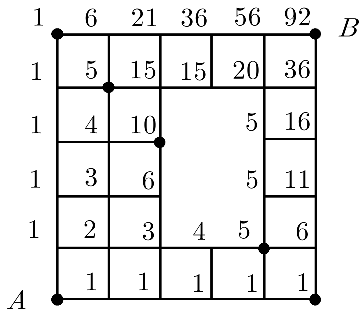
(1) A에서 B까지 가는 경우의 수는 오른쪽과 같은 5개의 지점 P, Q, R, S, T을 통과하는 경우의 수의 합과 같다.



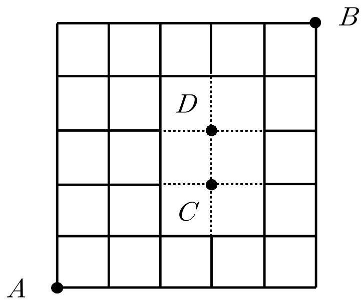
- R지점: $1\times1=1$,
- P지점: ${}_5\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_4=\dfrac{5!}{1!\times4!}\times\dfrac{5!}{4!\times1!}=25$,
- Q지점: ${}_5\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_3=\dfrac{5!}{2!\times3!}\times\dfrac{4!}{3!\times1!}=40$,
- S지점: ${}_5\mathrm{C}_4\times{}_5\mathrm{C}_1=\dfrac{5!}{4!\times1!}\times\dfrac{5!}{1!\times4!}=25$,
- T지점: $1\times1=1$

따라서 A에서 B까지 가는 경우의 수는 $1+25+40+25+1=92$이다.

(다른 풀이 1)
오른쪽 그림과 같이 A를 시작점으로 하여 바로 인접한 지점까지 이동하는 경우의 수를 차례로 더해 나가면서 전체 경로의 수를 찾을 수도 있다.



(다른 풀이 2)
오른쪽 그림과 같이 모두 연결된 도로망에서 다음 지점을 지나는 경우의 수를 아래와 같이 나타내자.



- $n(AB)$: A에서 B까지 가는 경우의 수
- $n(ACB)$: A에서 C를 지나 B까지 가는 경우의 수
- $n(ADB)$: A에서 D를 지나 B까지 가는 경우의 수
- $n(ACDB)$: A에서 C와 D를 지나 B까지 가는 경우의 수

문제에서 주어진 도로망에서 A에서 B까지 가는 경우의 수 (즉, A에서 C와 D를 지나지 않고 B까지 가는 경우의 수)를 $n(A\overline{CD}B)$라고 하면 다음이 성립한다.

$$n(A\overline{CD}B)=n(AB)-n(ACB)-n(ADB)+n(ACDB)$$

각 경로의 경우의 수를 계산하면 다음과 같다.

$$n(AB)={}_{10}\mathrm{C}_5=\frac{10!}{5!\times5!}=252,$$

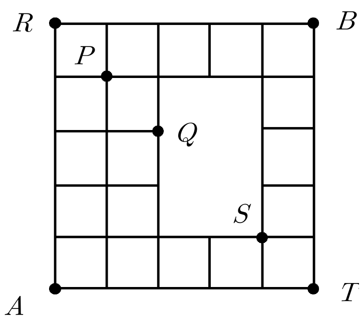
$$n(ACB)={}_5\mathrm{C}_3\times{}_5\mathrm{C}_2=\frac{5!}{3!\times2!}\times\frac{5!}{2!\times3!}=100,$$

$$n(ADB)={}_6\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_2=\frac{6!}{3!\times3!}\times\frac{4!}{2!\times2!}=120,$$

$$n(ACDB)={}_5\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_2=\frac{5!}{3!\times2!}\times\frac{4!}{2!\times2!}=60$$

따라서 $n(A\overline{CD}B)=252-100-120+60=92$이다.

(2) 두 사람이 자신의 출발지에서 목적지까지 가는 모든 경우의 수는 각 사람이 한 방향으로 가는 경로의 수의 곱과 같으므로 $92 \times 92 = 8464$ 이다.



또한 두 사람은 서로 반대방향에서 동시에 출발하여 같은 속력으로 이동하므로, 서로 같은 거리에 있는 P, Q, R, S, T 지점에서만 만날 수 있다.
두 사람이 어느 한 지점에서 만나는 경우의 수는 수철이가 해당 지점을 지나서 목적지까지 가는 경우의 수에 대하여 연수가 같은 지점을 지나서 목적지까지 가는 경우의 수를 곱한 것과 같으므로 다음과 같다.

- P지점에서 만나는 경우의 수: $\left({}_5\mathrm{C}_1 \times {}_5\mathrm{C}_4\right) \times \left({}_5\mathrm{C}_4 \times {}_5\mathrm{C}_1\right) = 25 \times 25 = 625$
- Q지점에서 만나는 경우의 수: $\left({}_5\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_3\right) \times \left({}_4\mathrm{C}_3 \times {}_5\mathrm{C}_2\right) = 40 \times 40 = 1600$

따라서 두 사람이 각 지점에서 만나고 목적지까지 가는 확률은 다음과 같다.

- P지점에서 만나는 확률: $\dfrac{625}{92 \times 92} = \dfrac{625}{8464}$
- Q지점에서 만나는 확률: $\dfrac{1600}{92 \times 92} = \dfrac{1600}{8464} = \dfrac{100}{529}$

[3]

(1) $g(n) = an^2 + bn$ 이라고 하면 다음의 식을 얻는다.

$$\begin{cases} a_1 = (a+b) \times 1! = 2 \quad \rightarrow a+b=2 \\ a_2 = (4a+2b) \times 2! = 12 \rightarrow 2a+b=3 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} a_2 = (4a+2b) \times 2! = 12 \rightarrow 2a+b=3 \\ a_3 = (9a+3b) \times 3! = 72 \rightarrow 9a+3b=12 \end{cases}$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$이고, 따라서 $g(n) = n^2 + n$ 이다.

(2) 모든 자연수 n에서 다음이 성립함을 밝히자.

$a_n = (n^2+n) \times n!$ ……①

$n=1$일 때, $a_1 = (1^2+1) \times 1! = 2$이므로 ①이 성립한다.

$n=k$일 때, 식 ①이 성립한다고 하자. 곧 $a_k = (k^2+k) \times k!$ 이라고 하자.

그러면 $n=k+1$일 때 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + \left(k^2+2k+2\right) \times (k+1)! \\ &= (k^2+k) \times k! + (k^2+2k+2) \times (k+1)! \\ &= k \times (k+1)! + (k^2+2k+2) \times (k+1)! \\ &= (k^2+3k+2) \times (k+1)! \\ &= \left\{(k+1)^2 + (k+1)\right\} \times (k+1)! \end{aligned}$$

그러므로 식 ①은 $n=k+1$일 때 성립한다.

따라서 식 ①은 모든 자연수 n에서 성립한다.

[4]

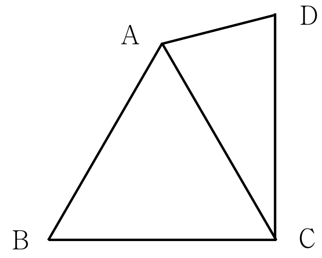
(1) 귀류법으로 증명하기 위하여 $\overline{AC} \neq 2$ 라고 가정한다.

(i) $\overline{AC} > 2$ 라고 하자.

그러면 이등변삼각형 ABC의 세 변 중에서 $\overline{AC}$ 의 길이가 가장 길기 때문에 세 내각 중에서 $\angle ABC$ 의 크기가 가장 크다. 이에 따라 $\angle BAC < 60°$ 이다.

그리고 삼각형 ACD에서 $\overline{AC} > \overline{CD}$ 이므로, $\angle CAD < 75°$ 이다.

그러면 $\angle DAB = \angle BAC + \angle CAD < 135°$ 이므로, 주어진 조건에 모순된다.



(ii) $\overline{AC} < 2$ 라고 하자.

그러면 이등변삼각형 ABC의 세 변 중에서 $\overline{AC}$ 의 길이가 가장 짧기 때문에 세 내각 중에서 $\angle ABC$ 의 크기가 가장 작다. 이에 따라 $\angle BAC > 60°$ 이다.

그리고 삼각형 ACD에서 $\overline{AC} < \overline{CD}$ 이므로, $\angle CAD > 75°$ 이다.

그러면 $\angle DAB = \angle BAC + \angle CAD > 135°$ 이므로, 주어진 조건에 모순된다.

따라서 (i)과 (ii)에 의해 $\overline{AC} = 2$ 이다.

(2) (1)의 결과에 의하여 삼각형 ACD는 $\overline{AC} = \overline{CD} = 2$ 인 이등변삼각형이고 $\angle CDA = \angle CAD = 75°$ 이다.
따라서 삼각함수의 덧셈정리에 따라 다음을 얻는다.

$$\overline{AD} = 2 \times 2\cos 75° = 4\cos(45° + 30°) = 4\cos 45° \cos 30° - 4\sin 45° \sin 30°$$
$$= 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

(다른 풀이 1)

(1)의 결과에 의하여 삼각형 ACD는 $\overline{AC} = \overline{CD} = 2$ 인 이등변삼각형이고
$\angle CDA = \angle CAD = 75°$ 이므로 $\angle ACD = 30°$ 이다.
사인법칙에 따라 다음이 성립한다.

$$\frac{\overline{AD}}{\sin 30°} = \frac{\overline{CD}}{\sin 75°} = \frac{2}{\sin(30° + 45°)} = \frac{2}{\sin 30° \cos 45° + \cos 30° \sin 45°}$$
$$= \frac{2}{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{8}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} = 2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

따라서 $\overline{AD} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ 이다.

(다른 풀이 2)

(1)의 결과에 의하여 삼각형 ACD는 $\overline{AC} = \overline{CD} = 2$ 인 이등변삼각형이고
$\angle CDA = \angle CAD = 75°$ 이므로 $\angle ACD = 30°$ 이다.
코사인법칙에 따라 $\overline{AD}^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 2 \times \cos 30° = 8 - 4\sqrt{3}$ 이다.
따라서 $\overline{AD} = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}}$ $(= \sqrt{6} - \sqrt{2})$ 이다.