개념픽

개념 PICK 유형 PICK

수학 〈상〉

· 정답과 풀이 ·

스피드체크

I. 다항식

1 다항식의 연산

체크 **001** (1) $7x^2-6xy-3y^2$
(2) $x^2-3xy-2y^2$

체크 **002** $2x^2-3xy+8y^2$

체크 **003** (1) $\frac{16}{9}x^8y^4z^4$ (2) a^5b^4

체크 **004** (1) $2x^3+3x^2-11x-6$
(2) $3x^2-4y^2+4xy-8x+8y-3$

체크 **005** 3

체크 **006** 9

체크 **007** 풀이 참조

체크 **008** (1) $9x^4+2x^2+1$
(2) $-x^2+2xy-y^2+z^2$
(3) $x^4+2x^3-25x^2-26x+120$

체크 **009** 4

체크 **010** (1) $\frac{1}{3}(5^{16}-2^{16})$ (2) 8

011 $11x^2-xy+3y^2$

012 $7x^2+5y^2$

013 45

014 $6x^3-2x^2y+7xy^2-6y^3$

015 -3

016 (1) 64 (2) 0

017 $4x^2-y^2+6yz-9z^2$

018 $\frac{1}{3}(6^8-3^8)$

019 다섯 자리

020 $4a^2+4b^2+4c^2$

021 1

022 -10

023 -3

024 3

025 $-x^2+3xy-2y^2$

체크 **026** (1) 112 (2) $\pm2\sqrt{6}$

체크 **027** 198

체크 **028** (1) 4 (2) 13

체크 **029** 24

체크 **030** $2\sqrt{5}$, $34\sqrt{5}$

체크 **031** 38

체크 **032** 44

체크 **033** x^2+2x-1

체크 **034** 5

체크 **035** -2

체크 **036** (1) 몫 : $4x^2-4x+7$,
나머지 : -2
(2) 몫 : $2x^2-x+1$, 나머지 : -1

체크 **037** 몫 : $\frac{1}{3}Q(x)$, 나머지 : R

038 (1) ±15 (2) -95

039 $-\sqrt{21}$

040 -8

041 62

042 (1) $-\frac{5}{3}$ (2) 96

043 78

044 12

045 10

046 (1) 6 (2) 4

047 $a=1$, $b=-16$, $c=6$, $k=3$

048 6

049 0

050 몫 : x^2-2 , 나머지 : 2

051 몫 : $4Q(x)$, 나머지 : 8

052 368

053 -4

054 240

2 항등식과 나머지정리

체크 **055** 4

체크 **056** $a=1$, $b=3$, $c=4$

체크 **057** 10

체크 **058** -1

체크 **059** 3

체크 **060** -6

체크 **061** 5

062 ㄴ, ㄷ

063 $a=1$, $b=2$, $c=-3$

064 2

065 $a=1$, $b=2$, $c=-1$

066 6

067 5

068 -4

069 -2

070 32

071 6

072 3

073 -3

074 -3

075 58

076 ㄱ, ㄴ, ㄷ

체크 **077** -1

체크 **078** -7

체크 **079** $-x+7$

체크 **080** $-3x-5$

체크 **081** x^2+x+3

체크 **082** 4

체크 **083** -5

체크 **084** 0

체크 **085** 1

체크 **086** 7

체크 **087** 1

체크 **088** 2.311

089 5

090 10

091 51

092 $-2x+6$

093 3

094 2

095 ㄴ, ㄷ

096 $2x^2-x-1$

097 68

098 ㄴ

099 -2

100 -14

101 2

102 x^2-x+2

103 17

104 8

3 인수분해

체크 **105** 풀이 참조

체크 **106** $(x+2)^3$

체크 107
(1) $(x-3)(x+1)(x^2-2x-4)$
(2) $(x-3)(x+4)(x^2+x+4)$
체크 108 2
체크 109 풀이 참조
체크 110 -4
체크 111 4
체크 112 1
체크 113 $(x+y)(y+z)(z+x)$
체크 114 풀이 참조
체크 115 $a=2$, $(x+1)(x+3)(x-2)$
체크 116 (1) 157 (2) 271
체크 117 38
118 ⑤
119 5
120 -6
121 1
122 0
123 $(xy+x+y-1)(xy-x-y-1)$
124 ③
125 -1
126 9
127 (1) $(2x^2-3x+2)(x^2+3x+1)$
(2) $(x^2+x-1)^2$
128 빗변의 길이가 c인 직각삼각형
129 1
130 ④
131 21
132 15
133 ①
134 ⑤

Ⅱ. 방정식과 부등식

1 복소수

체크 135 7
체크 136 (1) $2-\sqrt{3}$ (2) $\frac{5}{6}-\frac{3}{4}i$
(3) $5i$ (4) $2+i$
체크 137 풀이 참조
체크 138 1
체크 139 2
체크 140 (1) i (2) 0
체크 141 $-1+i$
체크 142 $\sqrt{5}i$
체크 143 $2i$
체크 144 $8+i$
체크 145 8
체크 146 $2-i$
체크 147 $5\pm12i$
체크 148 (1) $2\sqrt{3}+2\sqrt{3}i$ (2) $16+5i$
(3) $-\frac{1}{5}-\frac{23}{5}i$
체크 149 $-2a$
150 ⑤
151 -28
152 5
153 $\frac{13}{4}$
154 10
155 (1) i (2) 2
156 $1024i$
157 1
158 $2-5i$
159 $-\frac{56}{25}i$
160 ③
161 -1
162 $2\sqrt{5}$
163 $2a$
164 -2
165 ③
166 248
167 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

2 이차방정식

체크 168 (1) $x=-\frac{3}{2}$ (중근)
(2) $x=-2\pm\sqrt{2}$
(3) $x=\frac{1\pm3i}{2}$
(4) $x=\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}+1$
체크 169 -2
체크 170 (1) $x=-3$ 또는 $x=3$
(2) $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=2$
체크 171 -2
체크 172 13 cm
체크 173 10
체크 174 $p<1$ 또는 $1<p\le\frac{3}{2}$
체크 175 -3
체크 176 -1
체크 177 빗변의 길이가 a인 직각삼각형
178 8
179 2
180 3
181 6
182 -4
183 4
184 $x=-1-\sqrt{5}$ 또는 $x=2$
185 $-1\le x<0$ 또는 $6\le x<7$
186 10
187 $k<3$
188 13
189 서로 다른 두 허근
190 서로 다른 두 실근
191 서로 다른 두 실근
192 서로 다른 두 허근
193 10
194 ①
195 정삼각형
체크 196 (1) $-\frac{1}{2}$ (2) 32 (3) -14
체크 197 -2
체크 198 39
체크 199 2
체크 200 30
체크 201 $x^2-16x+16=0$
체크 202
(1) $\left(x-\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$
(2) $2\left(x-\frac{2+\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-\frac{2-\sqrt{2}i}{2}\right)$
체크 203 2
체크 204 1
체크 205 ㄴ, ㄹ
206 ㄱ, ㄴ, ㅁ
207 18

208 $\sqrt{15}$

209 3

210 $x=-8$ 또는 $x=3$

211 -1

212 $\frac{3}{4}$

213 -16

214 $2x^2-5x+4=0$

215 $7x^2-3x+1=0$

216 12

217 7

218 1

219 -1

220 $\frac{10}{9}$

221 21

222 14

223 6

224 ①

3 이차방정식과 이차함수

체크 225 3

체크 226 15

체크 227 12

체크 228 2

체크 229 -8

체크 230 $(-1, 3)$

체크 231 $k<-1$

체크 232 $\frac{23}{8}$

체크 233 $y=4x-1$

체크 234 4

235 ④

236 8

237 26

238 $(-8, -60)$

239 $k<-4$

240 $-\frac{1}{2}$

241 한 점에서 만난다.(접한다.)

242 $k>-10$

243 $k<\frac{3}{2}$

244 1

245 $y=-3x-\frac{25}{4}$

246 $y=-x+\frac{3}{4}$

247 33

248 $-\frac{21}{4}$

249 0, $-\frac{1}{2}$

250 풀이 참조

251 3

252 2

체크 253 1

체크 254 -3

체크 255 10

체크 256 -2

체크 257 24

체크 258 109

체크 259 4

체크 260 $-\frac{13}{2}$

체크 261 2

체크 262 9

체크 263 -1

체크 264 4

체크 265 한 개의 판매 가격 : 3만 원,
최대 하루 수입 : 270만 원

266 $a=-2$, $b=-8$, $c=-3$

267 4

268 1

269 최댓값 : 3, 최솟값 : -12

270 -1

271 -3

272 14

273 -2

274 -12

275 27

276 65 m

277 300원

278 50

279 $\frac{7}{4}$

280 9

281 41

4 여러 가지 방정식

체크 282 (1) $x=0$ (중근) 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$
(2) $x=1$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{37}}{2}$

체크 283 -5

체크 284 $x=\frac{-1\pm\sqrt{19}i}{2}$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

체크 285 4

체크 286 (1) $x=\pm1$ 또는 $x=\pm3$
(2) $2\sqrt{7}$

체크 287 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=1$ (중근)

체크 288 9

체크 289 -4

체크 290 $a>4$

체크 291 2

체크 292 1

체크 293 58

294 (1) $x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$ (중근)
(2) $x=1$ 또는 $x=\frac{3\pm\sqrt{7}i}{2}$

295 $\frac{9}{4}$

296 $x=1\pm\sqrt{3}i$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}$

297 2

298 -19

299 10

300 -3

301 5

302 $-\frac{7}{4}$

303 $\frac{3}{2}$

304 -4

305 $a=1$, $b=4$

306 -4

307 $a\geq1$

308 -2
309 3
310 $a<0$ 또는 $0<a<1$
311 $x=5$ 또는 $x=10-5\sqrt{2}$
체크 312 16
체크 313 6
체크 314 11
체크 315 2
체크 316 -4
체크 317 7
체크 318 15
체크 319 (1) -1 (2) 2 (3) 2
체크 320 1
체크 321 $a=6$, $b=0$
체크 322 $\frac{1}{13}$
323 $-\frac{1}{7}$
324 1
325 1
326 $x^3+2x-4=0$
327 6
328 15
329 -15
330 -2
331 $p=-5$, $q=9$
332 -2
333 15
334 -1
335 $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$
336 ③
337 9
338 -11
체크 339 9
체크 340 5
체크 341 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$
체크 342 3
체크 343 1 km
체크 344 25
체크 345 $-1\pm\sqrt{2}$
체크 346 $\frac{3}{4}$
체크 347 5
체크 348 3
349 3
350 5
351 1
352 $-\frac{1}{2}$
353 $k=0$, $x=1$, $y=1$
354 6 cm
355 2
356 1
357 0, -3
358 1
359 18
360 $x=4$, $y=2$
361 8
362 22 cm^2
363 1
364 -5
365 17
366 -5

5 여러 가지 부등식

체크 367 ㄱ
체크 368 3
체크 369 (1) $-1\le x<2$
(2) $-3\le x<-2$
체크 370 2
체크 371 -14
체크 372 7
체크 373 (1) $x=\frac{1}{2}$ (2) 해는 없다.
체크 374 1
체크 375 3
체크 376 -2
체크 377 21
체크 378 26
체크 379 36
체크 380 50 g 이상 125 g 이하
체크 381 8
체크 382 2
체크 383 (1) $x\le-\frac{1}{2}$ 또는 $x\ge\frac{13}{2}$
(2) $1\le x\le\frac{7}{3}$
체크 384 10
385 ㄱ, ㄴ, ㄹ
386 $x\ge1$
387 13
388 0
389 $x=1$
390 $a\le-\frac{4}{3}$
391 $2<k\le3$
392 1
393 75 g 이상 300 g 이하
394 50
395 $\frac{8}{3}<x\le4$
396 3
397 29
398 0
399 2
400 $k>5$
401 $3\le a<6$
402 $1<x\le2$
체크 403 풀이 참조
체크 404 풀이 참조
체크 405 (1) $x=\frac{1}{3}$ (2) 해는 없다.
(3) 모든 실수 (4) 해는 없다.
체크 406 (1) $-\frac{3}{2}\le x\le-1$ 또는 $1\le x\le\frac{3}{2}$
(2) $x\le-1$ 또는 $x\ge2$
(3) $1<x<9$
체크 407 (1) 9 (2) 7
체크 408 5
체크 409 $x\le-1$ 또는 $x\ge2$
체크 410 1
체크 411 3
체크 412 14
체크 413 2
체크 414 $k<0$ 또는 $k>9$

체크 415 1
체크 416 2018
체크 417 5 이상 15 이하
체크 418 25
419 6
420 17
421 풀이 참조
422 40
423 11
424 37
425 14
426 $-1<x<2$
427 3
428 $2\le m<3$
429 $0<k<1$
430 3
431 $m<-\frac{3}{2}$
432 5
433 22
434 18
435 38
체크 436 $-1<x\le\frac{2}{3}$ (2) $\frac{4}{3}\le x\le 2$
체크 437 (1) $1<x\le 2$
(2) $-1\le x\le 1$ 또는 $2\le x\le 4$
체크 438 -5
체크 439 $1<k\le 2$
체크 440 9
체크 441 $\frac{9}{2}<x<12$
체크 442 2
체크 443 6
체크 444 1
체크 445 5
체크 446 $k\ge 5$
체크 447 $k\ge 1$
체크 448 $-3<k<2$
체크 449 $-\frac{13}{3}<k\le -4$
450 $x=-1$
451 $-1<x\le 3$
452 9
453 $2<m\le 3$
454 4
455 $-5\le m<-4$ 또는 $2<m\le 3$
456 1
457 18
458 3
459 21
460 $k\le 1$
461 2
462 9
463 $-3<k\le 1$
464 6
465 15 km

Ⅲ. 도형의 방정식

1 평면좌표

체크 466 6
체크 467 -6
체크 468 -3
체크 469 10
체크 470 8
체크 471 5
체크 472 $(-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$
체크 473 17
체크 474 38
체크 475 112, P(2, 1)
체크 476 7
체크 477 $4\sqrt{22}$
체크 478 (1) P(−21) (2) M(−1)
체크 479 22
체크 480 5
체크 481 2
체크 482 7
체크 483 $\frac{3}{2}$
체크 484 G(1, 1)
체크 485 $\left(0, \frac{5}{3}\right)$
체크 486 2
체크 487 $\frac{8}{3}$
체크 488 7
체크 489 (12, 9)
체크 490 1, 9
491 -3
492 $\sqrt{5}$
493 3
494 $\frac{7}{5}$
495 50
496 $\angle C=90^\circ$인 직각이등변삼각형
497 25π
498 $5+\sqrt{13}$
499 10
500 $5x-2y+5=0$
501 7
502 C, A, B
503 640
504 16
505 6
506 $\left(-\frac{8}{5}, \frac{7}{5}\right)$
507 11
508 (1) (2, 3) (2) P(2, 3), 88

2 직선의 방정식

체크 509 $y=3x-5$
체크 510 $y=\sqrt{3}x+3\sqrt{3}+1$
체크 511 18
체크 512 $y=-\frac{1}{2}x+3$
체크 513 1
체크 514 $\frac{1}{2}$
체크 515 제1사분면, 제2사분면
체크 516 제3사분면
체크 517 3
체크 518 2
체크 519 1
체크 520 $-\frac{8}{3}$, 10
체크 521 (1, 2)
체크 522 (2, −1)
523 ④
524 $y=7$
525 1

526 2
527 $y=-x-2$
528 1
529 5
530 $\frac{5}{8}$
531 20
532 제3사분면
533 $y=3x-2$
534 -45
535 -4
536 $5\sqrt{2}$
537 -3
538 $\frac{9}{2}$
539 5
540 35
체크 541 $\frac{4}{3}$
체크 542 $-\frac{2}{3}<m<3$
체크 543 $\frac{1}{5}\le a\le\frac{5}{4}$
체크 544 7
체크 545 0
체크 546 $2\sqrt{5}$
체크 547 $-\frac{12}{5}$
체크 548 13
체크 549 6
체크 550 8
체크 551 4
체크 552 24
체크 553 1
554 13
555 $\frac{3}{14}<m<1$
556 $\frac{1}{2}<k<\frac{3}{2}$
557 34
558 ④
559 ②
560 $31x-31y+7=0$
561 1
562 2
563 $3x+y+10=0$
또는 $3x+y-10=0$
564 -2
565 5
566 22
567 5
568 14
569 $2x-5y-4=0$
570 $\frac{5}{2}$
571 20

3 원의 방정식

체크 572 $x^2+(y+2)^2=32$
체크 573 -2
체크 574 $k<0$ 또는 $k>2$
체크 575 16π
체크 576 3
체크 577 $12\sqrt{2}$
체크 578 2
체크 579 20π
체크 580 $\frac{5}{2}$
체크 581 -34
체크 582 $\frac{1}{2}$
체크 583 2
584 0
585 ③
586 9
587 π
588 5
589 $\frac{5}{3}$
590 13
591 $\frac{4}{3}$
592 $\frac{\pi}{9}$
593 12
594 14
595 5
596 $3\sqrt{3}$
597 $\sqrt{26}$
598 2
599 8
600 $4\sqrt{10}$
601 $\sqrt{10}$ km
체크 602 $m>-\frac{4}{3}$
체크 603 2
체크 604 -11, 15
체크 605 6
체크 606 16
체크 607 11π
체크 608 12π
체크 609 25
체크 610 -5
체크 611 -8
612 $m\ge\frac{3}{4}$
613 3
614 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
615 4
616 $8\sqrt{2}$
617 -3
618 4
619 (1) $y=3x\pm2\sqrt{10}$
(2) $2x-3y+13=0$
620 $-4\sqrt{3}$
621 1
622 10
623 3
624 16
625 4
626 $-\frac{2}{3}$
627 26
628 $\frac{41}{3}$

4 도형의 이동

체크 629 7
체크 630 -18
체크 631 6
체크 632 7

스피드체크

체크 **633** $2\sqrt{3}$

체크 **634** 2

체크 **635** 2

체크 **636** $\frac{17}{8}$

637 -10

638 4

639 -2

640 $\frac{2}{3}$

641 $4\sqrt{3}$

642 $\frac{10-3\sqrt{2}}{2}$

643 3

644 3

645 $\frac{3}{2}$

646 $\frac{8}{3}\pi-2\sqrt{3}$

647 2

648 2

649 20

650 45

651 26

체크 **652** 32

체크 **653** 3

체크 **654** 7

체크 **655** 29

체크 **656** (1) 36 (2) $(3,\ 5)$

체크 **657** -2

체크 **658** 5

체크 **659** $\sqrt{58}$

체크 **660** $\sqrt{17}$

661 5

662 2

663 5

664 1

665 $3x+2y+4=0$

666 2

667 14

668 $4\pi+8$

669 -27

670 50

671 $x+18y-28=0$

672 4

673 $6\sqrt{3}$

674 -2

675 -5

1 다항식의 연산

01 다항식의 덧셈과 뺄셈

체크 001

(1) $A-B+2C$

$=(2x^2+3xy-2y^2)-(x^2-xy+y^2)+2(3x^2-5xy)$

$=2x^2+3xy-2y^2-x^2+xy-y^2+6x^2-10xy$

$=7x^2-6xy-3y^2$

(2) $-2A+C-2(B-A)$

$=-2A+C-2B+2A$

$=-2B+C$

$=-2(x^2-xy+y^2)+(3x^2-5xy)$

$=-2x^2+2xy-2y^2+3x^2-5xy$

$=x^2-3xy-2y^2$

답 (1) $7x^2-6xy-3y^2$ (2) $x^2-3xy-2y^2$

체크 002

$A-B=x^2-2xy+3y^2$ ⋯⋯ ㉠

$3A+B=3x^2-10xy+y^2$ ⋯⋯ ㉡

㉠+㉡을 하면

$4A=4x^2-12xy+4y^2$ $\therefore A=x^2-3xy+y^2$

이것을 ㉠에 대입하면

$(x^2-3xy+y^2)-B=x^2-2xy+3y^2$

$\therefore B=(x^2-3xy+y^2)-(x^2-2xy+3y^2)$

$=x^2-3xy+y^2-x^2+2xy-3y^2$

$=-xy-2y^2$

$\therefore 2A-3B=2(x^2-3xy+y^2)-3(-xy-2y^2)$

$=2x^2-6xy+2y^2+3xy+6y^2$

$=2x^2-3xy+8y^2$

답 $2x^2-3xy+8y^2$

tip

두 다항식 A, B에 대한 연립방정식으로 보고 두 다항식 A, B를 먼저 구한다.

02 다항식의 곱셈

체크 003

(1) $4x^2z\times\left(\frac{2}{3}x^3y\right)^2\times y^2z^3=4x^2z\times\frac{4}{9}x^6y^2\times y^2z^3$

$=\left(4\times\frac{4}{9}\right)\times x^{2+6}y^{2+2}z^{1+3}$

$=\frac{16}{9}x^8y^4z^4$

(2) $(a^2b)^3\times\left(-\frac{1}{2}ab\right)^2\div\frac{1}{4}a^3b=a^6b^3\times\frac{1}{4}a^2b^2\div\frac{1}{4}a^3b$

$=\left(\frac{1}{4}\div\frac{1}{4}\right)\times a^{6+2-3}b^{3+2-1}$

$=a^5b^4$

답 (1) $\frac{16}{9}x^8y^4z^4$ (2) a^5b^4

체크 004

(1) $(x-2)(2x+1)(x+3)$

$=(2x^2+x-4x-2)(x+3)$

$=(2x^2-3x-2)(x+3)$

$=2x^3+6x^2-3x^2-9x-2x-6$

$=2x^3+3x^2-11x-6$

(2) $(3x-2y+1)(x+2y-3)$

$=3x^2+6xy-9x-2xy-4y^2+6y+x+2y-3$

$=3x^2-4y^2+4xy-8x+8y-3$

답 (1) $2x^3+3x^2-11x-6$

(2) $3x^2-4y^2+4xy-8x+8y-3$

체크 005

$(x^3+2x^2y+y^3)(2x^3-xy^2+3y^3)$의 전개식에서 x^3y^3항은

$x^3\times3y^3+2x^2y\times(-xy^2)+y^3\times2x^3$

$=3x^3y^3-2x^3y^3+2x^3y^3=3x^3y^3$

따라서 x^3y^3의 계수는 3이다. 답 3

체크 006

$(x^3+ax-2)(2x^2+3x-b)$의 전개식에서 x^3항은

$x^3\times(-b)+ax\times2x^2=-bx^3+2ax^3=(2a-b)x^3$

$\therefore 2a-b=8$ ⋯⋯ ㉠

또한 x^2항은

$ax\times3x+(-2)\times2x^2=3ax^2-4x^2=(3a-4)x^2$

즉, $3a-4=-7$이므로 $a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하여 풀면 $b=-10$

$\therefore a-b=-1-(-10)=9$ 답 9

03 곱셈 공식

체크 007

(1) $(2x-3y-z)^2$

$=(2x)^2+(-3y)^2+(-z)^2+2\times2x\times(-3y)$
$\quad+2\times(-3y)\times(-z)+2\times(-z)\times2x$

$=4x^2+9y^2+z^2-12xy+6yz-4zx$

(2) $(4x-y)^3$

$=(4x)^3-3\times(4x)^2\times y+3\times 4x\times y^2-y^3$

$=64x^3-48x^2y+12xy^2-y^3$

(3) $(2a-5b)(4a^2+10ab+25b^2)$

$=(2a-5b)\{(2a)^2+2a\times 5b+(5b)^2\}$

$=8a^3-125b^3$

(4) $(x+2)(x-2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

$=\{(x+2)(x^2-2x+4)\}\{(x-2)(x^2+2x+4)\}$

$=(x^3+8)(x^3-8)$

$=x^6-64$

(5) $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^2=x^2+2\times x\times\dfrac{2}{x}+\left(\dfrac{2}{x}\right)^2$

$=x^2+4+\dfrac{4}{x^2}$

(6) $\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^3$

$=(2x)^3-3\times(2x)^2\times\dfrac{1}{x}+3\times 2x\times\left(\dfrac{1}{x}\right)^2-\left(\dfrac{1}{x}\right)^3$

$=8x^3-12x+\dfrac{6}{x}-\dfrac{1}{x^3}$

(7) $(x-1)(x-3)(x-5)$

$=x^3-(1+3+5)x^2+(1\times 3+3\times 5+5\times 1)x-1\times 3\times 5$

$=x^3-9x^2+23x-15$

(8) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$

$=(x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$

$=(x^4-y^4)(x^4+y^4)$

$=x^8-y^8$

답 풀이 참조

체크 008

(1) $3x^2+1=X$로 놓으면

$(3x^2+2x+1)(3x^2-2x+1)$

$=(X+2x)(X-2x)$

$=X^2-4x^2$

$=(3x^2+1)^2-4x^2$

$=9x^4+6x^2+1-4x^2$

$=9x^4+2x^2+1$

(2) $(-x+y+z)(x-y+z)$

$=\{-(x-y)+z\}\{(x-y)+z\}$

$x-y=X$로 놓으면

$(-X+z)(X+z)=-X^2+z^2$

$=-(x-y)^2+z^2$

$=-x^2+2xy-y^2+z^2$

(3) $(x-2)(x-4)(x+3)(x+5)$

$=\{(x-2)(x+3)\}\{(x-4)(x+5)\}$

$=(x^2+x-6)(x^2+x-20)$

$x^2+x=X$로 놓으면

$(X-6)(X-20)$

$=X^2-26X+120$

$=(x^2+x)^2-26(x^2+x)+120$

$=x^4+2x^3+x^2-26x^2-26x+120$

$=x^4+2x^3-25x^2-26x+120$

답 (1) $9x^4+2x^2+1$
(2) $-x^2+2xy-y^2+z^2$
(3) $x^4+2x^3-25x^2-26x+120$

체크 009

$2x^2+1=X$로 놓으면

$(2x^2-x+1)(2x^2+x+1)$

$=(X-x)(X+x)$

$=X^2-x^2$

$=(2x^2+1)^2-x^2$

$=4x^4+4x^2+1-x^2$

$=4x^4+3x^2+1$

따라서 $a=3$, $b=1$이므로

$a+b=3+1=4$

답 4

체크 010

(1) 주어진 식에 $\dfrac{1}{5-2}\times(5-2)$ $\left(\because\ \dfrac{1}{5-2}\times(5-2)=1\right)$를 곱하면

$(5+2)(5^2+2^2)(5^4+2^4)(5^8+2^8)$

$=\dfrac{1}{5-2}\times(5-2)(5+2)(5^2+2^2)(5^4+2^4)(5^8+2^8)$

$=\dfrac{1}{3}(5^2-2^2)(5^2+2^2)(5^4+2^4)(5^8+2^8)$

$=\dfrac{1}{3}(5^4-2^4)(5^4+2^4)(5^8+2^8)$

$=\dfrac{1}{3}(5^8-2^8)(5^8+2^8)$

$=\dfrac{1}{3}(5^{16}-2^{16})$

(2) $99\times 101\times 10001=(100-1)(100+1)(10000+1)$

$=(10^2-1)(10^2+1)(10^4+1)$

$=(10^4-1)(10^4+1)$

$=10^8-1$

따라서 자연수 n의 값은 8이다.

답 (1) $\dfrac{1}{3}(5^{16}-2^{16})$ (2) 8

연습 문제 01

011

$3A-2(A-2B)+B$

$=3A-2A+4B+B$

$=A+5B$

$=(x^2+4xy-2y^2)+5(2x^2-xy+y^2)$

$=x^2+4xy-2y^2+10x^2-5xy+5y^2$

$=11x^2-xy+3y^2$ 답 $11x^2-xy+3y^2$

012

$A-(2B-X)=2A+B$에서

$A-2B+X=2A+B$

$\therefore X=2A+B-A+2B$

$=A+3B$

$=(x^2-3xy+2y^2)+3(2x^2+xy+y^2)$

$=x^2-3xy+2y^2+6x^2+3xy+3y^2$

$=7x^2+5y^2$ 답 $7x^2+5y^2$

013

$P(x)=A+2B$

$=(x^2+x-3)+2(-x^3+2x^2-x+5)$

$=x^2+x-3-2x^3+4x^2-2x+10$

$=-2x^3+5x^2-x+7$

$\therefore P(-2)=-2\times(-2)^3+5\times(-2)^2-(-2)+7$

$=45$ 답 45

[다른 풀이]

$A(x)=x^2+x-3$, $B(x)=-x^3+2x^2-x+5$라 하면

$P(x)=A(x)+2B(x)$에서

$P(-2)=A(-2)+2B(-2)$ ······ ㉠

이때 $A(-2)=(-2)^2+(-2)-3=-1$이고

$B(-2)=-(-2)^3+2\times(-2)^2-(-2)+5=23$이므로

㉠에서

$P(-2)=(-1)+2\times23=45$

014

$A+2B=x^3+2x^2y-y^3$ ······ ㉠

$A-B=-2x^3+2x^2y-3xy^2+2y^3$ ······ ㉡

㉠−㉡을 하면

$3B=3x^3+3xy^2-3y^3$

$\therefore B=x^3+xy^2-y^3$ ······ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$A-(x^3+xy^2-y^3)=-2x^3+2x^2y-3xy^2+2y^3$

$\therefore A=-x^3+2x^2y-2xy^2+y^3$

$\therefore 2A-B-3(A-2B)$

$=2A-B-3A+6B$

$=-A+5B$

$=-(-x^3+2x^2y-2xy^2+y^3)+5(x^3+xy^2-y^3)$

$=x^3-2x^2y+2xy^2-y^3+5x^3+5xy^2-5y^3$

$=6x^3-2x^2y+7xy^2-6y^3$

답 $6x^3-2x^2y+7xy^2-6y^3$

015

$(3x+1)(2x^3+x+kx-2)$의 전개식에서 x^2항은

$3x\times x+3x\times kx=(3+3k)x^2$

이때 x^2의 계수가 -6이므로

$3+3k=-6$ $\therefore k=-3$ 답 -3

016

(1) $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=14$에서 $\frac{x^2+y^2}{xy}=14$ $\therefore x^2+y^2=14xy$

이때 $xy=4$이므로 $x^2+y^2=56$

$\therefore (x+y)^2=x^2+2xy+y^2=(x^2+y^2)+2xy$

$=56+2\times4=64$

(2) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$=a^3+b^3+3ab(a+b)$

$=6+3\times(-2)=0$

답 (1) 64 (2) 0

017

$y-3z=X$로 놓으면

$(2x-y+3z)(2x+y-3z)=\{2x-(y-3z)\}$

$=(2x-X)(2x+X)$

$=4x^2-X^2$

$=4x^2-(y-3z)^2$

$=4x^2-y^2+6yz-9z^2$

답 $4x^2-y^2+6yz-9z^2$

018

$(6+3)(6^2+3^2)(6^4+3^4)$

$=\frac{1}{6-3}(6-3)(6+3)(6^2+3^2)(6^4+3^4)$

$=\frac{1}{3}(6^2-3^2)(6^2+3^2)(6^4+3^4)$

$=\frac{1}{3}(6^4-3^4)(6^4+3^4)=\frac{1}{3}(6^8-3^8)$ 답 $\frac{1}{3}(6^8-3^8)$

019

$98^2+103\times97$

$=(100-2)^2+(100+3)(100-3)$

$=100^2-2\times100\times2+2^2+100^2-3^2$

$=10000-400+4+10000-9$

$=19595$

따라서 다섯 자리의 자연수이다. 답 다섯 자리

020

$(a-b+c)^2+(a+b-c)^2+(a-b-c)^2+(-a-b-c)^2$

$=(a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca)$

$\quad+(a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca)$

$\quad+(a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca)$

$\quad+(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)$

$=4a^2+4b^2+4c^2$ 답 $4a^2+4b^2+4c^2$

021

$(x-6)(x-1)(x+2)(x+3)$

$=\{(x-6)(x-1)\}\{(x+2)(x+3)\}$

$=(x^2-7x+6)(x^2+5x+6)$

$x^2+6=X$로 놓으면

$(X-7x)(X+5x)=X^2-2xX-35x^2$

$=(x^2+6)^2-2x(x^2+6)-35x^2$

$=x^4-2x^3-23x^2-12x+36$

$=x^4-2x^3+ax^2+bx+36$

따라서 $a=-23$, $b=-12$이므로

$a-2b=(-23)-2\times(-12)=1$ 답 1

022

$(1-x+2x^2-3x^3+4x^4-\cdots+100x^{100})^2$

$=(1-x+2x^2-3x^3+4x^4-\cdots+100x^{100})$

$\quad\times(1-x+2x^2-3x^3+4x^4-\cdots+100x^{100})$

이 식의 전개식에서 x^3항은

$1\times(-3x^3)+(-x)\times2x^2+2x^2\times(-x)+(-3x^3)\times1$

$=-10x^3$

따라서 x^3의 계수는 -10이다. 답 -10

tip

주어진 식의 전개식에서 x^3의 계수와 $(1-x+2x^2-3x^3)(1-x+2x^2-3x^3)$의 전개식에서 x^3의 계수는 서로 같다.

023

$(A+2B)(A-2B)$

$=\{(x^3-2x^2+x+3)+2(x^2+x+2)\}$

$\quad\times\{(x^3-2x^2+x+3)-2(x^2+x+2)\}$

$=(x^3+3x+7)(x^3-4x^2-x-1)$

이 식의 전개식에서 x^4항은

$x^3\times(-x)+3x\times x^3=2x^4$

$\therefore m=2$

또한 x^3항은

$x^3\times(-1)+3x\times(-4x^2)+7\times x^3=-6x^3$

$\therefore n=-6$

$\therefore \dfrac{n}{m}=\dfrac{-6}{2}=-3$ 답 -3

024

$<A, B>=A^2+AB+B^2$이므로

$<x^2+x+1, x^2+x>$

$=(x^2+x+1)^2+(x^2+x+1)(x^2+x)+(x^2+x)^2$ …… ㉠

㉠의 $(x^2+x+1)^2=(x^2+x+1)(x^2+x+1)$의 전개식에서 x항은

$x\times1+1\times x=2x$

㉠의 $(x^2+x+1)(x^2+x)$의 전개식에서 x항은

$1\times x=x$

㉠의 $(x^2+x)^2=(x^2+x)(x^2+x)$의 전개식에서 x항은 없다.

따라서 $<x^2+x+1, x^2+x>$의 전개식에서 x항은

$2x+x=3x$이므로 x의 계수는 3이다. 답 3

025

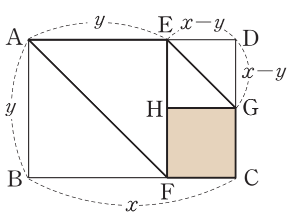
점 B가 변 AD 위의 점 E에 오도록 접었으므로

$\overline{AB}=\overline{BF}=\overline{FE}=\overline{EA}=y$

또한 점 D가 선분 EF 위의 점 H에 오도록 접었으므로

$\overline{EH}=\overline{HG}=\overline{GD}=\overline{DE}=x-y$

즉, 두 사각형 ABFE, EHGD는 정사각형이다.



이때 사각형 HFCG는 직사각형이고

$\overline{HG}=x-y$,

$\overline{HF}=\overline{EF}-\overline{EH}$

$=y-(x-y)=-x+2y$

이므로 사각형 HFCG의 넓이는

$\overline{HG}\times\overline{HF}=(x-y)(-x+2y)$

$=-x^2+2xy+xy-2y^2$

$=-x^2+3xy-2y^2$ 답 $-x^2+3xy-2y^2$

04 곱셈 공식의 변형

체크 026

(1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서

$24=4^2-2xy \qquad \therefore xy=-4$

$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=4^3-3\times(-4)\times4=112$

(2) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=-2$에서 $\dfrac{x+y}{xy}=-2$

이때 $xy=3$이므로 $\dfrac{x+y}{3}=-2 \qquad \therefore x+y=-6$

따라서 $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$에서

$(x-y)^2=(-6)^2-4\times3=24$이므로

$x-y=\pm2\sqrt{6}$

답 (1) 112 (2) $\pm2\sqrt{6}$

체크 027

$x=3-2\sqrt{2}$, $y=3+2\sqrt{2}$이므로

$x+y=6$, $xy=1$

$\therefore \dfrac{y}{x^2}+\dfrac{x}{y^2}=\dfrac{x^3+y^3}{x^2y^2}$

$=\dfrac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{(xy)^2}$

$=\dfrac{6^3-3\times1\times6}{1^2}$

$=198$

답 198

체크 028

(1) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$5=1^2-2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=-2$

$\therefore a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=1\times\{5-(-2)\}+3\times(-1)$

$=4$

(2) $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$

$=(-2)^2-2\times(-1)\times1$

$=6$

$\therefore a^4+b^4+c^4=(a^2)^2+(b^2)^2+(c^2)^2$

$=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

$=5^2-2\times6$

$=13$

답 (1) 4 (2) 13

체크 029

$x-y=2-2\sqrt{3}$, $y-z=2+2\sqrt{3}$을 변끼리 더하면

$x-z=4 \qquad \therefore z-x=-4$

$\therefore x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$

$=\dfrac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$

$=\dfrac{1}{2}\{(2-2\sqrt{3})^2+(2+2\sqrt{3})^2+(-4)^2\}$

$=\dfrac{1}{2}(16-8\sqrt{3}+16+8\sqrt{3}+16)$

$=24$

답 24

체크 030

$x\neq0$이므로 $x^2-4x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-\dfrac{1}{x}=4$

$\therefore \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+4$

$=4^2+4=20$

이때 $x>1$이므로 $x+\dfrac{1}{x}=2\sqrt{5}$

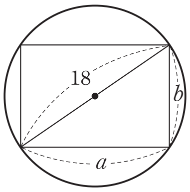
$\therefore x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=(2\sqrt{5})^3-3\times2\sqrt{5}$

$=34\sqrt{5}$

답 $2\sqrt{5}$, $34\sqrt{5}$

체크 031



직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 a, b라 하면 원의 지름의 길이가 18이므로

$a^2+b^2=18^2=324$

직사각형의 둘레의 길이가 40이므로

$a+b=20$

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$에서

$20^2=324+2ab \qquad \therefore ab=38$

답 38

체크 032

직육면체의 가로와 세로의 길이, 높이를 각각 a, b, c라 하면 겉넓이가 74이므로

$2(ab+bc+ca)=74 \qquad \therefore ab+bc+ca=37$

대각선의 길이가 $\sqrt{47}$이므로

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{47} \qquad \therefore a^2+b^2+c^2=47$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$(a+b+c)^2=47+74=121$

$\therefore a+b+c=11$ ($\because a>0, b>0, c>0$)

따라서 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은

$4(a+b+c)=4\times11=44$

답 44

05 다항식의 나눗셈

체크 033

다항식 x^4+4x^3-3x+1을 다항식 A로 나누었을 때의 몫이 x^2+2x-3이고 나머지가 $5x-2$이므로

$x^4+4x^3-3x+1=A(x^2+2x-3)+5x-2$

$$\begin{aligned}A(x^2+2x-3)&=x^4+4x^3-3x+1-(5x-2)\\&=x^4+4x^3-8x+3\end{aligned}$$

즉, $A=(x^4+4x^3-8x+3)\div(x^2+2x-3)$이므로 직접 나눗셈을 하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+2x-1 \\ \hline
x^2+2x-3 & x^4+4x^3\qquad -8x+3 \\
 & x^4+2x^3-3x^2 \\ \cline{2-2}
 & \quad 2x^3+3x^2-8x \\
 & \quad 2x^3+4x^2-6x \\ \cline{2-2}
 & \qquad -x^2-2x+3 \\
 & \qquad -x^2-2x+3 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$\therefore A=x^2+2x-1$ 　　답 x^2+2x-1

체크 034

다항식 $2x^3+3x^2+2x-4$를 다항식 $2x^2+x-1$로 직접 나누면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l}
 & x+1 \\ \hline
2x^2+x-1 & 2x^3+3x^2+2x-4 \\
 & 2x^3+x^2-x \\ \cline{2-2}
 & \quad 2x^2+3x-4 \\
 & \quad 2x^2+x-1 \\ \cline{2-2}
 & \qquad 2x-3
\end{array}$$

따라서 $Q(x)=x+1$, $R(x)=2x-3$이므로

$$\begin{aligned}Q(3)+R(2)&=(3+1)+(2\times2-3)\\&=5\end{aligned}$$

답 5

체크 035

다항식 x^3+x^2-x-a를 다항식 x^2-x+1로 직접 나누면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l}
 & x+2 \\ \hline
x^2-x+1 & x^3+x^2-x-a \\
 & x^3-x^2+x \\ \cline{2-2}
 & \quad 2x^2-2x-a \\
 & \quad 2x^2-2x+2 \\ \cline{2-2}
 & \qquad -a-2
\end{array}$$

이때 나머지가 0이어야 하므로

$-a-2=0$ 　　$\therefore a=-2$ 　　답 -2

체크 036

(1) 조립제법을 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 4 & 0 & 3 & 5 \\
 & & -4 & 4 & -7 \\ \hline
 & 4 & -4 & 7 & -2
\end{array}$$

따라서 $4x^3+3x+5$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫은 $4x^2-4x+7$이고 나머지는 -2이다.

(2) $3x-2=3\left(x-\frac{2}{3}\right)$이므로 조립제법을 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr}
\frac{2}{3} & 6 & -7 & 5 & -3 \\
 & & 4 & -2 & 2 \\ \hline
 & 6 & -3 & 3 & -1
\end{array}$$

즉, $6x^3-7x^2+5x-3$을 $x-\frac{2}{3}$로 나누었을 때의 몫은 $6x^2-3x+3$이고 나머지는 -1이므로

$$\begin{aligned}6x^3-7x^2+5x-3&=\left(x-\frac{2}{3}\right)(6x^2-3x+3)-1\\&=3\left(x-\frac{2}{3}\right)(2x^2-x+1)-1\\&=(3x-2)(2x^2-x+1)-1\end{aligned}$$

따라서 $6x^3-7x^2+5x-3$을 $3x-2$로 나누었을 때의 몫은 $2x^2-x+1$이고 나머지는 -1이다.

답 (1) 몫 : $4x^2-4x+7$, 나머지 : -2
(2) 몫 : $2x^2-x+1$, 나머지 : -1

체크 037

다항식 $f(x)$를 $x-\frac{1}{3}$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\left(x-\frac{1}{3}\right)Q(x)+R\\&=\frac{1}{3}(3x-1)Q(x)+R\\&=(3x-1)\times\frac{1}{3}Q(x)+R\end{aligned}$$

따라서 몫은 $\frac{1}{3}Q(x)$, 나머지는 R이다.

답 몫 : $\frac{1}{3}Q(x)$, 나머지 : R

연습 문제 02

038

(1) $x-y=3$, $xy=4$이므로

$(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$

$=3^2+4\times4=25$

$\therefore x+y=\pm5$

$\therefore x^2-y^2=(x-y)(x+y)$

$=3\times(\pm5)=\pm15$ (복부호동순)

(2) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=3^2-2\times(-5)$

$=19$

$\therefore x^3y+xy^3=xy(x^2+y^2)$

$=(-5)\times19=-95$

답 (1) ±15 (2) -95

039

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=5^2-4=21$

이때 $0<x<1$이므로 $\frac{1}{x}>1$

따라서 $x-\frac{1}{x}<0$이므로 $x-\frac{1}{x}=-\sqrt{21}$

답 $-\sqrt{21}$

040

$x=\sqrt{5}-1$, $y=\sqrt{5}+1$에서

$x-y=-2$, $xy=4$

$\therefore \frac{x^2}{y}-\frac{y^2}{x}=\frac{x^3-y^3}{xy}$

$=\frac{(x-y)^3+3xy(x-y)}{xy}$

$=\frac{(-2)^3+3\times4\times(-2)}{4}$

$=-8$

답 -8

041

$x+3y=2$, $xy=-3$이므로

$x^3+27y^3=(x+3y)^3-3\times x\times3y\times(x+3y)$

$=(x+3y)^3-9xy(x+3y)$

$=2^3-9\times(-3)\times2$

$=62$

답 62

042

(1) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$5^2=15+2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=5$

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{5}{-3}=-\frac{5}{3}$

(2) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=2^2-2\times(-1)=6$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=2^3-3\times(-1)\times2$

$=14$

$a^5+b^5=(a^2+b^2)(a^3+b^3)-(ab)^2(a+b)$

$=6\times14-(-1)^2\times2$

$=82$

$\therefore a^3+b^3+a^5+b^5=14+82=96$

답 (1) $-\frac{5}{3}$ (2) 96

tip

a^n+b^n (n은 4 이상의 자연수)의 값은 다음과 같이 a^2+b^2, a^3+b^3의 값 및 $a+b$, ab의 값을 이용하여 구할 수 있다.

(1) $a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2(ab)^2$

(2) $a^5+b^5=(a^2+b^2)(a^3+b^3)-(ab)^2(a+b)$

(3) $a^6+b^6=(a^3+b^3)^2-2(ab)^3=(a^2+b^2)^3-3(ab)^2(a^2+b^2)$

(4) $a^7+b^7=(a^3+b^3)(a^4+b^4)-(ab)^3(a+b)$

⋮

043

$a+b=5$, $a-c=-2$를 변끼리 빼면

$b+c=7$

$\therefore 2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc-2ca$

$=a^2+2ab+b^2+b^2+2bc+c^2+c^2-2ca+a^2$

$=(a+b)^2+(b+c)^2+(a-c)^2$

$=5^2+7^2+(-2)^2$

$=78$

답 78

044

$x\neq0$이므로 $x^2+3x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x+3+\frac{1}{x}=0$ $\quad\therefore x+\frac{1}{x}=-3$

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$

$=(-3)^2-2=7$

$\therefore x^2-3x-4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-4$

$=7-3\times(-3)-4$

$=12$

답 12

045

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$에서

$x+y+z=1$, $x^2+y^2+z^2=29$이므로

$1^2=29+2(xy+yz+zx)$

$\therefore xy+yz+zx=-14$

한편, $x+y+z=1$에서

$x+y=1-z$, $y+z=1-x$, $z+x=1-y$

$\therefore (x+y)(y+z)(z+x)$

$=(1-z)(1-x)(1-y)$

$=1^3-1^2\times(x+y+z)+1\times(xy+yz+zx)-xyz$

$=1^3-1^2\times1+1\times(-14)-(-24)$ ($\because xyz=-24$)

$=10$

답 10

046

(1) $a+b+c=0$, $abc=2$이므로

$a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=0\times(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3\times2$

$=6$

(2) $a+b+c=2$에서

$a+b=2-c$, $b+c=2-a$, $c+a=2-b$이므로

$a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2$

$=(a^2b+ab^2)+(b^2c+bc^2)+(c^2a+ca^2)$

$=ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$

$=ab(2-c)+bc(2-a)+ca(2-b)$

$=2ab-abc+2bc-abc+2ca-abc$

$=2(ab+bc+ca)-3abc$

($\because ab+bc+ca=-1$, $abc=-2$)

$=2\times(-1)-3\times(-2)$

$=4$

답 (1) 6 (2) 4

047

주어진 조립제법은 다항식 x^3-ax^2+x+b를 일차식 $x-3$으로 나누는 과정이므로 $k=3$

즉, 실제로 조립제법을 이용하여 나눗셈을 하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & -a & 1 & b \\ & & 3 & -3a+9 & -9a+30 \\ \hline & 1 & -a+3 & -3a+10 & \boxed{-9a+b+30} \end{array}$$

이를 주어진 조립제법과 비교하면

$-a+3=2$ $\quad\therefore a=1$

$\therefore c=-3a+9=-3+9=6$

또한 $-9a+b+30=5$에서 $-9+b+30=5$이므로 $b=-16$

$\therefore a=1$, $b=-16$, $c=6$, $k=3$

답 $a=1$, $b=-16$, $c=6$, $k=3$

048

다항식 $2x^3+3x^2-x+3$을 다항식 x^2-2x-1로 직접 나누면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 2x+7 \\ x^2-2x-1\overline{)\,2x^3+3x^2-x+3} \\ \underline{2x^3-4x^2-2x} \\ 7x^2+x+3 \\ \underline{7x^2-14x-7} \\ 15x+10 \end{array}$$

따라서 몫은 $Q(x)=2x+7$, $R(x)=15x+10$이므로

$Q(2)+R(-1)=(2\times2+7)+\{15\times(-1)+10\}$

$=6$

답 6

049

다항식 $x^4-2x^3+bx^2-(b-1)x+a$를 다항식 x^2-x+b로 직접 나누면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} x^2-x-1 \\ x^2-x+b\overline{)\,x^4-2x^3+bx^2-(b-1)x+a} \\ \underline{x^4-x^3+bx^2} \\ -x^3-(b-1)x \\ \underline{-x^3+x^2-bx} \\ -x^2+x+a \\ \underline{-x^2+x-b} \\ a+b \end{array}$$

이때 나머지가 0이어야 하므로

$a+b=0$

답 0

050

조립제법에서 ax^3+bx^2+cx+d를 $x-\frac{1}{3}$로 나누었을 때의 몫이 $3x^2-6$이고 나머지가 2이므로

$ax^3+bx^2+cx+d=\left(x-\frac{1}{3}\right)(3x^2-6)+2$

$=3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x^2-2)+2$

$=(3x-1)(x^2-2)+2$

따라서 ax^3+bx^2+cx+d를 $3x-1$로 나누었을 때의 몫은 x^2-2이고 나머지는 2이다.

답 몫 : x^2-2 , 나머지 : 2

051

$f(x)=(2x-3)Q(x)+4$이므로

$$2f(x)=2(2x-3)Q(x)+8$$
$$=4\left(x-\frac{3}{2}\right)Q(x)+8$$
$$=\left(x-\frac{3}{2}\right)\times 4Q(x)+8$$

따라서 다항식 $2f(x)$를 $x-\frac{3}{2}$으로 나누었을 때의 몫은 $4Q(x)$이고 나머지는 8이다. 답 몫 : $4Q(x)$, 나머지 : 8

052

직육면체의 겉넓이가 126이므로

$2(ab+bc+ca)=126$ $\quad\therefore ab+bc+ca=63$

대각선의 길이가 $\sqrt{70}$이므로

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{70}$ $\quad\therefore a^2+b^2+c^2=70$

부피가 90이므로 $abc=90$

$$\therefore (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$
$$=70+2\times 63$$
$$=196$$

따라서 $a+b+c=14$ ($\because a, b, c$는 양수)이므로

$$a^3+b^3+c^3$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$$
$$=14\times(70-63)+3\times 90$$
$$=368$$

답 368

053

다항식 $x^4+3x^3-5x^2+11x+2$를 다항식 x^2-2x+3으로 직접 나누면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+5x+2 \\ \hline
x^2-2x+3 & x^4+3x^3-5x^2+11x+2 \\
 & x^4-2x^3+3x^2 \\ \hline
 & 5x^3-8x^2+11x \\
 & 5x^3-10x^2+15x \\ \hline
 & 2x^2-4x+2 \\
 & 2x^2-4x+6 \\ \hline
 & -4
\end{array}$$

$$\therefore x^4+3x^3-5x^2+11x+2$$
$$=(x^2-2x+3)(x^2+5x+2)-4$$

이때 $x^2-2x+3=0$이므로 구하는 식의 값은 -4이다.

답 -4

054

$\overline{AC}=x$, $\overline{BC}=y$라 하면 $\overline{AB}=8$이므로

$x+y=8$

두 정육면체의 부피의 합이 224이므로

$x^3+y^3=224$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$에서

$224=8^3-3xy\times 8$ $\quad\therefore xy=12$

이때 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서

$x^2+y^2=8^2-2\times 12=40$

따라서 두 정육면체의 겉넓이의 합은

$6(x^2+y^2)=6\times 40=240$ 답 240

2 항등식과 나머지정리

06 항등식

체크 055

$kx+3x-ky-6=0$을 k에 대하여 정리하면

$(x-y)k+3x-6=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$x-y=0$, $3x-6=0$

즉, $x=y$, $x=2$이므로 $x=2$, $y=2$

$\therefore xy=2\times2=4$

답 4

체크 056

$x^3=x^2(x-1)+a(x-1)(x-2)+b(x-2)+c$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$8=4+c$ $\therefore c=4$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1=-b+c$

이때 $c=4$이므로 $b=3$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=2a-2b+c$

이때 $b=3$, $c=4$이므로

$2a-6+4=0$ $\therefore a=1$

$\therefore a=1$, $b=3$, $c=4$

답 $a=1$, $b=3$, $c=4$

tip

다음 표현은 모두 같은 의미이다.

- x에 대한 항등식
- 모든 x에 대하여 성립하는 등식
- 임의의 x에 대하여 성립하는 등식
- x의 값에 관계없이 항상 성립하는 등식
- 어떤 x의 값에 대하여도 항상 성립하는 등식

체크 057

$(x-2)(x+1)f(x)=x^4+ax^2+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=16+4a+b$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=1+a+b$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-5$, $b=4$

$\therefore (x-2)(x+1)f(x)=x^4-5x^2+4$

양변에 $x=3$을 대입하면

$4f(3)=3^4-5\times3^2+4=40$

$\therefore f(3)=10$

답 10

체크 058

$a(x+3y-1)+b(x-y-2)+4=3x+y+k$에서

$(a+b)x+(3a-b)y-a-2b+4=3x+y+k$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a+b=3$, $3a-b=1$, $-a-2b+4=k$

$a+b=3$, $3a-b=1$을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=2$

$\therefore k=-a-2b+4=-1-4+4=-1$

답 -1

tip

x, y의 값에 관계없이 성립 ⇨ $(\quad)x+(\quad)y+(\quad)=0$

과 같이 x, y에 대하여 정리한다.

체크 059

$ax-y=-1$에서 $y=ax+1$

이것을 $x^2-y^2+bx+1=0$에 대입하면

$x^2-(ax+1)^2+bx+1=0$

$\therefore (1-a^2)x^2+(-2a+b)x=0$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$1-a^2=0$, $-2a+b=0$

$\therefore a=1$, $b=2$ ($\because a>0$)

$\therefore a+b=1+2=3$

답 3

체크 060

$x^3+3x^2-ax+2=(x-1)(x^2+bx+c)+5$이므로

$x^3+3x^2-ax+2=x^3+(b-1)x^2+(-b+c)x-c+5$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$3=b-1$, $-a=-b+c$, $2=-c+5$

$\therefore a=1$, $b=4$, $c=3$

$\therefore a-b-c=1-4-3=-6$

답 -6

체크 061

x^3+ax^2+bx+2를 x^2+x+2로 나누었을 때의 몫을

$x+k$ (k는 상수)라 하면

$x^3+ax^2+bx+2=(x^2+x+2)(x+k)$이므로

$x^3+ax^2+bx+2=x^3+(k+1)x^2+(k+2)x+2k$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=k+1$, $b=k+2$, $2=2k$

$\therefore k=1$, $a=2$, $b=3$

$\therefore a+b=2+3=5$ 답 5

tip

x^3+ax^2+bx+2의 최고차항의 계수가 1이고 x^2+x+2의 최고차항의 계수가 1이므로 몫은 $x+k$ (k는 상수) 꼴이다.

연습 문제 03

062

ㄴ. 좌변을 전개하면

$(x-1)^2+x=x^2-2x+1+x=x^2-x+1$

(좌변)=(우변)이므로 x에 대한 항등식이다.

ㄷ. 좌변을 전개하면 $(x+3)(x-2)=x^2+x-6$

(좌변)=(우변)이므로 x에 대한 항등식이다.

따라서 항등식인 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

063

$(x-1)(ax+3)=x^2+bx+c$에서

$ax^2+(-a+3)x-3=x^2+bx+c$

이 등식이 x에 대한 항등식이 되려면

$a=1$, $-a+3=b$, $-3=c$

$\therefore a=1$, $b=2$, $c=-3$ 답 $a=1$, $b=2$, $c=-3$

064

$k^2(x+1)+2k+2=4x+10$에서

$k^2x+k^2+2k+2=4x+10$ …… ㉠

㉠이 x에 대한 항등식이므로 x의 계수가 서로 같아야 한다.

즉, $k^2=4$에서 $k=2$ 또는 $k=-2$

(i) $k=2$일 때, ㉠의 좌변은

$2^2\times x+2^2+2\times 2+2=4x+10$

이므로 (좌변)=(우변)이다.

(ii) $k=-2$일 때, ㉠의 좌변은

$(-2)^2\times x+(-2)^2+2\times(-2)+2=4x+2$

이므로 (좌변)$\neq$(우변)이다.

(i), (ii)에서 $k=2$ 답 2

[다른 풀이]

㉠이 x에 대한 항등식이므로 $k^2=4$, $k^2+2k+2=10$

(i) $k^2=4$에서 $k=2$ 또는 $k=-2$

(ii) $k^2+2k+2=10$에서 $k^2+2k-8=0$

$(k+4)(k-2)=0$ $\therefore k=-4$ 또는 $k=2$

(i), (ii)를 동시에 만족시켜야 하므로 구하는 k의 값은 2이다.

065

$2x^2+3x-1$

$=a(x-1)(x+1)+bx(x+1)+cx(x-1)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-1=-a$ $\therefore a=1$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2+3-1=2b$ $\therefore b=2$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$2-3-1=2c$ $\therefore c=-1$

$\therefore a=1$, $b=2$, $c=-1$ 답 $a=1$, $b=2$, $c=-1$

066

$\dfrac{x+1}{2}=y-1$에서 $x=2y-3$

이것을 $ax-by+6=0$에 대입하면

$a(2y-3)-by+6=0$

$(2a-b)y-3a+6=0$

이 등식이 y에 대한 항등식이므로

$2a-b=0$, $-3a+6=0$ $\therefore a=2$, $b=4$

$\therefore a+b=2+4=6$ 답 6

067

$a(x+by)-bx=5(x-2y)$에서

$(a-b)x+aby=5x-10y$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a-b=5$, $ab=-10$

$\therefore a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

$=5^2+2\times(-10)=5$ 답 5

068

$x^8+ax^5+b=(x^2-1)f(x)+2x-1$에서

$x^8+ax^5+b=(x+1)(x-1)f(x)+2x-1$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1+a+b=1$ $\therefore a+b=0$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$1-a+b=-3$ $\therefore a-b=4$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-2$

$\therefore ab=2\times(-2)=-4$ 답 -4

069

주어진 등식의 좌변을 통분하면

$$\frac{(ax+4a)+(bx+2b)}{(x+2)(x+4)}=\frac{x+6}{(x+2)(x+4)}$$

$x\neq-2$, $x\neq-4$일 때, 이 등식이 성립하므로

$(ax+4a)+(bx+2b)=x+6$

$(a+b)x+(4a+2b)=x+6$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a+b=1$, $4a+2b=6$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-1$

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{2}{-1}=-2$ 답 -2

070

x^3-7x^2+4x+a를 x^2-4x-b로 나누었을 때의 몫을

$x+p$ (p는 상수)라 하면

$x^3-7x^2+4x+a=(x+p)(x^2-4x-b)$에서

$x^3-7x^2+4x+a=x^3+(p-4)x^2+(-4p-b)x-pb$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$-7=p-4$, $4=-4p-b$, $a=-pb$

$\therefore p=-3$, $b=8$, $a=24$

$\therefore a+b=24+8=32$ 답 32

071

$x^2-6x+5=(x-a)^2+b(x-a)$의 양변에 $x=a$를 대입하면

$a^2-6a+5=0$, $(a-1)(a-5)=0$ $\quad\therefore a=1$ 또는 $a=5$

(i) $a=1$일 때, 주어진 등식은

$x^2-6x+5=(x-1)^2+b(x-1)$

이 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$5=1-b$ $\quad\therefore b=-4$

(ii) $a=5$일 때, 주어진 등식은

$x^2-6x+5=(x-5)^2+b(x-5)$

이 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$5=25-5b$ $\quad\therefore b=4$

(i), (ii)에서 $a=5$, $b=4$ ($\because b>0$)

$\therefore 2a-b=2\times5-4=6$ 답 6

072

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면 $2f(x)=2x+f(1)$에서

$2(ax+b)=2x+a+b$

$2ax+2b=2x+a+b$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$2a=2$, $2b=a+b$ $\quad\therefore a=1$, $b=1$

따라서 $f(x)=x+1$이므로 $f(2)=2+1=3$ 답 3

073

$x=1$이 x에 대한 방정식

$\{f(x)\}^2+(k-2)f(x)+(k+3)a+b+1=0$의 근이므로

$\{f(1)\}^2+(k-2)f(1)+(k+3)a+b+1=0$

이때 $f(1)=1$이므로

$1+k-2+(k+3)a+b+1=0$

$(a+1)k+3a+b=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$a+1=0$, $3a+b=0$ $\quad\therefore a=-1$, $b=3$

$\therefore ab=-1\times3=-3$ 답 -3

074

$a◎b=-2ab+3(a+b)+k$이므로

$x◎t=-2xt+3(x+t)+k$

$=(-2t+3)x+3t+k$

$x◎t=x$에서

$(-2t+3)x+3t+k=x$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$-2t+3=1$, $3t+k=0$ $\quad\therefore t=1$, $k=-3$

$\therefore k=-3$ 답 -3

075

$\frac{ax^2+(b+1)x+6}{x^2+2x-2}=k$ (k는 상수)라 하면

$ax^2+(b+1)x+6=k(x^2+2x-2)$

모든 항을 좌변으로 옮겨 정리하면

$(a-k)x^2+(b-2k+1)x+2k+6=0$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a-k=0$, $b-2k+1=0$, $2k+6=0$

$\therefore k=-3$, $a=-3$, $b=-7$

$\therefore a^2+b^2=(-3)^2+(-7)^2=58$ 답 58

076

$(x^2+2x-1)^3=a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+\cdots+a_1x+a_0$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$8=a_6+a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-8=a_6-a_5+a_4-a_3+a_2-a_1+a_0$ …… ㉢

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-1=a_0$ …… ㉣

ㄱ. ㉡+㉢을 하면

$0=2a_6+2a_4+2a_2+2a_0$

$\therefore a_6+a_4+a_2+a_0=0$

ㄴ. ㉡−㉢을 하면

$16=2a_5+2a_3+2a_1$

$\therefore a_5+a_3+a_1=8$

ㄷ. ㄱ에서 $a_6+a_4+a_2+a_0=0$이고, ㉣에서 $a_0=-1$이므로

$a_6+a_4+a_2=1$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

07 나머지정리와 인수정리

체크 077

다항식 x^3+x+2를 이차식 $P(x)$로 나누었을 때의 몫이 $x-1$, 나머지가 $3x+1$이므로

$x^3+x+2=P(x)(x-1)+3x+1$ …… ㉠

나머지정리에 의하여 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 $P(-1)$이므로 ㉠에 $x=-1$을 대입하면

$(-1)^3+(-1)+2=P(-1)\times(-1-1)+3\times(-1)+1$

$0=-2P(-1)-2 \quad \therefore P(-1)=-1$ 답 -1

체크 078

$f(x)=x^3+ax^2-x+b$라 하면 나머지정리에 의하여

$f(1)=3,\ f(2)=3$

즉, $1+a-1+b=3,\ 8+4a-2+b=3$이므로

$a+b=3,\ 4a+b=-3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=5$

$\therefore a-b=-2-5=-7$ 답 -7

체크 079

$f(x)$를 x^2-2x-8로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$f(x)=(x^2-2x-8)Q_1(x)+3$

$=(x+2)(x-4)Q_1(x)+3$ …… ㉠

$f(x)$를 x^2-4x-5로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$f(x)=(x^2-4x-5)Q_2(x)+2$

$=(x+1)(x-5)Q_2(x)+2$ …… ㉡

$f(x)$를 $x^2-9x+20$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2-9x+20)Q(x)+ax+b$

$=(x-4)(x-5)Q(x)+ax+b$ …… ㉢

㉠의 양변에 $x=4$를 대입하면 $f(4)=3$

㉡의 양변에 $x=5$를 대입하면 $f(5)=2$

즉, ㉢의 양변에 $x=4,\ x=5$를 각각 대입하면

$f(4)=4a+b=3,\ f(5)=5a+b=2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=7$

따라서 구하는 나머지는 $-x+7$이다. 답 $-x+7$

체크 080

다항식 $(x-1)f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 -3이므로 나머지정리에 의하여

$\{(-2)-1\}f(-2)=-3 \quad \therefore f(-2)=1$

또한 $f(x)$를 $x+4$로 나누었을 때의 나머지가 7이므로 나머지정리에 의하여 $f(-4)=7$

$f(x)$를 $(x+4)(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x+4)(x+2)Q(x)+ax+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-4,\ x=-2$를 각각 대입하면

$f(-4)=-4a+b=7,\ f(-2)=-2a+b=1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=-5$

따라서 구하는 나머지는 $-3x-5$이다. 답 $-3x-5$

체크 081

나머지정리에 의하여

$f(0)=3,\ f(1)=5,\ f(2)=9$

$f(x)$를 $x(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)=x(x-1)(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0,\ x=1,\ x=2$를 각각 대입하면

$f(0)=c=3,\ f(1)=a+b+c=5,\ f(2)=4a+2b+c=9$

즉, $c=3$이므로 $a+b=2,\ 4a+2b=6$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=1$

따라서 구하는 나머지는 x^2+x+3이다. 답 x^2+x+3

체크 082

다항식 $x^7+3x^5-5x^3+7$을 $x(x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$x^7+3x^5-5x^3+7$

$=x(x+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $7=c \quad \therefore c=7$

㉠의 양변에 $x=-1,\ c=7$을 대입하면

$8=a-b+7 \quad \therefore a-b=1$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=1,\ c=7$을 대입하면

$6=a+b+7 \quad \therefore a+b=-1$ …… ㉢

ⓛ, ⓒ을 연립하여 풀면

$a=0,\ b=-1$

따라서 $R(x)=-x+7$이므로

$R(3)=-3+7=4$ 답 4

체크 083

다항식 $f(2x+5)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 나머지 정리에 의하여

$f(2\times(-1)+5)=f(3)$

한편, 다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x-1)(x-3)Q(x)+2x-11$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$f(3)=2\times3-11=-5$

따라서 구하는 나머지는 -5이다. 답 -5

체크 084

$x^{100}+1$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 k라 하면

$x^{100}+1=(x-1)Q(x)+k$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $k=1^{100}+1=2$ ...... ㉡

이때 $Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 $Q(-1)$이므로 ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-1)^{100}+1=-2Q(-1)+2$ ($\because$ ㉡)

$2=-2Q(-1)+2$

$\therefore Q(-1)=0$ 답 0

체크 085

$f(x)=x^4+kx^3+2k^2x+2$라 하면 $f(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(-1)=0$

즉, $1-k-2k^2+2=0$이므로 $2k^2+k-3=0$

$(k-1)(2k+3)=0$

$\therefore k=1$ ($\because k>0$) 답 1

체크 086

$f(x)=2x^3-5x^2+ax+b$라 하면 $f(x)$가

$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$으로 나누어떨어지므로

인수정리에 의하여

$f(-1)=0,\ f(3)=0$

즉, $-2-5-a+b=0,\ 54-45+3a+b=0$에서

$-a+b=7,\ 3a+b=-9$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-4,\ b=3$

$\therefore b-a=3-(-4)=7$ 답 7

체크 087

다항식 x^3+2x^2+x+2를 일차식 $x+2$로 나누는 조립제법을 각 몫에 대하여 연속적으로 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr}
-2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\
 & & -2 & 0 & -2 \\ \hline
-2 & 1 & 0 & 1 & 0 \quad \cdots\cdots(\text{i}) \\
 & & -2 & 4 & \\ \hline
-2 & 1 & -2 & 5 & \quad \cdots\cdots(\text{ii}) \\
 & & -2 & & \\ \hline
 & 1 & -4 & & \quad \cdots\cdots(\text{iii})
\end{array}$$

즉, (i), (ii), (iii)의 순서로 식을 변형하면

x^3+2x^2+x+2

$=(x+2)(x^2+1)$ ...... (i)

$=(x+2)\{(x+2)(x-2)+5\}$ ...... (ii)

$=(x+2)[(x+2)\{(x+2)-4\}+5]$ ...... (iii)

$=(x+2)^3-4(x+2)^2+5(x+2)$

$=(x+2)^3+a(x+2)^2+b(x+2)+c$

따라서 $a=-4,\ b=5,\ c=0$이므로

$a+b+c=(-4)+5+0=1$ 답 1

[다른 풀이]

$(x+2)^2=1,\ x+2=1$을 동시에 만족시키는 x의 값은

$x=-1$

즉, $x^3+2x^2+x+2=(x+2)^3+a(x+2)^2+b(x+2)+c$의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-1)^3+2\times(-1)^2+(-1)+2$

$=(-1+2)^3+a\times(-1+2)^2+b\times(-1+2)+c$

$2=1+a+b+c$

$\therefore a+b+c=1$

체크 088

다항식 $f(x)=x^3-2x^2+4x-1$을 일차식 $x-1$로 나누는 조립제법을 각 몫에 대하여 연속적으로 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr}
1 & 1 & -2 & 4 & -1 \\
 & & 1 & -1 & 3 \\ \hline
1 & 1 & -1 & 3 & 2 \quad \cdots\cdots(\text{i}) \\
 & & 1 & 0 & \\ \hline
1 & 1 & 0 & 3 & \quad \cdots\cdots(\text{ii}) \\
 & & 1 & & \\ \hline
 & 1 & 1 & & \quad \cdots\cdots(\text{iii})
\end{array}$$

즉, (i), (ii), (iii)의 순서로 식을 변형하면

$f(x)$

$=(x-1)(x^2-x+3)+2$ …… (i)

$=(x-1)\{(x-1)x+3\}+2$ …… (ii)

$=(x-1)[(x-1)\{(x-1)+1\}+3]+2$ …… (iii)

$=(x-1)^3+(x-1)^2+3(x-1)+2$

$\therefore f(1.1)=(0.1)^3+(0.1)^2+3\times0.1+2$

$=2.311$

답 2.311

연습 문제 04

089

나머지정리에 의하여 $m=f(1)$, $n=f(3)$

즉, $m+n=72$에서 $f(1)+f(3)=72$이므로

$(1+3a+1)+(9+9a+1)=72$, $12a=60$

$\therefore a=5$

답 5

090

$x^5-5=(x^2-1)Q(x)+R(x)$에서

$R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$x^5-5=(x^2-1)Q(x)+ax+b$

$=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $-4=a+b$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $-6=-a+b$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-5$

$\therefore R(x)=x-5$

$\therefore R(15)=15-5=10$

답 10

091

다항식 $(2x^2+1)f(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$(2\times5^2+1)\times f(5)=51f(5)$

한편, $f(x)$를 $x^2-2x-15$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x^2-2x-15)Q(x)+2x-9$

$=(x+3)(x-5)Q(x)+2x-9$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=5$를 대입하면 $f(5)=1$

따라서 구하는 나머지는 $51f(5)=51\times1=51$

답 51

092

나머지정리에 의하여

$f(-2)=5$, $g(-2)=2$, $f(5)=2$, $g(5)=-2$

$f(x)g(x)$를 $x^2-3x-10$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)g(x)=(x^2-3x-10)Q(x)+ax+b$

$=(x+2)(x-5)Q(x)+ax+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$f(-2)g(-2)=-2a+b$에서 $5\times2=-2a+b$

$\therefore 2a-b=-10$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=5$를 대입하면

$f(5)g(5)=5a+b$에서 $2\times(-2)=5a+b$

$\therefore 5a+b=-4$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=6$

따라서 구하는 나머지는 $-2x+6$이다.

답 $-2x+6$

093

$(x^2-4)f(x)=2x^3+ax^2+2bx+b$에서

$(x+2)(x-2)f(x)=2x^3+ax^2+2bx+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하여 정리하면

$4a+5b=-16$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하여 정리하면

$4a-3b=16$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-4$

즉, ㉠에서

$(x+2)(x-2)f(x)=2x^3+x^2-8x-4$ …… ㉣

한편, 구하는 것은 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지이므로 나머지정리에 의하여 $f(1)$이다.

따라서 ㉣에 $x=1$을 대입하면

$(1+2)\times(1-2)\times f(1)=2+1-8-4$

$-3f(1)=-9$ $\quad\therefore f(1)=3$

답 3

094

$f(x)=(x-2)Q_1(x)+1$ …… ㉠

$f(x)=(x-8)Q_2(x)+7$ …… ㉡

$Q_1(x)+Q_2(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지는

$Q_1(5)+Q_2(5)$이므로 ㉠, ㉡의 양변에 $x=5$를 대입하면

$f(5)=3Q_1(5)+1$, $f(5)=-3Q_2(5)+7$

이때 $3Q_1(5)+1=-3Q_2(5)+7$에서

$3Q_1(5)+3Q_2(5)=6$

$\therefore Q_1(5)+Q_2(5)=2$

따라서 구하는 나머지는 2이다.

답 2

095

ㄱ. $f(x)=x^2-x+1$이라 하면

$f(1)=1^2-1+1=1\neq0$이므로 $f(x)=x^2-x+1$은 $x-1$을 인수로 갖지 않는다.

ㄴ. $g(x)=x^{10}-8x^2+7$이라 하면

$g(1)=1^{10}-8\times1^2+7=0$이므로

$g(x)=x^{10}-8x^2+7$은 $x-1$을 인수로 갖는다.

ㄷ. $h(x)=x^3+ax^2-ax-1$이라 하면

$h(1)=1^3+a\times1^2-a-1=0$이므로

$h(x)=x^3+ax^2-ax-1$은 $x-1$을 인수로 갖는다.

따라서 $x-1$을 인수로 갖는 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

096

$f(x)=x^2+2x+a$라 하면 $f(x)$가 $x-1$을 인수로 가지므로

$f(1)=0$

즉, $1+2+a=0$에서 $a=-3$

$g(x)=x^2+ax+b$라 하면 $g(x)$가 $x-1$을 인수로 가지므로

$g(1)=0$

즉, $1+a+b=0$에서 $b=2$ ($\because a=-3$)

따라서 두 다항식은 x^2+2x-3, x^2-3x+2이므로 두 다항식의 합은

$(x^2+2x-3)+(x^2-3x+2)=2x^2-x-1$

답 $2x^2-x-1$

097

$f(x)=x^2+(a+b)x+7$, $g(x)=x^2-x+ab$라 하자.

$f(x)$가 $x+1$을 인수로 가지므로 $f(-1)=0$

즉, $f(-1)=1-a-b+7=0$에서 $a+b=8$ …… ㉠

또한 $g(x)$가 $x-2$를 인수로 가지므로 $g(2)=0$

즉, $g(2)=4-2+ab=0$에서 $ab=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=8^2-2\times(-2)=68$ 답 68

098

나머지정리와 인수정리에 의하여

$f(-2)+g(-2)=0$, $f(-2)-g(-2)=4$

두 식을 연립하여 풀면

$f(-2)=2$, $g(-2)=-2$

ㄱ. $\frac{1}{2}f(-2)-(-2)^2=1-4=-3\neq0$이므로

$\frac{1}{2}f(x)-x^2$은 $x+2$로 나누어떨어지지 않는다.

ㄴ. $g(-2)-(-2)=-2+2=0$이므로 $g(x)-x$는 $x+2$로 나누어떨어진다.

ㄷ. $4\times(-2)^2+f(-2)g(-2)=16-4=12\neq0$이므로

$4x^2+f(x)g(x)$는 $x+2$로 나누어떨어지지 않는다.

따라서 $x+2$로 나누어떨어지는 것은 ㄴ이다.

답 ㄴ

099

$f(x)=x^3+2ax^2+4x-b$라 하면 $f(x)$가 $(x-2)^2$으로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(2)=0$

즉, $f(2)=2^3+2a\times2^2+4\times2-b=8a-b+16=0$이므로

$b=8a+16$ …… ㉠

㉠을 $f(x)$에 대입하면

$f(x)=x^3+2ax^2+4x-(8a+16)$

조립제법을 이용하여 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 2a & 4 & -(8a+16) \\ & & 2 & 4a+4 & 8a+16 \\ \hline & 1 & 2a+2 & 4a+8 & 0 \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-2)\{x^2+(2a+2)x+(4a+8)\}$

이때 $f(x)$는 $(x-2)^2$으로 나누어떨어지므로

$x^2+(2a+2)x+(4a+8)$ 역시 $x-2$로 나누어떨어진다.

$Q(x)=x^2+(2a+2)x+(4a+8)$이라 하면 $Q(2)=0$이므로

$2^2+(2a+2)\times2+(4a+8)=0$

$8a+16=0$ $\therefore a=-2$, $b=0$ ($\because$ ㉠)

$\therefore a-b=-2$ 답 -2

[다른 풀이]

항등식의 성질을 이용할 수도 있다.

x^3+2ax^2+4x-b를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을

$x+c$ (c는 상수)라 하면

$x^3+2ax^2+4x-b=(x-2)^2(x+c)$

$=(x^2-4x+4)(x+c)$

$=x^3+(-4+c)x^2+(4-4c)x+4c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$2a=-4+c$, $4=4-4c$, $-b=4c$

$\therefore c=0$, $a=-2$, $b=0$

$\therefore a-b=-2$

tip

세 다항식 A, B, C에 대하여 $A=B^2C$이면 다음을 활용할 수 있다.

- $A=B\times BC$ ⇨ A는 B로 나누어떨어진다.
- A를 B로 나눈 몫을 Q라 하면 $Q=BC$
  ⇨ Q도 B로 나누어떨어진다.

100

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$를 x로 나누었을 때의 나머지가 6이므로 나머지정리에 의하여

$f(0)=6 \qquad \therefore c=6$

$\therefore f(x)=x^3+ax^2+bx+6$ …… ㉠

$f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $4x+2$이므로 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x+1)^2Q(x)+4x+2$

즉, $f(x)-4x-2=(x+1)^2Q(x)$에서 ㉠에 의하여

$x^3+ax^2+bx+6-4x-2=(x+1)^2Q(x)$

$\therefore x^3+ax^2+(b-4)x+4=(x+1)^2Q(x)$ …… ㉡

㉡의 양변에 $x=-1$을 대입하여 정리하면

$a-b+7=0$

$\therefore b=a+7$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^3+ax^2+(a+3)x+4=(x+1)^2Q(x)$

이 식의 좌변을 $x+1$로 나누는 조립제법은 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & a & a+3 & 4 \\ & & -1 & -a+1 & -4 \\ \hline & 1 & a-1 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore x^3+ax^2+(a+3)x+4=(x+1)\{x^2+(a-1)x+4\}$

즉, 다항식 $x^2+(a-1)x+4$도 $x+1$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$(-1)^2+(a-1)\times(-1)+4=0$

$\therefore a=6,\ b=13$ ($\because$ ㉢)

이를 ㉠에 대입하면

$f(x)=x^3+6x^2+13x+6$

따라서 $f(x)$를 $x+4$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$f(-4)=(-4)^3+6\times(-4)^2+13\times(-4)+6$

$\quad=-14$ 답 -14

[다른 풀이]

항등식의 성질을 이용할 수도 있다.

$f(x)$를 x로 나누었을 때의 나머지가 6이므로

$f(0)=c=6$

$f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $x+m$이라 하면

$x^3+ax^2+bx+6=(x+1)^2(x+m)+4x+2$

$\qquad=x^3+(m+2)x^2+(2m+5)x+m+2$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=m+2,\ b=2m+5,\ 6=m+2$

$\therefore m=4,\ a=6,\ b=13$

따라서 $f(x)=x^3+6x^2+13x+6$이므로 구하는 나머지는

$f(-4)=-14$

101

$f(x)=x^3+3x^2-8x+7$이라 하고 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-1$로 나누는 조립제법을 각 몫에 대하여 연속적으로 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 3 & -8 & 7 \\ & & 1 & 4 & -4 \\ \hline 1 & 1 & 4 & -4 & \boxed{3} \\ & & 1 & 5 & \\ \hline 1 & 1 & 5 & \boxed{1} & \\ & & 1 & & \\ \hline & 1 & \boxed{6} & & \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-1)(x^2+4x-4)+3$

$\quad=(x-1)\{(x-1)(x+5)+1\}+3$

$\quad=(x-1)[(x-1)\{(x-1)+6\}+1]+3$

$\quad=(x-1)^3+6(x-1)^2+(x-1)+3$

$\quad=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$

즉, $a=6,\ b=1,\ c=3$이므로

$g(x)=ax^2-bx-c=6x^2-x-3$이라 하면 $g(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$g(1)=6-1-3=2$ 답 2

102

$f(x)$를 $(x-1)^2(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ ($a,\ b,\ c$는 상수)라 하면

$f(x)=(x-1)^2(x+1)Q(x)+ax^2+bx+c$ …… ㉠

$f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x+1$이므로

㉠에서 $R(x)=ax^2+bx+c$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x+1$이다.

즉, $R(x)=a(x-1)^2+x+1$이므로 이를 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x-1)^2(x+1)Q(x)+a(x-1)^2+x+1$

한편, $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 4이므로

$f(-1)=4$

$a\times(-1-1)^2+(-1)+1=4 \qquad \therefore a=1$

따라서 구하는 나머지는

$R(x)=(x-1)^2+x+1=x^2-x+2$ 답 x^2-x+2

103

$f(2)=2,\ f(3)=3,\ f(5)=5$에서

$f(2)-2=0,\ f(3)-3=0,\ f(5)-5=0$

이때 $g(x)=f(x)-x$라 하면 인수정리에 의하여 삼차의 다항식 $g(x)$는 $x-2,\ x-3,\ x-5$를 인수로 갖는다.

즉, $g(x)$의 x^3의 계수를 a (a는 상수)라 하면

$g(x)=a(x-2)(x-3)(x-5)$이므로

$f(x)=a(x-2)(x-3)(x-5)+x$

한편, $f(4)=8$이므로 위의 식에 $x=4$를 대입하면

$8=a\times(4-2)\times(4-3)\times(4-5)+4$

$8=-2a+4 \qquad \therefore a=-2$

따라서 $f(x)=-2(x-2)(x-3)(x-5)+x$이므로

$f(1)=(-2)\times(1-2)\times(1-3)\times(1-5)+1$

$=16+1=17$

답 17

104

$2^{21}=(2^3)^7=8^7$에서 $8=x$라 하면 9는 $9=x+1$로 나타낼 수 있다.

x^7을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$x^7=(x+1)Q(x)+R \qquad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-1)^7=(-1+1)\times Q(-1)+R \qquad \therefore R=-1$

$\therefore x^7=(x+1)Q(x)-1$

다시 $x=8$을 위의 식에 대입하면

$8^7=(8+1)Q(8)-1$

$=9Q(8)-1$

$=9Q(8)-9+9-1$

$=9\{Q(8)-1\}+8$

따라서 2^{21}을 9로 나누었을 때의 나머지는 8이다.

답 8

tip

(1) 2^{21}에서 $2=x$로 놓으면 $9=x+7$ 또는 $9=4x+1$ 등과 같이 나타낼 수 있으므로 다항식의 나눗셈으로 바꿀 때 계산이 복잡해진다. 즉, 풀이에서와 같이 나누어지는 수 2^{21}을 나누는 수 9와 비슷한 수를 밑으로 하는 거듭제곱으로 표현하는 것이 좋다.

(2) 자연수를 자연수로 나누었을 때의 나머지는 음수가 될 수 없음에 주의한다.
즉, x^7을 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 -1이지만 2^{21}을 9로 나누었을 때의 나머지는 9보다 작은 음이 아닌 정수로 나타내야 한다.

3 인수분해

08 인수분해

체크 105

(1) (주어진 식)$=a^3(27a^3-64)=a^3\{(3a)^3-4^3\}$

$=a^3(3a-4)\{(3a)^2+3a\times4+4^2\}$

$=a^3(3a-4)(9a^2+12a+16)$

(2) (주어진 식)$=ab^2(a^3-b^3)$

$=ab^2(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(3) (주어진 식)

$=(x-2y)^3+(3y)^3$

$=\{(x-2y)+3y\}\{(x-2y)^2-(x-2y)\times3y+(3y)^2\}$

$=(x+y)(x^2-7xy+19y^2)$

(4) (주어진 식)

$=(x^3)^2-(y^3)^2=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$

$=(x+y)(x-y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$

(5) (주어진 식)

$=(-a)^2+(2b)^2+(3c)^2+2\times(-a)\times2b+2\times2b\times3c$
$+2\times3c\times(-a)$

$=(-a+2b+3c)^2=(a-2b-3c)^2$

(6) (주어진 식)

$=x^3+(-y)^3+z^3-3\times x\times(-y)\times z$

$=\{x+(-y)+z\}\{x^2+(-y)^2+z^2$
$-x\times(-y)-(-y)\times z-z\times x\}$

$=(x-y+z)(x^2+y^2+z^2+xy+yz-zx)$

답 풀이 참조

체크 106

(주어진 식)$=\{(2x+1)-(x-1)\}^3$

$=(x+2)^3$

답 $(x+2)^3$

체크 107

(1) $(x^2-2x-3)^2-x^2+2x+3$

$=(x^2-2x-3)^2-(x^2-2x-3)$

$x^2-2x-3=X$로 놓으면

$X^2-X=X(X-1)$

$=(x^2-2x-3)(x^2-2x-4)$

$=(x-3)(x+1)(x^2-2x-4)$

(2) (주어진 식)

$=\{(x-2)(x+3)\}\{(x-1)(x+2)\}-60$

$=(x^2+x-6)(x^2+x-2)-60$

이때 $x^2+x=X$로 놓으면

$(X-6)(X-2)-60$
$=X^2-8X-48$
$=(X-12)(X+4)$
$=(x^2+x-12)(x^2+x+4)$
$=(x-3)(x+4)(x^2+x+4)$

답 (1) $(x-3)(x+1)(x^2-2x-4)$
(2) $(x-3)(x+4)(x^2+x+4)$

체크 **108**

$x^2+3x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=X(X-4)+3=X^2-4X+3$
$=(X-1)(X-3)$
$=(x^2+3x-1)(x^2+3x-3)$
$=(x^2+mx+n)(x^2+3x-3)$

따라서 $m=3$, $n=-1$이므로

$m+n=3+(-1)=2$

답 2

체크 **109**

(1) $a^2=X$로 놓으면

(주어진 식)$=X^2-X-6$
$=(X-3)(X+2)$
$=(a^2-3)(a^2+2)$

(2) $a^2=X$로 놓으면

(주어진 식)$=3X^2-X-4$
$=(3X-4)(X+1)$
$=(3a^2-4)(a^2+1)$

(3) (주어진 식)$=(x^4-6x^2+9)-x^2$
$=(x^2-3)^2-x^2$
$=(x^2+x-3)(x^2-x-3)$

(4) (주어진 식)$=(x^4+16x^2+64)-16x^2$
$=(x^2+8)^2-(4x)^2$
$=(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$

답 풀이 참조

체크 **110**

(주어진 식)$=(x^4+6x^2y^2+9y^4)-4x^2y^2$
$=(x^2+3y^2)^2-(2xy)^2$
$=(x^2+2xy+3y^2)(x^2-2xy+3y^2)$
$=(x^2+axy+3y^2)(x^2+bxy+3y^2)$

따라서 $a=2$, $b=-2$ 또는 $a=-2$, $b=2$이므로

$ab=-4$

답 -4

체크 **111**

$x^4-13x^2+4=(x^4-4x^2+4)-9x^2$
$=(x^2-2)^2-(3x)^2$
$=(x^2+3x-2)(x^2-3x-2)$

따라서 $f(x)=x^2+3x-2$, $g(x)=x^2-3x-2$라 하면

$f(2)+g(2)=(2^2+3\times2-2)+(2^2-3\times2-2)$
$=4$

답 4

tip

$x^2=X$로 치환한 식 X^2+aX+b가
(1) 인수분해되는 경우에는 인수분해 공식을 적용한다.
(2) 인수분해되지 않는 경우에는 이차항을 적당히 분리하여
A^2-B^2 꼴로 변형한 다음 인수분해한다.

체크 **112**

$x^2-2y^2+xy-x+7y-6$
$=x^2+(y-1)x-(2y^2-7y+6)$
$=x^2+(y-1)x-(2y-3)(y-2)$
$=(x+2y-3)(x-y+2)$

이때 $a>0$이므로 $a=2$, $b=-3$, $c=-1$, $d=2$

$\therefore\ ad-bc=2\times2-(-3)\times(-1)=1$

답 1

체크 **113**

$<x, y, z>+<y, z, x>+<z, x, y>+2xyz$
$=x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+2xyz$
$=x^2(y+z)+x(y^2+2yz+z^2)+yz(y+z)$
$=x^2(y+z)+x(y+z)^2+yz(y+z)$
$=(y+z)\{x^2+(y+z)x+yz\}$
$=(x+y)(y+z)(z+x)$

답 $(x+y)(y+z)(z+x)$

09 인수정리를 이용한 인수분해

체크 **114**

(1) $f(x)=2x^3-3x^2-11x+6$이라 하면

$f(-2)=0$

다음과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 2 & -3 & -11 & 6 \\ & & -4 & 14 & -6 \\ \hline & 2 & -7 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore\ 2x^3-3x^2-11x+6=(x+2)(2x^2-7x+3)$
$=(x+2)(2x-1)(x-3)$

(2) $f(x)=3x^3-4x^2-5x+2$라 하면

$f(-1)=0$

다음과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 3 & -4 & -5 & 2 \\ & & -3 & 7 & -2 \\ \hline & 3 & -7 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore 3x^3-4x^2-5x+2=(x+1)(3x^2-7x+2)$

$=(x+1)(3x-1)(x-2)$

(3) $f(x)=x^4+x^3-5x^2-4x+4$라 하면

$f(2)=0,\ f(-2)=0$

다음과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 1 & -5 & -4 & 4 \\ & & 2 & 6 & 2 & -4 \\ \hline -2 & 1 & 3 & 1 & -2 & \boxed{0} \\ & & -2 & -2 & 2 & \\ \hline & 1 & 1 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore x^4+x^3-5x^2-4x+4=(x-2)(x+2)(x^2+x-1)$

(4) $f(x)=x^4+2x^3-7x^2-8x+12$라 하면

$f(1)=0, f(2)=0$

다음과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 2 & -7 & -8 & 12 \\ & & 1 & 3 & -4 & -12 \\ \hline 2 & 1 & 3 & -4 & -12 & \boxed{0} \\ & & 2 & 10 & 12 & \\ \hline & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore x^4+2x^3-7x^2-8x+12$

$=(x-1)(x-2)(x^2+5x+6)$

$=(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)$

답 풀이 참조

체크 115

$f(x)=x^3+ax^2-5x-6$이라 하면 $f(x)$가 $x+1$을 인수로 가지므로 $f(-1)=0$이다.

즉, $(-1)^3+a\times(-1)^2-5\times(-1)-6=0$에서

$a=2$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2-5x-6$이고 $f(-1)=0$이므로 다음과 같이 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2 & -5 & -6 \\ & & -1 & -1 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x+1)(x^2+x-6)$

$=(x+1)(x+3)(x-2)$

답 $a=2$, $(x+1)(x+3)(x-2)$

체크 116

(1) $13=x$로 놓으면

(주어진 식)$=\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}$

$=\dfrac{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{x^2+x+1}$

$=x^2-x+1$

$=13^2-13+1$

$=157$

(2) $15=x$로 놓으면

$15\times16\times17\times18+1$

$=x(x+1)(x+2)(x+3)+1$

$=\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}+1$

$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1$

이때 $x^2+3x=X$로 놓으면

$15\times16\times17\times18+1=X(X+2)+1$

$=X^2+2X+1$

$=(X+1)^2$

$=(x^2+3x+1)^2$

$=(15^2+3\times15+1)^2$

$=271^2$

$\therefore$ (주어진 식)$=\sqrt{271^2}=271$

답 (1) 157 (2) 271

체크 117

$x+y+z=2$, $xy+yz+zx=-5$이므로

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

$=2^2-2\times(-5)=14$

$\therefore x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$=2\times\{14-(-5)\}=38$

답 38

연습 문제 05

118

① $x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$

② $x^2-(y-z)^2=(x+y-z)(x-y+z)$

③ $xy+y^2-xz-yz=y(x+y)-z(x+y)$

$=(x+y)(y-z)$

④ $x^3-3x^2-4x=x(x^2-3x-4)$

$=x(x+1)(x-4)$

따라서 인수분해가 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

119

$8x^3-36x^2+54x-27$

$=(2x)^3-3\times(2x)^2\times3+3\times2x\times3^2-3^3$

$=(2x-3)^3=(mx+n)^3$

따라서 $m=2$, $n=-3$이므로

$m-n=2-(-3)=5$ 답 5

120

$x^2-x=X$로 놓으면

$(x^2-x)^2-6x^2+6x+8$

$=(x^2-x)^2-6(x^2-x)+8$

$=X^2-6X+8=(X-2)(X-4)$

$=(x^2-x-2)(x^2-x-4)$

$=(x+1)(x-2)(x^2-x-4)$

$=(x+a)(x+b)(x^2+cx+d)$

$\therefore a+b+c+d=1+(-2)+(-1)+(-4)$

$=-6$ 답 -6

121

(주어진 식)

$=\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}+k$

$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+k$

이때 $x^2+5x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=(X+4)(X+6)+k$

$=X^2+10X+(24+k)$

주어진 식이 x에 대한 완전제곱식이 되려면 위의 식이 X에 대한 완전제곱식이 되어야 하므로

$24+k=\left(\frac{10}{2}\right)^2=25 \qquad \therefore k=1$ 답 1

tip

(　)(　)(　)(　)$+k$ 꼴의 다항식은 상수항끼리의 합 또는 곱이 같아지도록 일차식을 2개씩 묶어 공통부분을 찾는다.

122

(주어진 식)

$=2x^2-5yx+(3y^2+y-2)$

$=2x^2-5y\times x+(3y-2)(y+1)$

$=(2x-3y+2)(x-y-1)$

따라서 두 일차식은 $2x-3y+2$, $x-y-1$이므로

$a=2$, $b=-3$, $c=1 \qquad \therefore a+b+c=2+(-3)+1=0$

답 0

123

(주어진 식)$=x^2y^2-x^2-y^2-4xy+1$

$=(x^2y^2-2xy+1)-(x^2+2xy+y^2)$

$=(xy-1)^2-(x+y)^2$

$=(xy+x+y-1)(xy-x-y-1)$

답 $(xy+x+y-1)(xy-x-y-1)$

124

$x+3y-z=0$에서 $z=x+3y$

주어진 식에 $z=x+3y$를 대입하면

$z^2-x^2-3xy=(x+3y)^2-x(x+3y)$

$=(x+3y)\{(x+3y)-x\}$

$=3y(x+3y)$ 답 ③

tip

$x+3y-z=0$에서 x, y, z 중 어느 하나의 문자에 대하여 정리한 후 대입하여 푼다.

125

주어진 식의 분자를 인수분해하면

$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=a^2(b-c)+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2$

$=a^2(b-c)-(b^2-c^2)a+bc(b-c)$

$=a^2(b-c)-(b-c)(b+c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)$

$\therefore \frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=-1$ 답 -1

126

$x^3+y^3+z^3=3xyz$에서

$x^3+y^3+z^3-3xyz=0$

좌변을 인수분해하면

$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$

이때 $x>0$, $y>0$, $z>0$이므로 $x+y+z>0$

즉, $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$이므로

$\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$

$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$

$\therefore x=y,\ y=z,\ z=x$

따라서 $x^2+y^2+z^2=3x^2$이므로

$3x^2=27 \quad \therefore x=3\ (\because x>0)$

$\therefore x+y+z=3x=9$ 답 9

127

(1) $(\text{주어진 식})=x^2\left(2x^2+3x-5+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)$

$=x^2\left\{2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-5\right\}$

$=x^2\left\{2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-9\right\}$

이때 $x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$(\text{주어진 식})=x^2(2X^2+3X-9)$

$=x^2(2X-3)(X+3)$

$=x^2\left(2x+\frac{2}{x}-3\right)\left(x+\frac{1}{x}+3\right)$

$=(2x^2-3x+2)(x^2+3x+1)$

(2) $(\text{주어진 식})=x^2\left(x^2+2x-1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

$=x^2\left\{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x-\frac{1}{x}\right)-1\right\}$

$=x^2\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x-\frac{1}{x}\right)+1\right\}$

이때 $x-\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$(\text{주어진 식})=x^2(X^2+2X+1)$

$=x^2(X+1)^2$

$=x^2\left(x-\frac{1}{x}+1\right)^2$

$=(x^2+x-1)^2$

답 (1) $(2x^2-3x+2)(x^2+3x+1)$
(2) $(x^2+x-1)^2$

128

(주어진 식)

$=a^3+(b+c)a^2+(b^2-c^2)a+(b^3-bc^2+b^2c-c^3)$

$=\{a^3+(b+c)a^2\}+\{(b^2-c^2)a+b(b^2-c^2)+c(b^2-c^2)\}$

$=a^2(a+b+c)+(b^2-c^2)(a+b+c)$

$=(a+b+c)(a^2+b^2-c^2)$

이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로

$a>0,\ b>0,\ c>0 \quad \therefore a+b+c>0$

즉, $(a+b+c)(a^2+b^2-c^2)=0$이 성립하기 위해서는

$a^2+b^2-c^2=0$이어야 한다.

$\therefore a^2+b^2=c^2$

따라서 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

답 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

tip
한 문자에 대하여 내림차순으로 정리하고 공통인수로 묶는다.

129

$f(x)=2x^3+x^2-22x+24$라 하면 $f(x)$가 $x-2$를 인수로 가지므로 $f(2)=0$

다음과 같이 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

2	2	1	-22	24
		4	10	-24
	2	5	-12	0

$\therefore f(x)=(x-2)(2x^2+5x-12)$

$=(x-2)(x+4)(2x-3)$

$=(x-2)(x+a)(2x+b)$

이때 a, b는 정수이므로 $a=4$, $b=-3$

$\therefore a+b=4+(-3)=1$ 답 1

130

$f(x)=x^4+2x^3-9x^2-2x+8$이라 하면

$f(1)=0,\ f(-1)=0$

다음과 같이 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	2	-9	-2	8
		1	3	-6	-8
-1	1	3	-6	-8	0
		-1	-2	8	
	1	2	-8	0	

$\therefore f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+2x-8)$

$=(x-1)(x+1)(x+4)(x-2)$

따라서 $f(x)$의 인수가 아닌 것은 ④ $x+2$이다. 답 ④

[다른 풀이]

인수정리를 이용할 수도 있다.

$f(x)=x^4+2x^3-9x^2-2x+8$이라 할 때, $f(\alpha)=0$을 만족시키는 α에 대하여 $x-\alpha$는 $f(x)$의 인수이다.

① $f(2)=2^4+2\times2^3-9\times2^2-2\times2+8$

$=16+16-36-4+8=0$

② $f(1)=1^4+2\times1^3-9\times1^2-2\times1+8$
$\quad\quad=1+2-9-2+8=0$

③ $f(-1)$
$=(-1)^4+2\times(-1)^3-9\times(-1)^2-2\times(-1)+8$
$=1-2-9+2+8=0$

④ $f(-2)$
$=(-2)^4+2\times(-2)^3-9\times(-2)^2-2\times(-2)+8$
$=16-16-36+4+8=-24\neq0$

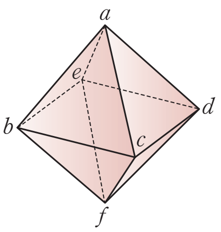
⑤ $f(-4)$
$=(-4)^4+2\times(-4)^3-9\times(-4)^2-2\times(-4)+8$
$=256-128-144+8+8=0$

따라서 $f(x)$의 인수가 아닌 것은 ④ $x+2$이다.

tip
인수정리
다항식 $f(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $f(\alpha)=0$이다.

131
다항식 x^2+2x-n이 $(x-a)(x+b)$로 인수분해되므로
$x^2+2x-n=(x-a)(x+b)$
$\quad\quad\quad=x^2+(-a+b)x-ab$
$\therefore -a+b=2,\ ab=n$
이때 a, b는 자연수이고 $b=a+2$, $ab\leq500$이므로 a, b의 순서쌍 (a, b)로 가능한 것은
$(1, 3), (2, 4), (3, 5), \cdots, (21, 23)$
따라서 구하는 자연수 n의 개수는 21이다. **답** 21

132
오른쪽 그림과 같이 각 꼭짓점에 적힌 숫자를 a, b, c, d, e, f라고 하면 각 면에 적힌 수는 각각 abc, acd, ade, abe, bcf, cdf, def, bef이므로 이들의 합은



$abc+acd+ade+abe+bcf$
$\quad+cdf+def+bef$
$=a(bc+cd+de+be)+f(bc+cd+de+be)$
$=(a+f)(bc+cd+de+be)$
$=(a+f)\{c(b+d)+e(b+d)\}$
$=(a+f)(b+d)(c+e)$
$=105$
이때 $105=3\times5\times7$이고 a, b, c, d, e, f 중 어느 두 수의 합도 2 이상이므로
$a+b+c+d+e+f=3+5+7=15$ **답** 15

133
구하는 입체의 부피는 원래의 정육면체의 부피에서 구멍 부분의 부피를 뺀 것과 같다.
또한 구멍 부분의 부피는 밑면이 한 변의 길이가 y인 정사각형이고 높이가 x인 정사각기둥 3개의 부피에서 중복된 부분인 한 모서리의 길이가 y인 정육면체의 부피를 두 번 뺀 것과 같다.
구멍 부분의 부피가 $3xy^2-2y^3$이므로 구하는 입체의 부피는
$x^3-(3xy^2-2y^3)=x^3-3xy^2+2y^3$
이를 x에 대한 다항식으로 보고 $f(x)=x^3-3y^2x+2y^3$이라 하면
$f(y)=y^3-3y^2\times y+2y^3=0$
즉, $f(x)$는 $x-y$를 인수로 가지므로 다음과 같이 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} y & 1 & 0 & -3y^2 & 2y^3 \\ & & y & y^2 & -2y^3 \\ \hline & 1 & y & -2y^2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-y)(x^2+xy-2y^2)$
$\quad\quad=(x-y)(x+2y)(x-y)$
$\quad\quad=(x-y)^2(x+2y)$ **답** ①

134
$f(n)=n^3+7n^2+14n+8$이라 하면
$f(-1)=-1+7-14+8=0$
다음과 같이 조립제법을 이용하여 $f(n)$을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 7 & 14 & 8 \\ & & -1 & -6 & -8 \\ \hline & 1 & 6 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(n)=(n+1)(n^2+6n+8)$
$\quad\quad=(n+1)(n+2)(n+4)$
한편, $n^2+4n+3=(n+1)(n+3)$
즉, 한 변의 길이가 $n+1$인 정사각형 모양의 타일이 가로 방향으로 $(n+2)(n+4)$개, 세로 방향으로 $(n+3)$개 필요하다.
따라서 필요한 타일의 개수는 $(n+2)(n+3)(n+4)$이다.
답 ⑤

1 복소수

10 복소수

체크 135

주어진 등식의 좌변을 전개하면

$2x+xi+3y+yi+1-i=0$

$\therefore (2x+3y+1)+(x+y-1)i=0$

이때 $2x+3y+1$, $x+y-1$이 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2x+3y+1=0$, $x+y-1=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=4$, $y=-3$

$\therefore x-y=4-(-3)=7$

답 7

체크 136

(1) $2-\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})+0i$이므로 $\overline{2-\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$

(2) $\overline{\frac{3}{4}i+\frac{5}{6}}=\overline{\frac{5}{6}+\frac{3}{4}i}=\frac{5}{6}-\frac{3}{4}i$

(3) $-5i=0-5i$이므로 $\overline{-5i}=5i$

(4) $\overline{2+i}=2-i$이므로 $2-i$의 켤레복소수는 $\overline{2-i}=2+i$

답 (1) $2-\sqrt{3}$ (2) $\frac{5}{6}-\frac{3}{4}i$ (3) $5i$ (4) $2+i$

11 복소수의 연산

체크 137

(1) $(3-2i)-\overline{(2-i)}=(3-2i)-(2+i)=1-3i$

(2) $(3+2i)(5-i)=(15+2)+(-3+10)i=17+7i$

(3) $(2+\sqrt{3}i)^2=4+4\sqrt{3}i-3=1+4\sqrt{3}i$

(4) $(3+2\sqrt{2}i)^2(3-2\sqrt{2}i)^2=\{(3+2\sqrt{2}i)(3-2\sqrt{2}i)\}^2$
$=(9+8)^2=289$

(5) $\frac{1+3i}{-2i}=\frac{(1+3i)i}{-2i^2}=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$

(6) $\frac{4-i}{3+4i}+\frac{1+i}{3-4i}=\frac{(4-i)(3-4i)+(1+i)(3+4i)}{(3+4i)(3-4i)}$
$=\frac{(8-19i)+(-1+7i)}{25}$
$=\frac{7}{25}-\frac{12}{25}i$

답 풀이 참조

체크 138

$z=x^2+(2+i)x+3-i=(x^2+2x+3)+(x-1)i$

복소수 z가 실수가 되려면

$x-1=0 \qquad \therefore x=1$

답 1

체크 139

$z=(1-2i)(k+i)+i(k+i)^2$
$=k+2+(1-2k)i+(k^2+2ki+i^2)i$
$=(-k+2)+(k^2-2k)i$

이때 z^2이 실수가 되려면 z는 실수 또는 순허수이어야 한다.

(i) z가 실수일 때

$k^2-2k=0$, $k(k-2)=0 \qquad \therefore k=0$ 또는 $k=2$

(ii) z가 순허수일 때

$-k+2=0 \qquad \therefore k=2$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$0+2=2$

답 2

체크 140

(1) $1+i+i^2+i^3=1+i-1-i=0$이므로

$1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{2002}$
$=(1+i+i^2+i^3)+i^4(1+i+i^2+i^3)+\cdots$
$+i^{1996}(1+i+i^2+i^3)+i^{2000}+i^{2001}+i^{2002}$
$=i^{2000}+i^{2001}+i^{2002}$
$=(i^4)^{500}+(i^4)^{500}\times i+(i^4)^{500}\times i^2$
$=1+i-1=i$

(2) $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}=\frac{1}{i}+\frac{1}{-1}+\frac{1}{-i}+\frac{1}{1}$
$=\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1=0$

$\therefore \frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}+\cdots+\frac{1}{i^{12}}$
$=\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\frac{1}{i^4}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)$
$+\frac{1}{i^8}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)$
$=0$

답 (1) i (2) 0

체크 141

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$에서

$z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3=i^3=-i$이므로

$\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}=\frac{1}{-i}+\frac{1}{(-i)^2}+\frac{1}{(-i)^3}+\frac{1}{(-i)^4}$
$=\frac{1}{-i}+\frac{1}{-1}+\frac{1}{i}+\frac{1}{1}$
$=-\frac{1}{i}-1+\frac{1}{i}+1=0$

$\therefore \frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\cdots+\frac{1}{z^{30}}$

$=\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}\right)+\frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}\right)+\cdots$

$+\frac{1}{z^{24}}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}\right)+\frac{1}{z^{29}}+\frac{1}{z^{30}}$

$=\frac{1}{z^{29}}+\frac{1}{z^{30}}=\frac{1}{(-i)^{29}}+\frac{1}{(-i)^{30}}=-\frac{1}{i}-1$

$=-1+i$ 답 $-1+i$

체크 142

$x=-2+\sqrt{5}i$에서 $x+2=\sqrt{5}i$

양변을 제곱하면 $x^2+4x+4=-5$

$\therefore x^2+4x+9=0$

$\therefore x^4+4x^3+9x^2+x+2=x^2(x^2+4x+9)+x+2$

$=x+2$ ($\because x^2+4x+9=0$)

$=(-2+\sqrt{5}i)+2$

$=\sqrt{5}i$ 답 $\sqrt{5}i$

체크 143

$x=\frac{2}{1+i}=1-i$에서 $x-1=-i$

양변을 제곱하면 $x^2-2x+1=-1$

$\therefore x^2-2x+2=0$

$\therefore x^3-2x^2+2=x(x^2-2x+2)-2x+2$

$=-2x+2$ ($\because x^2-2x+2=0$)

$=-2(1-i)+2$

$=2i$ 답 $2i$

체크 144

$x=\overline{\left(\frac{2i}{1-i}\right)}=\overline{-1+i}=-1-i$에서

$x+1=-i$

양변을 제곱하면 $x^2+2x+1=-1$

$\therefore x^2+2x+2=0$

$\therefore 2x^3+4x^2+3x+7=2x(x^2+2x+2)-x+7$

$=-x+7$ ($\because x^2+2x+2=0$)

$=-(-1-i)+7$

$=8+i$ 답 $8+i$

체크 145

$\alpha\overline{\alpha}-\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}=\alpha(\overline{\alpha}-\overline{\beta})-\beta(\overline{\alpha}-\overline{\beta})$

$=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})$

$=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})$

이때 $\alpha=5+\sqrt{2}i$, $\beta=5-\sqrt{2}i$이므로

$\alpha-\beta=(5+\sqrt{2}i)-(5-\sqrt{2}i)=2\sqrt{2}i$

$\overline{\alpha-\beta}=\overline{2\sqrt{2}i}=-2\sqrt{2}i$

$\therefore$ (주어진 식)$=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})$

$=2\sqrt{2}i\times(-2\sqrt{2}i)=8$ 답 8

체크 146

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$

이때 $\overline{z}+5=(1-i)z+\overline{2+i}+z$에서

$a-bi+5=(1-i)(a+bi)+2-i+a+bi$

$(a+5)-bi=(2a+b+2)+(-a+2b-1)i$

a, b가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a+5=2a+b+2$, $-b=-a+2b-1$

각 식을 정리하면 $a+b=3$, $a-3b=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$

따라서 $z=2+i$이므로 $\overline{z}=2-i$이다. 답 $2-i$

체크 147

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$

$z+\overline{z}=10$에서

$(a+bi)+(a-bi)=10$, $2a=10$ $\therefore a=5$

$\therefore z=5+bi$, $\overline{z}=5-bi$

또한 $z\overline{z}=169$에서

$(5+bi)(5-bi)=169$, $25+b^2=169$, $b^2=144$

$\therefore b=\pm12$

따라서 구하는 복소수 z는 $5+12i$ 또는 $5-12i$이다.

답 $5\pm12i$

12 음수의 제곱근

체크 148

(1) $\sqrt{-2}\sqrt{6}+\frac{\sqrt{-48}}{\sqrt{-4}}=2\sqrt{3}+2\sqrt{3}i$

(2) $(3-\sqrt{-4})(\sqrt{-9}+2)-\sqrt{-2}\sqrt{-8}$

$=(3-2i)(3i+2)+4=16+5i$

(3) $\sqrt{-2}\sqrt{-3}\sqrt{-6}+\frac{\sqrt{-9}+1}{2-\sqrt{-1}}$

$=\sqrt{2}i\sqrt{3}i\sqrt{6}i+\frac{3i+1}{2-i}$

$=-6i+\frac{-1+7i}{5}=-\frac{1}{5}-\frac{23}{5}i$

답 (1) $2\sqrt{3}+2\sqrt{3}i$ (2) $16+5i$ (3) $-\frac{1}{5}-\frac{23}{5}i$

체크 **149**

$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이므로

$a<0,\ b<0 \qquad \therefore\ a+b<0$

$\therefore\ \sqrt{(a+b)^2}+\sqrt{a^2}-|b|=|a+b|+|a|-|b|$

$=-(a+b)-a-(-b)$

$=-2a$ 답 $-2a$

연습 문제 06

150

⑤ a, b가 실수라는 조건이 없으므로 $a=1$, $b=i$인 경우도 가능하다.

이때 $a+bi=1+i^2=1+(-1)=0$이지만

$a\neq0,\ b\neq0$이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

151

$\alpha◎\beta=\alpha+\beta-\alpha\beta$이므로

$(5+2i)◎(1+7i)$

$=(5+2i)+(1+7i)-(5+2i)(1+7i)$

$=6+9i-(-9+37i)=15-28i$

따라서 구하는 허수부분은 -28이다. 답 -28

152

$a(a+ai+1)-(2+i)=z$라 하면

$z=(a^2+a-2)+(a^2-1)i$ …… ㉠

복소수 z에 대하여 z^2이 0이 아닌 실수가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) z^2이 양의 실수일 때

z는 0이 아닌 실수이어야 하므로 ㉠에서

$a^2+a-2\neq0,\ a^2-1=0$

즉, $(a+2)(a-1)\neq0$, $(a+1)(a-1)=0$을 동시에 만족시키는 a의 값은

$a=-1$

(ii) z^2이 음의 실수일 때

z는 순허수이어야 하므로 ㉠에서

$a^2+a-2=0,\ a^2-1\neq0$

즉, $(a+2)(a-1)=0$, $(a+1)(a-1)\neq0$을 동시에 만족시키는 a의 값은

$a=-2$

(i), (ii)에서 $a=-1$ 또는 $a=-2$

따라서 모든 실수 a의 제곱의 합은

$(-1)^2+(-2)^2=5$ 답 5

153

$\dfrac{2a}{3+i}-\dfrac{b}{3-i}=\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{2}i$에서

$\dfrac{2a(3-i)-b(3+i)}{(3+i)(3-i)}=\dfrac{6-5i}{10}$,

$\dfrac{(6a-3b)-(2a+b)i}{10}=\dfrac{6-5i}{10}$

$(6a-3b)-(2a+b)i=6-5i$

a, b가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$6a-3b=6,\ 2a+b=5$

두 식을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{7}{4}$, $b=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ a+b=\dfrac{7}{4}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{13}{4}$ 답 $\dfrac{13}{4}$

154

$z=a+bi$ (a, b는 실수)이므로

$z^2=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi=10i$

a, b가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=0,\ 2ab=10 \qquad \therefore\ ab=5$

이때

$(a^2+b^2)^2=(a^2-b^2)^2+4a^2b^2=0+4\times5^2=100$

이고 a, b는 모두 실수이므로 $a^2\geq0,\ b^2\geq0$

$\therefore\ a^2+b^2=\sqrt{100}=10$ 답 10

155

(1) $z^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^2=\dfrac{2}{-2i}=\dfrac{1}{-i}=i$이므로

$z^{1010}=(z^2)^{505}=i^{505}=(i^4)^{126}\times i=i$

(2) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{24n}+\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{16n}=\left\{\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{12n}+\left\{\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{8n}$

$=i^{12n}+(-i)^{8n}=1+1=2$

답 (1) i (2) 2

156

$z_1=1-i$

$z_2=(1+i)z_1$

$z_3=(1+i)z_2=(1+i)(1+i)z_1=(1+i)^2z_1$

$z_4=(1+i)z_3=(1+i)(1+i)^2z_1=(1+i)^3z_1$

⋮

$z_n=(1+i)z_{n-1}=(1+i)^{n-1}z_1$ (단, n은 2 이상의 자연수)

$\therefore\ z_{20}=(1+i)^{19}z_1=(1+i)^{19}(1-i)$ …… ㉠

이때 $(1+i)^2=1+2i-1=2i$이므로 ㉠에서

$z_{20}=\{(1+i)^2\}^9(1+i)(1-i)=(2i)^9(1+i)(1-i)$
$=2^9\times i^9\times 2=2^{10}\times(i^4)^2\times i=1024i$ 답 $1024i$

157

$i+i^2+i^3+i^4=0$이므로

$$z=\frac{(i+i^2+i^3+i^4)+\cdots+(i^{41}+i^{42}+i^{43}+i^{44})+i^{45}}{1-i}$$
$$=\frac{i^{45}}{1-i}=\frac{(i^4)^{11}\times i}{1-i}=\frac{i}{1-i}$$
$$=\frac{i(1+i)}{2}=\frac{-1+i}{2}$$

$2z+1=i$의 양변을 제곱하면

$4z^2+4z+1=-1$ $\therefore 2z^2+2z+1=0$

$\therefore 4z^4+4z^3-2z=2z^2(2z^2+2z+1)-2z^2-2z$
$=-2z^2-2z$ ($\because 2z^2+2z+1=0$)
$=-(2z^2+2z+1)+1$
$=1$ ($\because 2z^2+2z+1=0$) 답 1

158

$\alpha+\beta=2+5i$이므로 $\overline{\alpha}+\overline{\beta}=\overline{\alpha+\beta}=2-5i$

$\alpha\beta=1$이므로 $\overline{\alpha}\,\overline{\beta}=\overline{\alpha\beta}=1$

$\therefore \frac{1}{\overline{\alpha}}+\frac{1}{\overline{\beta}}=\frac{\overline{\alpha}+\overline{\beta}}{\overline{\alpha}\,\overline{\beta}}=\frac{2-5i}{1}=2-5i$ 답 $2-5i$

159

$$\frac{z+1}{\overline{z}}-\frac{\overline{z}+1}{z}=\frac{z^2+z-\overline{z}^2-\overline{z}}{z\overline{z}}=\frac{(z^2-\overline{z}^2)+(z-\overline{z})}{z\overline{z}}$$
$$=\frac{(z-\overline{z})(z+\overline{z})+(z-\overline{z})}{z\overline{z}}$$
$$=\frac{(z-\overline{z})(z+\overline{z}+1)}{z\overline{z}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $z=3-4i$이므로 $\overline{z}=3+4i$

$\therefore z-\overline{z}=(3-4i)-(3+4i)=-8i$

$z+\overline{z}+1=(3-4i)+(3+4i)+1=7$

$z\overline{z}=(3-4i)(3+4i)=9+16=25$

따라서 ㉠에서

$\frac{z+1}{\overline{z}}-\frac{\overline{z}+1}{z}=\frac{(-8i)\times 7}{25}=-\frac{56}{25}i$ 답 $-\frac{56}{25}i$

[다른 풀이]

계산이 많이 복잡한 형태는 아니므로 바로 대입하여 구할 수도 있다.

$z=3-4i$이므로 $\overline{z}=3+4i$

$$\therefore \frac{z+1}{\overline{z}}-\frac{\overline{z}+1}{z}=\frac{3-4i+1}{3+4i}-\frac{3+4i+1}{3-4i}$$
$$=\frac{4-4i}{3+4i}-\frac{4+4i}{3-4i}$$
$$=\frac{(4-4i)(3-4i)-(4+4i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}$$
$$=\frac{(-4-28i)-(-4+28i)}{9+16}=-\frac{56}{25}i$$

160

복소수 z를 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$

① 복소수 z가 $z=\overline{z}$를 만족시키면 $a+bi=a-bi$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a=a$, $b=-b$이므로 a는 실수, $b=0$이다.
이때 $a=0$이면 $z=0$이므로 $z^2=0$으로 양의 실수가 아니다.

② 복소수 z가 $z+\overline{z}=0$을 만족시키면
$(a+bi)+(a-bi)=0$, $2a=0$이므로 $a=0$, b는 실수이다.
이때 $b=0$이면 $z=0$이므로 z는 순허수가 아니다.

③ $z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$는 항상 실수이다.

④ $z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$은 실수이므로 이를 제곱하면 항상 음이 아닌 실수이다.

⑤ $z=2i+6$이면 $\overline{z}=\overline{2i+6}=\overline{6+2i}=6-2i$이다.

따라서 옳은 것은 ③이다. 답 ③

161

실수인 복소수의 켤레복소수는 실수 자신이다.

실수가 아닌 복소수 z에 대하여 $z-\frac{1}{z}$이 실수이므로

$\overline{z-\frac{1}{z}}=z-\frac{1}{z}$

즉, $\overline{z}-\frac{1}{\overline{z}}=z-\frac{1}{z}$에서 $z-\overline{z}-\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}=0$

$z-\overline{z}+\frac{z-\overline{z}}{z\overline{z}}=0$ $\therefore (z-\overline{z})\left(1+\frac{1}{z\overline{z}}\right)=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때 z는 실수가 아닌 복소수이므로 $z\neq\overline{z}$

따라서 ㉠에서 $z-\overline{z}\neq 0$이므로 $1+\frac{1}{z\overline{z}}=0$

$\frac{1}{z\overline{z}}=-1$ $\therefore z\overline{z}=-1$ 답 -1

162

복소수 z에 대하여 $z^2=4-2i$이므로 켤레복소수의 성질에 의하여

$(\overline{z})^2=\overline{z^2}=\overline{4-2i}=4+2i$

$\therefore (z\overline{z})^2=z^2(\overline{z})^2=(4-2i)(4+2i)=20$

이때 복소수 z에 대하여 $z\bar{z}$의 값은 음이 아닌 실수이므로

$z\bar{z}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ 답 $2\sqrt{5}$

[다른 풀이]

복소수 z를 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

이때 $z^2=4-2i$에서

$(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi=4-2i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=4$, $2ab=-2$ $\quad \therefore ab=-1$

한편, $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$이고

$(a^2+b^2)^2=(a^2-b^2)^2+4a^2b^2=4^2+4\times(-1)^2=20$

이므로

$z\bar{z}=a^2+b^2=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ ($\because a$, b는 실수)

163

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$, $\sqrt{b}\sqrt{c}=-\sqrt{bc}$에서

$a>0$, $b<0$, $c<0$

따라서 $a-b>0$, $b+c<0$, $c-a<0$이므로

$|a-b|-\sqrt{(b+c)^2}+\sqrt{(c-a)^2}$

$=|a-b|-|b+c|+|c-a|$

$=(a-b)-\{-(b+c)\}-(c-a)$

$=2a$ 답 $2a$

164

$ab=9$로 양수이므로 a, b의 부호는 서로 같다.

또한 $a+b=-8$로 음수이므로

$a<0$, $b<0$ $\quad \therefore \sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

$\therefore (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b$

$=a+2\sqrt{ab}+b=(a+b)+2\sqrt{ab}$

$=-8+2\sqrt{9}=-2$ 답 -2

165

$a^2+bi-3=b^2i+2a-6i$에서

$(a^2-2a-3)-(b^2-b-6)i=0$

a, b는 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-2a-3=0$, $b^2-b-6=0$

$a^2-2a-3=0$에서 $(a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$

$b^2-b-6=0$에서 $(b+2)(b-3)=0$

$\therefore b=-2$ 또는 $b=3$

따라서 ab의 값으로 가능한 값은

$(-1)\times(-2)=2$, $(-1)\times3=-3$,

$3\times(-2)=-6$, $3\times3=9$

의 네 가지이므로 ab의 값이 될 수 없는 것은 ③ -2이다.

답 ③

166

복소수 $z=(2n-1)(1+i)^n$에서 n이 자연수이면 $2n-1$도 자연수이다. 즉, z가 양의 실수가 되려면 $(1+i)^n$의 값이 양의 실수가 되어야 한다.

이때 $(1+i)^2=1+2i-1=2i$이므로

$(1+i)^3=2i(1+i)$

$(1+i)^4=\{(1+i)^2\}^2=(2i)^2=-4$

$(1+i)^5=-4(1+i)$

$(1+i)^6=-4(1+i)^2=-8i$

$(1+i)^7=-8i(1+i)$

$(1+i)^8=\{(1+i)^2\}^4=(2i)^4=16$

따라서 $(1+i)^n$의 값이 양의 실수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 n의 값은 $a=8$이고 그때의 z의 값은

$b=(2\times8-1)\times(1+i)^8=15\times16=240$이므로

$a+b=8+240=248$ 답 248

167

$\alpha+\beta=0$에서 $\beta=-\alpha$이므로

$\alpha=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$\beta=-a-bi$, $\bar{\alpha}=a-bi$, $\bar{\beta}=-a+bi$

ㄱ. $\dfrac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}=\dfrac{a-bi}{-a+bi}=\dfrac{a-bi}{-(a-bi)}=-1$이므로 실수이다.

ㄴ. $\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta=(a+bi)(-a+bi)+(a-bi)(-a-bi)$

$=-2a^2-2b^2$

이므로 실수이다.

ㄷ. $(\alpha+\bar{\beta})i=(a+bi-a+bi)i=2bi^2=-2b$이므로 실수이다.

ㄹ. $\bar{\alpha}\beta-\alpha\bar{\beta}=(a-bi)(-a-bi)-(a+bi)(-a+bi)$

$=(-b^2-a^2)-(-b^2-a^2)=0$

이므로 $\dfrac{\bar{\alpha}}{\alpha}-\dfrac{\bar{\beta}}{\beta}=\dfrac{\bar{\alpha}\beta-\bar{\beta}\alpha}{\alpha\beta}=\dfrac{0}{\alpha\beta}=0$으로 실수이다.

따라서 항상 실수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

2 이차방정식

13 이차방정식

체크 168

(1) $4x^2+12x+9=0$에서 좌변을 인수분해하면

$(2x+3)^2=0 \qquad \therefore x=-\frac{3}{2}$ (중근)

(2) $x^2+4x+2=0$에서 근의 공식을 이용하여 해를 구하면

$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-1\times2}}{1}=-2\pm\sqrt{2}$

(3) $2x^2-2x+5=0$에서 근의 공식을 이용하여 해를 구하면

$x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-2\times5}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{-9}}{2}=\frac{1\pm3i}{2}$

(4) $(\sqrt{2}-1)x^2-(3-\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$의 양변에 $\sqrt{2}+1$을 곱하면

$x^2-(1+2\sqrt{2})x+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$

$(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{2}-1)=0$

$\therefore x=\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}+1$

답 (1) $x=-\frac{3}{2}$ (중근) (2) $x=-2\pm\sqrt{2}$

(3) $x=\frac{1\pm3i}{2}$ (4) $x=\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}+1$

체크 169

이차방정식 $(a-1)x^2+x+a^2-4a+2=0$의 한 근이 1이므로

$a-1+1+a^2-4a+2=0$

$a^2-3a+2=0,\ (a-1)(a-2)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=2$

이때 주어진 방정식이 x에 대한 이차방정식이므로

$a-1\neq0 \qquad \therefore a\neq1$

$\therefore a=2$

$a=2$를 주어진 이차방정식에 대입하면

$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 다른 한 근은 -2이다. 답 -2

체크 170

(1) $2|x|^2-5|x|-3=0$에서

(i) $x<0$일 때, 주어진 방정식은

$2x^2+5x-3=0,\ (x+3)(2x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

그런데 $x<0$이므로 $x=-3$

(ii) $x\geq0$일 때, 주어진 방정식은

$2x^2-5x-3=0,\ (2x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=3$

그런데 $x\geq0$이므로 $x=3$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=-3$ 또는 $x=3$

(2) $x^2+\sqrt{(x-1)^2}-|x|=3$에서

$x^2+|x-1|-|x|-3=0$

(i) $x<0$일 때

주어진 방정식은 $x^2-(x-1)-(-x)-3=0$

$x^2-x+1+x-3=0$

$x^2=2 \qquad \therefore x=\pm\sqrt{2}$

그런데 $x<0$이므로 $x=-\sqrt{2}$

(ii) $0\leq x<1$일 때

주어진 방정식은 $x^2-(x-1)-x-3=0$

$x^2-x+1-x-3=0$

$x^2-2x-2=0 \qquad \therefore x=1\pm\sqrt{3}$

그런데 $0\leq x<1$이므로 해가 없다.

(iii) $x\geq1$일 때

주어진 방정식은 $x^2+x-1-x-3=0$

$x^2=4 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=2$

그런데 $x\geq1$이므로 $x=2$

(i)~(iii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=2$

답 (1) $x=-3$ 또는 $x=3$ (2) $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=2$

체크 171

$2x^2+x|x-1|-2|x|=0$에서

(i) $x<0$일 때

주어진 방정식은 $2x^2-x(x-1)-2(-x)=0$

$x^2+3x=0,\ x(x+3)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=0$

그런데 $x<0$이므로 $x=-3$

(ii) $0\leq x<1$일 때

주어진 방정식은 $2x^2-x(x-1)-2x=0$

$x^2-x=0,\ x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

그런데 $0\leq x<1$이므로 $x=0$

(iii) $x\geq1$일 때

주어진 방정식은 $2x^2+x(x-1)-2x=0$

$3x^2-3x=0,\ 3x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

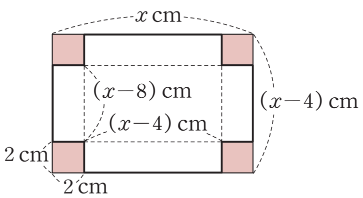
그런데 $x\geq1$이므로 $x=1$

(i)~(iii)에서 주어진 방정식의 근은 $x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$이므로 그 합은

$(-3)+0+1=-2$ 답 -2

체크 172

종이의 가로의 길이를 x cm라 하면 종이의 세로의 길이는 $(x-4)$ cm이고, 상자의 밑면의 가로의 길이는 $(x-4)$ cm, 세로의 길이는 $(x-8)$ cm, 높이는 2 cm이다.



상자의 부피는 $(x-4)\times(x-8)\times2=90$

$x^2-12x-13=0$, $(x+1)(x-13)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=13$

그런데 $x>0$이므로 $x=13$

따라서 직사각형 모양의 종이의 가로의 길이는 13 cm이다.

답 13 cm

체크 173

올해 제품의 가격은 $1000\left(1+\dfrac{a}{100}\right)$원이므로 a% 할인된 가격은

$1000\left(1+\dfrac{a}{100}\right)\left(1-\dfrac{a}{100}\right)=990$

$(100+a)(100-a)=9900$, $a^2=100$

$\therefore a=10$ ($\because a>0$) 답 10

14 이차방정식의 판별식

체크 174

주어진 방정식이 이차방정식이므로 $p-1\neq0$

$\therefore p\neq1$ …… ㉠

이차방정식 $(p-1)x^2-2px+p+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-p)^2-(p-1)(p+3)\geq0$

$p^2-(p^2+2p-3)\geq0$, $-2p+3\geq0$

$\therefore p\leq\dfrac{3}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 실수 p의 값의 범위는

$p<1$ 또는 $1<p\leq\dfrac{3}{2}$ 답 $p<1$ 또는 $1<p\leq\dfrac{3}{2}$

체크 175

이차방정식 $x^2+3x-a=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=3^2-4\times(-a)<0$

$\therefore a<-\dfrac{9}{4}$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+2ax-a+6=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\dfrac{D_2}{4}=a^2-(-a+6)=0$

$a^2+a-6=0$, $(a+3)(a-2)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-3$ 답 -3

체크 176

주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식 $x^2-2(k-a)x+k^2+2ak-a+b+1=0$의 판별식을 D라 할 때, $D=0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=(k-a)^2-(k^2+2ak-a+b+1)=0$

$-4ak+a^2+a-b-1=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$-4a=0$, $a^2+a-b-1=0$ $\therefore a=0$, $b=-1$

$\therefore a+b=0+(-1)=-1$ 답 -1

체크 177

이차방정식 $(a-b)x^2+2cx+a+b=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=c^2-(a-b)(a+b)=0$

$c^2-a^2+b^2=0$ $\therefore a^2=b^2+c^2$

따라서 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.

답 빗변의 길이가 a인 직각삼각형

연습 문제 07

178

이차방정식 $x^2+3x+1=0$에서 근의 공식을 이용하여 해를 구하면

$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times1}}{2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}=\dfrac{-a\pm\sqrt{b}}{2}$

이때 a, b는 유리수이므로 $a=3$, $b=5$

$\therefore a+b=3+5=8$ 답 8

179

이차방정식 $x^2-8x+6k=0$의 근은 근의 공식에 의하여

$x=4\pm\sqrt{16-6k}$

이 값이 정수가 되려면 근호 안의 식 $16-6k$가 정수의 제곱인 수이어야 한다.

(i) $16-6k=(\pm1)^2$일 때

$6k=15 \qquad \therefore k=\frac{5}{2}$

이때 k는 자연수가 아니다.

(ii) $16-6k=(\pm2)^2$일 때

$6k=12 \qquad \therefore k=2$

(iii) $16-6k=(\pm3)^2$일 때

$6k=7 \qquad \therefore k=\frac{7}{6}$

이때 k는 자연수가 아니다.

(iv) $16-6k\geq(\pm4)^2$일 때

$6k\leq0 \qquad \therefore k\leq0$

이때 k는 자연수가 아니다.

(i)~(iv)에서 구하는 자연수 k의 값은 2이다.

답 2

180

$x^2-2kx+k+6=0$의 한 근이 k이므로 $x=k$를 대입하면

$k^2-2k^2+k+6=0$

$k^2-k-6=0,\ (k+2)(k-3)=0$

$\therefore k=3\ (\because k>0)$

답 3

181

$x=1$은 이차방정식 $x^2-6x+2a-1=0$의 근이므로

$1-6+2a-1=0,\ 2a-6=0 \qquad \therefore a=3$

또한 $x=1$은 이차방정식 $bx^2+x-a=0$, 즉 $bx^2+x-3=0$의 근이므로

$b+1-3=0 \qquad \therefore b=2$

$\therefore ab=3\times2=6$

답 6

182

$(x-2)^2=1$에서 $x-2=\pm1$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

두 근 중 큰 근인 $x=3$이 $x^2+ax-12=0$의 근이므로

$9+3a-12=0 \qquad \therefore a=1$

즉, 이차방정식 $x^2+x-12=0$에서

$(x+4)(x-3)=0 \qquad \therefore x=-4$ 또는 $x=3$

따라서 다른 한 근은 -4이다.

답 -4

183

$(k-3)x^2-ax+bk-2=0$의 한 근이 $x=-1$이므로

$k-3+a+bk-2=0$

$\therefore (b+1)k+a-5=0$

이 등식은 k에 대한 항등식이므로

$b+1=0,\ a-5=0 \qquad \therefore b=-1,\ a=5$

$\therefore a+b=5+(-1)=4$

답 4

184

$\sqrt{x^2}=|x|$이므로 $x^2-\sqrt{x^2}-2=|x-2|$에서

$x^2-|x|-2=|x-2|$

$\therefore x^2-|x|-|x-2|-2=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

(i) $x<0$일 때

㉠에서 $x^2-(-x)-\{-(x-2)\}-2=0$이므로

$x^2+2x-4=0$

근의 공식에 의하여 $x=-1\pm\sqrt{5}$

이때 $x<0$이므로 $x=-1-\sqrt{5}$

(ii) $0\leq x<2$일 때

㉠에서 $x^2-x-\{-(x-2)\}-2=0$이므로

$x^2-4=0,\ x^2=4 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=2$

이때 $0\leq x<2$이므로 해는 없다.

(iii) $x\geq2$일 때

㉠에서 $x^2-x-(x-2)-2=0$이므로

$x^2-2x=0,\ x(x-2)=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=2$

이때 $x\geq2$이므로 $x=2$

(i)~(iii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=-1-\sqrt{5}$ 또는 $x=2$

답 $x=-1-\sqrt{5}$ 또는 $x=2$

185

$n\leq x<n+1$ (n은 정수)이라 하면 $[x]=n$이므로

$[x]^2-5[x]-6=0$에서

$n^2-5n-6=0$

$(n+1)(n-6)=0 \qquad \therefore n=-1$ 또는 $n=6$

즉, $[x]=-1$ 또는 $[x]=6$이므로

(i) $[x]=-1$일 때, $-1\leq x<0$

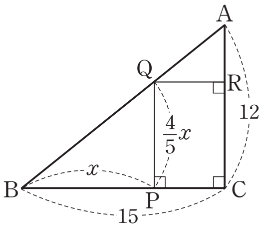
(ii) $[x]=6$일 때, $6\leq x<7$

(i), (ii)에서 구하는 방정식의 해는

$-1\leq x<0$ 또는 $6\leq x<7$

답 $-1\leq x<0$ 또는 $6\leq x<7$

186



오른쪽 그림에서 $\triangle ABC \backsim \triangle QBP$

이므로 $\overline{BP}=x$라 하면

$\overline{BC}:\overline{BP}=\overline{AC}:\overline{QP}$

$15:x=12:\overline{QP}$

$\therefore \overline{QP}=\frac{4}{5}x$

이때 $0<x<15$이고 $\overline{BP}>\overline{PC}$, 즉 $x>15-x$에서

$x>\frac{15}{2}$이므로 $\frac{15}{2}<x<15$ …… ㉠

한편, 직사각형 PCRQ의 넓이가 40이므로

$(15-x)\times\frac{4}{5}x=40$

$x^2-15x+50=0$, $(x-5)(x-10)=0$

$\therefore x=10$ ($\because$ ㉠)

따라서 선분 BP의 길이는 10이다.

답 10

187

이차방정식 $x^2+4x+1+k=0$의 판별식을 D라 하면 $D>0$ 이어야 하므로

$\frac{D}{4}=2^2-(1+k)>0$

$3-k>0$ $\therefore k<3$

답 $k<3$

188

이차방정식 $x^2-8x+a=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-4)^2-1\times a>0$, $16-a>0$ $\therefore a<16$

즉, 정수 a의 최댓값은 $M=15$

이차방정식 $x^2+2(b+1)x+b^2-2=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(b+1)^2-(b^2-2)<0$, $2b+3<0$ $\therefore b<-\frac{3}{2}$

즉, 정수 b의 최댓값은 $m=-2$

$\therefore M+m=15+(-2)=13$

답 13

189

$a\neq 0$이므로 $a>0$, $a-1<0$

$\therefore 0<a<1$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+2(a-1)x+a^2+2a+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-1)^2-(a^2+2a+1)$

$=-4a<0$ ($\because$ ㉠)

따라서 서로 다른 두 허근을 가진다.

답 서로 다른 두 허근

190

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-a)^2-4b>0$

$\therefore a^2-4b>0$ …… ㉠

이차방정식 $x^2-(a-2)x-a+b-4=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(a-2)^2-4(-a+b-4)$

$=a^2-4b+20>0$ ($\because$ ㉠)

따라서 서로 다른 두 실근을 가진다.

답 서로 다른 두 실근

191

이차방정식 $x^2+2ax+b^2=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-b^2=0$ $\therefore a^2=b^2$ …… ㉠

이차방정식 $x^2-2ax+b^2-5=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-a)^2-(b^2-5)$

$=a^2-b^2+5>0$ ($\because$ ㉠)

따라서 서로 다른 두 실근을 가진다.

답 서로 다른 두 실근

192

이차방정식 $b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2$

$=(b^2+c^2-a^2+2bc)(b^2+c^2-a^2-2bc)$

$=\{(b+c)^2-a^2\}\{(b-c)^2-a^2\}$

$=(b+c+a)(b+c-a)(b-c+a)(b-c-a)$ …… ㉠

이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로

$a>0$, $b>0$, $c>0$ $\therefore a+b+c>0$

또한 삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 크므로

$a+b>c$, $b+c>a$, $c+a>b$

$\therefore b-c+a>0$, $b+c-a>0$, $b-c-a<0$

따라서 ㉠에서 $D<0$이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.

답 서로 다른 두 허근

tip

삼각형의 결정조건

삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 크다.

즉, a, b, c가 삼각형의 세 변의 길이일 때,

$a+b>c$, $b+c>a$, $c+a>b$

193

인하된 1 L당 기름의 가격은 $a\left(1-\frac{x}{100}\right)$원

인하된 후 하루 판매량은 $b\left(1+\frac{2x}{100}\right)$ L

인하된 후 하루 판매액이 8 % 증가하였으므로

$a\left(1-\frac{x}{100}\right)\times b\left(1+\frac{2x}{100}\right)=ab\left(1+\frac{8}{100}\right)$

$(100-x)(100+2x)=10800$

$x^2-50x+400=0$, $(x-10)(x-40)=0$

$\therefore x=10$ ($\because 0<x<30$) 답 10

194

이차방정식 $4x^2+2(2k+m)x+k^2-k+n=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2k+m)^2-4(k^2-k+n)=0$

$4(m+1)k+m^2-4n=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$m+1=0$, $m^2-4n=0$ $\quad\therefore m=-1$, $n=\frac{1}{4}$

$\therefore m+n=(-1)+\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}$ 답 ①

195

이차방정식 $x^2-2(a+b+c)x+3(ab+bc+ca)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=0$

즉, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$이므로

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로 그 값은 실수이다.

$\therefore a=b=c$

따라서 삼각형 ABC는 정삼각형이다. 답 정삼각형

tip

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

15 근과 계수의 관계

체크 196

이차방정식 $x^2-2x-4=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-4$

(1) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$

(2) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=2^3-3\times(-4)\times2$

$=32$

(3) $\frac{\beta}{\alpha+1}+\frac{\alpha}{\beta+1}=\frac{\beta^2+\beta+\alpha^2+\alpha}{(\alpha+1)(\beta+1)}$

$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+\alpha+\beta}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}$

$=\frac{2^2-2\times(-4)+2}{(-4)+2+1}$

$=-14$

답 (1) $-\frac{1}{2}$ (2) 32 (3) -14

체크 197

이차방정식 $x^2-ax+3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=3$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+bx+7=0$의 두 근이 $\alpha+1$, $\beta+1$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+1)+(\beta+1)=-b$, $(\alpha+1)(\beta+1)=7$

$\therefore (\alpha+\beta)+2=-b$, $\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=7$

㉠을 이 식에 대입하면 $a+2=-b$, $3+a+1=7$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-5$

$\therefore a+b=3+(-5)=-2$ 답 -2

체크 198

이차방정식 $x^2-2x+4=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=4$ …… ㉠

$x=\alpha$, $x=\beta$는 주어진 이차방정식의 근이므로 각각 대입하면

$\alpha^2-2\alpha+4=0$, $\beta^2-2\beta+4=0$

$\therefore \alpha^2-2\alpha=-4$, $\beta^2-2\beta=-4$ …… ㉡

$\therefore (1-\alpha^2+3\alpha)(1-\beta^2+3\beta)$

$=\{1-(\alpha^2-2\alpha)+\alpha\}\{1-(\beta^2-2\beta)+\beta\}$

$=\{1-(-4)+\alpha\}\{1-(-4)+\beta\}$ (∵ ㉡)

$=(\alpha+5)(\beta+5)$

$=\alpha\beta+5(\alpha+\beta)+25$

$=4+5\times2+25$ (∵ ㉠)

$=39$ 답 39

체크 199

이차방정식 $x^2-4(m-1)x+3m-3=0$의 두 근을 α, 3α라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+3\alpha=4(m-1)$, $\alpha\times3\alpha=3m-3$

즉, $4\alpha=4(m-1)$, $3\alpha^2=3(m-1)$이므로

$\alpha=m-1$, $\alpha^2=m-1$

이때 $m\neq1$이므로 $\alpha\neq0$

따라서 $(m-1)^2=m-1$이므로

$m^2-3m+2=0$, $(m-1)(m-2)=0$

$\therefore m=2$ (∵ $m\neq1$) 답 2

체크 200

이차방정식 $x^2-(a-19)x+a=0$의 두 근을 α, $\alpha+1$ (α는 자연수)이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+1)=a-19$, $\alpha(\alpha+1)=a$

즉, $2\alpha+20=a$, $\alpha^2+\alpha=a$이므로

$2\alpha+20=\alpha^2+\alpha$

$\alpha^2-\alpha-20=0$, $(\alpha+4)(\alpha-5)=0$

$\therefore \alpha=5$ (∵ α는 자연수)

$\therefore a=2\alpha+20=2\times5+20=30$ 답 30

체크 201

이차방정식 $x^2+4x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=1$ …… ㉠

구하는 이차방정식을 $x^2-ax+b=0$ (a, b는 상수)이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$a=(\alpha^2+1)+(\beta^2+1)$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2$

$=(-4)^2-2\times1+2$ (∵ ㉠)

$=16$

$b=(\alpha^2+1)(\beta^2+1)$

$=\alpha^2\beta^2+\alpha^2+\beta^2+1$

$=(\alpha\beta)^2+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+1$

$=1^2+(-4)^2-2\times1+1$ (∵ ㉠)

$=16$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-16x+16=0$이다.

답 $x^2-16x+16=0$

체크 202

(1) 이차방정식 $x^2-5x+5=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$

$\therefore x^2-5x+5=\left(x-\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$

(2) 이차방정식 $2x^2-4x+3=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=\frac{2\pm\sqrt{2}i}{2}$

$\therefore 2x^2-4x+3=2\left(x^2-2x+\frac{3}{2}\right)$

$=2\left(x-\frac{2+\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-\frac{2-\sqrt{2}i}{2}\right)$

답 (1) $\left(x-\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$

(2) $2\left(x-\frac{2+\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-\frac{2-\sqrt{2}i}{2}\right)$

체크 203

a, b가 실수이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1-i$이면 다른 한 근은 $1+i$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$(1-i)+(1+i)=-a$ $\therefore a=-2$

$(1-i)(1+i)=b$ $\therefore b=2$

따라서 이차방정식 $x^2+(a^2+b^2)x+ab=0$, 즉

$x^2+8x-4=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-8$, $\alpha\beta=-4$

$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-8}{-4}=2$ 답 2

체크 204

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$

방정식 $f(2x-1)=0$의 두 근은

$2x-1=\alpha$ 또는 $2x-1=\beta$에서

$x=\frac{\alpha+1}{2}$ 또는 $x=\frac{\beta+1}{2}$

따라서 두 근의 곱은

$$\frac{\alpha+1}{2}\times\frac{\beta+1}{2}=\frac{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}{4}$$
$$=\frac{-1+4+1}{4}\ (\because\ \alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=-1)$$
$$=1$$

답 1

[다른 풀이]

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 α, β에 대하여 $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-1$이므로 $f(x)$의 x^2의 계수를 k $(k\neq0)$라 하면

$f(x)=k(x^2-4x-1)=kx^2-4kx-k$

즉, 이차방정식 $f(2x-1)=0$은

$k(2x-1)^2-4k(2x-1)-k=0$

$4kx^2-4kx+k-8kx+4k-k=0$

$4kx^2-12kx+4k=0$

$\therefore\ x^2-3x+1=0\ (\because\ k\neq0)$

따라서 이차방정식 $f(2x-1)=0$, 즉 $x^2-3x+1=0$의 두 근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{1}{1}=1$이다.

체크 205

방정식 $f(x)=0$이 $x=-3$을 근으로 가지므로

$f(-3)=0$

|보기|의 각 식에 $x=1$을 대입하면

ㄱ. $f(x+4)=f(5)$

ㄴ. $f(x^2-4)=f(-3)=0$

ㄷ. $f(x^2-2x)=f(-1)$

ㄹ. $f(-4x+1)=f(-3)=0$

따라서 1을 반드시 근으로 갖는 방정식은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄹ

연습 문제 08

206

이차방정식 $x^2+2x+2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=2$

ㄱ. $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-2}{2}=-1$

ㄴ. $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$=(-2)^2-4\times2=-4$

ㄷ. $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=(-2)^3-3\times2\times(-2)$
$=4$

ㄹ. $\frac{\beta}{\alpha+1}+\frac{\alpha}{\beta+1}=\frac{\beta^2+\beta+\alpha^2+\alpha}{(\alpha+1)(\beta+1)}$
$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+\alpha+\beta}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}$
$=\frac{(-2)^2-2\times2+(-2)}{2+(-2)+1}$
$=-2$

ㅁ. $\alpha+\beta=-2$에서

$\alpha=-\beta-2$, $\beta=-\alpha-2$

$\therefore\ (\alpha+2\beta+1)(\beta+2\alpha+1)$
$=(-\beta-2+2\beta+1)(-\alpha-2+2\alpha+1)$
$=(\beta-1)(\alpha-1)$
$=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$
$=2-(-2)+1$
$=5$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㅁ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㅁ

207

이차방정식 $x^2+(a+3)x+2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a-3$, $\alpha\beta=2$

α, β가 이차방정식의 근이므로

$\alpha^2+(a+3)\alpha+2=0\qquad\therefore\ \alpha^2+a\alpha=-3\alpha-2$

$\beta^2+(a+3)\beta+2=0\qquad\therefore\ \beta^2+a\beta=-3\beta-2$

$\therefore\ (2+a\alpha+\alpha^2)(2+a\beta+\beta^2)$
$=(2-3\alpha-2)(2-3\beta-2)$
$=9\alpha\beta=9\times2=18$

답 18

208

이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 실근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$

α, β가 이차방정식의 근이므로

$\alpha^2-3\alpha+1=0\qquad\therefore\ \alpha^2+1=3\alpha$

$\beta^2-3\beta+1=0\qquad\therefore\ \beta^2+1=3\beta$

이때 $3\alpha>0$, $3\beta>0$

$\therefore\ \sqrt{\alpha^2+1}+\sqrt{\beta^2+1}=\sqrt{3\alpha}+\sqrt{3\beta}>0$

이때

$(\sqrt{3\alpha}+\sqrt{3\beta})^2=3\alpha+6\sqrt{\alpha\beta}+3\beta\ (\because\ 3\alpha>0,\ 3\beta>0)$
$=3(\alpha+\beta)+6\sqrt{\alpha\beta}$
$=3\times3+6\sqrt{1}=15$

$\therefore\ \sqrt{3\alpha}+\sqrt{3\beta}=\sqrt{15}\ (\because\ \sqrt{3\alpha}+\sqrt{3\beta}>0)$

$\therefore\ \sqrt{\alpha^2+1}+\sqrt{\beta^2+1}=\sqrt{3\alpha}+\sqrt{3\beta}=\sqrt{15}$

답 $\sqrt{15}$

209

$|x^2+3x+a|=1$에서

$x^2+3x+a=1$ 또는 $x^2+3x+a=-1$

(i) $x^2+3x+a-1=0$의 두 근의 곱은 $a-1$

(ii) $x^2+3x+a+1=0$의 두 근의 곱은 $a+1$

(i), (ii)에서 모든 근의 곱은 $(a-1)(a+1)=8$이므로

$a^2-1=8$, $a^2=9$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

답 3

210

방정식 $ax^2+bx+c=0$이 이차방정식이므로 $a\neq0$

잘못 기억한 근의 공식에서

$(\text{두 근의 합})=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}+\dfrac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}=(-6)+1$

$-\dfrac{b}{a}=-5$　　$\therefore b=5a$

$(\text{두 근의 곱})=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}\times\dfrac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}=(-6)\times1$

$\dfrac{c}{4a}=-6$　　$\therefore c=-24a$

따라서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은

$ax^2+5ax-24a=0$, 즉 $x^2+5x-24=0$ ($\because a\neq0$)

$(x+8)(x-3)=0$

$\therefore x=-8$ 또는 $x=3$

즉, 이차방정식의 근을 바르게 구하면 $x=-8$ 또는 $x=3$이다.

답 $x=-8$ 또는 $x=3$

211

방정식 $ax^2+bx+c=0$이 이차방정식이므로 $a\neq0$

갑이 b를 잘못 보고 풀었을 때, a와 c는 바르게 보았으므로

$(-1)\times5=\dfrac{c}{a}$

$\therefore c=-5a$

을이 c를 잘못 보고 풀었을 때, a와 b는 바르게 보았으므로

$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=-\dfrac{b}{a}$

$\therefore b=-4a$

따라서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은

$ax^2-4ax-5a=0$

$x^2-4x-5=0$ ($\because a\neq0$)

$(x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$

따라서 올바른 두 근 중 음수인 근은 -1이다.

답 -1

212

이차방정식 $x^2-2x+k=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=k$

이때 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$에서 $\alpha-\beta=1$이므로

$1^2=2^2-4\times k$

$\therefore k=\dfrac{3}{4}$

답 $\dfrac{3}{4}$

213

이차방정식 $x^2-kx-4k=0$의 두 근의 절댓값의 비가 1 : 2이므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) 두 근의 부호가 같은 경우

두 근을 α, 2α라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2\alpha=k$, $\alpha\times2\alpha=-4k$

즉, $\alpha=\dfrac{1}{3}k$, $\alpha^2=-2k$이므로 $\left(\dfrac{1}{3}k\right)^2=-2k$

$k^2+18k=0$, $k(k+18)=0$　　$\therefore k=-18$ ($\because k\neq0$)

(ii) 두 근의 부호가 다른 경우

두 근을 α, -2α라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(-2\alpha)=k$, $\alpha\times(-2\alpha)=-4k$

즉, $\alpha=-k$, $\alpha^2=2k$이므로 $(-k)^2=2k$

$k^2-2k=0$, $k(k-2)=0$　　$\therefore k=2$ ($\because k\neq0$)

(i), (ii)에서 구하는 k의 값은 -18 또는 2이므로 그 합은

$(-18)+2=-16$이다.

답 -16

tip

(i) 두 근의 부호가 같은 경우의 이차방정식은 $x^2+18x+72=0$이고 두 근은 $x=-6$ 또는 $x=-12$이므로 두 근의 절댓값의 비는 1 : 2를 만족시킨다.

(ii) 두 근의 부호가 다른 경우의 이차방정식은 $x^2-2x-8=0$이고 두 근은 $x=-2$ 또는 $x=4$이므로 두 근의 절댓값의 비는 1 : 2를 만족시킨다.

214

이차방정식 $x^2-x+2=0$의 두 근이 $\dfrac{1}{\alpha-1}$, $\dfrac{1}{\beta-1}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\dfrac{1}{\alpha-1}+\dfrac{1}{\beta-1}=1$　　$\therefore \dfrac{\alpha+\beta-2}{(\alpha-1)(\beta-1)}=1$　　…… ㉠

$\dfrac{1}{\alpha-1}\times\dfrac{1}{\beta-1}=2$, $\dfrac{1}{(\alpha-1)(\beta-1)}=2$

$\therefore (\alpha-1)(\beta-1)=\dfrac{1}{2}$　　…… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\alpha+\beta-2=\frac{1}{2}\qquad\therefore\ \alpha+\beta=\frac{5}{2}$

㉡에서 $\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=\frac{1}{2}$이므로

$\alpha\beta=2$

따라서 원래 이차방정식은 $2\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=0$이므로

$2\left(x^2-\frac{5}{2}x+2\right)=0$

$\therefore\ 2x^2-5x+4=0$ 답 $2x^2-5x+4=0$

215

이차방정식 $x^2-3x+7=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=7$

구하는 이차방정식은 $7\left(x-\frac{1}{\alpha}\right)\left(x-\frac{1}{\beta}\right)=0$, 즉

$7\left\{x^2-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)x+\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}\right\}=0$

이때 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{3}{7}$, $\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{7}$이므로 구하는 이차방정식은

$7\left(x^2-\frac{3}{7}x+\frac{1}{7}\right)=0$

$\therefore\ 7x^2-3x+1=0$ 답 $7x^2-3x+1=0$

tip

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β일 때,

$\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하는 이차방정식은 $cx^2+bx+a=0$이다.

216

이차방정식 $x^2-5x+8=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times8}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{7}i}{2}$

$\therefore\ x^2-5x+8=\left(x-\frac{5+\sqrt{7}i}{2}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{7}i}{2}\right)$

따라서 $a=5$, $b=7$이므로

$a+b=5+7=12$ 답 12

217

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 한 근이 $1+2i$이고 a, b는 실수이므로 다른 한 근은 $1-2i$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$(1+2i)+(1-2i)=a\qquad\therefore\ a=2$

$(1+2i)(1-2i)=b\qquad\therefore\ b=5$

$\therefore\ a+b=2+5=7$ 답 7

218

주어진 이차방정식의 계수가 실수이고 한 허근이 α이므로 다른 한 허근은 $\overline{\alpha}$이다.

이차방정식 $x^2-2x+2=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\overline{\alpha}=2,\ \alpha\overline{\alpha}=2$

$$\begin{aligned}\therefore\ z\overline{z}&=\frac{\alpha+1}{2\alpha-1}\times\frac{\overline{\alpha}+1}{2\overline{\alpha}-1}\\&=\frac{\alpha\overline{\alpha}+\alpha+\overline{\alpha}+1}{4\alpha\overline{\alpha}-2(\alpha+\overline{\alpha})+1}\\&=\frac{2+2+1}{8-4+1}\\&=1\end{aligned}$$

답 1

219

x, y에 대한 이차식 $2x^2+xy+ky^2-x+2y-1$을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$2x^2+(y-1)x+ky^2+2y-1$

이차방정식 $2x^2+(y-1)x+ky^2+2y-1=0$의 판별식을 D라 하면

$$\begin{aligned}D&=(y-1)^2-8(ky^2+2y-1)\\&=(1-8k)y^2-18y+9\end{aligned}$$

이때 D가 완전제곱식이어야 주어진 이차식이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해된다.

y에 대한 이차방정식 $(1-8k)y^2-18y+9=0$의 판별식을 D'이라 하면

$\frac{D'}{4}=(-9)^2-9(1-8k)=0$

$81-9+72k=0$

$\therefore\ k=-1$ 답 -1

220

이차방정식 $f(x+1)=0$의 두 근이 α, β이므로

$f(\alpha+1)=0,\ f(\beta+1)=0$

즉, 이차방정식 $f(3x-1)=0$의 두 근은

$3x-1=\alpha+1$ 또는 $3x-1=\beta+1$에서

$x=\frac{\alpha+2}{3}$ 또는 $x=\frac{\beta+2}{3}$

따라서 두 근의 곱은

$$\begin{aligned}\frac{\alpha+2}{3}\times\frac{\beta+2}{3}&=\frac{\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4}{9}\\&=\frac{4+2+4}{9}\ (\because\ \alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=4)\\&=\frac{10}{9}\end{aligned}$$

답 $\frac{10}{9}$

221

이차방정식 $x^2-5x+3=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=3$

즉, $\alpha=5-\beta$, $\beta=5-\alpha$이므로 이를 $f(\alpha)=2\beta$, $f(\beta)=2\alpha$에 각각 대입하면

$f(\alpha)=10-2\alpha$, $f(\beta)=10-2\beta$

$\therefore f(\alpha)+2\alpha-10=0$, $f(\beta)+2\beta-10=0$

따라서 α, β는 x^2의 계수가 1인 이차방정식

$f(x)+2x-10=0$의 두 근이므로

$f(x)+2x-10=x^2-5x+3$

$$\begin{aligned}\therefore f(x)&=x^2-5x+3-2x+10\\&=x^2-7x+13\end{aligned}$$

$\therefore f(-1)=(-1)^2-7\times(-1)+13=21$ 답 21

222

이차방정식 $x^2-4x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=1$ ⋯⋯ ㉠

또한 α, β는 이차방정식의 근이므로

$\alpha^2-4\alpha+1=0$, $\beta^2-4\beta+1=0$

$\therefore \alpha^2-3\alpha+1=\alpha$, $\beta^2-3\beta+1=\beta$ ⋯⋯ ㉡

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\beta}{\alpha^2-3\alpha+1}+\frac{\alpha}{\beta^2-3\beta+1}&=\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}\ (\because ㉡)\\&=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}\\&=\frac{4^2-2\times1}{1}\ (\because ㉠)\\&=14\end{aligned}$$

답 14

223

이차방정식 $x^2+ax-2b=0$의 두 실근 α, β의 부호가 서로 다르므로 $\alpha<0<\beta$라 하면 $|\alpha|=-\alpha$, $|\beta|=\beta$이다.

이차방정식 $x^2+ax-2b=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$ ⋯⋯ ㉠

$\alpha\beta=-2b$ ⋯⋯ ㉡

이때 두 실근 α, β의 부호가 서로 다르므로 $\alpha\beta<0$

$\therefore b\neq0$

또한 이차방정식 $x^2-(3a+2b)x+12b=0$의 두 근이

$|\alpha|+|\beta|$, $|\alpha\beta|$이므로

두 근의 합은 $(|\alpha|+|\beta|)+|\alpha\beta|=3a+2b$

$\therefore -\alpha+\beta-\alpha\beta=3a+2b$ ⋯⋯ ㉢

두 근의 곱은 $(|\alpha|+|\beta|)\times|\alpha\beta|=12b$

$\therefore -\alpha\beta(-\alpha+\beta)=12b$ ⋯⋯ ㉣

㉡을 ㉣에 대입하면

$2b(-\alpha+\beta)=12b$ $\quad\therefore -\alpha+\beta=6\ (\because b\neq0)$ ⋯⋯ ㉤

㉡, ㉤을 ㉢에 대입하면

$6-(-2b)=3a+2b$, $3a=6$ $\quad\therefore a=2$

즉, ㉠에서 $\alpha+\beta=-2$, ㉤에서 $-\alpha+\beta=6$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$\alpha=-4$, $\beta=2$ $\quad\therefore b=4\ (\because ㉡)$

$\therefore a+b=2+4=6$ 답 6

224

조건 ㈎에서 나머지정리에 의하여 $f(1)=1$이므로

$1+p+q=1$ $\quad\therefore p+q=0$ ⋯⋯ ㉠

또한 조건 ㈏에서 p, q는 실수이고 이차방정식 $f(x)=0$의 한 근이 $a+i$(a는 실수)이므로 다른 한 근은 $a-i$이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$(a+i)+(a-i)=-p$, $(a+i)(a-i)=q$

$\therefore p=-2a$, $q=a^2+1$

이를 ㉠에 대입하면

$-2a+a^2+1=0$, $(a-1)^2=0$ $\quad\therefore a=1$

따라서 $p=-2a=-2$, $q=a^2+1=1^2+1=2$이므로

$p+2q=(-2)+2\times2=2$ 답 ①

3 이차방정식과 이차함수

16 이차방정식과 이차함수

체크 225

$y=x^2-2ax-4a+1$

$=x^2-2ax+a^2-a^2-4a+1$

$=(x-a)^2-a^2-4a+1$

즉, 이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$(a,\ -a^2-4a+1)$이고 이것이

점 $(-1,\ b)$와 일치하므로

$a=-1,\ b=-a^2-4a+1=4$

$\therefore\ a+b=(-1)+4=3$ 답 3

체크 226

이차함수 식을 $y=a(x-3)^2+b$ ($a,\ b$는 상수)라 하면 이 함수의 그래프가 두 점 $(4,\ 0),\ (1,\ 3)$을 지나므로

$0=a+b,\ 3=4a+b$

두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-1$

따라서 이차함수의 식은

$y=(x-3)^2-1$

이 함수의 그래프가 점 $(-1,\ k)$를 지나므로

$k=(-1-3)^2-1=15$ 답 15

체크 227

이차함수 $y=3x^2+ax-b$의 그래프와 x축의 교점의 좌표가 $(-6,\ 0),\ (1,\ 0)$이므로 이차함수의 식은

$y=3(x+6)(x-1)=3(x^2+5x-6)$

$=3x^2+15x-18$

따라서 $a=15,\ b=18$이므로

$2a-b=2\times15-18=12$ 답 12

체크 228

이차함수 $y=x^2+4kx+4k^2-k+1$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식

$x^2+4kx+4k^2-k+1=0$의 판별식을 D라 할 때, $D>0$이어야 한다. 즉,

$\frac{D}{4}=4k^2-4k^2+k-1>0 \qquad \therefore\ k>1$

따라서 정수 k의 최솟값은 2이다. 답 2

tip

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 위치 관계는 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식 D를 이용한다.

(1) $D>0$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $D=0$이면 한 점에서 만난다.(접한다.)

(3) $D<0$이면 만나지 않는다.

체크 229

이차함수 $y=-2x^2+kx+k$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나려면 이차방정식 $-2x^2+kx+k=0$의 판별식을 D_1이라 할 때, $D_1=0$이어야 한다. 즉,

$D_1=k^2-4\times(-2)\times k=0,\ k^2+8k=0,\ k(k+8)=0$

$\therefore\ k=-8$ 또는 $k=0$ …… ㉠

또한 이차함수 $y=x^2-2x-k-5$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2-2x-k-5=0$의 판별식을 D_2라 할 때, $D_2<0$이어야 한다. 즉,

$\frac{D_2}{4}=(-1)^2-(-k-5)<0,\ k+6<0$

$\therefore\ k<-6$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 실수 k의 값은 -8이다.

답 -8

체크 230

이차함수 $y=x^2+px-p$의 그래프와 직선 $y=2x+5$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2+px-p=2x+5$, 즉

$x^2+(p-2)x-p-5=0$ …… ㉠

은 서로 다른 두 실근을 갖고, 그 두 실근은 두 그래프의 두 교점 A, B의 x좌표이다.

이때 점 B의 x좌표가 4이므로 $x=4$는 이차방정식 ㉠의 한 근이다. $x=4$를 ㉠에 대입하면

$4^2+(p-2)\times4-p-5=0$

$\therefore\ p=-1$

이를 ㉠에 대입하면 $x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0 \qquad \therefore\ x=-1$ 또는 $x=4$

따라서 ㉠의 다른 한 근 $x=-1$은 점 A의 x좌표이다.

점 A는 직선 $y=2x+5$ 위의 점이므로 $x=-1$을 대입하면

y좌표는 $y=2\times(-1)+5=3$

$\therefore$ A$(-1,\ 3)$ 답 $(-1,\ 3)$

체크 231

이차함수 $y=kx^2-2kx+1$의 그래프와 직선 $y=2x-k$가 만나지 않으려면 이차방정식 $kx^2-2kx+1=2x-k$, 즉

$kx^2-2(k+1)x+k+1=0$ …… ㉠

은 실근을 갖지 않아야 한다.

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면 $D<0$이므로

$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-k(k+1)<0$

$k^2+2k+1-k^2-k<0$

$\therefore k<-1$ 답 $k<-1$

체크 232

이차함수 $y=-2x^2+(k+1)x+k-3$의 그래프와 직선 $y=kx$가 적어도 한 점에서 만나려면 이차방정식 $-2x^2+(k+1)x+k-3=kx$, 즉

$2x^2-x-k+3=0$ …… ㉠

이 실근을 가져야 한다.

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면 $D\geq 0$이므로

$D=(-1)^2-4\times 2\times(-k+3)\geq 0$

$1+8k-24\geq 0$, $8k\geq 23$ $\quad \therefore k\geq \frac{23}{8}$

따라서 실수 k의 최솟값은 $\frac{23}{8}$이다. 답 $\frac{23}{8}$

체크 233

주어진 이차함수의 그래프 위의 점 $(0, -1)$을 지나고 이 그래프에 접하는 직선의 기울기를 a (a는 상수)라 하면 직선의 방정식은

$y-(-1)=a(x-0)$ $\quad \therefore y=ax-1$

이차함수 $y=-2x^2+4x-1$의 그래프와 직선 $y=ax-1$이 접하므로 이차방정식 $-2x^2+4x-1=ax-1$, 즉

$2x^2+(a-4)x=0$ …… ㉠

은 오직 하나의 실근(중근)을 가져야 한다.

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면 $D=0$이므로

$D=(a-4)^2-4\times 2\times 0=0$, $(a-4)^2=0$ $\quad \therefore a=4$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=4x-1$이다.

답 $y=4x-1$

체크 234

이차함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f(-5)=0$, $f(1)=0$이므로 $f(3x+p)=0$이려면

$3x+p=-5$ 또는 $3x+p=1$

$\therefore x=\frac{-5-p}{3}$ 또는 $x=\frac{1-p}{3}$

따라서 이차방정식 $f(3x+p)=0$의 두 실근의 합이 -4이려면

$\frac{-5-p}{3}+\frac{1-p}{3}=-4$ $\quad \therefore p=4$ 답 4

연습 문제 09

235

$f(x)=ax^2+bx+c$라 하자.

① 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$

② 축이 y축의 왼쪽에 있으므로 $ab>0$ $\quad \therefore b<0$

③ 그래프가 y축과 $y<0$인 부분에서 만나므로 $c<0$

④ $f(1)=a+b+c$이고 그래프에서 $x=1$일 때 $y<0$이므로 $a+b+c<0$

⑤ $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}a-\frac{1}{3}b+c=\frac{1}{9}(a-3b+9c)$이고 그래프에서 $x=-\frac{1}{3}$일 때 $y>0$이므로 $\frac{1}{9}(a-3b+9c)>0$

$\therefore a-3b+9c>0$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

236

그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-1, 2)$이고 x^2의 계수가 -3인 이차함수의 식은

$y=-3(x+1)^2+2=-3x^2-6x-1$

이것이 $y=-3x^2-px+q$와 일치하므로

$p=6$, $q=-1$

$\therefore p-2q=6-2\times(-1)=8$ 답 8

tip

이차함수의 식을 구할 때에는 조건에 따라 다음과 같이 함수식을 세운다.

① 그래프의 꼭짓점의 좌표 (m, n)이 주어지면
$y=a(x-m)^2+n$ (단, a는 상수)

② 그래프와 x축의 두 교점의 좌표 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$이 주어지면
$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ (단, a는 상수)

③ 그래프 위의 세 점의 좌표가 주어지면
$y=ax^2+bx+c$ (단, a, b, c는 상수)

237

그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-2, -1)$이고 x^2의 계수가 a (a는 상수)인 이차함수의 식은

$y=a(x+2)^2-1$

이 이차함수의 그래프가 점 $(-1, 2)$를 지나므로

$2=a(-1+2)^2-1$ $\quad \therefore a=3$

즉, 구하는 이차함수의 식은

$y=3(x+2)^2-1=3x^2+12x+11$

이므로 $a=3$, $b=12$, $c=11$

$\therefore a+b+c=3+12+11=26$ 답 26

238

이차함수 $y=2x^2+mx-n$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -2와 4이므로 -2와 4는 이차방정식 $2x^2+mx-n=0$의 두 근이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$(-2)+4=-\frac{m}{2}$, $(-2)\times4=-\frac{n}{2}$

$\therefore m=-4,\ n=16$

따라서 이차함수 $y=x^2+nx-m$, 즉

$y=x^2+16x+4=(x+8)^2-60$

의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-8,\ -60)$이다.

답 $(-8,\ -60)$

239

이차함수 $y=x^2-4x-k$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2-4x-k=0$의 판별식을 D라 할 때, $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(-k)<0 \qquad \therefore k<-4$

답 $k<-4$

240

이차함수 $y=x^2+2(a+2b)x+a^2-2a+1$의 그래프가 x축에 접하므로 이차방정식 $x^2+2(a+2b)x+a^2-2a+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+2b)^2-(a^2-2a+1)=0$

$a^2+4ab+4b^2-a^2+2a-1=0$

a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$(4b+2)a+4b^2-1=0$

이 등식이 실수 a의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$4b+2=0,\ 4b^2-1=0$

$\therefore b=-\frac{1}{2}$

답 $-\frac{1}{2}$

241

이차방정식 $x^2-3x+3=x-1$, 즉 $x^2-4x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-4=0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 한 점에서 만난다.(접한다.)

답 한 점에서 만난다.(접한다.)

tip

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 위치 관계는 이차방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$의 판별식 D를 이용한다.

(1) $D>0$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $D=0$이면 한 점에서 만난다.(접한다.)

(3) $D<0$이면 만나지 않는다.

242

이차함수 $y=x^2-2x-6$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2-2x-6=2x+k$, 즉 $x^2-4x-6-k=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(-6-k)>0 \qquad \therefore k>-10$

답 $k>-10$

243

이차함수 $y=x^2-4kx+7$의 그래프가 아래로 볼록하므로 직선 $y=2x-4k^2$과 만나지 않으려면 직선보다 항상 위쪽에 있어야 한다.

이차방정식 $x^2-4kx+7=2x-4k^2$, 즉

$x^2-2(2k+1)x+4k^2+7=0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=\{-(2k+1)\}^2-(4k^2+7)<0$

$4k-6<0 \qquad \therefore k<\frac{3}{2}$

답 $k<\frac{3}{2}$

244

점 $(2,\ 3)$이 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프 위의 점이므로

$3=4+2a+b \qquad \therefore b=-2a-1$ …… ㉠

직선 $y=2x-1$이 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 접하므로 이차방정식 $x^2+ax+b=2x-1$, 즉

$x^2+(a-2)x+b+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-2)^2-4\times1\times(b+1)=0$

㉠을 위의 식에 대입하여 정리하면

$(a-2)^2-4\times(-2a)=0,\ a^2+4a+4=0$

$(a+2)^2=0 \qquad \therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$b=(-2)\times(-2)-1=3$

$\therefore a+b=-2+3=1$

답 1

245

직선 l의 기울기가 직선 $y=g(x)$, 즉 $y=-3x$의 기울기와 같으므로 직선 l의 방정식을 $y=-3x+n$ (n은 상수)이라 하자.
직선 l이 이차함수 $y=f(x)$, 즉 $y=x^2+2x$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2+2x=-3x+n$, 즉 $x^2+5x-n=0$의 판별식을 D라 하면

$D=5^2-4\times(-n)=0$

$25+4n=0 \qquad \therefore n=-\dfrac{25}{4}$

따라서 직선 l의 방정식은 $y=-3x-\dfrac{25}{4}$이다.

답 $y=-3x-\dfrac{25}{4}$

246

구하는 직선의 방정식을 $y=ax+b$ (a, b는 상수)라 하자.
이 직선이 이차함수 $y=x^2+2kx+k^2+k+1$의 그래프에 접하므로 이차방정식

$x^2+2kx+k^2+k+1=ax+b$, 즉

$x^2+(2k-a)x+k^2+k+1-b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-a)^2-4(k^2+k+1-b)=0$

$\therefore (4a+4)k-a^2+4-4b=0$

이 등식이 실수 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$4a+4=0$, $-a^2+4-4b=0$

$\therefore a=-1$, $b=\dfrac{3}{4}$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=-x+\dfrac{3}{4}$이다.

답 $y=-x+\dfrac{3}{4}$

247

이차함수 $y=3x^2-2x+1$의 그래프와 직선 $y=ax+b$의 두 교점의 x좌표는 이차방정식 $3x^2-2x+1=ax+b$, 즉

$3x^2-(a+2)x-b+1=0$ …… ㉠

의 서로 다른 두 실근이다.
이때 두 교점의 x좌표의 합이 -2, 곱이 -8이므로 이차방정식 ㉠에서 근과 계수의 관계에 의하여

$-2=\dfrac{a+2}{3}$, $-8=\dfrac{-b+1}{3} \qquad \therefore a=-8$, $b=25$

$\therefore b-a=25-(-8)=33$

답 33

248

이차함수 $y=x^2-6x$의 그래프와 직선 $y=-3x+k$가 접하므로 이차방정식 $x^2-6x=-3x+k$, 즉

$x^2-3x-k=0$ …… ㉠

의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2+4k=0 \qquad \therefore k=-\dfrac{9}{4}$

이 값을 ㉠에 대입하면 $x^2-3x+\dfrac{9}{4}=0$

이때 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 x좌표는 위의 이차방정식의 중근이므로

$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2=0 \qquad \therefore x=\dfrac{3}{2}$

교점은 직선 $y=-3x+k$, 즉 $y=-3x-\dfrac{9}{4}$ 위의 점이므로 교점의 y좌표는

$y=-3\times\dfrac{3}{2}-\dfrac{9}{4}=-\dfrac{27}{4}$

즉, 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 좌표는

$\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{27}{4}\right)$이므로 $a=\dfrac{3}{2}$, $b=-\dfrac{27}{4}$

$\therefore a+b=\dfrac{3}{2}+\left(-\dfrac{27}{4}\right)=-\dfrac{21}{4}$

답 $-\dfrac{21}{4}$

249

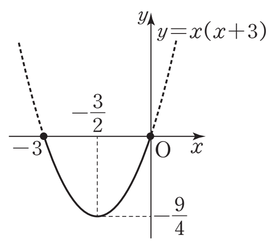
함수 $f(x)=\begin{cases} x(x+3) & (-3\le x\le 0) \\ -x(x+3) & (x<-3 \text{ 또는 } x>0) \end{cases}$에서

(i) $y=x(x+3)=\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}$의 그래프는

㉠ 꼭짓점의 좌표가 $\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{9}{4}\right)$이다.

㉡ $x(x+3)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=0$이므로 x축과 두 점 $(-3, 0)$, $(0, 0)$에서 만난다.

㉠, ㉡에서 $-3\le x\le 0$일 때 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

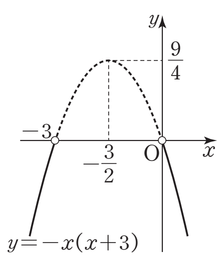


(ii) $y=-x(x+3)=-\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$의 그래프는

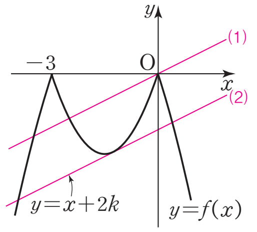
㉠ 꼭짓점의 좌표가 $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{4}\right)$이다.

㉡ $-x(x+3)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=0$이므로 x축과 두 점 $(-3, 0)$, $(0, 0)$에서 만난다.

㉠, ㉡에서 $x<-3$ 또는 $x>0$일 때 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i), (ii)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+2k$의 교점이 3개인 경우는 다음 그림의 (1) 또는 (2)와 같은 경우이다.



⑴ 직선 $y=x+2k$가 원점 $(0,\ 0)$을 지날 때
$x=0,\ y=0$을 $y=x+2k$에 대입하면
$2k=0 \qquad \therefore k=0$

⑵ 직선 $y=x+2k$가 $-3\le x\le 0$일 때의 함수 $y=f(x)$의 그래프에 접할 때
함수 $y=x^2+3x$의 그래프와 직선 $y=x+2k$가 접하므로 방정식 $x^2+3x=x+2k$, 즉 $x^2+2x-2k=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=1^2-(-2k)=0 \qquad \therefore k=-\frac{1}{2}$

⑴, ⑵에서 구하는 실수 k의 값은 0 또는 $-\frac{1}{2}$이다.

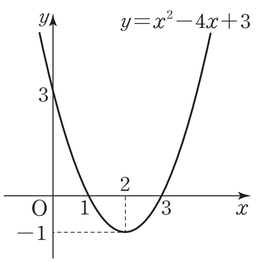
답 $0,\ -\frac{1}{2}$

250

방정식 $|x^2-4x+3|=k$의 실근의 개수는
함수 $y=|x^2-4x+3|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

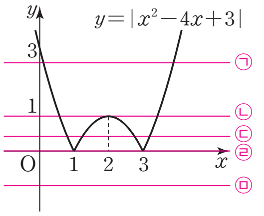
$y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$ …… ㉠

㉠의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ -1)$이고 $x=0$일 때, $y=3$이므로 y축과 점 $(0,\ 3)$에서 만난다.
또한 이차방정식 $x^2-4x+3=0$에서
$(x-1)(x-3)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=3$
즉, ㉠의 그래프는 x축과 두 점 $(1,\ 0),\ (3,\ 0)$에서 만나므로
함수 $y=x^2-4x+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



한편, $y=|x^2-4x+3|$의 그래프는
(i) $x<1$일 때, $x^2-4x+3>0$이므로
$|x^2-4x+3|=x^2-4x+3$
(ii) $1\le x\le 3$일 때, $x^2-4x+3\le 0$이므로
$|x^2-4x+3|=-x^2+4x-3$
(iii) $x>3$일 때, $x^2-4x+3>0$이므로
$|x^2-4x+3|=x^2-4x+3$

(i)~(iii)에서
$$y=|x^2-4x+3|=\begin{cases} x^2-4x+3 & (x<1 \text{ 또는 } x>3) \\ -x^2+4x-3 & (1\le x\le 3)\end{cases}$$
이므로 $y=|x^2-4x+3|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 실근의 개수는 k의 값의 범위에 따라 다음과 같이 구할 수 있다.
㉠ $k>1$일 때, 교점이 2개이므로 실근의 개수도 2이다.
㉡ $k=1$일 때, 교점이 3개이므로 실근의 개수도 3이다.
㉢ $0<k<1$일 때, 교점이 4개이므로 실근의 개수도 4이다.
㉣ $k=0$일 때, 교점이 2개이므로 실근의 개수도 2이다.
㉤ $k<0$일 때, 교점이 없으므로 실근의 개수도 0이다.

답 풀이 참조

tip
절댓값 기호 안에 있는 식의 부호를 나누면 절댓값 기호를 없앨 수 있다.
$$|a|=\begin{cases} a & (a\ge 0) \\ -a & (a<0)\end{cases}$$

251

$-1,\ 5$가 이차방정식 $x^2+ax-b=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$(-1)+5=-a,\ (-1)\times 5=-b \qquad \therefore a=-4,\ b=5$
이차함수 $y=x^2+bx-a$, 즉 $y=x^2+5x+4$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표는 방정식 $x^2+5x+4=0$의 두 근과 같으므로
$(x+4)(x+1)=0 \qquad \therefore x=-4$ 또는 $x=-1$
따라서 x축과 만나는 두 점은 $(-4,\ 0),\ (-1,\ 0)$이므로 두 점 사이의 거리는
$(-1)-(-4)=3$

답 3

252

이차함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f(-2)=f(4)=0$이므로
$-2,\ 4$는 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이다.
즉, $f(2x-1)=0$이 되려면

$2x-1=-2$ 또는 $2x-1=4$ $\quad \therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{5}{2}$

따라서 방정식 $f(2x-1)=0$의 두 근의 합은

$\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}=2$ 답 2

[다른 풀이]

$f(x)$의 함수식을 직접 구할 수도 있다.

주어진 이차함수 $y=f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고

$f(-2)=f(4)=0$이므로

$f(x)=(x+2)(x-4)$

$\therefore f(2x-1)=(2x-1+2)(2x-1-4)$

$=(2x+1)(2x-5)$

방정식 $f(2x-1)=0$에서

$(2x+1)(2x-5)=0$ $\quad \therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{5}{2}$

따라서 두 근의 합은 $\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}=2$이다.

tip

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이면 $f(\alpha)=0, f(\beta)=0$이므로 $f(ax+b)=0$의 두 근은

$ax+b=\alpha, ax+b=\beta$에서

$x=\frac{\alpha-b}{a}$ 또는 $x=\frac{\beta-b}{a}$

17 이차함수의 최대, 최소 (1)

체크 253

$y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$이므로

$x=-1$일 때 최솟값 $m=-4$를 갖는다.

$y=-2x^2+4x-5=-2(x-1)^2-3$이므로

$x=1$일 때 최댓값 $M=-3$을 갖는다.

$\therefore M-m=(-3)-(-4)=1$ 답 1

체크 254

$y=-2x^2+8x+k-1$

$=-2(x^2-4x)+k-1$

$=-2(x-2)^2+k+7$

이므로 $x=2$일 때 최댓값 $k+7$을 갖는다.

이때 최댓값이 4이므로 $k+7=4$

$\therefore k=-3$ 답 -3

체크 255

$y=3x^2-ax+b=3\left(x^2-\frac{a}{3}x\right)+b$

$=3\left(x-\frac{a}{6}\right)^2+b-\frac{a^2}{12}$

이 함수의 그래프의 축의 방정식이 $x=-3$이므로

$\frac{a}{6}=-3$ $\quad \therefore a=-18$

최솟값이 1이므로

$b-\frac{a^2}{12}=1$, $b-\frac{(-18)^2}{12}=1$, $b-27=1$ $\quad \therefore b=28$

$\therefore a+b=(-18)+28=10$ 답 10

[다른 풀이]

주어진 이차함수의 축의 방정식이 $x=-3$, 최솟값이 1이므로 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-3, 1)$이다.

이때 x^2의 계수가 3이므로

$y=3(x+3)^2+1=3x^2+18x+28=3x^2-ax+b$

$\therefore a=-18, b=28$ $\quad \therefore a+b=(-18)+28=10$

체크 256

$f(x)=kx^2-2kx+3$

$=k(x^2-2x+1-1)+3$

$=k(x-1)^2-k+3$

$k<0$이고, 이 함수의 그래프의 꼭짓점의 x좌표 1이 $2\le x\le 5$에 포함되지 않으므로 $x=2$일 때 최댓값 3을 갖고, $x=5$일 때 최솟값 -27을 갖는다.

즉, $f(5)=15k+3=-27$이므로 $k=-2$ 답 -2

체크 257

$y=3x^2+6x+a$

$=3(x^2+2x+1-1)+a$

$=3(x+1)^2+a-3$

이 함수의 그래프의 꼭짓점의 x좌표 -1이 $0\le x\le 2$에 포함되지 않으므로 $x=0$일 때 최솟값 a를 갖고, $x=2$일 때 최댓값 $a+24$를 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 차는

$(a+24)-a=24$ 답 24

18 이차함수의 최대, 최소 (2)

체크 258

$-x^2-(y^2-6y+9)+10=-x^2-(y-3)^2+10$

이때 x, y는 실수이므로 $x^2\ge 0$, $(y-3)^2\ge 0$

$-x^2\le 0$, $-(y-3)^2\le 0$

$\therefore -x^2-y^2+6y+1\le 10$

따라서 주어진 식은 $x=0$, $y=3$일 때, 최댓값 10을 가지므로

$a=0$, $b=3$, $p=10$

$\therefore a^2+b^2+p^2=0^2+3^2+10^2=109$ 답 109

체크 259

$2x+y-2=0$을 y에 대하여 정리하면

$y=-2x+2$

$y=-2x+2$를 $2x^2-y^2$에 대입하면

$$\begin{aligned}2x^2-y^2&=2x^2-(-2x+2)^2\\&=2x^2-(4x^2-8x+4)\\&=-2x^2+8x-4\\&=-2(x-2)^2+4\end{aligned}$$

따라서 주어진 식은 $x=2$일 때, 최댓값 4를 갖는다.

답 4

체크 260

$x+3y^2=2$에서 $3y^2=2-x\geq0$이므로

$x\leq2$ …… ㉠

$3y^2=2-x$를 $2x^2-3y^2+5x$에 대입하면

$$\begin{aligned}2x^2-3y^2+5x&=2x^2-(2-x)+5x\\&=2x^2+6x-2\\&=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{13}{2}\end{aligned}$$

이를 x에 대한 이차함수로 보면 꼭짓점의 x좌표 $-\frac{3}{2}$은 ㉠의 범위에 포함된다.

따라서 주어진 식은 $x=-\frac{3}{2}$일 때, 최솟값 $-\frac{13}{2}$을 갖는다.

답 $-\frac{13}{2}$

tip

$x+3y^2=2$에서 $3y^2=2-x$로 변형하여 대입하는 것이 계산이 더 간단하다.

체크 261

주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+2(2y-3)x+4y^2-15=0$

이 등식을 x에 대한 이차방정식으로 보면 x가 실수이므로 이 이차방정식은 실근을 갖는다.

판별식을 D라 하면

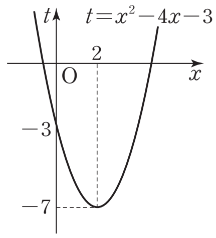
$\frac{D}{4}=(2y-3)^2-(4y^2-15)\geq0$

$-12y+24\geq0$ $\quad\therefore y\leq2$

따라서 y의 최댓값은 2이다.

답 2

체크 262



$x^2-4x-3=t$로 놓으면

$$\begin{aligned}t&=x^2-4x-3\\&=(x-2)^2-7\end{aligned}$$

즉, $x=2$일 때 t의 최솟값은 -7이므로 실수 x에 대하여 $t\geq-7$이다.

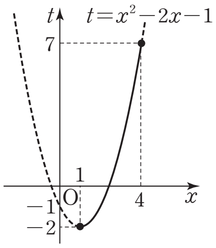
$$\begin{aligned}\therefore \text{(주어진 식)}&=-t^2-4t+5\\&=-(t+2)^2+9\end{aligned}$$

이를 t에 대한 이차함수로 보면 꼭짓점의 t좌표 -2가 $t\geq-7$에 속한다.

따라서 주어진 식은 $t=-2$일 때, 최댓값 9를 갖는다.

답 9

체크 263



$x^2-2x-1=t$로 놓으면

$$\begin{aligned}t&=x^2-2x-1\\&=(x-1)^2-2\end{aligned}$$

이를 x에 대한 이차함수로 보면 꼭짓점의 x좌표 1이 $1\leq x\leq4$에 속한다.

즉, $x=1$일 때 t의 최솟값은 -2이고

$x=4$일 때 t의 최댓값은

$t=(4-1)^2-2=7$이므로

$-2\leq t\leq7$ …… ㉠

$x^2-2x-1=t$로 놓았으므로

(주어진 식)$=-t^2+6t+3=-(t-3)^2+12$

이를 t에 대한 이차함수로 보면 꼭짓점의 t좌표 3은 ㉠에 속한다.

따라서 주어진 식은 $t=3$일 때 최댓값 12를 갖고, $t=-2$일 때 최솟값 $-(-2-3)^2+12=-13$을 가지므로 최댓값과 최솟값의 합은

$12+(-13)=-1$

답 -1

체크 264

$$\begin{aligned}y&=2x^2+8ax+5a^2+6a+1\\&=2(x^2+4ax)+5a^2+6a+1\\&=2(x^2+4ax+4a^2-4a^2)+5a^2+6a+1\\&=2(x+2a)^2-3a^2+6a+1\end{aligned}$$

즉, 주어진 이차함수는 $x=-2a$일 때 최솟값 $-3a^2+6a+1$을 가지므로 $f(a)=-3a^2+6a+1$이다.

$$\begin{aligned}f(a)&=-3a^2+6a+1\\&=-3(a^2-2a)+1=-3(a^2-2a+1-1)+1\\&=-3(a-1)^2+4\end{aligned}$$

따라서 $f(a)$는 $a=1$일 때 최댓값 4를 갖는다.

답 4

체크 **265**

판매한 장난감의 개수가 일정할 때, 장난감 한 개의 판매 가격 x만 원과 하루 수입 y만 원 사이의 관계에서

$y=-30x^2+180x$

$=-30(x^2-6x)=-30(x^2-6x+9-9)$

$=-30(x-3)^2+270$

즉, y는 $x=3$일 때 최댓값 270을 갖는다.

따라서 장난감 한 개의 판매 가격이 3만 원일 때, 하루 수입이 270만 원으로 최대가 된다.

답 한 개의 판매 가격 : 3만 원, 최대 하루 수입 : 270만 원

연습 문제 10

266

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 이차함수 $y=2x^2$의 그래프와 폭이 같고 최댓값을 갖는 함수이므로

$a=-2$

또한 $x=-2$일 때 최댓값 5를 가지므로

$y=ax^2+bx+c$

$=-2\{x-(-2)\}^2+5=-2(x+2)^2+5$

$=-2x^2-8x-3$

$\therefore b=-8,\ c=-3$ 답 $a=-2,\ b=-8,\ c=-3$

267

$f(x)=x^2-2kx+4k=(x-k)^2-k^2+4k$

즉, 이차함수 $f(x)$는 $x=k$일 때 최솟값 $-k^2+4k$를 가지므로

$-k^2+4k=-3$에서 $k^2-4k-3=0$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은 근과 계수의 관계에 의하여 4이다. 답 4

[보충설명]

이차방정식 $k^2-4k-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(-3)=7>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

268

$y=kx^2+4x+k-1$

$=k\left(x^2+\frac{4}{k}x\right)+k-1=k\left(x^2+\frac{4}{k}x+\frac{4}{k^2}-\frac{4}{k^2}\right)+k-1$

$=k\left(x+\frac{2}{k}\right)^2-\frac{4}{k}+k-1$

이 이차함수가 최댓값을 가지므로 $k<0$

최댓값을 가질 때의 x의 값이 2이므로

$-\frac{2}{k}=2 \qquad \therefore k=-1$

최댓값은 $p=-\frac{4}{-1}+(-1)-1=2$

$\therefore k+p=(-1)+2=1$ 답 1

[다른 풀이]

x^2의 계수가 k이고 $x=2$일 때 최댓값 p를 갖는 이차함수는

$y=k(x-2)^2+p=kx^2-4kx+4k+p$

이 이차함수가 $y=kx^2+4x+k-1$과 일치하므로

$-4k=4,\ 4k+p=k-1 \qquad \therefore k=-1,\ p=2$

$\therefore k+p=(-1)+2=1$

269

$y=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$

이 함수의 그래프의 꼭짓점의 x좌표 -1은 $0\le x\le 3$에 포함되지 않으므로 주어진 이차함수는 $x=0$일 때 최댓값 3, $x=3$일 때 최솟값 -12를 갖는다.

답 최댓값 : 3, 최솟값 : -12

270

$y=x^2-2x-4=(x-1)^2-5$

이 함수의 그래프의 꼭짓점의 x좌표 1이 $-3\le x\le a$에 포함된다고 하면 $x=1$일 때 최솟값 -5를 가지므로 최솟값이 -1이라는 조건에 맞지 않다.

즉, 꼭짓점의 x좌표 1은 $-3\le x\le a$에 포함되지 않는다.

$\therefore a<1$ …… ㉠

따라서 $-3\le x\le a$에서 이차함수 $y=x^2-2x-4$는 $x=-3$일 때 최댓값을 갖고, $x=a$일 때 최솟값을 갖는다.

최솟값이 -1이므로 $a^2-2a-4=-1$

$a^2-2a-3=0,\ (a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-1$ ($\because$ ㉠) 답 -1

271

$2x^2+8x+y^2-6y+13$

$=2(x^2+4x+4)+(y^2-6y+9)+13-8-9$

$=2(x+2)^2+(y-3)^2-4$

이때 $x,\ y$는 실수이므로 $2(x+2)^2\ge 0,\ (y-3)^2\ge 0$

$\therefore 2x^2+8x+y^2-6y+13\ge -4$

따라서 주어진 이차식은 $x=-2,\ y=3$일 때, 최솟값 -4를 가지므로 $a=-2,\ b=3,\ m=-4$

$\therefore a+b+m=(-2)+3+(-4)=-3$ 답 -3

tip

실수 $x,\ y$에 대한 이차식의 최댓값과 최솟값을 구하기 위해서는 (실수)$^2\ge 0$임을 이용하여 주어진 식을 변형한다.

272

$2x+y^2=5$에서 $y^2=5-2x\geq 0$이므로

$x\leq\frac{5}{2}$ …… ㉠

$y^2=5-2x$를 y^2+3x^2에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned}y^2+3x^2&=(5-2x)+3x^2\\&=3x^2-2x+5\\&=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{14}{3}\end{aligned}$$

따라서 y^2+3x^2은 $x=\frac{1}{3}$일 때 최솟값 $\frac{14}{3}$를 가지므로

$a=\frac{14}{3}$, $b=\frac{1}{3}$

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{\frac{14}{3}}{\frac{1}{3}}=14$ 답 14

273

주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리하면

$y^2-2(x-1)y+x^2+5=0$

이 식을 y에 대한 이차방정식으로 보면 y가 실수이므로 이 방정식은 실근을 갖는다.

판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(x-1)\}^2-(x^2+5)\geq 0$

$-2x-4\geq 0$ $\therefore x\leq -2$

따라서 x의 최댓값은 -2이다. 답 -2

274

$(-x^2+4x)^2-8(-x^2+4x)+2$에서 $-x^2+4x=t$로 놓으면

$t=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$

즉, t의 최댓값은 $x=2$일 때 4이므로

$t\leq 4$ …… ㉠

$-x^2+4x=t$로 놓았으므로

(주어진 식)$=t^2-8t+2=(t-4)^2-14$

이를 t에 대한 이차함수로 보면 꼭짓점의 t좌표 4가 ㉠에 포함되므로 $t=4$일 때 최솟값 -14를 갖는다.

$\therefore q=-14$

이때 최솟값을 갖는 것은 $t=4$일 때이므로 $-x^2+4x=4$에서

$x^2-4x+4=0$, $(x-2)^2=0$ $\therefore x=2$

즉, 주어진 식이 최솟값을 갖는 것은 $x=2$일 때이므로

$p=2$

$\therefore p+q=2+(-14)=-12$ 답 -12

tip

공통부분이 있는 함수의 최대, 최소는 공통부분을 t로 치환하고, t의 값의 범위에 주의한다.

275

$y=-x^2-4kx+6k=-(x+2k)^2+4k^2+6k$

주어진 이차함수는 $x=-2k$일 때 최댓값 $4k^2+6k$를 가지므로

$M=4k^2+6k=4\left(k^2+\frac{3}{2}k\right)=4\left(k+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{4}$

따라서 M은 $k=-\frac{3}{4}$일 때 최솟값 $-\frac{9}{4}$를 가지므로

$a=-\frac{3}{4}$, $b=-\frac{9}{4}$

$\therefore 16ab=16\times\left(-\frac{3}{4}\right)\times\left(-\frac{9}{4}\right)=27$ 답 27

276

$y=-5x^2+40x+30=-5(x-4)^2+110$

이 함수의 그래프의 꼭짓점의 x좌표 4는 $2\leq x\leq 7$에 포함되므로 y는 $x=7$일 때 최솟값 65를 갖는다.

따라서 물체를 쏘아 올린 후 2초 이상 7초 이하에서 이 물체의 최소 높이는 65 m이다. 답 65 m

277

아이스크림 한 개의 가격을 x원 내릴 때의 판매 금액을 $f(x)$라 하면

$$\begin{aligned}f(x)&=(500-x)(200+2x)\\&=-2(x^2-400x-50000)\\&=-2(x-200)^2+180000\end{aligned}$$

따라서 금액 $f(x)$는 $x=200$일 때 최대이고, 이때의 아이스크림 한 개의 가격은 $500-200=300$ (원)이다.

답 300원

278

$\overline{DE}=x$라 하면 두 삼각형 DBE와 GCF는 서로 합동인 직각이등변삼각형이므로

$\overline{BE}=\overline{CF}=\overline{DE}=\overline{GF}=x$ $\therefore \overline{EF}=20-2x$

직사각형 DEFG의 넓이를 S라 하면

$S=x(20-2x)=-2x^2+20x=-2(x-5)^2+50$

이때 x는 길이이므로 $x>0$

또한 $\overline{EF}>0$이어야 하므로 $0<x<10$

따라서 $0<x<10$에서 S는 $x=5$일 때 최댓값 50을 가지므로

직사각형 DEFG의 넓이의 최댓값은 50이다. 답 50

279

점 P의 x좌표를 a라 하면 선분 PQ의 길이가 최소가 되어야 하므로 $a<0$

점 P는 이차함수 $y=-x^2+3$의 그래프 위의 점이므로

$P(a,\ -a^2+3)$

두 점 P, Q의 y좌표는 서로 같고 점 Q는 직선 $y=x+5$ 위의 점이므로 점 Q의 x좌표는

$-a^2+3=x+5 \qquad \therefore x=-a^2-2$

$\therefore Q(-a^2-2,\ -a^2+3)$

이때 선분 PQ는 x축에 평행하므로 선분 PQ의 길이는 두 점 P, Q의 x좌표의 차와 같다.

$\therefore \overline{PQ}=a-(-a^2-2)=a^2+a+2=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$

따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은 $a=-\frac{1}{2}$일 때 $\frac{7}{4}$이다.

답 $\frac{7}{4}$

280

이차함수 $y=x^2-3x+2$의 그래프와 y축의 교점의 좌표는

$A(0,\ 2)$

또한 $x^2-3x+2=0$에서

$(x-1)(x-2)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=2$

즉, 이차함수의 그래프와 x축의 두 교점의 좌표는

$B(1,\ 0)$, $C(2,\ 0)$

이때 점 $P(a,\ b)$가 이차함수의 그래프를 따라 점 A에서 점 B를 거쳐 점 C까지 움직이므로 점 P의 x좌표의 범위는

$0\le a\le 2$ …… ㉠

점 $P(a,\ b)$는 이차함수 $y=x^2-3x+2$의 그래프 위의 점이므로 $b=a^2-3a+2$

이를 $a+b+3$에 대입하면

$$\begin{aligned} a+b+3&=a+(a^2-3a+2)+3\\ &=a^2-2a+5\\ &=(a-1)^2+4 \end{aligned}$$

이를 a에 대한 이차함수로 보면 그래프의 꼭짓점의 a좌표 1이 ㉠에 포함되므로 $a+b+3$은 $a=0$ 또는 $a=2$일 때 최댓값 5를 갖고, $a=1$일 때 최솟값 4를 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 9이다.

답 9

281

이차함수 $y=-x^2+ax+b$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표가 2, 6이므로

$y=-x^2+ax+b=-(x-2)(x-6)=-x^2+8x-12$

$\therefore a=8,\ b=-12$

이차함수 $y=-x^2+8x-12$의 그래프 위의 점 D의 x좌표가 m일 때, $2<m<6$이고 좌표는

$D(m,\ -m^2+8m-12)$

이차함수 $y=x^2-8x+12$의 그래프 위의 점 C의 x좌표는 점 D의 x좌표와 같으므로

$C(m,\ m^2-8x+12)$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{CD}&=(-m^2+8m-12)-(m^2-8m+12)\\ &=-2m^2+16m-24 \end{aligned}$$

한편, 이차함수 $y=x^2-8x+12=(x-4)^2-4$의 그래프의 축의 방정식은 $x=4$이므로 축과 선분 AD의 교점을 E라 하면 점 E의 x좌표는 4이다.

즉, $\overline{DE}=m-4$이므로

$\overline{AD}=2\times\overline{DE}=2(m-4)=2m-8$

직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 l이라 하면

$$\begin{aligned} l&=2(\overline{AD}+\overline{CD})\\ &=2(2m-8-2m^2+16m-24)\\ &=-4m^2+36m-64\\ &=-4\left(m-\frac{9}{2}\right)^2+17 \end{aligned}$$

즉, $2<m<6$에서 l은 $m=\frac{9}{2}$일 때 최댓값 17을 가지므로

$m=\frac{9}{2}$, $M=17$

$\therefore am+b+M=8\times\frac{9}{2}-12+17=41$

답 41

4 여러 가지 방정식

19 삼차방정식과 사차방정식

체크 282

(1) $x^4-x^3-2x^2=0$에서 $x^2(x^2-x-2)=0$

$x^2(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=0$ (중근) 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$

(2) $f(x)=x^3-10x+9$라 하면 $f(1)=1-10+9=0$

다음과 같이 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -10 & 9 \\ & & 1 & 1 & -9 \\ \hline & 1 & 1 & -9 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2+x-9)$

따라서 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2+x-9)=0$이므로

$x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{37}}{2}$

답 (1) $x=0$ (중근) 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$

(2) $x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{37}}{2}$

체크 283

$f(x)=x^4+x^3+2x^2-x-3$이라 하면

$f(1)=1+1+2-1-3=0$

$f(-1)=1-1+2-(-1)-3=0$

다음과 같이 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & -3 \\ & & 1 & 2 & 4 & 3 \\ \hline -1 & 1 & 2 & 4 & 3 & \boxed{0} \\ & & -1 & -1 & -3 & \\ \hline & 1 & 1 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+x+3)$

따라서 주어진 방정식은 $(x-1)(x+1)(x^2+x+3)=0$이므로 두 허근 α, β는 이차방정식 $x^2+x+3=0$의 두 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=3$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-1)^2-2\times3=-5$ 답 -5

체크 284

방정식 $(x^2+x+2)^2+2(x^2+x)+1=0$에서

$(x^2+x+2)^2+2(x^2+x+2)-3=0$

$x^2+x+2=X$로 놓으면

$X^2+2X-3=0$, $(X+3)(X-1)=0$

$\therefore X=-3$ 또는 $X=1$

즉, $x^2+x+2=-3$ 또는 $x^2+x+2=1$에서

$x^2+x+5=0$ 또는 $x^2+x+1=0$

$x^2+x+5=0$에서 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{19}i}{2}$

$x^2+x+1=0$에서 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

따라서 주어진 방정식의 해는

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{19}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

답 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{19}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

체크 285

$(x+1)(x+2)^2(x+3)=20$에서

$\{(x+1)(x+3)\}(x+2)^2=20$

$(x^2+4x+3)(x^2+4x+4)=20$

$x^2+4x=X$로 놓으면

$(X+3)(X+4)=20$, $X^2+7X+12=20$

$X^2+7X-8=0$, $(X+8)(X-1)=0$

$\therefore X=-8$ 또는 $X=1$

(i) $X=-8$일 때

$x^2+4x=-8$에서 $x^2+4x+8=0$

이차방정식 $x^2+4x+8=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=2^2-1\times8=-4<0$

이므로 이차방정식 $x^2+4x+8=0$은 허근을 갖는다.

(ii) $X=1$일 때

$x^2+4x=1$에서 $x^2+4x-1=0$

이차방정식 $x^2+4x-1=0$의 판별식을 D'이라 하면

$\dfrac{D'}{4}=2^2-1\times(-1)=5>0$

이므로 이차방정식 $x^2+4x-1=0$은 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 사차방정식의 두 허근 α, β는 이차방정식 $x^2+4x+8=0$의 두 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=8$

$\therefore \alpha+\beta+\alpha\beta=(-4)+8=4$ 답 4

체크 286

(1) $x^4-10x^2+9=0$에서 $x^2=X$로 놓으면

$X^2-10X+9=0$, $(X-1)(X-9)=0$

$\therefore X=1$ 또는 $X=9$

$X=1$에서 $x^2=1$ $\quad\therefore x=\pm1$

$X=9$에서 $x^2=9$ $\quad\therefore x=\pm3$

따라서 주어진 사차방정식의 근은

$x=\pm1$ 또는 $x=\pm3$

(2) $x^4-16x^2+36=0$에서 $(x^4-12x^2+36)-4x^2=0$

$(x^2-6)^2-(2x)^2=0,\ (x^2+2x-6)(x^2-2x-6)=0$

$x^2+2x-6=0$에서 $x=-1\pm\sqrt{7}$

$x^2-2x-6=0$에서 $x=1\pm\sqrt{7}$

따라서 사차방정식의 양의 근은

$x=1+\sqrt{7},\ x=-1+\sqrt{7}$이므로 그 합은

$(1+\sqrt{7})+(-1+\sqrt{7})=2\sqrt{7}$

답 (1) $x=\pm1$ 또는 $x=\pm3$ (2) $2\sqrt{7}$

tip

차수가 짝수인 항과 상수항으로만 이루어진 $x^4+ax^2+b=0$ 꼴의 방정식을 복이차방정식이라 한다.

체크 287

$x\neq0$이므로 방정식 $x^4-3x^3+4x^2-3x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$$x^2-3x+4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0,\ \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2-3X+2=0,\ (X-1)(X-2)=0$

$\therefore X=1$ 또는 $X=2$

(i) $X=1$일 때, $x+\frac{1}{x}=1$에서 $x^2-x+1=0$

$\therefore x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(ii) $X=2$일 때, $x+\frac{1}{x}=2$에서 $x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0 \qquad \therefore x=1$ (중근)

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=1$ (중근)

답 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=1$ (중근)

체크 288

$x^3-ax^2+(b+1)x+3b=0$에

$x=-1$을 대입하면

$-1-a-b-1+3b=0 \qquad \therefore -a+2b=2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x=2$를 대입하면

$8-4a+2b+2+3b=0 \qquad \therefore -4a+5b=-10 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=10,\ b=6$

이것을 주어진 방정식에 대입하면

$x^3-10x^2+7x+18=0$

$f(x)=x^3-10x^2+7x+18$이라 하면 삼차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 -1, 2이므로 $f(-1)=0,\ f(2)=0$

다음과 같이 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-1	1	-10	7	18
		-1	11	-18
2	1	-11	18	0
		2	-18	
	1	-9	0	

$f(x)=(x+1)(x-2)(x-9)$

따라서 주어진 삼차방정식은 $(x+1)(x-2)(x-9)=0$이므로 나머지 한 근은 9이다.

답 9

체크 289

$x^4-x^3+ax+b=0$에

$x=1$을 대입하면

$1-1+a+b=0 \qquad \therefore a+b=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x=-2$를 대입하면

$16+8-2a+b=0 \qquad \therefore 2a-b=24 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=8,\ b=-8$

이것을 주어진 방정식에 대입하면

$x^4-x^3+8x-8=0$

$f(x)=x^4-x^3+8x-8$이라 하면 사차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 1, -2이므로 $f(1)=0,\ f(-2)=0$

다음과 같이 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	-1	0	8	-8
		1	0	0	8
-2	1	0	0	8	0
		-2	4	-8	
	1	-2	4	0	

$f(x)=(x-1)(x+2)(x^2-2x+4)$

따라서 주어진 사차방정식은

$(x-1)(x+2)(x^2-2x+4)=0$이므로 $\alpha,\ \beta$는 이차방정식 $x^2-2x+4=0$의 두 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=4$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\times4=-4$

답 -4

체크 290

$x=1$을 $x^3+3x^2+(a-4)x-a=0$에 대입하면 등식이 성립하므로 다음과 같이 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 3 & a-4 & -a \\ & & 1 & 4 & a \\ \hline & 1 & 4 & a & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array}$$

$(x-1)(x^2+4x+a)=0$

$\therefore$ $x=1$ 또는 $x^2+4x+a=0$

주어진 방정식의 실근이 $x=1$ 하나뿐인 경우는 다음과 같다.

(i) 이차방정식 $x^2+4x+a=0$이 $x=1$을 중근으로 가지는 경우

$x=1$을 $x^2+4x+a=0$에 대입하면

$1+4+a=0$ $\quad\therefore a=-5$

그런데 $x^2+4x-5=0$에서 $(x+5)(x-1)=0$

$\therefore$ $x=-5$ 또는 $x=1$

즉, 이차방정식 $x^2+4x-5=0$은 $x=1$을 중근으로 갖지 않는다.

(ii) 이차방정식 $x^2+4x+a=0$이 허근을 가지는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-a<0$ $\quad\therefore a>4$

(i), (ii)에서 실수 a의 값의 범위는 $a>4$이다. **답** $a>4$

체크 291

$x=-1$을 $x^3+5x^2+(a+4)x+a=0$에 대입하면 등식이 성립하므로 다음과 같이 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 5 & a+4 & a \\ & & -1 & -4 & -a \\ \hline & 1 & 4 & a & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array}$$

$(x+1)(x^2+4x+a)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x^2+4x+a=0$

주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2+4x+a=0$은 $x\neq-1$인 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) $x=-1$일 때

이차방정식 $x^2+4x+a=0$이 $x=-1$을 근으로 갖지 않아야 하므로

$(-1)^2+4\times(-1)+a\neq0$에서 $a\neq3$

(ii) $x\neq-1$일 때

이차방정식 $x^2+4x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-a>0$ $\quad\therefore a<4$

(i), (ii)에서 자연수 a는 1, 2의 2개이다. **답** 2

tip

삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근은 다음 중 한 경우이다.

① 서로 다른 세 실근 ② 중근과 한 실근

③ 삼중근(실근) ④ 한 실근과 두 허근

체크 292

원기둥의 반지름의 길이를 x (x는 자연수)라 하면 반지름의 길이와 높이를 각각 1만큼 늘인 원기둥의 반지름의 길이와 높이는 $x+1$이고, 이 원기둥의 부피가 처음 원기둥의 부피의 3배보다 5π만큼 크므로

$3\pi x^3+5\pi=\pi(x+1)^3$, $3\pi x^3+5\pi=\pi(x^3+3x^2+3x+1)$

$\therefore 2x^3-3x^2-3x+4=0$

$f(x)=2x^3-3x^2-3x+4$라 하면

$f(1)=2-3-3+4=0$

다음과 같이 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -3 & -3 & 4 \\ & & 2 & -1 & -4 \\ \hline & 2 & -1 & -4 & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(2x^2-x-4)$

즉, $(x-1)(2x^2-x-4)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{33}}{4}$

그런데 x는 자연수이므로 $x=1$

따라서 처음 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 1이다. **답** 1

tip

원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r, 높이를 h라 하면

(원기둥의 부피)=(밑면의 넓이)×(높이)

$=\pi r^2\times h$

$=\pi r^2 h$

체크 293

직육면체의 세 모서리의 길이가 각각 $x-2$, $x+1$, $x+2$이므로

$x-2>0$, $x+1>0$, $x+2>0$ $\quad\therefore x>2$

또한 직육면체의 부피가 20이므로

$(x+1)(x+2)(x-2)=20$

$\therefore x^3+x^2-4x-24=0$

$f(x)=x^3+x^2-4x-24$라 하면

$f(3)=27+9-12-24=0$

다음과 같이 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & 1 & -4 & -24 \\ & & 3 & 12 & 24 \\ \hline & 1 & 4 & 8 & \multicolumn{1}{|r}{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-3)(x^2+4x+8)$

즉, $(x-3)(x^2+4x+8)=0$에서 $x=3$ 또는 $x=-2\pm2i$

그런데 x는 실수이므로 $x=3$

따라서 직육면체의 세 모서리의 길이가 각각 1, 4, 5이므로 겉넓이는

$2\times(1\times4+4\times5+5\times1)=58$ **답** 58

연습 문제 11

294

(1) $x^4-x^3-x^2+x=0$에서

$x^3(x-1)-x(x-1)=0$

$(x-1)(x^3-x)=0$, $x(x+1)(x-1)^2=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$ (중근)

(2) $f(x)=x^3-4x^2+7x-4$라 하면

$f(1)=1-4+7-4=0$

다음과 같이 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -4 & 7 & -4 \\ & & 1 & -3 & 4 \\ \hline & 1 & -3 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2-3x+4)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2-3x+4)=0$이므로

$x=1$ 또는 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{7}i}{2}$

답 (1) $x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$ (중근)

(2) $x=1$ 또는 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{7}i}{2}$

tip

다항식 $f(x)$에서 $f(\alpha)=0$이면 $x-\alpha$는 $f(x)$의 인수이므로 방정식 $f(x)=0$의 좌변을 조립제법을 이용하여 $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$ 꼴로 인수분해한다.

295

$4x^4-5x^3-4x^2+5x=0$에서

$4x^2(x^2-1)-5x(x^2-1)=0$

$(x^2-1)(4x^2-5x)=0$

$x(x+1)(x-1)(4x-5)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{5}{4}$

따라서 가장 큰 실근은 $\alpha=\dfrac{5}{4}$, 가장 작은 실근은 $\beta=-1$이므로

$\alpha-\beta=\dfrac{5}{4}-(-1)=\dfrac{9}{4}$　　답 $\dfrac{9}{4}$

296

$(x^2-2x)^2=-2x^2+4x+8$에서

$(x^2-2x)^2=-2(x^2-2x)+8$

$\therefore$ $(x^2-2x)^2+2(x^2-2x)-8=0$

$x^2-2x=X$로 놓으면

$X^2+2X-8=0$

$(X+4)(X-2)=0$　　$\therefore$ $X=-4$ 또는 $X=2$

(i) $X=-4$에서 $x^2-2x+4=0$

$\therefore$ $x=1\pm\sqrt{3}i$

(ii) $X=2$에서 $x^2-2x-2=0$

$\therefore$ $x=1\pm\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=1\pm\sqrt{3}i$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}$

답 $x=1\pm\sqrt{3}i$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}$

297

$(x^2+x+1)^2=x^2+x+3$에서

$(x^2+x+1)^2-(x^2+x+1)-2=0$

$x^2+x+1=X$로 놓으면

$X^2-X-2=0$

$(X-2)(X+1)=0$　　$\therefore$ $X=2$ 또는 $X=-1$

(i) $X=-1$일 때, $x^2+x+2=0$

판별식을 D라 하면 $D=1^2-4\times2=-7<0$

즉, 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X=2$일 때, $x^2+x-1=0$

판별식을 D'이라 하면 $D'=1^2-4\times(-1)=5>0$

즉, 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 허근은 이차방정식 $x^2+x+2=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 허근의 곱은 2이다.　　답 2

298

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-35=0$에서

$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-35=0$

$x^2+5x=X$로 놓으면

$(X+4)(X+6)-35=0$

$X^2+10X-11=0$, $(X+11)(X-1)=0$

$\therefore$ $X=-11$ 또는 $X=1$

(i) $X=-11$일 때, $x^2+5x+11=0$

판별식을 D라 하면 $D=5^2-4\times11=-19<0$

즉, 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X=1$일 때, $x^2+5x-1=0$

판별식을 D'이라 하면 $D'=5^2-4\times(-1)=29>0$

즉, 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 허근 α, β는 이차방정식 $x^2+5x+11=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-5$, $\alpha\beta=11$

$\therefore$ $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=(-5)^2-4\times11=-19$　　답 -19

299

$x^4+10x^2+16=0$에서 $x^2=X$로 놓으면

$X^2+10X+16=0$

$(X+8)(X+2)=0$ $\quad\therefore X=-8$ 또는 $X=-2$

$X=-8$에서 $x^2=-8$

$\therefore x=\pm2\sqrt{2}i$

$X=-2$에서 $x^2=-2$

$\therefore x=\pm\sqrt{2}i$

따라서 주어진 사차방정식의 네 허근 α, $\overline{\alpha}$, β, $\overline{\beta}$에 대하여

$\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}=2\sqrt{2}i\times(-2\sqrt{2}i)+\sqrt{2}i\times(-\sqrt{2}i)$

$=8+2=10$

답 10

tip

방정식 $x^4+ax^2+b=0$을 풀 때에는 다음과 같은 방법으로 푼다.

(1) $x^2=X$로 치환하여 $X^2+aX+b=0$의 좌변을 인수분해한다.

(2) $x^4+ax^2+b=0$의 이차항 ax^2을 적당히 분리하여 $(x^2+A)^2-(Bx)^2=0$ 꼴로 변형한 후 좌변을 인수분해한다.

300

$x^3+\frac{1}{x^3}=-18$에서 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=-18$

$\therefore \left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+18=0$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면 $X^3-3X+18=0$

$f(X)=X^3-3X+18$이라 하면

$f(-3)=(-3)^3-3\times(-3)+18=0$

다음과 같이 조립제법을 이용하여 $f(X)$를 인수분해하면

-3	1	0	-3	18
		-3	9	-18
	1	-3	6	0

$f(X)=(X+3)(X^2-3X+6)$

즉, 방정식 $f(X)=0$에서

$X=-3$ 또는 $X=\frac{3\pm\sqrt{15}i}{2}$

그런데 x는 실수이므로 $x+\frac{1}{x}$도 실수이다.

따라서 $X=-3$이므로

$x+\frac{1}{x}=-3$

답 -3

301

$x\neq0$이므로 사차방정식 $x^4-4x^3-3x^2-4x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2-4x-3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$x^2+\frac{1}{x^2}-4\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$

$\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}-4\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$

$\therefore \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)-5=0$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2-4X-5=0$

$(X+1)(X-5)=0$ $\quad\therefore X=-1$ 또는 $X=5$

(i) $X=-1$일 때, $x^2+x+1=0$

판별식을 D라 하면 $D=1^2-4=-3<0$

즉, 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X=5$일 때, $x^2-5x+1=0$

판별식을 D'이라 하면 $D'=(-5)^2-4=21>0$

즉, 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 사차방정식의 모든 실근은 이차방정식 $x^2-5x+1=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실근의 합은 5이다.

답 5

302

$x\neq0$이므로 사차방정식 $2x^4-3x^3+4x^2-3x+2=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$2x^2-3x+4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=0$

$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0$

$2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0$

$\therefore 2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면 $2X^2-3X=0$

$X(2X-3)=0$

$\therefore X=0$ 또는 $X=\frac{3}{2}$

즉, $x+\frac{1}{x}=0$ 또는 $x+\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$이므로

$x^2+1=0$ 또는 $2x^2-3x+2=0$이고 두 이차방정식 모두 허근을 갖는다.

그런데 주어진 사차방정식의 한 허근 α에 대하여 $\alpha+\frac{1}{\alpha}\neq0$이므로 α는 $2x^2-3x+2=0$의 근이다.

따라서 $\alpha+\frac{1}{\alpha}=\frac{3}{2}$이므로

$$\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-4=\left(\frac{3}{2}\right)^2-4$$

$$=\frac{9}{4}-4=-\frac{7}{4}$$

답 $-\frac{7}{4}$

303

삼차방정식 $x^3+x^2-2ax+a=0$에

$x=2$를 대입하면

$8+4-4a+a=0 \quad \therefore a=4$

$a=4$를 주어진 방정식에 대입하면 $x^3+x^2-8x+4=0$

$f(x)=x^3+x^2-8x+4$라 하면 $x=2$가 방정식 $f(x)=0$의 한 근이므로 $f(2)=0$

다음과 같이 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 1 & -8 & 4 \\ & & 2 & 6 & -4 \\ \hline & 1 & 3 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^2+3x-2)$

따라서 주어진 삼차방정식은

$(x-2)(x^2+3x-2)=0$이므로 α, β는 이차방정식

$x^2+3x-2=0$의 두 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=-2$

$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

304

삼차방정식 $x^3+(a+2)x^2+(2a+b)x+2b=0$이 -2를 근으로 가지므로 다음과 같이 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & a+2 & 2a+b & 2b \\ & & -2 & -2a & -2b \\ \hline & 1 & a & b & \boxed{0} \end{array}$$

$(x+2)(x^2+ax+b)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x^2+ax+b=0$

이때 주어진 삼차방정식이 중근 -2를 가지므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 -2를 근으로 가져야 한다.

따라서 $(-2)^2+a\times(-2)+b=0$에서

$b-2a=-4$

답 -4

305

삼차방정식 $x^3-(a+1)x+b=0$이 $1+i$를 근으로 가지므로

$x=1+i$를 대입하면

$(1+i)^3-(a+1)(1+i)+b=0$

$(2i-2)-(a+ai+1+i)+b=0$

$\therefore (-a+b-3)+(-a+1)i=0$

이때 a, b가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$-a+b-3=0$, $-a+1=0$

$\therefore a=1$, $b=4$

답 $a=1$, $b=4$

306

사차방정식 $x^4+ax^2+bx=0$에서

$x(x^3+ax+b)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x^3+ax+b=0$

이때 주어진 사차방정식의 서로 다른 네 근이 0, 1, 2, k이므로 1, 2, k는 삼차방정식 $x^3+ax+b=0$의 근이다.

삼차방정식 $x^3+ax+b=0$에

$x=1$을 대입하면

$1+a+b=0$ ...... ㉠

$x=2$를 대입하면

$8+2a+b=0$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-7$, $b=6$

이것을 주어진 방정식에 대입하면

$x^3-7x+6=0$

$f(x)=x^3-7x+6$이라 하면 삼차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 1, 2이므로 $f(1)=0$, $f(2)=0$

다음과 같이 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & 1 & 1 & -6 \\ \hline 2 & 1 & 1 & -6 & \boxed{0} \\ & & 2 & 6 & \\ \hline & 1 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x-2)(x+3)$

즉, 주어진 삼차방정식은 $(x-1)(x-2)(x+3)=0$이므로

$x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-3$

$\therefore k=-3$

따라서 이차함수 $y=kx^2+bx+a$에서

$y=-3x^2+6x-7$

$\quad=-3(x-1)^2-4$

이므로 그래프의 꼭짓점의 y좌표는 -4이다.

답 -4

307

1이 삼차방정식 $x^3-3x^2+(a+2)x-a=0$의 근이므로 다음과 같이 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -3 & a+2 & -a \\ & & 1 & -2 & a \\ \hline & 1 & -2 & a & \boxed{0} \end{array}$$

$(x-1)(x^2-2x+a)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x^2-2x+a=0$

주어진 방정식의 실근이 1 하나뿐인 경우는 다음과 같다.

(i) 이차방정식 $x^2-2x+a=0$이 $x=1$을 중근으로 가질 때

$x^2-2x+a=0$에 $x=1$을 대입하면

$1-2+a=0 \qquad \therefore a=1$

이때 $x^2-2x+1=0$에서

$(x-1)^2=0 \qquad \therefore x=1$ (중근)

(ii) 이차방정식 $x^2-2x+a=0$이 허근을 가질 때

판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=1-a<0 \qquad \therefore a>1$

(i), (ii)에서 구하는 실수 a의 값의 범위는 $a\geq1$이다.

답 $a\geq1$

308

사차방정식 $x^4+2x^2-2a-4=0$에서 $x^2=X$로 놓으면

$X^2+2X-2a-4=0$ ······ ㉠

X에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근을 α, β라 하면

$x^2=\alpha$, $x^2=\beta \qquad \therefore x=\pm\sqrt{\alpha}$ 또는 $x=\pm\sqrt{\beta}$

그런데 주어진 사차방정식이 중근과 두 허근을 가지므로 α, β 중 하나는 0, 나머지 하나는 음수이어야 한다.

즉, 이차방정식 ㉠의 한 근이 $X=0$이므로 ㉠에 대입하면

$-2a-4=0 \qquad \therefore a=-2$

이때 $X^2+2X=0$, $X(X+2)=0$에서 $X=-2$ 또는 $X=0$

즉, 이차방정식 ㉠의 0이 아닌 근은 -2로 음수이다.

답 -2

tip

$\alpha=0$, $\beta<0$이어야 $x=0$ (중근), $x=\pm\sqrt{\beta}$ (허근)가 성립한다. 만약 $\alpha\neq0$이면 $x=\pm\sqrt{\alpha}$, $x=\pm\sqrt{\beta}$로 중근이 존재하지 않게 된다. ($\alpha<0$, $\beta=0$의 경우도 가능하다.)

309

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+4$가 $x^2-1=(x-1)(x+1)$로 나누어떨어지므로 나머지정리에 의하여 $f(1)=0$, $f(-1)=0$이다. 즉,

$1+a+b+4=0 \qquad \therefore a+b=-5$ ······ ㉠

$1-a+b+4=0 \qquad \therefore a-b=5$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-5$

즉, $f(x)=0$에서 $x^4-5x^2+4=0$이므로

$(x^2-1)(x^2-4)=0$

즉, $x^2=1$ 또는 $x^2=4$이므로 $x=\pm1$ 또는 $x=\pm2$

따라서 삼차방정식 $f(x)=0$의 양수인 근은 1, 2이므로 그 합은 3이다.

답 3

310

삼차방정식 $x^3+(a+2)x^2+3ax+a^2=0$에 $x=-a$를 대입하면

$(-a)^3+(a+2)\times(-a)^2+3a\times(-a)+a^2$

$=-a^3+a^3+2a^2-3a^2+a^2=0$

이므로 다음과 같이 조립제법을 이용하여 방정식의 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} -a & 1 & a+2 & 3a & a^2 \\ & & -a & -2a & -a^2 \\ \hline & 1 & 2 & a & \boxed{0} \end{array}$$

$(x+a)(x^2+2x+a)=0$

$\therefore x=-a$ 또는 $x^2+2x+a=0$

이때 주어진 삼차방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2+2x+a=0$이 $x\neq-a$인 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) $x\neq-a$일 때

$x=-a$가 이차방정식 $x^2+2x+a=0$의 근이 아니어야 하므로 대입하면

$a^2-2a+a\neq0$, $a^2-a\neq0$, $a(a-1)\neq0$

$\therefore a\neq0$이고 $a\neq1$

(ii) $x^2+2x+a=0$의 판별식을 D라 하면 $D>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=1-a>0 \qquad \therefore a<1$

(i), (ii)에서 구하는 실수 a의 값의 범위는 $a<0$ 또는 $0<a<1$이다.

답 $a<0$ 또는 $0<a<1$

311

상자의 높이가 x cm $(0<x<10)$이므로 상자의 밑면의 가로, 세로의 길이는 $(30-2x)$ cm, $(20-2x)$ cm이다.

상자의 부피가 1000 cm^{3}이므로

$(30-2x)(20-2x)x=1000$

$x^3-25x^2+150x-250=0$

$f(x)=x^3-25x^2+150x-250$이라 하면

$f(5)=5^3-25\times5^2+150\times5-250=0$

다음과 같이 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$
\begin{array}{r|rrrr}
5 & 1 & -25 & 150 & -250 \\
 & & 5 & -100 & 250 \\
\hline
 & 1 & -20 & 50 & \boxed{0}
\end{array}
$$

$f(x)=(x-5)(x^2-20x+50)$

즉, $(x-5)(x^2-20x+50)=0$에서

$x=5$ 또는 $x=10\pm5\sqrt{2}$

이때 $0<x<10$이므로

$x=5$ 또는 $x=10-5\sqrt{2}$ 답 $x=5$ 또는 $x=10-5\sqrt{2}$

tip
(직육면체의 부피) = (가로의 길이) × (세로의 길이) × (높이)

20 삼차방정식의 근과 계수의 관계

체크 312

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 근이 -2, -1, 2이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(-2)+(-1)+2=-a \quad \therefore a=1$

$(-2)\times(-1)+(-1)\times2+2\times(-2)=b \quad \therefore b=-4$

$(-2)\times(-1)\times2=-c \quad \therefore c=-4$

$\therefore abc=1\times(-4)\times(-4)=16$ 답 16

체크 313

삼차방정식 $x^3-2x^2+x+4=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$, $\alpha\beta\gamma=-4$

이때 $\alpha+\beta+\gamma=2$에서

$\alpha+\beta=2-\gamma$, $\beta+\gamma=2-\alpha$, $\gamma+\alpha=2-\beta$

$\therefore (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$
$=(2-\gamma)(2-\alpha)(2-\beta)$
$=2^3-4(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$
$=8-8+2+4=6$ 답 6

체크 314

삼차방정식 $x^3-6x^2+kx-6=0$의 세 근을 α, 2α, 3α $(\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2\alpha+3\alpha=6$, $6\alpha=6 \quad \therefore \alpha=1$

즉, 1이 주어진 방정식의 한 근이므로

$1-6+k-6=0$

$\therefore k=11$ 답 11

체크 315

삼차방정식 $2x^3-3x^2+x-1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=\frac{3}{2}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{1}{2}$, $\alpha\beta\gamma=\frac{1}{2}$ …… ㉠

x^3의 계수가 1이고 세 근이 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$인 삼차방정식은

$x^3-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)x^2+\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}\right)x-\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=0$ …… ㉡

이때 ㉠에 의하여

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=1$

$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=3$

$\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=2$

이것을 ㉡에 대입하면 구하는 삼차방정식은

$x^3-x^2+3x-2=0$

이 식이 $x^3+ax^2+bx-2=0$과 일치하므로

$a=-1$, $b=3$

$\therefore a+b=(-1)+3=2$ 답 2

체크 316

삼차방정식 $x^3-4x^2+2x-3=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=4$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=3$

이때 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 근이 $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-a=(\alpha+1)+(\beta+1)+(\gamma+1)$
$=(\alpha+\beta+\gamma)+3=4+3=7$

$\therefore a=-7$

$b=(\alpha+1)(\beta+1)+(\beta+1)(\gamma+1)+(\gamma+1)(\alpha+1)$
$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+2(\alpha+\beta+\gamma)+3$
$=2+2\times4+3=13$

$-c=(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$
$=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1$
$=3+2+4+1=10$

$\therefore c=-10$

$\therefore a+b+c=(-7)+13+(-10)=-4$ 답 -4

체크 317

삼차방정식 $x^3-3x^2+ax+b=0$의 계수가 모두 실수이므로 한 근이 $2-\sqrt{2}i$이면 $2+\sqrt{2}i$도 근이다.

즉, 주어진 삼차방정식의 세 근이 c, $2-\sqrt{2}i$, $2+\sqrt{2}i$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$c+(2-\sqrt{2}i)+(2+\sqrt{2}i)=3 \qquad \therefore c=-1$

$a=(-1)\times(2-\sqrt{2}i)+(2-\sqrt{2}i)(2+\sqrt{2}i)$
$\qquad +(2+\sqrt{2}i)\times(-1)$
$=2$

$-b=(-1)\times(2-\sqrt{2}i)\times(2+\sqrt{2}i)=-6 \qquad \therefore b=6$

$\therefore a+b+c=2+6+(-1)=7$ 답 7

체크 318

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 계수가 모두 유리수이므로 한 근이 $-1-\sqrt{5}$이면 $-1+\sqrt{5}$도 근이다.

즉, 주어진 삼차방정식의 세 근이 2, $-1-\sqrt{5}$, $-1+\sqrt{5}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-a=2+(-1-\sqrt{5})+(-1+\sqrt{5}) \qquad \therefore a=0$

$b=2(-1-\sqrt{5})+(-1-\sqrt{5})(-1+\sqrt{5})+2(-1+\sqrt{5})$
$=-8$

$-c=2(-1-\sqrt{5})(-1+\sqrt{5}) \qquad \therefore c=8$

따라서 $f(x)=x^3-8x+8$이므로

$f(-1)=(-1)^3-8\times(-1)+8=15$ 답 15

21 방정식 $x^3=\pm1$의 허근

체크 319

삼차방정식 $x^3=1$에서

$x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x^2+x+1=0$

삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근이 ω이므로 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 허근이다.

$\therefore \omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

(1) $\omega^{29}+\omega^{19}=(\omega^3)^9\times\omega^2+(\omega^3)^6\times\omega$
$\qquad =\omega^2+\omega \ (\because \omega^3=1)$
$\qquad =-1 \ (\because \omega^2+\omega+1=0)$

(2) $\omega^2+\omega+1=0$의 양변을 ω로 나누면

$\omega+\dfrac{1}{\omega}=-1$

ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 허근이므로 $\overline{\omega}$도 이 이차방정식의 근이다. 즉, 같은 방법으로 $\overline{\omega}+\dfrac{1}{\overline{\omega}}=-1$

$\therefore \left(\omega+\dfrac{1}{\omega}\right)^2+\left(\overline{\omega}+\dfrac{1}{\overline{\omega}}\right)^2=(-1)^2+(-1)^2=2$

(3) $\omega^2+\omega+1=0$에서

$\omega+1=-\omega^2$, $\omega^2+1=-\omega$, $\omega^3=1$

$\therefore (1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3)=(-\omega^2)\times(-\omega)\times(1+1)$
$\qquad =2\omega^3=2$

답 (1) -1 (2) 2 (3) 2

체크 320

삼차방정식 $x^3=1$에서

$x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x^2+x+1=0$

삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근이 ω이므로 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 허근이다.

이때 ω가 근이면 $\overline{\omega}$도 이 이차방정식의 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$\therefore \dfrac{1}{1+\omega}+\dfrac{1}{1+\overline{\omega}}=\dfrac{1+\overline{\omega}+1+\omega}{(1+\omega)(1+\overline{\omega})}$
$\qquad =\dfrac{2+\omega+\overline{\omega}}{1+\omega+\overline{\omega}+\omega\overline{\omega}}$
$\qquad =\dfrac{2+(-1)}{1+(-1)+1}=1$ 답 1

체크 321

삼차방정식 $x^3=-1$에서

$x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x^2-x+1=0$

삼차방정식 $x^3=-1$의 한 허근이 ω이므로 ω는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 허근이다.

$\therefore \omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$

즉, $\omega^5=-\omega^2$, $\omega^4=-\omega$이므로

$\omega^5+2\omega^4+3\omega^3+4\omega^2+5\omega+6=-\omega^2-2\omega-3+4\omega^2+5\omega+6$
$\qquad =3\omega^2+3\omega+3$

이때 $\omega^2-\omega+1=0$에서 $\omega^2=\omega-1$이므로

(주어진 식)$=3\omega^2+3\omega+3$
$\qquad =3(\omega-1)+3\omega+3$
$\qquad =6\omega=a\omega+b$

a, b는 실수이므로 $a=6$, $b=0$ 답 $a=6$, $b=0$

체크 322

삼차방정식 $x^3+1=0$에서

$(x+1)(x^2-x+1)=0 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x^2-x+1=0$

삼차방정식 $x^3+1=0$의 한 허근이 ω이므로 ω는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 허근이다. 이때 ω가 근이면 $\overline{\omega}$도 이 이차방정식의 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$\therefore \dfrac{(\omega-1)\overline{(\omega-1)}}{(3\omega+1)\overline{(3\omega+1)}}=\dfrac{(\omega-1)(\overline{\omega}-1)}{(3\omega+1)(3\overline{\omega}+1)}$

$=\dfrac{\omega\overline{\omega}-(\omega+\overline{\omega})+1}{9\omega\overline{\omega}+3(\omega+\overline{\omega})+1}$

$=\dfrac{1-1+1}{9+3+1}=\dfrac{1}{13}$ 답 $\dfrac{1}{13}$

연습 문제 12

323
삼차방정식 $x^3-2x^2+x+7=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$, $\alpha\beta\gamma=-7$

$\therefore \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=-\dfrac{1}{7}$ 답 $-\dfrac{1}{7}$

tip
삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면
$\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$

324
삼차방정식 $x^3+ax^2+b=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$, $\alpha\beta\gamma=-b$

$\therefore (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$
$=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$
$=1+a+b=2$

$\therefore a+b=1$ 답 1

325
삼차방정식 $x^3-2x^2+kx+6=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=k$, $\alpha\beta\gamma=-6$

이때 $\alpha+\beta+\gamma=2$에서

$\alpha+\beta=2-\gamma$, $\beta+\gamma=2-\alpha$, $\gamma+\alpha=2-\beta$

$\therefore (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$
$=(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$
$=8-4(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$
$=8-8+2k+6=8$

$\therefore k=1$ 답 1

326
삼차방정식 $x^3+x^2+2=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$, $\alpha\beta\gamma=-2$

$\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식을 $x^3+ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 상수)이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$-a=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ $\quad\therefore a=0$

$b=\alpha\beta\times\beta\gamma+\beta\gamma\times\gamma\alpha+\gamma\alpha\times\alpha\beta$
$=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=2$

$-c=\alpha\beta\times\beta\gamma\times\gamma\alpha=(\alpha\beta\gamma)^2=4$ $\quad\therefore c=-4$

따라서 구하는 삼차방정식은 $x^3+2x-4=0$이다.

답 $x^3+2x-4=0$

327
$f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$에서 $x=1$, $x=2$, $x=3$은 방정식 $f(x)=x$의 세 근이다.

$f(x)=x$에서 $f(x)-x=0$

이때 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차식이므로

$f(x)-x$의 최고차항의 계수 역시 1인 삼차식이다.

즉, $f(x)-x=(x-1)(x-2)(x-3)$이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+x$
$=x^3-6x^2+12x-6$

따라서 방정식 $f(x)=0$, 즉 $x^3-6x^2+12x-6=0$의 세 근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 6이다. 답 6

tip
삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근이 α, β, γ일 때,
$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라 하면
$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$, $f(\gamma)=0$이므로 인수정리에 의하여
$f(x)$는 $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$를 인수로 갖는다.
즉, $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

328
삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근이 α, β, γ이므로

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$, $f(\gamma)=0$

삼차방정식 $f(2x-1)=0$을 만족시키려면 $2x-1=\alpha$ 또는 $2x-1=\beta$ 또는 $2x-1=\gamma$이어야 한다.

$\therefore x=\dfrac{\alpha+1}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\beta+1}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\gamma+1}{2}$

따라서 삼차방정식 $f(2x-1)=0$의 세 근의 곱은

$\dfrac{\alpha+1}{2}\times\dfrac{\beta+1}{2}\times\dfrac{\gamma+1}{2}$
$=\dfrac{1+(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+\alpha\beta\gamma}{8}$
$=\dfrac{1+15+59+45}{8}=\dfrac{120}{8}=15$ 답 15

329

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+1=0$의 계수가 모두 유리수이므로 한 근이 $2+\sqrt{5}$이면 $2-\sqrt{5}$도 근이다.

즉, 주어진 삼차방정식의 세 근이 1, $2+\sqrt{5}$, $2-\sqrt{5}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-a=(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})+1=5$ $\therefore a=-5$

$b=(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})+(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=3$

$\therefore ab=(-5)\times 3=-15$

답 -15

330

$x=1-\sqrt{2}$가 삼차방정식 $3ax^3+7bx^2-\sqrt{2}=0$의 근이므로 대입하면

$3a(1-\sqrt{2})^3+7b(1-\sqrt{2})^2-\sqrt{2}=0$

$3a(7-5\sqrt{2})+7b(3-2\sqrt{2})-\sqrt{2}=0$

$\therefore 21a+21b-(15a+14b+1)\sqrt{2}=0$

a, b가 정수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$21a+21b=0$ …… ㉠

$15a+14b+1=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=1$

$\therefore a-b=(-1)-1=-2$

답 -2

331

삼차방정식 $x^3+px^2+qx+p=0$의 계수가 모두 실수이므로 한 근이 $2+i$이면 $2-i$도 근이다.

즉, 주어진 삼차방정식의 나머지 한 근을 k라 하면 세 근이 $2+i$, $2-i$, k이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-p=(2+i)+(2-i)+k=4+k$ $\therefore p=-4-k$ …… ㉠

$q=(2+i)(2-i)+k(2+i)+k(2-i)=5+4k$ …… ㉡

$-p=(2+i)(2-i)k=5k$ $\therefore p=-5k$ …… ㉢

이때 ㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$k=1$, $p=-5$

$k=1$을 ㉡에 대입하면 $q=5+4=9$

답 $p=-5$, $q=9$

332

삼차방정식 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x^2+x+1=0$

삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근이 ω이므로 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 허근이다.

즉, $\omega^2+\omega+1=0$에서 $\omega^2+1=-\omega$이므로

$\dfrac{\omega}{1+\omega^2}=\dfrac{\omega}{-\omega}=-1$ …… ㉠

한편, ω가 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이면 켤레근의 성질에 의하여 $\overline{\omega}$도 이 이차방정식의 근이므로

$\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$

즉, $1+\overline{\omega}=-\overline{\omega}^2$이므로 $\dfrac{\overline{\omega}^2}{1+\overline{\omega}}=\dfrac{\overline{\omega}^2}{-\overline{\omega}^2}=-1$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡에 의하여

$\dfrac{\omega}{1+\omega^2}+\dfrac{\overline{\omega}^2}{1+\overline{\omega}}=(-1)+(-1)=-2$

답 -2

tip

방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 하면 다음 성질이 성립한다.

(단, ω는 $\overline{\omega}$의 켤레복소수이다.)

① $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

② $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

③ $\omega^2=\overline{\omega}=\dfrac{1}{\omega}$

333

삼차방정식 $x^3=1$에서

$x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x^2+x+1=0$

삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근이 ω이므로 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 허근이다.

즉, $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$이므로

$\dfrac{1}{\omega+1}=\dfrac{1}{-\omega^2}$, $\dfrac{1}{\omega^2+1}=\dfrac{1}{-\omega}$, $\dfrac{1}{\omega^3+1}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{\omega+1}+\frac{1}{\omega^2+1}+\frac{1}{\omega^3+1}&=\frac{1}{-\omega^2}+\frac{1}{-\omega}+\frac{1}{2}=-\frac{\omega+\omega^2}{\omega^3}+\frac{1}{2}\\&=-\frac{-1}{1}+\frac{1}{2}\ (\because \omega^2+\omega=-1)\\&=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

한편, $\omega=\omega^4=\omega^7=\omega^{10}=\cdots=\omega^{28}$,

$\omega^2=\omega^5=\omega^8=\omega^{11}=\cdots=\omega^{29}$, $\omega^3=\omega^6=\omega^9=\omega^{12}=\cdots=\omega^{30}$이므로

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\omega+1}+\frac{1}{\omega^2+1}+\frac{1}{\omega^3+1}+\cdots+\frac{1}{\omega^{30}+1}\\&=\left(\frac{1}{\omega+1}+\frac{1}{\omega^2+1}+\frac{1}{\omega^3+1}\right)+\left(\frac{1}{\omega+1}+\frac{1}{\omega^2+1}+\frac{1}{\omega^3+1}\right)\\&\qquad+\cdots+\left(\frac{1}{\omega+1}+\frac{1}{\omega^2+1}+\frac{1}{\omega^3+1}\right)\\&=10\left(\frac{1}{\omega+1}+\frac{1}{\omega^2+1}+\frac{1}{\omega^3+1}\right)\\&=10\times\frac{3}{2}=15\end{aligned}$$

답 15

334

$\omega=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$에서 $2\omega-1=-\sqrt{3}i$

이 식의 양변을 제곱하면

$4\omega^2-4\omega+1=-3 \qquad \therefore\ \omega^2-\omega+1=0$

양변에 $\omega+1$을 곱하면

$(\omega+1)(\omega^2-\omega+1)=0 \qquad \therefore\ \omega^3=-1$

$$\begin{aligned}\therefore\ \omega^{2018}+\frac{1}{\omega^{2018}}&=(\omega^3)^{672}\times\omega^2+\frac{1}{(\omega^3)^{672}\times\omega^2}\\&=\omega^2+\frac{1}{\omega^2}=\omega^2-\omega\ (\because\ \omega^3=-1)\\&=-1\ (\because\ \omega^2-\omega+1=0)\end{aligned}$$

답 -1

335

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근을 ω라 하면

$\omega^2+\omega+1=0$

이 식의 양변에 $\omega-1$을 곱하면

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0 \qquad \therefore\ \omega^3=1$

즉, $\omega^{40}=(\omega^3)^{13}\times\omega=\omega$, $\omega^{30}=(\omega^3)^{10}=1$,

$\omega^{20}=(\omega^3)^6\times\omega^2=\omega^2$, $\omega^{10}=(\omega^3)^3\times\omega=\omega$이므로

$$\begin{aligned}\omega^{40}-\omega^{30}+\omega^{20}-\omega^{10}+1&=\omega-1+\omega^2-\omega+1\\&=\omega^2\end{aligned}$$

한편, 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 해는 근의 공식에 의하여

$x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$이므로

$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $\omega=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \omega^{40}-\omega^{30}+\omega^{20}-\omega^{10}+1&=\omega^2=-\omega-1\\&=-\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}-1\\&=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

336

$x+\frac{1}{x}=-1$에서 $x^2+x+1=0$

이 식의 양변에 $x-1$을 곱하면

$(x-1)(x^2+x+1)=0$, $x^3-1=0 \qquad \therefore\ x^3=1$

주어진 방정식의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$

ㄱ. $\omega^6=(\omega^3)^2=1$

ㄴ. $n=3$이면 $\omega^6+\omega^3+1=3$이므로 0이 아니다.

ㄷ. $\omega^2+\omega+1=0$에서 $\omega+1=-\omega^2$

또한 방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이므로 켤레근의 성질에 의하여 $\overline{\omega}$도 한 근이다.

즉, $\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$에서 $\overline{\omega}+1=-\overline{\omega}^2$

$\therefore\ (\omega+1)(\overline{\omega}+1)=(-\omega)^2\times(-\overline{\omega}^2)=(\omega\overline{\omega})^2$

한편, 방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이 ω, $\overline{\omega}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega\overline{\omega}=1$이다.

$\therefore\ (\omega+1)(\overline{\omega}+1)=(\omega\overline{\omega})^2=1$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

337

삼차방정식 $x^3+px^2+2x+q=0$의 연속하는 세 정수인 근을 $\alpha-1$, α, $\alpha+1$이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha(\alpha-1)+(\alpha-1)(\alpha+1)+\alpha(\alpha+1)=2$

$3\alpha^2=3 \qquad \therefore\ \alpha=\pm1$

(i) $\alpha=1$일 때

주어진 방정식에 $x=1$을 대입하면

$1+p+2+q=0 \qquad \therefore\ p+q=-3$

(ii) $\alpha=-1$일 때

주어진 방정식에 $x=-1$을 대입하면

$-1+p-2+q=0 \qquad \therefore\ p+q=3$

(i), (ii)에서 $(p+q)^2=(\pm3)^2=9$

답 9

[다른 풀이]

삼차방정식 $x^3+px^2+2x+q=0$의 세 근을 $\alpha-1$, α, $\alpha+1$이라 하면 $\alpha=\pm1$

(i) $\alpha=1$일 때

세 근은 0, 1, 2이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-p=0+1+2=3 \qquad \therefore\ p=-3$

$-q=0\times1\times2=0 \qquad \therefore\ q=0$

$\therefore\ p+q=-3$

(ii) $\alpha=-1$일 때

세 근은 -2, -1, 0이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-p=(-2)+(-1)+0=-3 \qquad \therefore\ p=3$

$-q=(-2)\times(-1)\times0=0 \qquad \therefore\ q=0$

$\therefore\ p+q=3$

(i), (ii)에서 $(p+q)^2=9$

338

삼차방정식 $x^3=1$에서

$x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x^2+x+1=0$

삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근이 ω이므로 ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 허근이다.

$\therefore\ \omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

$f(n)=\dfrac{\omega^{2n}}{\omega^n+1}$이므로 $n=1, 2, 3, \cdots$에 대하여

$f(1)=\dfrac{\omega^2}{\omega+1}=\dfrac{\omega^2}{-\omega^2}=-1$

$f(2)=\dfrac{\omega^4}{\omega^2+1}=\dfrac{\omega}{\omega^2+1}=\dfrac{\omega}{-\omega}=-1$

$f(3)=\dfrac{\omega^6}{\omega^3+1}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

$f(4)=\dfrac{\omega^8}{\omega^4+1}=\dfrac{\omega^2}{\omega+1}=f(1)=-1$

$\vdots$

즉, $f(n)$의 값은 -1, -1, $\dfrac{1}{2}$이 이 순서대로 계속 반복되고

$20=3\times6+2$이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(18)+f(19)+f(20)$

$=6\times\{f(1)+f(2)+f(3)\}+f(1)+f(2)$

$=6\times\left\{(-1)+(-1)+\dfrac{1}{2}\right\}+(-1)+(-1)$

$=-11$

답 -11

22 연립이차방정식

체크 339

$x-y=2$에서 $y=x-2$ ······ ㉠

㉠을 $x^2+4xy+y^2=-2$에 대입하면

$x^2+4x(x-2)+(x-2)^2=-2$

$6x^2-12x+6=0$, $x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$

$\therefore x=1$

$x=1$을 ㉠에 대입하면 $y=-1$

$\therefore (x-2y)^2=\{1-2\times(-1)\}^2=3^2=9$

답 9

체크 340

$x^2-5xy+4y^2=0$에서 $(x-4y)(x-y)=0$

$\therefore x=4y$ 또는 $x=y$

(i) $x=4y$일 때

$x^2+2y^2=18$에 대입하면

$18y^2=18$, $y^2=1$ $\quad\therefore y=\pm1$

$x=4y$이므로 $x=\pm4$, $y=\pm1$ (복부호동순)

(ii) $x=y$일 때

$x^2+2y^2=18$에 대입하면

$3y^2=18$, $y^2=6$ $\quad\therefore y=\pm\sqrt{6}$

$x=y$이므로 $x=\pm\sqrt{6}$, $y=\pm\sqrt{6}$ (복부호동순)

(i), (ii)에서 x, y는 자연수이므로 $x=4$, $y=1$

$\therefore x+y=4+1=5$

답 5

체크 341

$x^2+y^2=5$에서 $(x+y)^2-2xy=5$

$x+y=u$, $xy=v$라 하면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u^2-2v=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ u-v=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $v=u-1$이므로 이를 ㉠에 대입하면

$u^2-2(u-1)=5$

$u^2-2u-3=0$, $(u-3)(u+1)=0$

$\therefore u=3$ 또는 $u=-1$

$u=3$일 때 $v=u-1=2$, $u=-1$일 때 $v=u-1=-2$이므로

$\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-2 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-3t+2=0$의 두 근이다.

즉, $(t-1)(t-2)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=2$이므로

$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-2 \end{cases}$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2+t-2=0$의 두 근이다.

즉, $(t+2)(t-1)=0$에서 $t=-2$ 또는 $t=1$이므로

$\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$

(i), (ii)에서 구하는 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$

체크 342

$x-2y=k$에서 $x=2y+k$

이를 $x^2-y^2=-3$에 대입하면

$(2y+k)^2-y^2=-3$

$\therefore 3y^2+4ky+k^2+3=0$ ······ ㉠

주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면 ㉠을 만족시키는 y의 값도 오직 하나이므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=4k^2-3(k^2+3)=0$

$k^2-9=0$ $\quad\therefore k=\pm3$

이때 $k>0$이므로 $k=3$

답 3

체크 343
직사각형 모양의 처음 땅의 가로의 길이와 세로의 길이를 x km, y km라 하자.
처음 땅의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 1 km씩 늘인 땅은 처음 땅보다 6 km^2 만큼 넓으므로
$(x+1)(y+1)=xy+6$
$xy+x+y+1=xy+6 \qquad \therefore x+y=5$
처음 땅은 대각선의 길이가 $\sqrt{13}$ km인 직사각형 모양이므로
$x^2+y^2=13$
즉, $(x+y)^2-2xy=13$에서 $25-2xy=13 \qquad \therefore xy=6$
따라서 연립방정식을 세우면 $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$
이때 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-5t+6=0$의 두 근이다.
$(t-2)(t-3)=0$에서 $t=2$ 또는 $t=3$이므로
$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$
그러므로 처음 땅의 가로의 길이와 세로의 길이의 차는
$3-2=1$ (km) 답 1 km

체크 344
길이가 160 cm인 철사를 모두 사용하였으므로 두 정사각형의 둘레의 길이의 합은 철사의 길이와 같다.
즉, $4a+4b=160$에서 $a+b=40$
또한 두 정사각형의 넓이의 합이 850 cm^2이므로
$a^2+b^2=850$
즉, $(a+b)^2-2ab=850$에서 $40^2-2ab=850$
$\therefore ab=375$
따라서 연립방정식을 세우면 $\begin{cases} a+b=40 \\ ab=375 \end{cases}$
이때 a, b는 t에 대한 이차방정식 $t^2-40t+375=0$의 두 근이다.
$(t-25)(t-15)=0$에서 $t=25$ 또는 $t=15$이므로
$\begin{cases} a=25 \\ b=15 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a=15 \\ b=25 \end{cases}$
그런데 $a>b$이므로 구하는 a의 값은 $a=25$ 답 25

23 공통근과 부정방정식

체크 345
두 이차방정식의 공통근을 α라 하면
$$\begin{cases} \alpha^2+(k^2+2k)\alpha-2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha^2+\left(\frac{1}{2}k^2+k+1\right)\alpha-1=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$
상수항을 소거하기 위하여 ㉡$\times 2-$㉠을 하면
$\alpha^2+2\alpha=0$
$\alpha(\alpha+2)=0 \qquad \therefore \alpha=0$ 또는 $\alpha=-2$
(i) $\alpha=0$일 때
㉠에 대입하면 $-2=0$
이는 옳지 않은 등식이므로 $\alpha\neq 0$
(ii) $\alpha=-2$일 때
㉠에 대입하면
$4-2k^2-4k-2=0$
$k^2+2k-1=0 \qquad \therefore k=-1\pm\sqrt{2}$
(i), (ii)에서 $k=-1\pm\sqrt{2}$ 답 $-1\pm\sqrt{2}$

체크 346
두 이차방정식의 공통근이 α이므로
$$\begin{cases} \alpha^2+k\alpha+2k+2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha^2-\alpha-k^2-k=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$
이차항을 소거하기 위하여 ㉠$-$㉡을 하면
$(k+1)\alpha+k^2+3k+2=0$
$(k+1)\alpha+(k+1)(k+2)=0$
$(k+1)(\alpha+k+2)=0$
이때 $k\neq-1$이므로 $\alpha=-k-2$
$\alpha=-k-2$를 ㉠에 대입하면
$(-k-2)^2+k(-k-2)+2k+2=0$
$k^2+4k+4-k^2-2k+2k+2=0$
$4k+6=0 \qquad \therefore k=-\frac{3}{2}$
$k=-\frac{3}{2}$을 $\alpha=-k-2$에 대입하면 $\alpha=-\frac{1}{2}$
$\therefore k\alpha=\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$ 답 $\frac{3}{4}$

체크 347
$x^2-3xy+2y^2+1=0$에서
$(x-2y)(x-y)=-1$
$\therefore \begin{cases} x-2y=1 \\ x-y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x-2y=-1 \\ x-y=1 \end{cases}$
(i) $\begin{cases} x-2y=1 \\ x-y=-1 \end{cases}$을 연립하여 풀면 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases}$
(ii) $\begin{cases} x-2y=-1 \\ x-y=1 \end{cases}$을 연립하여 풀면 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$
(i), (ii)에서 자연수 x, y는 $x=3$, $y=2$
$\therefore x+y=3+2=5$ 답 5

체크 **348**

주어진 방정식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$2x^2+2(y-5)x+y^2-6y+13=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 x는 실수이므로

$\frac{D}{4}=(y-5)^2-2(y^2-6y+13)\geq 0$

$y^2-10y+25-2y^2+12y-26\geq 0$

$y^2-2y+1\leq 0$, $(y-1)^2\leq 0$

이때 y는 실수이므로 $y=1$

$y=1$을 주어진 방정식에 대입하면

$2x^2-8x+8=0$, $x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$ $\quad\therefore x=2$

$\therefore x+y=2+1=3$

답 3

연습 문제 13

349

$y=x+1$을 $x^2+y^2=5$에 대입하면

$x^2+(x+1)^2=5$

$x^2+x-2=0$, $(x-1)(x+2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-2$

$x=1$일 때 $y=x+1=2$, $x=-2$일 때 $y=x+1=-1$

따라서 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$이므로

$\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta$

$=1^2+2^2-1\times 2=(-2)^2+(-1)^2-(-2)\times(-1)$

$=3$

답 3

tip

$\begin{cases} (\text{일차식})=0 \\ (\text{이차식})=0 \end{cases}$ 꼴이면 일차방정식을 한 문자에 대하여 정리한 후 이차방정식에 대입한다. 일차방정식을 한 문자에 대하여 정리할 때에는 대입할 이차방정식의 계산이 간단해지는 문자를 선택한다.

350

$x^2y+xy^2=-12$에서 $xy(x+y)=-12$

이때 $x+y=3$이므로 $xy=-4$

즉, 주어진 연립방정식은 $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=-4 \end{cases}$

이때 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-3t-4=0$의 두 근이다.

$(t-4)(t+1)=0$ $\quad\therefore t=4$ 또는 $t=-1$

따라서 $\begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases}$이므로

$|\alpha-\beta|=|4-(-1)|=|-1-4|$

$=5$

답 5

351

$2x^2-3xy+y^2=0$에서 $(2x-y)(x-y)=0$

$\therefore y=2x$ 또는 $y=x$

(i) $y=2x$일 때, $x^2+2xy+y^2=4$에 대입하면

$x^2+4x^2+4x^2=4$

$x^2=\frac{4}{9}$ $\quad\therefore x=\pm\frac{2}{3}$

$y=2x$이므로 $\begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{4}{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\frac{2}{3} \\ y=-\frac{4}{3} \end{cases}$

(ii) $y=x$일 때, $x^2+2xy+y^2=4$에 대입하면

$x^2+2x^2+x^2=4$

$x^2=1$ $\quad\therefore x=\pm 1$

$y=x$이므로 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

(i), (ii)에서 xy의 값이 최대가 되는 것은

$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$일 때이고 최댓값은

$1\times 1=(-1)\times(-1)=1$

답 1

352

$\begin{cases} x+y=2(a+1) \\ xy=a^2 \end{cases}$에서 x, y는 t에 대한 이차방정식

$t^2-2(a+1)t+a^2=0$의 두 근이다.

주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면 이차방정식 $t^2-2(a+1)t+a^2=0$의 해가 오직 하나이어야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+1)\}^2-a^2=0$

$2a+1=0$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{2}$

답 $-\frac{1}{2}$

tip

연립방정식의 해가

① 모두 실근이면 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식 $D\geq 0$

② 오직 한 쌍이면 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식 $D=0$

③ 실근이 존재하지 않으면 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식 $D<0$

353
$\begin{cases} x+y=2 \\ xy-k^2=1 \end{cases}$에서 $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=k^2+1 \end{cases}$이므로 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-2t+k^2+1=0$의 두 근이다.

이때 x, y는 모두 실수이므로 이차방정식 $t^2-2t+k^2+1=0$이 실근을 가져야 한다. 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-k^2-1\geq0$, $k^2\leq0$

$\therefore k=0$ ($\because$ k는 실수)

$k=0$을 $t^2-2t+k^2+1=0$에 대입하면

$t^2-2t+1=0$, $(t-1)^2=0$ $\quad\therefore t=1$

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

답 $k=0$, $x=1$, $y=1$

354
$\angle$C는 $\overline{\text{AB}}$에 대한 원주각이므로 $\angle\text{C}=90°$

$\overline{\text{AC}}=x\,\text{cm}$, $\text{BC}=y\,\text{cm}$ $(0<x<y)$라 하면 넓이가 $24\,\text{cm}^2$이므로

$\frac{1}{2}xy=24$ $\quad\therefore xy=48$

직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여 $x^2+y^2=100$

$(x+y)^2-2xy=100$에서 $(x+y)^2=196$ ($\because$ $xy=48$)

이때 x, y는 변의 길이이므로 $x>0$, $y>0$

$\therefore x+y=14$

즉, 연립방정식을 세우면 $\begin{cases} xy=48 \\ x+y=14 \end{cases}$

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-14t+48=0$의 두 근이다.

$(t-6)(t-8)=0$ $\quad\therefore t=6$ 또는 $t=8$

$\therefore \begin{cases} x=6 \\ y=8 \end{cases}$ ($\because$ $0<x<y$)

따라서 삼각형 ABC의 가장 짧은 변의 길이는 6 cm이다.

답 6 cm

355
$x^2-4x-21=0$에서 $(x+3)(x-7)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=7$

(ⅰ) $x=-3$이 공통근일 때

$x=-3$이 이차방정식 $x^2+ax-3=0$의 근이므로

$9-3a-3=0$ $\quad\therefore a=2$

(ⅱ) $x=7$이 공통근일 때

$x=7$이 이차방정식 $x^2+ax-3=0$의 근이므로

$49+7a-3=0$ $\quad\therefore a=-\frac{46}{7}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 정수 a의 값은 2이다.

답 2

356
$x^2-a=0$에서 $a=x^2$

이를 $2017x^3+ax+2018=0$에 대입하면

$2018x^3+2018=0$

$x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x^2-x+1=0$

이때 공통근은 실수이므로 $x=-1$

$\therefore a=x^2=(-1)^2=1$

답 1

357
공통근을 α라 하고 각 방정식에 대입하면

$\begin{cases} \alpha^2-(3k+7)\alpha+k=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2\alpha^2+3\left(k+\frac{16}{3}\right)\alpha-k=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면 $3\alpha^2+9\alpha=0$

$3\alpha(\alpha+3)=0$ $\quad\therefore \alpha=0$ 또는 $\alpha=-3$

㉠에

(ⅰ) $\alpha=0$을 대입하면 $k=0$

(ⅱ) $\alpha=-3$을 대입하면

$9+9k+21+k=0$ $\quad\therefore k=-3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 실수 k의 값은 0, -3이다.

답 0, -3

358
두 이차방정식 $x^2-k=0$, $x^2-kx-2=0$에서 $k=0$이면

$x^2=0$, $x^2-2=0$

이 두 이차방정식을 동시에 만족시키는 공통근은 존재하지 않으므로 $k\neq0$ $\cdots\cdots$ ㉠

공통근을 α라 하고 각 방정식에 대입하면

$\begin{cases} \alpha^2-k=0 & \cdots\cdots ㉡ \\ \alpha^2-k\alpha-2=0 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉡−㉢을 하면

$k\alpha-k+2=0$ $\quad\therefore \alpha=\frac{k-2}{k}$ ($\because$ ㉠)

$\alpha=\frac{k-2}{k}$를 ㉡에 대입하면

$\frac{k^2-4k+4}{k^2}-k=0$

$k^3-k^2+4k-4=0$, $k^2(k-1)+4(k-1)=0$

$(k-1)(k^2+4)=0$

$\therefore k=1$ ($\because$ k는 실수)

답 1

359
$x-2y=a$에서 $x=a+2y$

이를 $x^2-y^2=-a^2+a+3$에 대입하면

$(a+2y)^2-y^2=-a^2+a+3$

$\therefore 3y^2+4ay+2a^2-a-3=0$ …… ㉠

주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 실수인 해를 가지려면 y에 대한 이차방정식 ㉠의 실근이 오직 하나 존재해야 한다.

㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4a^2-6a^2+3a+9=0$

$2a^2-3a-9=0$, $(2a+3)(a-3)=0$

$\therefore a=-\frac{3}{2}$ 또는 $a=3$

$\therefore 4|\alpha-\beta|=4\left|3-\left(-\frac{3}{2}\right)\right|=18$ 답 18

360

$xy+2x=3y+10$에서

$xy+2x-3y-6=4$, $x(y+2)-3(y+2)=4$

$\therefore (x-3)(y+2)=4$

x, y가 양의 정수이므로 $y+2>2$

즉, $y+2=4$, $x-3=1$이므로

$x=4$, $y=2$ 답 $x=4$, $y=2$

361

$x^2+y^2+2x-2y-8=0$에서

$x^2+2x+1+y^2-2y+1-10=0$

$\therefore (x+1)^2+(y-1)^2=10$

x, y가 정수이므로 $(x+1)^2$은 제곱수, $(y-1)^2$은 0 또는 제곱수이다.

즉, $\begin{cases}(x+1)^2=1\\(y-1)^2=9\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}(x+1)^2=9\\(y-1)^2=1\end{cases}$이므로 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(-2, -2)$, $(-2, 4)$, $(0, -2)$, $(0, 4)$,

$(-4, 0)$, $(-4, 2)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$

의 8개이다. 답 8

tip

실수 조건이 있는 부정방정식은

(x에 대한 완전제곱식)+(y에 대한 완전제곱식)$=0$

꼴로 변형한다.

362

직각삼각형의 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 x cm, y cm라 하고 길이가 x cm인 변의 길이를 줄이는 것으로 하면

새로 만든 직각삼각형의 두 변의 길이는 양수이므로 $x-3>0$, $y+1>1$이고 그 넓이가 6 cm^2이므로

$\frac{1}{2}(x-3)(y+1)=6$ $\therefore (x-3)(y+1)=12$

이때 x, y는 자연수이므로 $x-3$, $y+1$의 값은 다음 표와 같다.

$x-3$	1	2	3	4	6
$y+1$	12	6	4	3	2

$\therefore \begin{cases}x=4\\y=11\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=5\\y=5\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=6\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=7\\y=2\end{cases}$

또는 $\begin{cases}x=9\\y=1\end{cases}$

이때 두 변 중 어느 한 변의 길이를 3cm 짧게 하여도 직각삼각형을 이루어야 하므로 $x>3$, $y>3$

$\therefore \begin{cases}x=4\\y=11\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=5\\y=5\end{cases}$

처음 직각삼각형의 넓이는

$x=4$, $y=11$일 때 $\frac{1}{2}xy=22\,(\text{cm}^2)$

$x=5$, $y=5$일 때 $\frac{1}{2}xy=\frac{25}{2}\,(\text{cm}^2)$

따라서 구하는 넓이의 최댓값은 22 cm^2이다. 답 22 cm^2

363

주어진 방정식을 y에 대한 내림차순으로 정리하면

$4y^2+2(2x-3)y+4x^2+3=0$ …… ㉠

y는 실수이므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2x-3)^2-4(4x^2+3)\ge 0$

$4x^2-12x+9-16x^2-12\ge 0$

$4x^2+4x+1\le 0$, $(2x+1)^2\le 0$

x는 실수이므로 $x=-\frac{1}{2}$

$x=-\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$y^2-2y+1=0$, $(y-1)^2=0$ $\therefore y=1$

$\therefore 4x+3y=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)+3\times 1=1$ 답 1

364

$f(a)=a^2+6a+9$, $g(b)=-b^2+4b+k$에서

$f(a)=g(b)$이므로

$a^2+6a+9=-b^2+4b+k$, $a^2+6a+9+b^2-4b-k=0$

$\therefore (a+3)^2+(b-2)^2=k+4$

실수 a, b의 순서쌍 (a, b)가 오직 하나 존재하므로 $k+4=0$이어야 한다.

$\therefore k=-4$

즉, $(a+3)^2+(b-2)^2=0$

$\therefore a=-3,\ b=2$

따라서 $k=-4,\ a=-3,\ b=2$이므로

$a+b+k=(-3)+2+(-4)=-5$ 답 -5

365

두 연립방정식 $\begin{cases} a^2x^2-y^2=-1 \\ 2x+y=3 \end{cases}$, $\begin{cases} x+y=b^2 \\ x^2-y^2=-45 \end{cases}$를 동시에 만족시키는 x, y는 연립방정식

$\begin{cases} 2x+y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-y^2=-45 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

의 해와 같다.

㉠에서 $y=-2x+3$이므로 이를 ㉡에 대입하면

$x^2-(-2x+3)^2=-45$

$x^2-4x-12=0,\ (x-6)(x+2)=0$

$\therefore x=6$ 또는 $x=-2$

$x=6$일 때 $y=-2x+3=-9$, $x=-2$일 때 $y=-2x+3=7$

$\therefore \begin{cases} x=6 \\ y=-9 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=7 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} x=6 \\ y=-9 \end{cases}$ 일 때

$x+y=b^2$에서 $b^2=-3$이므로 b가 실수인 조건에 맞지 않다.

(ii) $\begin{cases} x=-2 \\ y=7 \end{cases}$ 일 때

$x+y=b^2$에서 $b^2=5$

$a^2x^2-y^2=-1$에서 $a^2=12$

(i), (ii)에서

$a^2+b^2=12+5=17$ 답 17

366

이차방정식 $x^2+ax-a+1=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\alpha\beta=-a+1$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡의 $-a$에 대입하면 $\alpha\beta=\alpha+\beta+1$

$\alpha\beta-\alpha-\beta=1,\ \alpha\beta-\alpha-\beta+1=2$

$\therefore (\alpha-1)(\beta-1)=2$

α, β는 양의 정수이므로

$\begin{cases} \alpha-1=1 \\ \beta-1=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \alpha-1=2 \\ \beta-1=1 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \alpha=3 \\ \beta=2 \end{cases}$

따라서 ㉠에서 $a=-(\alpha+\beta)=-5$ 답 -5

5 여러 가지 부등식

24 연립일차부등식

체크 367

ㄱ. $a>b$이므로 $a+c>b+c$

ㄴ. $a>b>1$이므로 $a-1>0,\ b-1>0$

$\therefore (ab+1)-(a+b)=ab-a-b+1$

$=a(b-1)-(b-1)$

$=(a-1)(b-1)>0$

$\therefore ab+1>a+b$

ㄷ. $a>b>1$이므로 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

또한 $c<0$이므로 $\frac{1}{ac}>\frac{1}{bc}$

따라서 옳은 것은 ㄱ이다. 답 ㄱ

체크 368

$(a^2+3)x-3\geq 4ax-a$에서

$(a^2-4a+3)x\geq -(a-3)$

$\therefore (a-1)(a-3)x\geq -(a-3)$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$0\times x\geq$(양이 아닌 실수) 꼴이어야 하므로

$(a-1)(a-3)=0$에서 $a=1$ 또는 $a=3$ $\cdots\cdots$ ㉠

$-(a-3)\leq 0$에서 $a-3\geq 0$ $\therefore a\geq 3$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=3$ 답 3

체크 369

(1) $-2x+3>-1$에서 $x<2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$4(x-1)\geq 3x-5$에서 $4x-4\geq 3x-5$

$\therefore x\geq -1$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $-1\leq x<2$

(2) $\frac{2}{5}x-1.4\leq 0.7x-\frac{1}{2}$의 양변에 10을 곱하면

$4x-14\leq 7x-5,\ -3x\leq 9$ $\therefore x\geq -3$ $\cdots\cdots$ ㉠

$2(x-3)>4x-2$에서 $2x-6>4x-2$

$-2x>4$ $\therefore x<-2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $-3\leq x<-2$

답 (1) $-1\leq x<2$ (2) $-3\leq x<-2$

체크 370

$5x-15\leq 2(x+4)$에서 $5x-15\leq 2x+8$

$3x \le 23 \qquad \therefore x \le \frac{23}{3}$ …… ㉠

$\frac{x+3}{4} - \frac{1-2x}{3} \le x$의 양변에 12를 곱하면

$3(x+3) - 4(1-2x) \le 12x$

$3x+9-4+8x \le 12x,\ 11x+5 \le 12x$

$\therefore x \ge 5$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $5 \le x \le \frac{23}{3}$

따라서 $M=7,\ m=5$이므로

$M-m=7-5=2$ **답** 2

체크 371

주어진 부등식을 변형하면

$$\begin{cases} \frac{x-1}{3} - 3 \le \frac{3(x+2)-1}{2} & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{3(x+2)-1}{2} < x+2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠의 양변에 6을 곱하면

$2(x-1) - 18 \le 9(x+2) - 3$

$2x-20 \le 9x+15,\ 7x \ge -35$

$\therefore x \ge -5$

㉡의 양변에 2를 곱하면

$3(x+2) - 1 < 2(x+2)$

$3x+5 < 2x+4 \qquad \therefore x < -1$

즉, 주어진 부등식의 해는

$-5 \le x < -1$

따라서 정수 x는 $-5,\ -4,\ -3,\ -2$이므로 그 합은

$(-5)+(-4)+(-3)+(-2) = -14$ **답** -14

체크 372

$3(x-2) \ge 2+x$에서 $3x-6 \ge 2+x$

$2x \ge 8 \qquad \therefore x \ge 4$ …… ㉠

$\frac{2x-7}{3} < \frac{x+a}{2} + 1$의 양변에 6을 곱하면

$2(2x-7) < 3(x+a) + 6$

$4x-14 < 3x+3a+6 \qquad \therefore x < 3a+20$ …… ㉡

주어진 연립부등식의 해가 $b \le x < 11$이므로 ㉠, ㉡에서

$b=4,\ 3a+20=11 \qquad \therefore a=-3,\ b=4$

$\therefore b-a = 4-(-3) = 7$ **답** 7

체크 373

(1) $\frac{2x-1}{3} + \frac{1}{4} \ge \frac{x+1}{6}$의 양변에 12를 곱하면

$4(2x-1) + 3 \ge 2(x+1)$

$8x-1 \ge 2x+2,\ 6x \ge 3$

$\therefore x \ge \frac{1}{2}$ …… ㉠

$0.7(x-1) \le -0.3(x+1) + 0.1$의 양변에 10을 곱하면

$7(x-1) \le -3(x+1) + 1$

$7x-7 \le -3x-2,\ 10x \le 5$

$\therefore x \le \frac{1}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $x = \frac{1}{2}$

(2) $5(x+1) - 2 \ge x+5$에서 $5x+3 \ge x+5$

$4x \ge 2 \qquad \therefore x \ge \frac{1}{2}$ …… ㉠

$\frac{x+3}{2} \le \frac{5-x}{3}$의 양변에 6을 곱하면

$3(x+3) \le 2(5-x)$

$3x+9 \le 10-2x,\ 5x \le 1$

$\therefore x \le \frac{1}{5}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 존재하지 않으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.

답 (1) $x = \frac{1}{2}$ (2) 해는 없다.

체크 374

주어진 부등식을 변형하면

$$\begin{cases} \frac{3x+4}{2} \le 2x+a & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+a \le \frac{4x+7}{3} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠의 양변에 2를 곱하면

$3x+4 \le 2(2x+a)$

$3x+4 \le 4x+2a \qquad \therefore x \ge -2a+4$

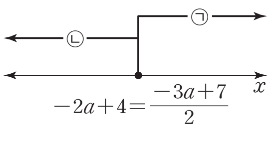
㉡의 양변에 3을 곱하면

$3(2x+a) \le 4x+7$

$6x+3a \le 4x+7 \qquad \therefore x \le \frac{-3a+7}{2}$

이때 ㉠, ㉡의 해가 오직 1개 존재하므로 다음 그림과 같이

$-2a+4 = \frac{-3a+7}{2}$이 성립해야 한다.



$-2a+4 = \frac{-3a+7}{2}$의 양변에 2를 곱하면

$2(-2a+4) = -3a+7,\ -4a+8 = -3a+7$

$\therefore a=1$ **답** 1

체크 375

주어진 부등식을 변형하면

$\begin{cases} -2x+4<3(1-x) & \cdots\cdots ㉠ \\ 3(1-x)<2(x+1)+2k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

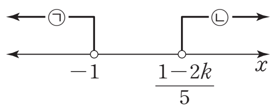
㉠에서 $-2x+4<3-3x$

$\therefore x<-1$

㉡에서 $3-3x<2x+2+2k$

$-5x<2k-1 \qquad \therefore x>\dfrac{1-2k}{5}$

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않도록 ㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, $-1\le\dfrac{1-2k}{5}$가 성립해야 한다.

$-1\le\dfrac{1-2k}{5}$의 양변에 5를 곱하면 $-5\le1-2k$

$-2k\ge-6 \qquad \therefore k\le3$

따라서 상수 k의 최댓값은 3이다. **답** 3

체크 376

$0.9x-0.7\le1.3(x-1)$의 양변에 10을 곱하면

$9x-7\le13(x-1)$

$9x-7\le13x-13,\ -4x\le-6$

$\therefore x\ge\dfrac{3}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉠

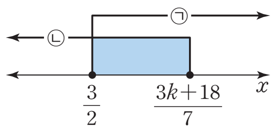
$\dfrac{3x-k}{2}\le\dfrac{x+3}{3}+2$의 양변에 6을 곱하면

$3(3x-k)\le2(x+3)+12$

$9x-3k\le2x+18,\ 7x\le3k+18$

$\therefore x\le\dfrac{3k+18}{7}$ $\cdots\cdots$ ㉡

주어진 연립부등식이 해를 갖도록 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, $\dfrac{3}{2}\le\dfrac{3k+18}{7}$ 이 성립해야 한다.

$\dfrac{3}{2}\le\dfrac{3k+18}{7}$ 의 양변에 14를 곱하면

$21\le2(3k+18),\ 21\le6k+36$

$6k\ge-15 \qquad \therefore k\ge-\dfrac{5}{2}$

따라서 정수 k의 최솟값은 -2이다. **답** -2

체크 377

연속하는 세 홀수를 $2x-1,\ 2x+1,\ 2x+3$이라 하면

(i) 세 홀수의 합은

$(2x-1)+(2x+1)+(2x+3)=6x+3$

이므로 $57\le6x+3\le63$

$54\le6x\le60 \qquad \therefore 9\le x\le10$

(ii) $(2x-1)^2+116>(2x+1)(2x+3)$이므로

$4x^2-4x+1+116>4x^2+8x+3$

$12x<114 \qquad \therefore x<\dfrac{19}{2}$

(i), (ii)에서 $9\le x<\dfrac{19}{2}$이므로

$18\le2x<19 \qquad \therefore 21\le2x+3<22$

따라서 조건을 만족시키는 가장 큰 홀수는 21이다. **답** 21

체크 378

입장하는 어린이를 x명이라 하면 입장하는 어른은 $(25-x)$명이므로

$220000\le10000(25-x)+8000x<230000$

이 부등식을 변형하면

$\begin{cases} 220000\le10000(25-x)+8000x & \cdots\cdots ㉠ \\ 10000(25-x)+8000x<230000 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 양변을 1000으로 나누면

$220\le10(25-x)+8x$

$220\le250-10x+8x$

$2x\le30 \qquad \therefore x\le15$

㉡에서 양변을 1000으로 나누면

$10(25-x)+8x<230$

$250-10x+8x<230$

$-2x<-20 \qquad \therefore x>10$

㉠, ㉡의 해의 공통부분은 $10<x\le15$

따라서 입장하는 어린이는 최소 11명, 최대 15명이므로

$M=15,\ m=11 \qquad \therefore M+m=15+11=26$ **답** 26

체크 379

의자가 x개라 하면 관람객은 $(4x+3)$명이다.

관람객이 7명씩 앉으면 완전히 빈 의자가 4개 남으므로 의자 $(x-5)$개에는 7명씩 앉고 나머지 의자 5개 중 하나에는 1명 이상 7명 이하로 앉게 된다.

$\therefore 7(x-5)+1\le4x+3\le7(x-5)+7$

위의 연립부등식을 변형하면

$\begin{cases} 7(x-5)+1\le4x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x+3\le7(x-5)+7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $7x-34\le 4x+3$, $3x\le 37$ $\quad\therefore x\le\frac{37}{3}$

㉡에서 $4x+3\le 7x-28$, $-3x\le -31$ $\quad\therefore x\ge\frac{31}{3}$

㉠, ㉡의 해의 공통부분은 $\frac{31}{3}\le x\le\frac{37}{3}$

이때 의자의 개수 x는 자연수이므로 $x=11$ 또는 $x=12$

$x=11$일 때, 즉 의자가 11개일 때 관람객은

$4x+3=4\times 11+3=47$(명)

$x=12$일 때, 즉 의자가 12개일 때 관람객은

$4x+3=4\times 12+3=51$(명)

그런데 의자의 개수를 a, 관람객의 수를 b라 할 때 $b<50$이므로

$a=11$, $b=47$ $\quad\therefore b-a=47-11=36$ 답 36

체크 380

섭취하는 바나나의 양을 x g이라 하면 섭취하는 우유의 양은 $(250-x)$ g이므로

$$\begin{cases}\frac{1}{100}x+\frac{3}{100}(250-x)\ge 5 & \cdots\cdots ㉠\\ \frac{24}{100}x+\frac{56}{100}(250-x)\le 124 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠의 양변에 100을 곱하면

$x+3(250-x)\ge 500$

$-2x+750\ge 500$, $-2x\ge -250$ $\quad\therefore x\le 125$

㉡의 양변에 100을 곱하면

$24x+56(250-x)\le 12400$

$-32x+14000\le 12400$, $-32x\le -1600$ $\quad\therefore x\ge 50$

㉠, ㉡의 해의 공통부분은 $50\le x\le 125$

따라서 섭취해야 하는 바나나의 양은

50 g 이상 125 g 이하이다.

답 50 g 이상 125 g 이하

25 절댓값 기호를 포함한 부등식

체크 381

$|x-a|<5$이므로 $-5<x-a<5$

$-5<x-a$에서 $x>a-5$ $\cdots\cdots$ ㉠

$x-a<5$에서 $x<a+5$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 $a-5<x<a+5$

이것이 $3<x<13$과 일치하므로

$a-5=3$, $a+5=13$ $\quad\therefore a=8$ 답 8

체크 382

절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은

$3x-1=0$ $\quad\therefore x=\frac{1}{3}$

(i) $x\ge\frac{1}{3}$일 때, $3x-1\ge 2x+1$에서 $x\ge 2$

그런데 $x\ge\frac{1}{3}$이므로 $x\ge 2$

(ii) $x<\frac{1}{3}$일 때, $-3x+1\ge 2x+1$에서 $x\le 0$

그런데 $x<\frac{1}{3}$이므로 $x\le 0$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$x\le 0$ 또는 $x\ge 2$

이것이 $x\ge\alpha$ 또는 $x\le\beta$와 일치하므로

$\alpha=2$, $\beta=0$

$\therefore \alpha+2\beta=2+2\times 0=2$ 답 2

tip

두 상수 a, b에 대하여 $|x-a|>b$ 꼴의 부등식은

$x-a>b$ 또는 $x-a<-b$

로 변형하여 풀 수 있지만 주어진 부등식 $|3x-1|\ge 2x+1$을

$3x-1\ge 2x+1$ 또는 $3x-1\le -(2x+1)$

로 변형하여 풀면 안 된다. 이와 같이 절댓값 기호 밖에도 미지수 x가 있는 경우에는 반드시 x의 값의 범위를 나누어 절댓값 기호를 없애고 풀어야 한다.

체크 383

(1) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은

$x-1=0$, $x-5=0$ $\quad\therefore x=1$, $x=5$

즉, $x=1$, $x=5$를 기준으로 x의 값의 범위를 다음과 같이 나누어 풀 수 있다.

(i) $x<1$일 때, $-(x-1)-(x-5)\ge 7$

$-2x+6\ge 7$ $\quad\therefore x\le -\frac{1}{2}$

그런데 $x<1$이므로 $x\le -\frac{1}{2}$

(ii) $1\le x<5$일 때, $(x-1)-(x-5)\ge 7$

$\therefore 4\ge 7$

이는 옳지 않은 부등식이므로 이 범위에서 주어진 부등식의 해는 없다.

(iii) $x\ge 5$일 때, $(x-1)+(x-5)\ge 7$

$2x-6\ge 7$ $\quad\therefore x\ge\frac{13}{2}$

그런데 $x\ge 5$이므로 $x\ge\frac{13}{2}$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는

$x\le -\frac{1}{2}$ 또는 $x\ge\frac{13}{2}$

(2) 주어진 부등식 $|2x-4| \le |3-x|$에서

$|2x-4| \le |x-3|$

절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은

$2x-4=0$, $x-3=0$ $\quad \therefore x=2, x=3$

즉, $x=2$, $x=3$을 기준으로 x의 값의 범위를 다음과 같이 나누어 풀 수 있다.

(i) $x<2$일 때, $-(2x-4) \le -(x-3)$

$-2x+4 \le -x+3$, $-x \le -1$ $\quad \therefore x \ge 1$

그런데 $x<2$이므로 $1 \le x < 2$

(ii) $2 \le x < 3$일 때, $2x-4 \le -(x-3)$

$2x-4 \le -x+3$, $3x \le 7$ $\quad \therefore x \le \frac{7}{3}$

그런데 $2 \le x < 3$이므로 $2 \le x \le \frac{7}{3}$

(iii) $x \ge 3$일 때, $2x-4 \le x-3$

$\therefore x \le 1$

그런데 $x \ge 3$이므로 이 범위에서 주어진 부등식의 해는 없다.

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는

$1 \le x \le \frac{7}{3}$

답 (1) $x \le -\frac{1}{2}$ 또는 $x \ge \frac{13}{2}$ (2) $1 \le x \le \frac{7}{3}$

체크 384

절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은

$x-1=0$, $x+1=0$ $\quad \therefore x=1, x=-1$

즉, $x=1$, $x=-1$을 기준으로 x의 값의 범위를 다음과 같이 나누어 풀 수 있다.

(i) $x<-1$일 때, $-3(x-1)+2(x+1) \le 8$

$-x+5 \le 8$ $\quad \therefore x \ge -3$

그런데 $x<-1$이므로 $-3 \le x < -1$

(ii) $-1 \le x < 1$일 때, $-3(x-1)-2(x+1) \le 8$

$-5x+1 \le 8$ $\quad \therefore x \ge -\frac{7}{5}$

그런데 $-1 \le x < 1$이므로 $-1 \le x < 1$

(iii) $x \ge 1$일 때, $3(x-1)-2(x+1) \le 8$

$x-5 \le 8$ $\quad \therefore x \le 13$

그런데 $x \ge 1$이므로 $1 \le x \le 13$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는

$-3 \le x \le 13$

따라서 $a=-3$, $b=13$이므로

$a+b=(-3)+13=10$ 답 10

연습 문제 14

385

부등식 $(a-1)(a-2)x \ge a-1$에서

ㄱ. $a=1$이면 $0 \times x \ge 0$이므로 해는 모든 실수이다.

ㄴ. $a=2$이면 $0 \times x \ge 1$이므로 해가 없다.

ㄷ. $a \ne 1$, $a \ne 2$이면 $(a-1)(a-2)x \ge a-1$에서

(i) $(a-1)(a-2)>0$일 때,

부등식의 해는 $x \ge \frac{1}{a-2}$

(ii) $(a-1)(a-2)<0$일 때,

부등식의 해는 $x \le \frac{1}{a-2}$

(i), (ii)에서 주어진 부등식은 무수히 많은 해를 갖는다.

ㄹ. $a>2$이면 $a-1>0$, $a-2>0$

즉, $(a-1)(a-2)>0$이므로 주어진 부등식에서

$x \ge \frac{a-1}{(a-1)(a-2)}$ $\quad \therefore x \ge \frac{1}{a-2}$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

386

부등식 $(3a-b)x+5a-2b<0$에서

$(3a-b)x<-5a+2b$

이 부등식의 해가 $x<-3$이므로

(i) $3a-b>0$ $\quad \therefore 3a>b$

(ii) 해는 $x<\frac{-5a+2b}{3a-b}$이므로

$\frac{-5a+2b}{3a-b}=-3$

$-5a+2b=-3(3a-b)$

$-5a+2b=-9a+3b$ $\quad \therefore b=4a$ …… ㉠

(i), (ii)에서 $3a>b=4a$이므로 $a<0$, $b<0$

㉠을 부등식 $(2a-b)x+6a-b \ge 0$에 대입하면

$-2ax+2a \ge 0$, $2ax \le 2a$ $\quad \therefore x \ge 1$ ($\because a<0$)

답 $x \ge 1$

387

회원으로 가입하여 n회 이용하는 비용은 $(50000+8000n)$원이고, 비회원으로 n회 이용하는 비용은 $12000n$원이다.

회원으로 가입하여 이용할 때 비용이 덜 들려면

$12000n > 50000+8000n$

$4000n > 50000$ $\quad \therefore n > 12.5$

따라서 13회 이상 이용하면 비회원으로 이용할 때보다 비용이 덜 들게 되므로 구하는 n의 최솟값은 13이다. 답 13

388

$3(x-2)<2x-1$에서 $3x-6<2x-1$

$\therefore x<5$ …… ㉠

$\frac{3}{4}x+1\geq\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$의 양변에 4를 곱하면

$3x+4\geq 2x-1 \quad \therefore x\geq -5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 $-5\leq x<5$이므로

$\alpha=-5,\ \beta=5$

$\therefore \alpha+\beta=(-5)+5=0$ 답 0

389

$\frac{x-3}{2}\leq -1$의 양변에 2를 곱하면

$x-3\leq -2 \quad \therefore x\leq 1$ …… ㉠

$\frac{2x+3}{3}-\frac{x+1}{2}\geq\frac{2}{3}$의 양변에 6을 곱하면

$2(2x+3)-3(x+1)\geq 4$

$4x+6-3x-3\geq 4 \quad \therefore x\geq 1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 $x=1$ 답 $x=1$

390

$\frac{4}{3}-\frac{1}{2}(a+2)\geq 2x$의 양변에 6을 곱하면

$8-3(a+2)\geq 12x$

$-3a+2\geq 12x \quad \therefore x\leq\frac{-3a+2}{12}$ …… ㉠

$3x\geq x+1$에서 $x\geq\frac{1}{2}$ …… ㉡

주어진 연립부등식의 해가 존재하려면 ㉠, ㉡의 공통부분이 존재해야 하므로

$\frac{1}{2}\leq\frac{-3a+2}{12}$

$\frac{1}{2}\leq\frac{-3a+2}{12}$의 양변에 12를 곱하면

$6\leq -3a+2 \quad \therefore a\leq -\frac{4}{3}$ 답 $a\leq -\frac{4}{3}$

391

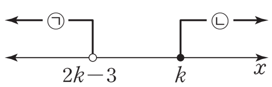
$4x+3<3x+2k$에서 $x<2k-3$ …… ㉠

$(k-2)x\geq k^2-2k$에서 $(k-2)x\geq k(k-2)$

(i) $k>2$일 때, $k-2>0$이므로 부등식의 해는

$x\geq\frac{k(k-2)}{k-2} \quad \therefore x\geq k$ …… ㉡

주어진 부등식의 해가 존재하지 않으려면 ㉠, ㉡의 공통부분이 존재하지 않아야 하므로



$2k-3\leq k \quad \therefore k\leq 3$

그런데 $k>2$이므로 $2<k\leq 3$

(ii) $k=2$일 때, $(k-2)x\geq k(k-2)$에서 $0\times x\geq 0$

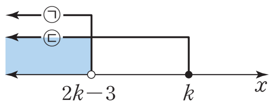
그런데 부등식의 해는 모든 실수이므로 ㉠과의 공통부분은 $x<1$

즉, 해가 존재하므로 조건에 맞지 않다.

(iii) $k<2$일 때, $k-2<0$이므로 부등식의 해는

$x\leq\frac{k(k-2)}{k-2} \quad \therefore x\leq k$ …… ㉢

그런데 $k<2$이면 $2k-3<k$이므로 ㉠, ㉢의 공통부분은 $x<2k-3$



즉, 해가 존재하므로 조건에 맞지 않다.

(i)~(iii)에서 주어진 연립부등식의 해가 존재하지 않도록 하는 k의 값의 범위는

$2<k\leq 3$ 답 $2<k\leq 3$

tip

(iii)에서 $k<2$이면 $2k-3<k$임을 다음과 같이 확인할 수 있다.

⇨ $k<2$의 양변에 k를 더하면 $2k<k+2$

$2k<k+2$의 양변에서 3을 빼면 $2k-3<k-1$

이때 $k-1<k$이므로 $2k-3<k$

392

$\frac{2x+7}{6}\geq\frac{2x-3}{2}$의 양변에 6을 곱하면

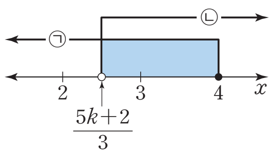
$2x+7\geq 3(2x-3)$

$2x+7\geq 6x-9 \quad \therefore x\leq 4$ …… ㉠

$3(x-k)>2+2k$에서

$3x-3k>2+2k \quad \therefore x>\frac{5k+2}{3}$ …… ㉡

이때 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 3, 4뿐이므로 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $2\leq\frac{5k+2}{3}<3$이어야 하므로

$2\leq\frac{5k+2}{3}$에서 $k\geq\frac{4}{5}$, $\frac{5k+2}{3}<3$에서 $k<\frac{7}{5}$

따라서 $\frac{4}{5}\leq k<\frac{7}{5}$이므로 정수 k의 값은 1이다. 답 1

393

15 %의 소금물의 양을 x g이라 하면 섞어서 만든 소금물의 양은 $(150+x)$ g이고 농도는 13 % 이상 14 % 이하이므로

$\frac{13}{100}\times(150+x)\le\frac{12}{100}\times150+\frac{15}{100}\times x\le\frac{14}{100}\times(150+x)$

양변에 100을 곱하고 정리하면

$1950+13x\le1800+15x\le2100+14x$

$1950+13x\le1800+15x$에서 $x\ge75$

$1800+15x\le2100+14x$에서 $x\le300$

$\therefore 75\le x\le300$

따라서 섞어야 하는 15 %의 소금물의 양은

75 g 이상 300 g 이하이다. 답 75 g 이상 300 g 이하

tip

- (소금물의 농도)$=\frac{(\text{소금의 양})}{(\text{소금물의 양})}\times100(\%)$
- (소금의 양)$=\frac{(\text{농도})}{100}\times(\text{소금물의 양})$ (g)

394

필요한 합금 A의 양을 x g이라 하면 합금 B의 양은

$(150-x)$ g이므로

$$\begin{cases}\frac{15}{100}x+\frac{20}{100}(150-x)\ge25 & \cdots\cdots ㉠\\ \frac{24}{100}x+\frac{16}{100}(150-x)\ge28 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠의 양변에 100을 곱하면

$15x+20(150-x)\ge2500 \qquad \therefore x\le100$

㉡의 양변에 100을 곱하면

$24x+16(150-x)\ge2800 \qquad \therefore x\ge50$

㉠, ㉡의 해의 공통부분은 $50\le x\le100$

따라서 필요한 합금 A의 양은 최대 100 g, 최소 50 g이므로

$M=100$, $m=50$

$\therefore M-m=100-50=50$ 답 50

395

주어진 부등식을 변형하면

$$\begin{cases}3(x-2)+1\le2x-1 & \cdots\cdots ㉠\\ 2x-1<5(x-3)+6 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠에서 $3x-5\le2x-1 \qquad \therefore x\le4$

㉡에서 $2x-1<5x-9 \qquad \therefore x>\frac{8}{3}$

따라서 주어진 부등식의 해는 ㉠, ㉡의 해의 공통부분이므로

$\frac{8}{3}<x\le4$ 답 $\frac{8}{3}<x\le4$

396

$2x-y=8$에서 $y=2x-8$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 부등식 $-x-5<3x+y+12\le2x+7$에 대입하면

$-x-5<3x+(2x-8)+12\le2x+7$

$\therefore -x-5<5x+4\le2x+7$

이 부등식을 변형하면 $\begin{cases}-x-5<5x+4 & \cdots\cdots ㉡\\ 5x+4\le2x+7 & \cdots\cdots ㉢\end{cases}$

㉡에서 $x>-\frac{3}{2}$, ㉢에서 $x\le1$

연립부등식의 해는 ㉡, ㉢의 해의 공통부분이므로

$-\frac{3}{2}<x\le1$

즉, 정수 x는 $x=-1, 0, 1$

㉠에 의하여

$x=-1$일 때 $y=-10$, $x=0$일 때 $y=-8$,

$x=1$일 때 $y=-6$

따라서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는

$(-1, -10), (0, -8), (1, -6)$의 3이다. 답 3

397

부등식 $2m+5n+4\le(m+2n)x<m+n+2$의 해가

$4\le x<5$이므로 부등호의 방향이 변하지 않는다.

$\therefore m+2n>0$

주어진 부등식을 변형하면

$$\begin{cases}2m+5n+4\le(m+2n)x & \cdots\cdots ㉠\\ (m+2n)x<m+n+2 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠에서 $x\ge\frac{2m+5n+4}{m+2n}$, ㉡에서 $x<\frac{m+n+2}{m+2n}$이므로 부등식의 해는 $\frac{2m+5n+4}{m+2n}\le x<\frac{m+n+2}{m+2n}$

즉, $\frac{2m+5n+4}{m+2n}=4$에서 $2m+5n+4=4m+8n$

$\therefore 2m+3n=4$ $\cdots\cdots$ ㉢

또한 $\frac{m+n+2}{m+2n}=5$에서 $m+n+2=5m+10n$

$\therefore 4m+9n=2$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $m=5$, $n=-2$

$\therefore m^2+n^2=5^2+(-2)^2=29$ 답 29

398

$|ax+b|\le2$에서 $-2\le ax+b\le2$

$-2-b\le ax\le-b+2$에서 $a>0$이므로

$\frac{-2-b}{a}\le x\le\frac{-b+2}{a}$

이것이 $-1\le x\le3$과 일치하므로

$\frac{-2-b}{a}=-1$, $\frac{-b+2}{a}=3$

즉, $2+b=a$, $2-b=3a$를 연립하여 풀면

$a=1$, $b=-1$

$\therefore a+b=1+(-1)=0$ 답 0

399

$\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$이므로 $\sqrt{(x-1)^2}+3|x+2|\le 5$에서

$|x-1|+3|x+2|\le 5$

절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은

$x-1=0$, $x+2=0$ $\quad \therefore x=1$, $x=-2$

즉, $x=1$, $x=-2$를 기준으로 x의 값의 범위를 다음과 같이 나누어 풀 수 있다.

(i) $x<-2$일 때, $-(x-1)-3(x+2)\le 5$

$-4x-5\le 5$이므로 $x\ge -\frac{5}{2}$

그런데 $x<-2$이므로 $-\frac{5}{2}\le x<-2$

(ii) $-2\le x<1$일 때, $-(x-1)+3(x+2)\le 5$

$2x+7\le 5$이므로 $x\le -1$

그런데 $-2\le x<1$이므로 $-2\le x\le -1$

(iii) $x\ge 1$일 때, $(x-1)+3(x+2)\le 5$

$4x+5\le 5$이므로 $x\le 0$

그런데 $x\ge 1$이므로 해가 없다.

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는 $-\frac{5}{2}\le x\le -1$

따라서 정수 x는 -2, -1의 2개이다. 답 2

400

$\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|$이므로 주어진 부등식은

$|x+2|+|x-3|<k$

절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은

$x+2=0$, $x-3=0$ $\quad \therefore x=-2$, $x=3$

즉, $x=-2$, $x=3$의 기준으로 x의 값의 범위를 다음과 같이 나눌 수 있다.

(i) $x<-2$일 때,

$-(x+2)-(x-3)<k$에서 $-2x+1<k$

$-2x<k-1$ $\quad \therefore x>\frac{1-k}{2}$

그런데 $x<-2$이므로 해가 존재하려면 $\frac{1-k}{2}<-2$

$1-k<-4$ $\quad \therefore k>5$

(ii) $-2\le x<3$일 때,

$(x+2)-(x-3)<k$ $\quad \therefore 0\times x<k-5$

해가 존재하려면

$k-5>0$ $\quad \therefore k>5$

(iii) $x\ge 3$일 때,

$(x+2)+(x-3)<k$에서 $2x-1<k$

$2x<k+1$ $\quad \therefore x<\frac{k+1}{2}$

그런데 $x\ge 3$이므로 해가 존재하려면

$\frac{k+1}{2}>3$, $k+1>6$ $\quad \therefore k>5$

(i)~(iii)에서 $k>5$ 답 $k>5$

401

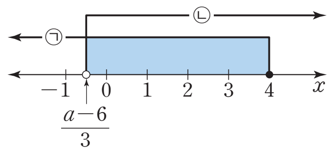
$0.3(5-2x)\ge 0.7-0.4x$의 양변에 10을 곱하면

$3(5-2x)\ge 7-4x$

$15-6x\ge 7-4x$ $\quad \therefore x\le 4$ ······ ㉠

$3x+a<6(x+1)$에서

$3x+a<6x+6$ $\quad \therefore x>\frac{a-6}{3}$ ······ ㉡



이때 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 5개이므로 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.

즉, $-1\le \frac{a-6}{3}<0$이어야 하므로

$-1\le \frac{a-6}{3}$에서 $a\ge 3$, $\frac{a-6}{3}<0$에서 $a<6$

따라서 실수 a의 값의 범위는 $3\le a<6$이다. 답 $3\le a<6$

402

잘못 변형하여 만든 연립부등식 $\begin{cases} 4x-a\le x+a & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x-a<5x+b & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

에서 ㉠의 해는 $x\le \frac{2a}{3}$, ㉡의 해는 $x>-a-b$

이때 잘못 변형하여 만든 연립부등식의 해가 $-2<x\le 2$이므로

$-a-b=-2$, $\frac{2a}{3}=2$

$\therefore a=3$, $b=-1$

즉, 주어진 부등식은 $4x-3\le x+3<5x-1$이므로 바르게 변형하면

$\begin{cases} 4x-3\le x+3 & \cdots\cdots ㉢ \\ x+3<5x-1 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

㉢에서 $x\le 2$, ㉣에서 $x>1$

그러므로 처음 주어진 부등식의 바른 해는 ㉢, ㉣의 해의 공통부분이므로

$1<x\le 2$ 답 $1<x\le 2$

26 이차부등식(1)

체크 **403**

(1) 부등식 $f(x)\le g(x)$의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 이차함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나거나 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$x\le -3$ 또는 $x\ge 4$

(2) 부등식 $f(x)>g(x)$의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 이차함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$-3<x<4$

(3) $f(x)g(x)\ge 0$이면

$f(x)\ge 0,\ g(x)\ge 0$ 또는 $f(x)\le 0,\ g(x)\le 0$

(i) $f(x)\ge 0,\ g(x)\ge 0$인 x의 값의 범위는

$2\le x\le 6$

(ii) $f(x)\le 0,\ g(x)\le 0$인 x의 값의 범위는

$-5\le x\le -2$

(i), (ii)에서 $f(x)g(x)\ge 0$의 해는

$-5\le x\le -2$ 또는 $2\le x\le 6$

(4) $f(x)g(x)<0$이면

$f(x)>0,\ g(x)<0$ 또는 $f(x)<0,\ g(x)>0$

(i) $f(x)>0,\ g(x)<0$인 x의 값의 범위는

$-2<x<2$

(ii) $f(x)<0,\ g(x)>0$인 x의 값의 범위는

$x<-5$ 또는 $x>6$

(i), (ii)에서 $f(x)g(x)<0$의 해는

$x<-5$ 또는 $-2<x<2$ 또는 $x>6$

답 풀이 참조

체크 **404**

(1) $x^2-4\ge 2(x+2)$에서 $x^2-4\ge 2x+4$

$x^2-2x-8\ge 0,\ (x+2)(x-4)\ge 0$

$\therefore\ x\le -2$ 또는 $x\ge 4$

(2) $3x^2+x+2<2(x+6)$에서 $3x^2+x+2<2x+12$

$3x^2-x-10<0,\ (3x+5)(x-2)<0$

$\therefore\ -\frac{5}{3}<x<2$

(3) $3(x-1)\ge x^2-2$에서 $3x-3\ge x^2-2$

$\therefore\ x^2-3x+1\le 0$

이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 해는 근의 공식에 의하여

$x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$이므로 $x^2-3x+1\le 0$의 좌변을 인수분해하면

$\left(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\le 0$

$\therefore\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}\le x\le \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

(4) $-3(x-1)^2<x-2$에서 $-3x^2+6x-3<x-2$

$\therefore\ 3x^2-5x+1>0$

이차방정식 $3x^2-5x+1=0$의 해는 근의 공식에 의하여

$x=\frac{5\pm\sqrt{13}}{6}$이므로 $3x^2-5x+1>0$의 좌변을 인수분해하면

$\left(x-\frac{5-\sqrt{13}}{6}\right)\left(x-\frac{5+\sqrt{13}}{6}\right)>0$

$\therefore\ x<\frac{5-\sqrt{13}}{6}$ 또는 $x>\frac{5+\sqrt{13}}{6}$

답 풀이 참조

tip

이차부등식의 부등호를 등호로 바꿔 만든 이차방정식의 판별식 D가 $D>0$인 경우

⇨ 인수분해 또는 근의 공식을 이용하여 이차방정식의 해를 구한 후 부등식의 해의 범위를 나타낸다.

체크 **405**

(1) $-9x^2+6x-1\ge 0$의 양변에 -1을 곱하면

$9x^2-6x+1\le 0 \qquad \therefore\ (3x-1)^2\le 0$

따라서 주어진 부등식의 해는 $x=\frac{1}{3}$이다.

(2) $4x^2+8x+4<-4(x+1)-1$에서

$4x^2+8x+4<-4x-5$

$4x^2+12x+9<0 \qquad \therefore\ (2x+3)^2<0$

따라서 주어진 부등식의 해는 없다.

(3) $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}$이므로

$x^2-x+1\ge 0$의 해는 모든 실수이다.

(4) $5x^2-7x+\frac{5}{2}=5\left(x-\frac{7}{10}\right)^2+\frac{1}{20}\ge\frac{1}{20}$이므로

$5x^2-7x+\frac{5}{2}<0$의 해는 없다.

답 (1) $x=\frac{1}{3}$ (2) 해는 없다.
(3) 모든 실수 (4) 해는 없다.

체크 **406**

(1) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은 $x=0$

(i) $x\ge 0$일 때

$2x^2-5x+3\le 0$에서 $(x-1)(2x-3)\le 0$

$\therefore\ 1\le x\le\frac{3}{2}$

그런데 $x\ge 0$이므로 $1\le x\le\frac{3}{2}$

(ii) $x<0$일 때

$2x^2+5x+3\le 0$에서 $(2x+3)(x+1)\le 0$

$\therefore -\frac{3}{2}\le x\le -1$

그런데 $x<0$이므로 $-\frac{3}{2}\le x\le -1$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-\frac{3}{2}\le x\le -1$ 또는 $1\le x\le \frac{3}{2}$

(2) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은 $x=2$

(i) $x\ge 2$일 때

$x-2\le x^2-2x$에서 $x^2-3x+2\ge 0$

$(x-1)(x-2)\ge 0$

$\therefore x\le 1$ 또는 $x\ge 2$

그런데 $x\ge 2$이므로 $x\ge 2$

(ii) $x<2$일 때

$-x+2\le x^2-2x$에서 $x^2-x-2\ge 0$

$(x+1)(x-2)\ge 0$

$\therefore x\le -1$ 또는 $x\ge 2$

그런데 $x<2$이므로 $x\le -1$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$x\le -1$ 또는 $x\ge 2$

(3) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은

$x^2-9=0$에서 $x=-3$, $x=3$

(i) $x<-3$ 또는 $x\ge 3$일 때

$x^2-9<8x$에서 $x^2-8x-9<0$

$(x+1)(x-9)<0 \quad \therefore -1<x<9$

그런데 $x<-3$ 또는 $x\ge 3$이므로 $3\le x<9$

(ii) $-3\le x<3$일 때,

$-x^2+9<8x$에서 $x^2+8x-9>0$

$(x+9)(x-1)>0 \quad \therefore x<-9$ 또는 $x>1$

그런데 $-3\le x<3$이므로 $1<x<3$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$1<x<9$

답 (1) $-\frac{3}{2}\le x\le -1$ 또는 $1\le x\le \frac{3}{2}$
(2) $x\le -1$ 또는 $x\ge 2$
(3) $1<x<9$

[다른 풀이]

(1) $2x^2-5|x|+3\le 0$에서 $x^2=|x|^2$이므로

$2|x|^2-5|x|+3\le 0$

$(2|x|-3)(|x|-1)\le 0$, $1\le |x|\le \frac{3}{2}$

$\therefore -\frac{3}{2}\le x\le -1$ 또는 $1\le x\le \frac{3}{2}$

27 이차부등식(2)

체크 407

(1) 해가 $x<\sqrt{2}-1$ 또는 $x>\sqrt{2}+1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$\{x-(\sqrt{2}-1)\}\{x-(\sqrt{2}+1)\}>0$

$\therefore x^2-2\sqrt{2}x+1>0$

이 부등식이 $x^2+ax+b>0$과 일치하므로

$a=-2\sqrt{2}$, $b=1$

$\therefore a^2+b^2=(-2\sqrt{2})^2+1^2=9$

(2) 해가 $-\frac{1}{3}\le x\le \frac{1}{2}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\le 0$

$\therefore x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}\le 0$ ...... ㉠

㉠과 주어진 이차부등식의 부등호의 방향이 다르므로

$a<0$

㉠의 양변에 a를 곱하면 $ax^2-\frac{1}{6}ax-\frac{1}{6}a\ge 0$

이 부등식이 $ax^2+x+b\ge 0$과 일치하므로

$-\frac{1}{6}a=1$, $-\frac{1}{6}a=b \qquad \therefore a=-6$, $b=1$

$\therefore b-a=1-(-6)=7$

답 (1) 9 (2) 7

체크 408

해가 $x=-1$뿐이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)^2\le 0 \qquad \therefore x^2+2x+1\le 0$

이 부등식이 $x^2+(k-3)x+k-4\le 0$과 일치하므로

$k-3=2$, $k-4=1 \qquad \therefore k=5$

답 5

tip

이차부등식의 해가 $x=\alpha$ 하나뿐인 경우는 다음 두 가지이다.

(1) $a>0$, (판별식)$=0$인 경우 ⇨ $a(x-\alpha)^2\le 0$

(2) $a<0$, (판별식)$=0$인 경우 ⇨ $a(x-\alpha)^2\ge 0$

체크 409

해가 $x<-1$ 또는 $x>2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-2)>0$

$\therefore x^2-x-2>0$ ...... ㉠

㉠과 주어진 이차부등식의 부등호의 방향이 다르므로

$a<0$

㉠의 양변에 a를 곱하면 $ax^2-ax-2a<0$

이 이차부등식이 $ax^2+bx+c<0$과 일치하므로

$b=-a,\ c=-2a$ …… ㉡

㉡을 이차부등식 $bx^2+ax-c\geq 0$에 대입하면

$-ax^2+ax+2a\geq 0$

양변을 $-a$로 나누면 $x^2-x-2\geq 0$ ($\because a<0$에서 $-a>0$)

$(x+1)(x-2)\geq 0$

$\therefore x\leq -1$ 또는 $x\geq 2$ 답 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 2$

체크 410

해가 $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)<0$

$\therefore x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}<0$ …… ㉠

㉠과 주어진 이차부등식의 부등호의 방향이 다르므로

$a<0$

㉠의 양변에 a를 곱하면 $ax^2-\frac{5}{6}ax+\frac{1}{6}a>0$

이 이차부등식이 $ax^2+bx+c>0$과 일치하므로

$b=-\frac{5}{6}a,\ c=\frac{1}{6}a$ …… ㉡

㉡을 이차부등식 $4cx^2+2bx+a\geq 0$에 대입하면

$\frac{2}{3}ax^2-\frac{5}{3}ax+a\geq 0$

양변에 $\frac{3}{a}$을 곱하면 $2x^2-5x+3\leq 0$ ($\because a<0$)

$(x-1)(2x-3)\leq 0$ $\therefore 1\leq x\leq \frac{3}{2}$

따라서 구하는 정수 x의 값은 1이다. 답 1

체크 411

모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$(k+1)x^2-2(k+1)x+4\geq 0$이 항상 성립해야 하므로

(i) $k+1>0$에서 $k>-1$

(ii) 이차방정식 $(k+1)x^2-2(k+1)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-4(k+1)\leq 0,\ ^2-2k-3\leq 0$

$k(k+1)(k-3)\leq 0$ $\therefore -1\leq k\leq 3$

(i), (ii)에서 $-1<k\leq 3$이므로 실수 k의 최댓값은 3이다.

답 3

체크 412

(i) $m=2$일 때

$m=2$를 주어진 부등식에 대입하면

$0\times x^2-0\times x+4>0$에서 $4>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $m\neq 2$일 때

모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면

$m-2>0$에서 $m>2$ …… ㉠

이차방정식 $(m-2)x^2-2(m-2)x+4=0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=\{-(m-2)\}^2-4(m-2)<0$

$m^2-8m+12<0,\ (m-2)(m-6)<0$

$\therefore 2<m<6$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2<m<6$

(i), (ii)에서 $2\leq x<6$이므로 정수 m의 값은 2, 3, 4, 5이고 그 합은

$2+3+4+5=14$ 답 14

tip

모든 실수 x에 대하여

(1) 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 항상 성립

⇨ 이차부등식의 조건이 주어졌으므로 $a\neq 0$

(2) 부등식 $ax^2+bx+c>0$이 항상 성립

⇨ 주어진 부등식이 이차부등식이 아닐 수 있으므로 $a=0,\ a\neq 0$의 두 가지 경우로 나누어 푼다.

체크 413

이차방정식 $(k-1)x^2+2(k-1)x+1=0$의 판별식을 D라 할 때, 주어진 부등식이 단 한 개의 실근을 가지려면 x^2의 계수가 양수이고 $D=0$이어야 하므로

(i) $k-1>0$에서 $k>1$

(ii) $\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k-1)=0$에서

$k^2-3k+2=0,\ (k-1)(k-2)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=2$

(i), (ii)에서 $k=2$ 답 2

체크 414

(i) $k>0$일 때

주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $kx^2+2kx+9=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=k^2-9k>0$에서 $k(k-9)>0$

$\therefore k<0$ 또는 $k>9$

그런데 $k>0$이므로 $k>9$

(ⅱ) $k<0$일 때

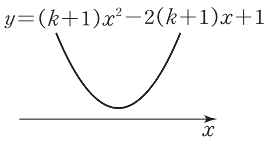
이차함수 $y=kx^2+2kx+9$의 그래프는 위로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

$\therefore k<0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $k<0$ 또는 $k>9$ 　　답 $k<0$ 또는 $k>9$

체크 415

주어진 이차부등식이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $(k+1)x^2-2(k+1)x+1\geq0$이 성립해야 한다.



따라서 이차방정식 $(k+1)x^2-2(k+1)x+1=0$의 판별식을 D라 할 때, x^2의 계수가 양수이고 $D\leq0$이어야 하므로

(ⅰ) $k+1>0$에서 $k>-1$

(ⅱ) $\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-(k+1)\leq0$에서

$k^2+k\leq0$, $k(k+1)\leq0$

$\therefore -1\leq k\leq0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $-1<k\leq0$이므로 정수 k의 값은 0의 1개이다.

답 1

체크 416

해가 $x\leq-1$ 또는 $x\geq1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-1)\geq0$ 　　…… ㉠

㉠과 이차부등식 $f(x)\geq0$의 부등호의 방향이 같으므로 ㉠의 양변에 양수인 a를 곱하면

$a(x+1)(x-1)\geq0$

$\therefore f(x)=a(x+1)(x-1)$ (단, $a>0$)

$f(2018-x)=a(2019-x)(2017-x)$

$=a(x-2017)(x-2019)$

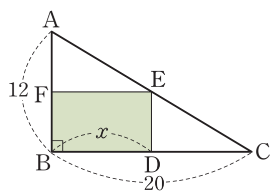
따라서 부등식 $f(2018-x)<0$, 즉 $a(x-2017)(x-2019)<0$에서 $a>0$이므로 $(x-2017)(x-2019)<0$

$\therefore 2017<x<2019$

따라서 구하는 정수 x의 값은 2018이다. 　　답 2018

체크 417

다음 그림과 같이 $\overline{BD}=x$라 하자.



삼각형 ABC와 삼각형 EDC는 닮음이므로

$\overline{AB}:\overline{ED}=\overline{BC}:\overline{DC}$

이때 $\overline{DC}=\overline{BC}-\overline{BD}=20-x$이므로

$12:\overline{ED}=20:(20-x)$

$20\overline{ED}=12(20-x)$ 　　$\therefore \overline{ED}=\frac{3}{5}(20-x)$

직사각형 BDEF의 넓이는 45 이상이므로

$\overline{BD}\times\overline{ED}=\frac{3}{5}x(20-x)\geq45$

양변에 $\frac{5}{3}$를 곱하면 $x(20-x)\geq75$

$x^2-20x+75\leq0$, $(x-5)(x-15)\leq0$

$\therefore 5\leq x\leq15$

따라서 선분 BD의 길이는 5 이상 15 이하이다.

답 5 이상 15 이하

체크 418

기존 상품의 가격을 a $(a>0)$원, 기존 판매량을 b $(b>0)$개라 하면

$ab\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{4x}{500}\right)\geq ab$

양변에 $\frac{50000}{ab}$을 곱하면

$(100+x)(500-4x)\geq50000$ ($\because ab>0$)

$x^2-25x\leq0$, $x(x-25)\leq0$ 　　$\therefore 0\leq x\leq25$

따라서 x의 최댓값은 25이다. 　　답 25

연습 문제 15

419

부등식 $f(x)\geq g(x)$의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 이차함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나거나 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$1\leq x\leq5$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=5$이므로 $\alpha+\beta=1+5=6$ 　　답 6

420

$x^2-3x-10<0$에서 $(x+2)(x-5)<0$

$\therefore -2<x<5$

따라서 정수 x의 최댓값은 4, 최솟값은 -1이므로

$M=4$, $m=-1$

$\therefore M^2+m^2=4^2+(-1)^2=17$ 　　답 17

421

(1) $x^2-(a+3)x+3a\leq0$에서

$(x-a)(x-3) \le 0$ …… ㉠

(i) $a>3$일 때, ㉠에서 $3 \le x \le a$

(ii) $a=3$일 때, ㉠에서 $(x-3)^2 \le 0$이므로 $x=3$

(iii) $a<3$일 때, ㉠에서 $a \le x \le 3$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는

$\begin{cases} a>3\text{일 때, } 3 \le x \le a \\ a=3\text{일 때, } x=3 \\ a<3\text{일 때, } a \le x \le 3 \end{cases}$

(2) $ax^2+2ax-8a>0$에서 $a(x^2+2x-8)>0$

$\therefore a(x+4)(x-2)>0$ …… ㉠

(i) $a>0$일 때, ㉠의 양변을 a로 나누면

$(x+4)(x-2)>0$　　$\therefore x<-4$ 또는 $x>2$

(ii) $a=0$일 때, $a=0$을 ㉠에 대입하면

$0 \times (x+4)(x-2)>0$이므로 해는 없다.

(iii) $a<0$일 때, ㉠의 양변을 a로 나누면

$(x+4)(x-2)<0$　　$\therefore -4<x<2$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는

$\begin{cases} a>0\text{일 때, } x<-4 \text{ 또는 } x>2 \\ a=0\text{일 때, 해는 없다.} \\ a<0\text{일 때, } -4<x<2 \end{cases}$

답 풀이 참조

422

인상하기 전의 커피 한 잔의 가격을 a $(a>0)$원, 하루 커피 판매량을 b $(b>0)$개라 하면

$\left(1+\frac{x}{100}\right)a \times \left(1-\frac{0.5x}{100}\right)b \ge \left(1+\frac{12}{100}\right)ab$

양변에 $\frac{20000}{ab}$을 곱하면

$(100+x)(200-x) \ge 22400$ $(\because ab>0)$

$x^2-100x+2400 \le 0$, $(x-40)(x-60) \le 0$

$\therefore 40 \le x \le 60$

따라서 x의 최솟값은 40이다.

답 40

423

절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은 $x=0$이므로

(i) $x \ge 0$일 때, $x^2-3x-10 \le 0$

$(x+2)(x-5) \le 0$　　$\therefore -2 \le x \le 5$

그런데 $x \ge 0$이므로 $0 \le x \le 5$

(ii) $x<0$일 때, $x^2+3x-10 \le 0$

$(x+5)(x-2) \le 0$　　$\therefore -5 \le x \le 2$

그런데 $x<0$이므로 $-5 \le x < 0$

(i), (ii)에서 $-5 \le x \le 5$

따라서 정수 x의 값은 $-5, -4, \cdots, 4, 5$의 11개이다.

답 11

[다른 풀이]

$x^2-3|x|-10 \le 0$에서 $x^2=|x|^2$이므로

$|x|^2-3|x|-10 \le 0$

$(|x|+3)(|x|-5) \le 0$　　$\therefore -3 \le |x| \le 5$

이때 $|x| \ge 0$이므로

$0 \le |x| \le 5$　　$\therefore -5 \le x \le 5$

424

절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은 $x=-1$이므로

(i) $x \ge -1$일 때, $x^2-3x-4 \ge 2(x+1)$

$x^2-5x-6 \ge 0$, $(x+1)(x-6) \ge 0$

$\therefore x \le -1$ 또는 $x \ge 6$

그런데 $x \ge -1$이므로 $x=-1$ 또는 $x \ge 6$

(ii) $x<-1$일 때, $x^2-3x-4 \ge -2(x+1)$

$x^2-x-2 \ge 0$, $(x+1)(x-2) \ge 0$

$\therefore x \le -1$ 또는 $x \ge 2$

그런데 $x<-1$이므로 $x<-1$

(i), (ii)에서 $x \le -1$ 또는 $x \ge 6$

해가 $x \le -1$ 또는 $x \ge 6$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-6) \ge 0$ …… ㉠

㉠과 이차부등식 $ax^2+5x+b \le 0$의 부등호의 방향이 반대이므로 $a<0$

㉠의 양변에 a를 곱하면

$a(x+1)(x-6) \le 0$ $(\because a<0)$

$\therefore ax^2-5ax-6a \le 0$

이 이차부등식이 $ax^2+5x+b \le 0$과 일치하므로

$5=-5a$, $b=-6a$　　$\therefore a=-1$, $b=6$

$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+6^2=37$

답 37

425

해가 $1 \le x \le 3$이고 x^2의 계수가 2인 이차부등식은

$2(x-1)(x-3) \le 0$

$\therefore 2x^2-8x+6 \le 0$

이 이차부등식이 $2x^2+ax+b \le 0$과 일치하므로

$a=-8$, $b=6$

$\therefore b-a=6-(-8)=14$

답 14

426

해가 $-2 \le x \le 1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-1) \le 0$ …… ㉠

㉠과 이차부등식 $ax^2+bx+c \le 0$의 부등호의 방향이 같으므로

$a>0$

㉠의 양변에 a를 곱하면

$a(x+2)(x-1) \leq 0$ ($\because a>0$)

$\therefore ax^2+ax-2a \leq 0$

이 부등식이 $ax^2+bx+c \leq 0$과 일치하므로

$b=a,\ c=-2a$ …… ㉡

㉡을 이차부등식 $a(x-1)^2+b(x-1)+c<0$에 대입하면

$a(x-1)^2+a(x-1)-2a<0$

$a>0$이므로 양변을 a로 나누면

$(x-1)^2+(x-1)-2<0$

$x^2-x-2<0,\ (x+1)(x-2)<0$

$\therefore -1<x<2$ **답** $-1<x<2$

427

해가 $-3 \leq x \leq 5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+3)(x-5) \leq 0$ …… ㉠

㉠과 이차부등식 $f(x) \geq 0$의 부등호의 방향이 반대이므로

㉠의 양변에 음수인 a를 곱하면

$a(x+3)(x-5) \geq 0$

$\therefore f(x)=a(x+3)(x-5)$ (단, $a<0$)

$f(2x-1)=a(2x+2)(2x-6)$

$\qquad\qquad =4a(x+1)(x-3)$

부등식 $f(2x-1)>0$, 즉 $4a(x+1)(x-3)>0$에서

$a<0$이므로

$(x+1)(x-3)<0 \qquad \therefore -1<x<3$

따라서 구하는 정수 x의 개수는 0, 1, 2의 3이다.

답 3

428

(i) $m=2$일 때

$0 \times x^2-0 \times x+1>0$에서 $1>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 항상 성립한다.

(ii) $m \neq 2$일 때

모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면

$m-2>0$에서 $m>2$ …… ㉠

이차방정식 $(m-2)x^2-2(m-2)x+1=0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=\{-(m-2)\}^2-(m-2)<0$

$m^2-5m+6<0,\ (m-2)(m-3)<0$

$\therefore 2<m<3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2<m<3$

(i), (ii)에서 $2 \leq m<3$ **답** $2 \leq m<3$

429

이차방정식 $x^2-2kx+1=0$의 판별식을 D라 할 때, 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2kx+1>0$이 성립하려면 $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(-k)^2-1<0$

$k^2-1<0,\ (k+1)(k-1)<0$

$\therefore -1<k<1$

$-1<k<1$이므로 $k-1<0,\ k+1>0$

$3|k-1|+2|k+1|<5$에서

$-3(k-1)+2(k+1)<5,\ -k+5<5$

$\therefore k>0$

이때 $-1<k<1$이므로 $0<k<1$ **답** $0<k<1$

430

x에 대한 이차방정식 $(m-1)x^2-2(m-1)x+2=0$의 판별식을 D라 할 때, 주어진 부등식이 오직 하나의 해를 가지려면 x^2의 계수가 양수이고 $D=0$이어야 하므로

(i) $m-1>0 \qquad \therefore m>1$

(ii) $\frac{D}{4}=\{-(m-1)\}^2-2(m-1)=0$에서

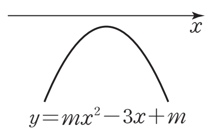
$m^2-4m+3=0,\ (m-1)(m-3)=0$

$\therefore m=1$ 또는 $m=3$

(i), (ii)에서 $m=3$ **답** 3

431

이차부등식 $mx^2-3x+m \geq 0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $mx^2-3x+m<0$이 항상 성립해야 한다.



(i) 이차항의 계수는 음수이므로 $m<0$

(ii) 이차방정식 $mx^2-3x+m=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4m^2<0$에서

$4m^2-9>0,\ (2m+3)(2m-3)>0$

$\therefore m<-\frac{3}{2}$ 또는 $m>\frac{3}{2}$

(i), (ii)에서 $m<-\frac{3}{2}$ **답** $m<-\frac{3}{2}$

432

부등식 $f(x) \leq g(x)$에서

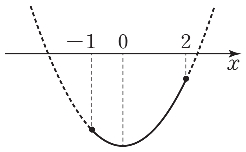
$x^2+2x-1 \leq -x^2+2x+k+2$

$x^2+2x-1-(-x^2+2x+k+2) \leq 0$

$\therefore 2x^2-k-3 \leq 0$ …… ㉠

$h(x)=2x^2-k-3$이라 하면 이차함수 $y=h(x)$의 그래프의 축은 y축이다.

이때 $-1\le x\le 2$인 모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립해야 하므로 이차함수 $y=h(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



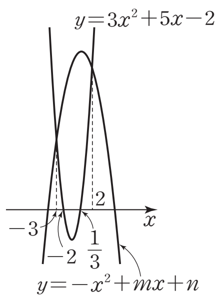
그래프에서 $h(2)\le 0$이어야 하므로

$h(2)=2\times 2^2-k-3\le 0 \qquad \therefore k\ge 5$

따라서 실수 k의 최솟값은 5이다. 답 5

433

이차함수 $y=3x^2+5x-2$의 그래프가 $-3<x<2$일 때 이차함수 $y=-x^2+mx+n$의 그래프보다 아래쪽에 있으므로



$3x^2+5x-2<-x^2+mx+n$에서

$4x^2+(5-m)x-2-n<0$ …… ㉠

이때 해가 $-3<x<2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+3)(x-2)<0$ …… ㉡

㉡의 양변에 4를 곱하면 $4(x+3)(x-2)<0$

$\therefore 4x^2+4x-24<0$ …… ㉢

㉠의 해가 $-3<x<2$와 같으므로

두 부등식 ㉠, ㉢이 일치한다.

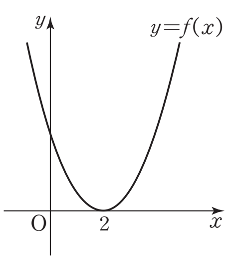
따라서 $5-m=4$, $-2-n=-24$이므로

$m=1$, $n=22$

$\therefore mn=1\times 22=22$ 답 22

434

조건 (나)에서 이차부등식 $f(x)>0$의 해가 $x\ne 2$인 모든 실수이므로 이차함수 $f(x)$의 이차항의 계수는 양수이고 곡선 $y=f(x)$는 x축과 점 $(2, 0)$에서 접한다.



$f(x)=a(x-2)^2\ (a>0)$이라 하면 조건 (가)에서

$f(0)=a(0-2)^2=4a=8 \qquad \therefore a=2$

따라서 $f(x)=2(x-2)^2$이므로

$f(5)=2\times(5-2)^2=18$ 답 18

435

$f(x)=x^2+px+p=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+p-\frac{p^2}{4}$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점은 $\mathrm{A}\left(-\frac{p}{2},\ p-\frac{p^2}{4}\right)$, y축과의 교점은 $\mathrm{B}(0, p)$이다.

두 점 A, B를 지나는 직선 l의 방정식은

$$y-p=\frac{p-\left(p-\frac{p^2}{4}\right)}{0-\left(-\frac{p}{2}\right)}(x-0) \qquad \therefore y=\frac{p}{2}x+p$$

즉, $g(x)=\frac{p}{2}x+p$

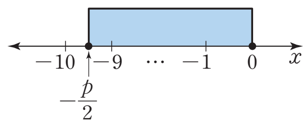
부등식 $f(x)-g(x)\le 0$에서

$x^2+px+p-\left(\frac{p}{2}x+p\right)\le 0$

$x^2+\frac{p}{2}x\le 0 \qquad \therefore x\left(x+\frac{p}{2}\right)\le 0$ …… ㉠

(i) $p>0$일 때, ㉠의 해는 $-\frac{p}{2}\le x\le 0$

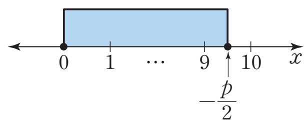
이를 만족시키는 정수 x의 개수가 10이 되려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$-10<-\frac{p}{2}\le -9 \qquad \therefore 18\le p<20$

(ii) $p<0$일 때, ㉠의 해는 $0\le x\le -\frac{p}{2}$

이를 만족시키는 정수 x의 개수가 10이 되려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$9\le -\frac{p}{2}<10 \qquad \therefore -20<p\le -18$

(i), (ii)에서 정수 p의 값은 -19, -18, 18, 19이므로

$M=19$, $m=-19$

$\therefore M-m=19-(-19)=38$ 답 38

28 연립이차부등식

체크 436

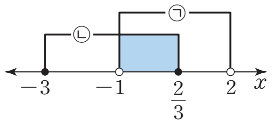
(1) $x^2-x-2<0$에서 $(x+1)(x-2)<0$

$\therefore -1<x<2$ …… ㉠

$3x^2+7x-6\le 0$에서 $(x+3)(3x-2)\le 0$

$\therefore -3\le x\le \frac{2}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 주어진 연립부등식의 해는 $-1<x\le\frac{2}{3}$

(2) 주어진 부등식을 변형하면 $\begin{cases} x+4\le3x^2 \\ 3x^2\le7x-2 \end{cases}$

$x+4\le3x^2$에서 $3x^2-x-4\ge0$

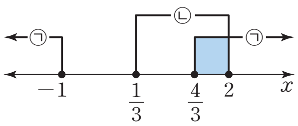
$(x+1)(3x-4)\ge0$

$\therefore\ x\le-1$ 또는 $x\ge\frac{4}{3}$ ...... ㉠

$3x^2\le7x-2$에서 $3x^2-7x+2\le0$

$(3x-1)(x-2)\le0$ $\quad\therefore\ \frac{1}{3}\le x\le2$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 주어진 연립부등식의 해는 $\frac{4}{3}\le x\le2$

답 (1) $-1<x\le\frac{2}{3}$ (2) $\frac{4}{3}\le x\le2$

체크 437

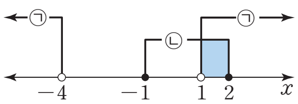
(1) $x^2+3x-4>0$에서 $(x+4)(x-1)>0$

$\therefore\ x<-4$ 또는 $x>1$ ...... ㉠

$|2x-1|\le3$에서 $-3\le2x-1\le3$

$\therefore\ -1\le x\le2$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 주어진 연립부등식의 해는 $1<x\le2$

(2) $|x^2-3x-1|\le3$에서 $-3\le x^2-3x-1\le3$

$\therefore \begin{cases} -3\le x^2-3x-1 \\ x^2-3x-1\le3 \end{cases}$

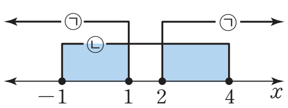
$-3\le x^2-3x-1$에서 $x^2-3x+2\ge0$이므로

$(x-1)(x-2)\ge0$ $\quad\therefore\ x\le1$ 또는 $x\ge2$ ...... ㉠

$x^2-3x-1\le3$에서 $x^2-3x-4\le0$이므로

$(x+1)(x-4)\le0$ $\quad\therefore\ -1\le x\le4$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 주어진 연립부등식의 해는

$-1\le x\le1$ 또는 $2\le x\le4$

답 (1) $1<x\le2$ (2) $-1\le x\le1$ 또는 $2\le x\le4$

체크 438

$(x-4)(x-5)<0$에서 $4<x<5$

$\begin{cases} x^2+(k-4)x-4k<0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-7x+10<0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+k)(x-4)<0$

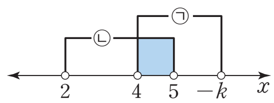
(i) $-k<4$일 때, $-k<x<4$

(ii) $-k=4$일 때, $(x-4)^2<0$이므로 해는 없다.

(iii) $-k>4$일 때, $4<x<-k$

㉡에서 $(x-2)(x-5)<0$ $\quad\therefore\ 2<x<5$

이때 부등식 ㉠, ㉡의 해의 공통부분이 $4<x<5$가 되도록 ㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같아야 한다.



즉, 부등식 ㉠의 해는 (iii)의 $4<x<-k$이어야 한다.

따라서 실수 k의 값의 범위는 $-k\ge5$에서 $k\le-5$이므로 정수 k의 최댓값은 -5이다. **답** -5

tip

㉠에서 이차방정식 $(x+k)(x-4)=0$의 두 근 4, $-k$의 대소 관계를 알 수 없으므로 $-k<4$, $-k=4$, $-k>4$로 경우를 나누어 푼다.

체크 439

$\begin{cases} x^2-5x-6<0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-2kx+k^2-9\ge0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

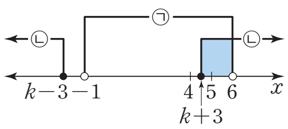
㉠에서 $(x+1)(x-6)<0$ $\quad\therefore\ -1<x<6$

㉡에서 $x^2-2kx+(k+3)(k-3)\ge0$이므로

$\{x-(k-3)\}\{x-(k+3)\}\ge0$

$\therefore\ x\le k-3$ 또는 $x\ge k+3$ ($\because\ k-3<k+3$)

이때 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 값이 5만 존재하도록 ㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 $4<k+3\le5$이므로 $1<k\le2$ **답** $1<k\le2$

체크 440

처음 정육면체의 한 모서리의 길이가 a cm이므로 새로 만든

직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이는 각각

$(a+2)$ cm, $(a+3)$ cm, $(a-3)$ cm

이고, 모두 양수이므로 $a+2>0$, $a+3>0$, $a-3>0$

$\therefore a>3$ …… ㉠

새로 만든 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피보다 작으므로

$(a+2)(a+3)(a-3)<a^3$

$a^3+2a^2-9a-18<a^3$, $2a^2-9a-18<0$

$(2a+3)(a-6)<0 \quad \therefore -\frac{3}{2}<a<6$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $3<a<6$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 a의 값은 4, 5이므로 그 합은 $4+5=9$

답 9

체크 441

철도로 운송하는 비용이 다른 운송 수단으로 운송하는 비용보다 적게 든다고 했으므로

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x^2+2x-3<x^2-x-3 & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{1}{3}x^2+2x-3<5x+9 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x^2+6x-9<3x^2-3x-9$

$2x^2-9x>0$, $x(2x-9)>0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>\frac{9}{2}$ …… ㉢

㉡에서 $x^2+6x-9<15x+27$

$x^2-9x-36<0$, $(x+3)(x-12)<0$

$\therefore -3<x<12$ …… ㉣

이때 $x>0$이므로 ㉢, ㉣에서

$\frac{9}{2}<x<12$

답 $\frac{9}{2}<x<12$

29 이차방정식의 실근의 부호

체크 442

$kx^2-2(k-2)x+2k-1=0$이 이차방정식이므로

$k\neq0$ …… ㉠

이차방정식 $kx^2-2(k-2)x+2k-1=0$의 판별식을 D_1이라 하면 실근을 가지므로

$\frac{D_1}{4}=\{-(k-2)\}^2-k(2k-1)\geq0$

$k^2+3k-4\leq0$, $(k+4)(k-1)\leq0$

$\therefore -4\leq k\leq1$ …… ㉡

이차방정식 $x^2-2kx+k+6=0$의 판별식을 D_2라 하면 허근을 가지므로

$\frac{D_2}{4}=(-k)^2-(k+6)<0$

$k^2-k-6<0$, $(k+2)(k-3)<0$

$\therefore -2<k<3$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $-2<k<0$ 또는 $0<k\leq1$이므로 정수 k는 -1, 1의 2개이다.

답 2

체크 443

이차방정식 $x^2+4(a-1)x+a^2=0$의 판별식을 D_1이라 하면 중근을 가지므로

$\frac{D_1}{4}=4(a-1)^2-a^2=0$

$3a^2-8a+4=0$, $(3a-2)(a-2)=0$

$\therefore a=\frac{2}{3}$ 또는 $a=2$

이때 a는 자연수이므로 $a=2$

이차방정식 $x^2-(b+1)x+a+2b=0$, 즉

$x^2-(b+1)x+2+2b=0$의 판별식을 D_2라 하면 허근을 가지므로

$D_2=\{-(b+1)\}^2-4(2+2b)<0$

$b^2-6b-7<0$, $(b+1)(b-7)<0$

$\therefore -1<b<7$

따라서 자연수 b의 최댓값은 6이다.

답 6

체크 444

이차방정식 $x^2-ax+5a-7=0$이 한 개의 양의 근과 한 개의 음의 근을 가지므로 (두 근의 곱)<0이다.

즉, (두 근의 곱)$=5a-7<0$이므로 $a<\frac{7}{5}$

따라서 자연수 a의 값은 1이다.

답 1

체크 445

이차방정식 $x^2+(a^2-3a-10)x-a+1=0$의 두 실근의 부호가 다르므로

(두 근의 곱)$=-a+1<0 \quad \therefore a>1$ …… ㉠

두 실근의 절댓값이 같으므로

(두 근의 합)$=-(a^2-3a-10)=0$

$(a+2)(a-5)=0 \quad \therefore a=-2$ 또는 $a=5$ …… ㉡

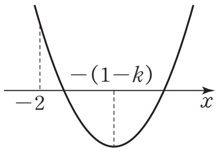
㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 실수 a의 값은

$a=5$

답 5

체크 446

$f(x)=x^2+2(1-k)x+2(k+3)$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -2보다 크므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(1-k)^2-2(k+3)\ge 0$에서

$k^2-4k-5\ge 0$, $(k+1)(k-5)\ge 0$

$\therefore\ k\le -1$ 또는 $k\ge 5$

(ii) $f(-2)=4-4(1-k)+2(k+3)>0$에서

$6k+6>0 \qquad \therefore\ k>-1$

(iii) $f(x)=x^2+2(1-k)x+2(k+3)$

$\qquad =\{x+(1-k)\}^2-(1-k)^2+2(k+3)$

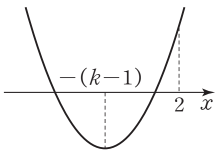
이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이

$x=-1+k$이므로 $-1+k>-2 \qquad \therefore\ k>-1$

(i)~(iii)에서 $k\ge 5$ 　　답 $k\ge 5$

체크 447

$f(x)=x^2+2(k-1)x-3(k-1)$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 2보다 작으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(k-1)^2+3(k-1)\ge 0$에서

$k^2+k-2\ge 0$, $(k+2)(k-1)\ge 0$

$\therefore\ k\le -2$ 또는 $k\ge 1$

(ii) $f(2)=4+4(k-1)-3(k-1)>0$에서

$k+3>0 \qquad \therefore\ k>-3$

(iii) $f(x)=x^2+2(k-1)x-3(k-1)$

$\qquad =\{x+(k-1)\}^2-(k-1)^2-3(k-1)$

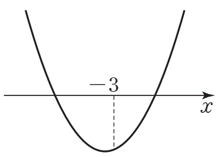
이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이

$x=-k+1$이므로 $-k+1<2 \qquad \therefore\ k>-1$

(i)~(iii)에서 $k\ge 1$ 　　답 $k\ge 1$

체크 448

$f(x)=x^2-(k^2-3)x-2k^2+k-6$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 -3이 있으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $f(-3)<0$이어야 하므로

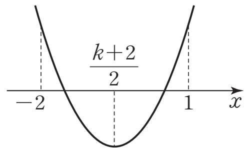
$f(-3)=9+3(k^2-3)-2k^2+k-6<0$

$k^2+k-6<0$, $(k+3)(k-2)<0$

$\therefore\ -3<k<2$ 　　답 $-3<k<2$

체크 449

$f(x)=x^2-(k+2)x+(k+5)$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -2와 1 사이에 있으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(k+2)\}^2-4(k+5)\ge 0$에서

$k^2-16\ge 0$, $(k+4)(k-4)\ge 0$

$\therefore\ k\le -4$ 또는 $k\ge 4$

(ii) $f(-2)=4+2(k+2)+k+5>0$에서

$3k+13>0 \qquad \therefore\ k>-\dfrac{13}{3}$

$f(1)=1-(k+2)+k+5>0$이므로 k는 모든 실수

$\therefore\ k>-\dfrac{13}{3}$

(iii) $f(x)=x^2-(k+2)x+k+5$

$\qquad =\left(x-\dfrac{k+2}{2}\right)^2-\dfrac{(k+2)^2}{4}+k+5$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=\dfrac{k+2}{2}$이므로

$-2<\dfrac{k+2}{2}<1 \qquad \therefore\ -6<k<0$

(i)~(iii)에서 $-\dfrac{13}{3}<k\le -4$ 　　답 $-\dfrac{13}{3}<k\le -4$

연습 문제 16

450

$x^2-4x-5\ge 0$에서 $(x+1)(x-5)\ge 0$

$\therefore\ x\le -1$ 또는 $x\ge 5$ 　　…… ㉠

$3x^2-x-4\le 0$에서 $(x+1)(3x-4)\le 0$

$\therefore\ -1\le x\le \dfrac{4}{3}$ 　　…… ㉡

주어진 연립부등식의 해는 ㉠, ㉡의 공통부분이므로

$x=-1$ 　　답 $x=-1$

451

$|x-2|<3$에서 $-3<x-2<3$

$\therefore\ -1<x<5$ …… ㉠

$x^2-2x-3\le0$에서 $(x+1)(x-3)\le0$

$\therefore\ -1\le x\le3$ …… ㉡

주어진 연립부등식의 해는 ㉠, ㉡의 공통부분이므로

$-1<x\le3$

답 $-1<x\le3$

452

$$\begin{cases} x^2-6x+8>0 & \cdots\cdots\ ㉠ \\ x^2-(k+6)x+6k\le0 & \cdots\cdots\ ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $(x-2)(x-4)>0$

$\therefore\ x<2$ 또는 $x>4$

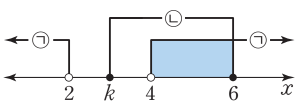
㉡에서 $(x-6)(x-k)\le0$

(i) $k<6$일 때, $k\le x\le6$

(ii) $k=6$일 때, $(x-6)^2\le0$이므로 $x=6$

(iii) $k>6$일 때, $6\le x\le k$

이때 부등식 ㉠, ㉡의 해의 공통부분이 $4<x\le6$이 되려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, 실수 k의 값의 범위는

$2\le k\le4$

따라서 정수 k의 값은 2, 3, 4이므로 그 합은

$2+3+4=9$

답 9

453

$$\begin{cases} x^2-2x-8\ge0 & \cdots\cdots\ ㉠ \\ x^2+(m-3)x-3m<0 & \cdots\cdots\ ㉡ \end{cases}$$

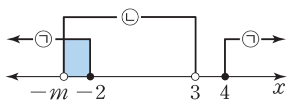
㉠에서 $(x+2)(x-4)\ge0$

$\therefore\ x\le-2$ 또는 $x\ge4$

㉡에서 $(x-3)(x+m)<0$

$\therefore\ -m<x<3\ (\because\ m>-3)$

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수인 해가 1개만 존재하도록 ㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같고, 정수인 해는 -2이다.



따라서 $-3\le-m<-2$이므로

$2<m\le3$

답 $2<m\le3$

454

$$\begin{cases} (x-1)^2+2\le x+7 & \cdots\cdots\ ㉠ \\ |x-2|<k & \cdots\cdots\ ㉡ \end{cases}$$

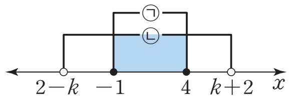
㉠에서 $x^2-3x-4\le0$

$(x+1)(x-4)\le0\qquad\therefore\ -1\le x\le4$

㉡에서 $-k<x-2<k$

$\therefore\ 2-k<x<k+2$

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 6개가 되도록 ㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $2-k<-1$이고 $k+2>4$가 되어야 하므로

$k>3$

따라서 조건을 만족시키는 양의 정수 k의 최솟값은 4이다.

답 4

455

$$\begin{cases} x^2-(m-2)x-2m<0 & \cdots\cdots\ ㉠ \\ 3x^2-x-2>0 & \cdots\cdots\ ㉡ \end{cases}$$

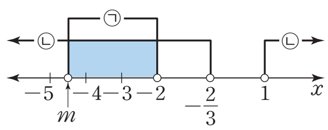
㉠에서 $(x+2)(x-m)<0$

㉡에서 $(3x+2)(x-1)>0$

$\therefore\ x<-\dfrac{2}{3}$ 또는 $x>1$

(i) $m<-2$일 때

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 2개가 되도록 ㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같아야 한다.



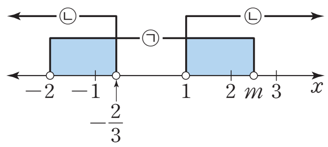
즉, 정수 x는 -3, -4의 2개이고 $-5\le m<-4$

(ii) $m=-2$일 때

㉠에서 $(x+2)^2<0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x도 존재하지 않는다.

(iii) $m>-2$일 때

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 2개가 되도록 ㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같아야 한다.



즉, 정수 x는 -1, 2의 2개이고 $2<m\le3$

(i)~(iii)에서 실수 m의 값의 범위는

$-5\le m<-4$ 또는 $2<m\le3$

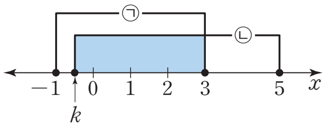
답 $-5\le m<-4$ 또는 $2<m\le3$

456

$$\begin{cases} x^2-2x-3\le 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x-5)(x-k)\le 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $(x+1)(x-3)\le 0$ $\quad\therefore -1\le x\le 3$

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 4가 되도록 ㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $-1<k\le 0$이고 이때 정수 x는 0, 1, 2, 3이므로

$\alpha=-1,\ \beta=0$

$\therefore \beta-\alpha=0-(-1)=1$

답 1

457

$\overline{QC}=a$이므로 $0<a<12$이고 $\overline{BQ}=12-a$이다.

이때 세 삼각형 ABC, APR, PBQ는 각각 직각이등변삼각형이므로

$\overline{AR}=\overline{PR}=a,\ \overline{PQ}=\overline{BQ}=12-a$

$\therefore \square PQCR=a(12-a)$,

$\triangle APR=\frac{1}{2}a^2,\ \triangle PBQ=\frac{1}{2}(12-a)^2$

직사각형 PQCR의 넓이가 두 삼각형 APR, PBQ의 각각의 넓이보다 크므로

$$\begin{cases} a(12-a)>\frac{1}{2}a^2 & \cdots\cdots ㉠ \\ a(12-a)>\frac{1}{2}(12-a)^2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $2a(12-a)>a^2$

$3a^2-24a<0,\ 3a(a-8)<0$ $\quad\therefore 0<a<8$

㉡에서 $2a(12-a)>(12-a)^2$

$3a^2-48a+144<0,\ a^2-16a+48<0$

$(a-4)(a-12)<0$ $\quad\therefore 4<a<12$

따라서 ㉠, ㉡의 해의 공통부분은 $4<a<8$이므로 자연수 a는 5, 6, 7이고 그 합은 $5+6+7=18$이다.

답 18

458

세 변의 길이는 모두 양수이므로

$2x-1>0,\ 3x>0,\ 3x+1>0$

$\therefore x>\frac{1}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

삼각형의 가장 긴 변의 길이는 다른 두 변의 길이의 합보다 작으므로

$3x+1<(2x-1)+3x$ $\quad\therefore x>1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

주어진 삼각형이 예각삼각형이 되려면

$(3x+1)^2<(2x-1)^2+(3x)^2$

$4x^2-10x>0,\ 4x\left(x-\frac{5}{2}\right)>0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>\frac{5}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $x>\frac{5}{2}$이므로 자연수 x의 최솟값은 3이다.

답 3

tip

세 변의 길이가 $a, b, c\ (a<b<c)$일 때,

① 삼각형이 될 조건 ⇨ $c<a+b$

② 예각삼각형이 될 조건 ⇨ $c^2<a^2+b^2$

③ 직각삼각형이 될 조건 ⇨ $c^2=a^2+b^2$

④ 둔각삼각형이 될 조건 ⇨ $c^2>a^2+b^2$

459

이차방정식 $x^2-2(a-3)x-2a^2+6=0$의 판별식을 D라 하면 중근을 가지므로

$\frac{D}{4}=\{-(a-3)\}^2-(-2a^2+6)=0$

$3a^2-6a+3=0,\ 3(a-1)^2=0$

$\therefore a=1$

이차방정식 $x^2+(b-1)x+2a+b=0$, 즉 $x^2+(b-1)x+2+b=0$의 판별식을 D'이라 하면 허근을 가지므로

$D'=(b-1)^2-4(2+b)<0$

$b^2-6b-7<0,\ (b+1)(b-7)<0$

$\therefore -1<b<7$

따라서 정수 b는 0, 1, 2, ⋯, 6이므로 그 합은

$0+1+2+3+4+5+6=21$

답 21

460

이차방정식 $x^2+2(k-3)x+5k-1=0$의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면

(i) 한 실근만 양수인 경우

두 실근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=5k-1<0$ $\quad\therefore k<\frac{1}{5}$

(ii) 두 실근이 모두 양수인 경우

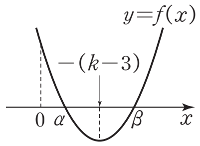
㉠ $\frac{D}{4}=(k-3)^2-(5k-1)\ge 0$

$k^2-11k+10\ge 0,\ (k-1)(k-10)\ge 0$

$\therefore k\le 1$ 또는 $k\ge 10$

㉡ $f(x)=x^2+2(k-3)x+5k-1$

이라 하면



$f(0)=5k-1>0$에서

$k>\frac{1}{5}$

㉢ 이차함수 $y=f(x)$의 축의 방정식은 $x=-(k-3)$이므로

$-(k-3)>0 \qquad \therefore k<3$

㉠, ㉡, ㉢에서 $\frac{1}{5}<k\le 1$

(iii) 한 근이 $x=0$일 때

$f(0)=5k-1=0$에서 $k=\frac{1}{5}$이므로 주어진 방정식은

$x^2-\frac{28}{5}x=0,\ x\left(x-\frac{28}{5}\right)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{28}{5}$

즉, 두 근 중 한 근이 양수이므로 $k=\frac{1}{5}$

(i)~(iii)에서 $k\le 1$ 답 $k\le 1$

461

이차방정식 $2x^2+(2k-5)x-k+1=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<0<\beta,\ |\alpha|<|\beta|)$라 하면

(i) 서로 다른 부호의 실근을 가지므로

$\alpha\beta=\frac{-k+1}{2}<0 \qquad \therefore k>1$

(ii) 음수인 근의 절댓값이 양수인 근보다 작으므로

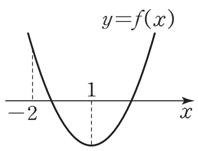
$\alpha+\beta=-\frac{2k-5}{2}>0 \qquad \therefore k<\frac{5}{2}$

(i), (ii)에서 $1<k<\frac{5}{2}$

따라서 정수 k의 값은 2이다. 답 2

462

$f(x)=x^2-2x+k-1$이라 하자.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(k-1)\ge 0$

$2-k\ge 0 \qquad \therefore k\le 2$

(ii) $f(-2)=4+4+k-1>0 \qquad \therefore k>-7$

(iii) $f(x)=x^2-2x+k-1=(x-1)^2+k-2$

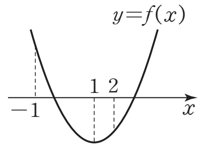
이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=1>-2$이므로 k는 모든 실수이다.

(i)~(iii)에서 $-7<k\le 2$이므로 정수 k는 $-6,\ -5,\ -4,\ \cdots,\ 1,\ 2$의 9개이다. 답 9

463

$f(x)=x^2-2x+k$라 하면

(i) 한 근만 -1과 2 사이에 있는 경우



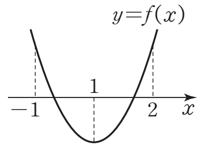
$f(-1)f(2)<0$이므로

$(1+2+k)(4-4+k)<0$

$k(k+3)<0$

$\therefore -3<k<0$

(ii) 두 근 모두 -1과 2 사이에 있는 경우



㉠ 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-k\ge 0$

$\therefore k\le 1$

㉡ $f(-1)>0$에서

$1+2+k>0 \qquad \therefore k>-3$

$f(2)>0$에서

$4-4+k>0 \qquad \therefore k>0$

㉠, ㉡에서 $0<k\le 1$

(iii) $k=0$일 때, 주어진 이차방정식은 $x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

(i)~(iii)에서 실수 k의 값의 범위는 $-3<k\le 1$이다.

답 $-3<k\le 1$

464

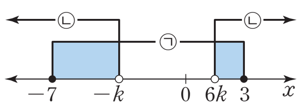
$x^2+4x-21\le 0$에서 $(x+7)(x-3)\le 0$

$\therefore -7\le x\le 3$ ⋯⋯ ㉠

$x^2-5kx-6k^2>0$에서 $(x+k)(x-6k)>0$

이때 $k>0$이므로

$x<-k$ 또는 $x>6k$ ⋯⋯ ㉡



주어진 연립부등식의 해가 존재하도록 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.

즉, $-7<-k<0$ 또는 $0<6k<3$에서

$0<k<7$ 또는 $0<k<\frac{1}{2}$

이므로 k의 값의 범위는 $0<k<7$

따라서 양의 정수 k는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개이다. 답 6

465

세 지점 A, B, C를 A를 원점으로 하는 수직선 위에 놓으면 A(0), B(−10), C(20)이다.

보관창고의 좌표를 t라 하면 보관창고는 A와 C 사이에 있으므로

$0<t<20$ …… ㉠

총 운송비는 $100t^2+200(t+10)^2+300(20-t)^2$이고 하루 운송비가 155000원 이하이려면

$100t^2+200(t+10)^2+300(20-t)^2\le 155000$

$t^2+2(t+10)^2+3(t-20)^2\le 1550$

$6t^2-80t-150\le 0$, $3t^2-40t-75\le 0$

$(3t+5)(t-15)\le 0$

$\therefore -\frac{5}{3}\le t\le 15$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $0<t\le 15$

따라서 보관창고는 A지점에서 최대 15 km 떨어진 지점까지 지을 수 있다.

답 15 km

1 평면좌표

30 두 점 사이의 거리

체크 466

수직선 위의 세 점 O(0), A(3), B(a)에 대하여

$\overline{OA} : \overline{AB}=1:2$이므로 $3:|a-3|=1:2$

$|a-3|=6$, $a-3=\pm6$ $\quad\therefore a=-3$ 또는 $a=9$

따라서 a의 값의 합은 $9+(-3)=6$이다. 답 6

체크 467

$\overline{AB}=\sqrt{(0-3)^2+(5-a)^2}=\sqrt{a^2-10a+34}$,

$\overline{AC}=\sqrt{(1-3)^2+(-1-a)^2}=\sqrt{a^2+2a+5}$이므로

$\overline{AB}=2\overline{AC}$에서 $\sqrt{a^2-10a+34}=2\sqrt{a^2+2a+5}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$a^2-10a+34=4(a^2+2a+5)$

$\therefore 3a^2+18a-14=0$

따라서 구하는 a의 값은 이 이차방정식의 두 실근이므로

근과 계수의 관계에 의하여 모든 a의 값의 합은 $-\dfrac{18}{3}=-6$이다. 답 -6

체크 468

$\overline{AB}=2\sqrt{5}$에서 $\sqrt{(1-k)^2+(2k-2)^2}=2\sqrt{5}$

위의 식의 양변을 제곱하여 전개하면

$k^2-2k+1+4k^2-8k+4=20$, $5k^2-10k-15=0$

$\therefore k^2-2k-3=0$

따라서 구하는 k의 값은 이 이차방정식의 두 실근이므로

근과 계수의 관계에 의하여 모든 k의 값의 곱은 $\dfrac{-3}{1}=-3$이다. 답 -3

체크 469

x축 위의 점 P를 P(p, 0)이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서

$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(p-5)^2+\{0-(-2)\}^2=\{(p-(-11)\}^2+(0-10)^2$

$p^2-10p+29=p^2+22p+221$

$-32p=192$ $\quad\therefore p=-6$ $\quad\therefore$ P$(-6, 0)$

y축 위의 점 Q를 Q(0, q)라 하면 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서

$\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로

$(0-5)^2+\{q-(-2)\}^2=\{0-(-11)\}^2+(q-10)^2$

$q^2+4q+29=q^2-20q+221$

$24q=192$ $\quad\therefore q=8$ $\quad\therefore$ Q(0, 8)

따라서 구하는 선분 PQ의 길이는

$\overline{PQ}=\sqrt{\{0-(-6)\}^2+(8-0)^2}=10$ 답 10

체크 470

점 P(a, b)가 직선 $y=-2x+5$ 위에 있으므로

$b=-2a+5$ $\quad\therefore$ P(a, $-2a+5$)

또한 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$\{a-(-1)\}^2+\{-2a+5-(-3)\}^2$

$=(a-1)^2+\{-2a+5-(-5)\}^2$

$5a^2-30a+65=5a^2-42a+101$

$12a=36$ $\quad\therefore a=3$

$a=3$을 $b=-2a+5$에 대입하면

$b=-2\times3+5=-1$

$\therefore a^2-b^2=3^2-(-1)^2=8$ 답 8

체크 471

삼각형의 외심에서 각 꼭짓점까지의 거리가 같으므로 외심을 P(x, y)로 놓으면 $\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$에서

$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$

$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$에서 $(x-1)^2+(y-4)^2=(x-4)^2+(y-5)^2$

$-2x-8y+17=-8x-10y+41$, $6x+2y=24$

$\therefore 3x+y=12$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$에서 $(x-4)^2+(y-5)^2=(x-8)^2+(y-3)^2$

$-8x-10y+41=-16x-6y+73$, $8x-4y=32$

$\therefore 2x-y=8$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=4$, $y=0$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 중심은 P(4, 0)이므로 외접원의 반지름의 길이는

$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}=\sqrt{(4-1)^2+(0-4)^2}=5$ 답 5

체크 472

제2사분면 위의 점 C를 C(x, y)라 하면

$x<0$, $y>0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

삼각형 ABC가 정삼각형이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$에서

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$에서

$\{3-(-3)\}^2+\{3-(-3)^2\}=(x-3)^2+(y-3)^2$

$72=(x-3)^2+(y-3)^2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

$\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$에서 $(x-3)^2+(y-3)^2=(-3-x)^2+(-3-y)^2$

$x^2-6x+9+y^2-6y+9=x^2+6x+9+y^2+6y+9$

$-12x=12y$ $\quad\therefore y=-x$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $72=(x-3)^2+(-x-3)^2$

$2x^2+18=72$, $x^2=27$

$\therefore x=-3\sqrt{3}$ ($\because$ ㉠)

$x=-3\sqrt{3}$을 ㉢에 대입하면

$y=3\sqrt{3}$

따라서 구하는 점 C의 좌표는 $(-3\sqrt{3},\ 3\sqrt{3})$이다.

답 $(-3\sqrt{3},\ 3\sqrt{3})$

체크 473

점 A$(9,\ 2)$와 y축에 대하여 대칭인 점을 A′이라 하면

A′$(-9,\ 2)$

$\therefore \overline{AP}+\overline{BP}\ge\overline{A'P}+\overline{BP}$

$=\overline{A'B}$

$=\sqrt{\{6-(-9)\}^2+(10-2)^2}$

$=\sqrt{289}=17$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 17이다.

답 17

체크 474

직선 $y=-x+1$ 위의 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$b=-a+1$

$\therefore$ P$(a,\ -a+1)$

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$

$=(a-1)^2+(-a+1-3)^2+(a-6)^2+(-a+1-2)^2$

$=4a^2-8a+42$

$=4(a-1)^2+38$

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값은 $a=1$일 때, 38이다.

답 38

체크 475

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$

$=\{x-(-2)\}^2+(y-3)^2+(x-0)^2+(y-5)^2$

$+(x-8)^2+\{y-(-5)\}^2$

$=3x^2-12x+3y^2-6y+127$

$=3(x-2)^2+3(y-1)^2+112$

따라서 $x=2$, $y=1$, 즉 P$(2,\ 1)$일 때 최솟값 112를 갖는다.

답 112, P$(2,\ 1)$

체크 476

점 M이 변 BC의 중점이므로

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

$9^2+7^2=2(\overline{AM}^2+4^2)$, $\overline{AM}^2=49$

$\therefore \overline{AM}=7$ ($\because \overline{AM}>0$)

답 7

체크 477

평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 두 대각선의 교점을 O라 하면 삼각형 ABC에서 점 O는 변 AC의 중점이다. 이때

$\overline{BA}^2+\overline{BC}^2=2(\overline{BO}^2+\overline{AO}^2)$

$8^2+12^2=2(\overline{BO}^2+4^2)$, $\overline{BO}^2=88$ $\quad\therefore \overline{BO}=2\sqrt{22}$

$\therefore \overline{BD}=2\overline{BO}=4\sqrt{22}$

답 $4\sqrt{22}$

31 선분의 내분점과 외분점

체크 478

(1) 선분 AB를 2 : 3으로 외분하는 점 P의 좌표는

$\dfrac{2\times3-3\times(-5)}{2-3}=-21$ $\quad\therefore$ P(-21)

(2) 선분 AB의 중점 M의 좌표는

$\dfrac{-5+3}{2}=-1$ $\quad\therefore$ M(-1)

답 (1) P(-21) (2) M(-1)

체크 479

선분 AB를 4 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{4\times1+1\times(-5)}{4+1},\ \dfrac{4\times4+1\times(-4)}{4+1}\right)$

$\therefore$ P$\left(-\dfrac{1}{5},\ \dfrac{12}{5}\right)$

선분 AB를 3 : 2로 외분하는 점 Q의 좌표는

$\left(\dfrac{3\times1-2\times(-5)}{3-2},\ \dfrac{3\times4-2\times(-4)}{3-2}\right)$ $\quad\therefore$ Q$(13,\ 20)$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{\left\{13-\left(-\dfrac{1}{5}\right)\right\}^2+\left(20-\dfrac{12}{5}\right)^2}$

$=\sqrt{\left(\dfrac{66}{5}\right)^2+\left(\dfrac{88}{5}\right)^2}=\dfrac{11}{5}\sqrt{6^2+8^2}$

$=\dfrac{11}{5}\times10=22$

답 22

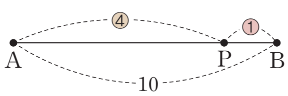
[다른 풀이]

두 점 A$(-5,\ -4)$, B$(1,\ 4)$에 대하여

$\overline{AB}=\sqrt{\{1-(-5)\}^2+\{4-(-4)\}^2}$

$=\sqrt{6^2+8^2}=10$

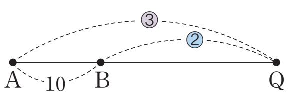
이때 선분 AB를 4 : 1로 내분하는 점이 P이므로



$\overline{PB}=\dfrac{1}{4+1}\times\overline{AB}$

$=\dfrac{1}{5}\times10=2$

또한 선분 AB를 3 : 2로 외분하는 점이 Q이므로



$\overline{BQ}=2\overline{AB}=20$

$\therefore \overline{PQ}=\overline{PB}+\overline{BQ}=2+20=22$

체크 480

B$(-2, 1)$, A$(a, 5)$에 대하여 선분 BA를 $1:3$으로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times a-3\times(-2)}{1-3}, \dfrac{1\times5-3\times1}{1-3}\right)$

$\therefore \left(\dfrac{a+6}{-2}, -1\right)$

이 점이 점 $(-6, b)$와 같으므로 $\dfrac{a+6}{-2}=-6$, $-1=b$

$\therefore a=6, b=-1 \qquad \therefore a+b=6+(-1)=5$ 　　　답 5

체크 481

선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times(-1)-1\times a}{2-1}, \dfrac{2\times(-6)-1\times3}{2-1}\right)$

$\therefore$ P$(-2-a, -15)$

선분 AP를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times(-2-a)+2\times a}{1+2}, \dfrac{1\times(-15)+2\times3}{1+2}\right)$

$\therefore \left(\dfrac{a-2}{3}, -3\right)$

이 점이 점 $(0, -3)$과 같으므로

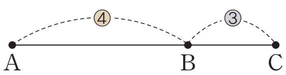
$\dfrac{a-2}{3}=0 \qquad \therefore a=2$ 　　　답 2

체크 482

$3\overline{AB}=4\overline{BC}$이므로 $\overline{AB}:\overline{BC}=4:3$

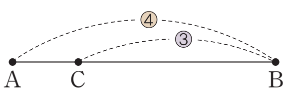
이를 만족시키는 점 C의 위치는 다음 두 가지 경우가 가능하다.

(i) 점 B(a, b)가 두 점 A$(1, 7)$, C$(-1, 5)$를 이은 선분 AC를 $4:3$으로 내분하는 점일 때, 점 B의 좌표는



$\left(\dfrac{4\times(-1)+3\times1}{4+3}, \dfrac{4\times5+3\times7}{4+3}\right) \qquad \therefore$ B$\left(-\dfrac{1}{7}, \dfrac{41}{7}\right)$

(ii) 점 B(a, b)가 두 점 A$(1, 7)$ C$(-1, 5)$를 이은 선분 AC를 $4:3$으로 외분하는 점일 때, 점 B의 좌표는



$\left(\dfrac{4\times(-1)-3\times1}{4-3}, \dfrac{4\times5-3\times7}{4-3}\right) \qquad \therefore$ B$(-7, -1)$

(i), (ii)에서 점 B의 y좌표 b는 $b<0$을 만족시켜야 하므로

B$(-7, -1) \qquad \therefore a=-7, b=-1$

$\therefore ab=(-7)\times(-1)=7$ 　　　답 7

체크 483

두 점 A$(-3, 7)$, B$(a, -4)$를 이은 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times a+1\times(-3)}{2+1}, \dfrac{2\times(-4)+1\times7}{2+1}\right)$

$\therefore \left(\dfrac{2a-3}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$

이 점이 직선 $6x-3y-1=0$ 위의 점이므로

$6\times\dfrac{2a-3}{3}-3\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)-1=0$, $4a-6=0$

$\therefore a=\dfrac{3}{2}$ 　　　답 $\dfrac{3}{2}$

체크 484

두 점 B, C를 B(a, b), C(c, d)라 하면 변 BC의 중점의 좌표가 $(-5, -2)$이므로

$\dfrac{a+c}{2}=-5$, $\dfrac{b+d}{2}=-2$

$\therefore a+c=-10, b+d=-4$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\dfrac{13+a+c}{3}, \dfrac{7+b+d}{3}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{13+(-10)}{3}, \dfrac{7+(-4)}{3}\right)$

$\therefore$ G$(1, 1)$ 　　　답 G$(1, 1)$

[다른 풀이]

변 BC의 중점을 D라 하면 D$(-5, -2)$

삼각형 ABC의 무게중심 G는 중선 AD를 $2:1$로 내분하므로 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times(-5)+1\times13}{2+1}, \dfrac{2\times(-2)+1\times7}{2+1}\right) \qquad \therefore$ G$(1, 1)$

체크 485

변 AB의 중점 D의 좌표는

$\left(\dfrac{-2-3}{2}, \dfrac{3-5}{2}\right) \qquad \therefore$ D$\left(-\dfrac{5}{2}, -1\right)$

변 BC의 중점 E의 좌표는

$\left(\dfrac{-3+5}{2}, \dfrac{-5+7}{2}\right) \qquad \therefore$ E$(1, 1)$

변 CA의 중점 F의 좌표는

$\left(\dfrac{5-2}{2}, \dfrac{7+3}{2}\right) \qquad \therefore$ F$\left(\dfrac{3}{2}, 5\right)$

따라서 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표는

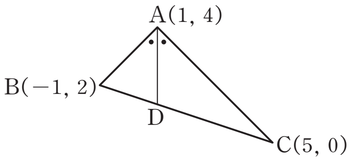
$\left(\dfrac{-\dfrac{5}{2}+1+\dfrac{3}{2}}{3}, \dfrac{-1+1+5}{3}\right)$

$\therefore \left(0, \dfrac{5}{3}\right)$ 　　　답 $\left(0, \dfrac{5}{3}\right)$

[다른 풀이]
삼각형 ABC의 무게중심과 삼각형의 세 변의 중점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심은 일치한다.
따라서 삼각형 DEF의 무게중심은
$\left(\frac{-2-3+5}{3}, \frac{3-5+7}{3}\right)$ $\quad\therefore \left(0, \frac{5}{3}\right)$

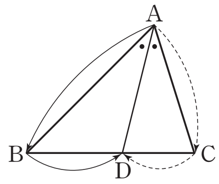
체크 486
세 변 AB, BC, CA를 3 : 2로 내분하는 점 D, E, F의 좌표는 각각
$D\left(\frac{3\times(-3)+2\times a}{3+2}, \frac{3\times b+2\times 1}{3+2}\right)$
$E\left(\frac{3\times a+2\times(-3)}{3+2}, \frac{3\times(-1)+2\times b}{3+2}\right)$
$F\left(\frac{3\times a+2\times 2}{3+2}, \frac{3\times 1+2\times(-1)}{3+2}\right)$
$\therefore D\left(\frac{-9+2a}{5}, \frac{3b+2}{5}\right), E\left(0, \frac{-3+2b}{5}\right), F\left(\frac{3a+4}{5}, \frac{1}{5}\right)$
삼각형 DEF의 무게중심의 좌표는 $(1, 2)$이므로
$\dfrac{\frac{-9+2a}{5}+0+\frac{3a+4}{5}}{3}=1, \dfrac{\frac{3b+2}{5}+\frac{-3+2b}{5}+\frac{1}{5}}{3}=2$
$a-1=3, b=6 \quad \therefore a=4, b=6$
$\therefore b-a=6-4=2$ 답 2
[다른 풀이]
삼각형 DEF의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심
$\left(\frac{a-3+2}{3}, \frac{1+b-1}{3}\right)$과 일치하므로
$\frac{a-3+2}{3}=1, \frac{1+b-1}{3}=2$
$\therefore a=4, b=6$
$\therefore b-a=6-4=2$

체크 487
선분 AD는 각 A의 이등분선이므로
$\overline{AB} : \overline{AC}=\overline{BD} : \overline{CD}$

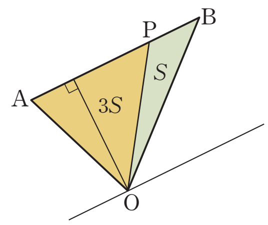


이때
$\overline{AB}=\sqrt{(-1-1)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{2}$,
$\overline{AC}=\sqrt{(5-1)^2+(0-4)^2}=4\sqrt{2}$이므로
$\overline{BD} : \overline{CD}=\overline{AB} : \overline{AC}$
$=2\sqrt{2} : 4\sqrt{2}=1 : 2$
따라서 점 D는 선분 BC를 1 : 2로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는
$\left(\frac{1\times 5+2\times(-1)}{1+2}, \frac{1\times 0+2\times 2}{1+2}\right)$ $\quad\therefore D\left(1, \frac{4}{3}\right)$
$\therefore \overline{AD}=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$ 답 $\frac{8}{3}$

tip
삼각형 ABC에서 각 A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 할 때, $\overline{AB} : \overline{AC}=\overline{BD} : \overline{CD}$가 성립한다.

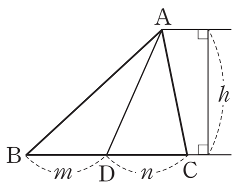


체크 488
삼각형 OBP의 넓이를 S라 하면 삼각형 OAP의 넓이는 $3S$이다.
이때 두 삼각형 OAP, OBP의 밑변을 각각 $\overline{AP}$, $\overline{BP}$로 잡으면 두 삼각형의 높이는 서로 같으므로



$\overline{AP} : \overline{BP}=\triangle OAP : \triangle OBP$
$=3S : S=3 : 1$
즉, 선분 AB 위의 점 P는 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는
$\left(\frac{3\times 3+1\times(-5)}{3+1}, \frac{3\times 8+1\times 4}{3+1}\right)$ $\quad\therefore P(1, 7)$
따라서 $a=1, b=7$이므로 $ab=1\times 7=7$ 답 7

tip
높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다. 즉, 오른쪽 그림에서
$\triangle ABD : \triangle ADC=\overline{BD} : \overline{DC}$
$=m : n$



체크 489
평행사변형 ABCD의 꼭짓점 A$(2, 1)$에 대하여 꼭짓점 B의 좌표를 (p, q)라 하면 변 AB의 중점의 좌표가 $(0, -1)$이므로
$0=\frac{2+p}{2}, -1=\frac{1+q}{2} \quad \therefore p=-2, q=-3$
$\therefore B(-2, -3)$
같은 방법으로 변 BC의 중점의 좌표가 $(3, 1)$이므로
$C(8, 5)$
평행사변형의 나머지 한 꼭짓점 D의 좌표를 (a, b)라 하자.
대각선 AC의 중점의 좌표는
$\left(\frac{2+8}{2}, \frac{1+5}{2}\right)$ $\quad\therefore (5, 3)$
대각선 BD의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-2+a}{2}, \frac{-3+b}{2}\right)$

이 점이 점 $(5,\ 3)$과 일치하므로

$\frac{-2+a}{2}=5,\ \frac{-3+b}{2}=3 \qquad \therefore a=12,\ b=9$

$\therefore$ D$(12,\ 9)$ 답 $(12,\ 9)$

체크 490

사각형 ABCD는 마름모이므로 네 변의 길이가 모두 같다.

$\overline{AB}=\overline{AD}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{AD}^2$이므로

$(a-1)^2+(-2-1)^2=(4-1)^2+(-1-1)^2$

$a^2-2a-3=0,\ (a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$

$\therefore$ B$(-1,\ -2)$ 또는 B$(3,\ -2)$

또한 마름모의 두 대각선의 교점은 일치한다.

대각선 AC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+b}{2},\ \frac{1-4}{2}\right) \qquad \therefore \left(\frac{b+1}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$

(i) B$(-1,\ -2)$일 때, 대각선 BD의 중점의 x좌표는

$\frac{-1+4}{2}=\frac{b+1}{2} \qquad \therefore b=2$

(ii) B$(3,\ -2)$일 때, 대각선 BD의 중점의 x좌표는

$\frac{3+4}{2}=\frac{b+1}{2} \qquad \therefore b=6$

(i), (ii)에서

$a=-1,\ b=2$ 또는 $a=3,\ b=6$

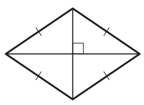
$\therefore a+b=(-1)+2=1$ 또는 $a+b=3+6=9$ 답 1, 9

tip

마름모의 정의 및 성질을 이용한다.

(1) 정의 : 네 변의 길이가 모두 같은 사각형

(2) 성질 : 두 대각선은 서로 다른 것을 수직 이등분한다.



연습 문제 17

491

$\overline{AB}=4$에서 $\sqrt{\{1-(a-2)\}^2+\{3-(a+4)\}^2}=4$

즉, $\sqrt{(3-a)^2+(-a-1)^2}=4$이므로 양변을 제곱하면

$(3-a)^2+(-a-1)^2=16,\ a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0 \qquad \therefore a=-1$ 또는 $a=3$

따라서 모든 a의 값의 곱은

$(-1)\times 3=-3$ 답 -3

492

P$(a,\ 0)$, Q$(0,\ b)$라 하자.

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-7)^2+(0-2)^2=\{a-(-1)\}^2+(0-6)^2$

$a^2-14a+53=a^2+2a+37$

$16a=16 \qquad \therefore a=1 \qquad \therefore$ P$(1,\ 0)$

$\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로

$(0-7)^2+(b-2)^2=\{0-(-1)\}^2+(b-6)^2$

$b^2-4b+53=b^2-12b+37$

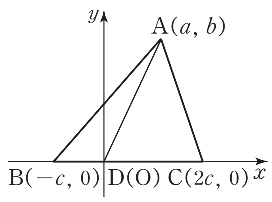
$8b=-16 \qquad \therefore b=-2 \qquad \therefore$ Q$(0,\ -2)$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{(0-1)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{5}$ 답 $\sqrt{5}$

493

$2\overline{BD}=\overline{CD}$에서 $\overline{BD}:\overline{CD}=1:2$

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축, 점 D를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 D는 원점이다.



A$(a,\ b)$, C$(2c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면 B$(-c,\ 0)$이므로

$2\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$

$=2\{(-c-a)^2+(0-b)^2\}+(2c-a)^2+(0-b)^2$

$=2(a^2+b^2+c^2+2ac)+a^2+b^2+4c^2-4ac$

$=3a^2+3b^2+6c^2=3(a^2+b^2+2c^2)$ ⋯⋯ ㉠

$\overline{AD}^2+2\overline{BD}^2=a^2+b^2+2c^2$ ⋯⋯ ㉡

이때 ㉠$=3\times$㉡이므로 $2\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=3(\overline{AD}^2+2\overline{BD}^2)$

$\therefore k=3$ 답 3

494

$\overline{AB}\le 1$에서 $\overline{AB}^2\le 1$이므로

$\{2-(k+1)\}^2+(3k-1-1)^2\le 1$

$(k-1)^2+(3k-2)^2\le 1,\ 10k^2-14k+5\le 1$

$5k^2-7k+2\le 0,\ (k-1)(5k-2)\le 0$

$\therefore \frac{2}{5}\le k\le 1$

따라서 실수 k의 최솟값은 $\frac{2}{5}$, 최댓값은 1이므로 그 합은

$\frac{2}{5}+1=\frac{7}{5}$ 답 $\frac{7}{5}$

495

점 P가 직선 $y=x$ 위에 있으므로 점 P의 좌표를 $(k,\ k)$라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(k-1)^2+(k-6)^2+\{k-(-3)\}^2+(k-4)^2$

$=4k^2-16k+62$

$=4(k-2)^2+46$

따라서 $k=2$일 때, 즉 $\mathrm{P}(2,\ 2)$일 때 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$은 최솟값 46을 가지므로 $a=2,\ b=2,\ m=46$

$\therefore\ a+b+m=2+2+46=50$ 답 50

496

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(2-8)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{10}$

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(4-2)^2+(5-1)^2}=2\sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{(8-4)^2+(3-5)^2}=2\sqrt{5}$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2$이고 $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CA}}$이므로 삼각형 ABC는 $\angle\mathrm{C}=90°$인 직각이등변삼각형이다.

답 $\angle\mathrm{C}=90°$인 직각이등변삼각형

497

삼각형 ABC의 외접원의 중심, 즉 외심의 좌표를 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{CP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2=\overline{\mathrm{CP}}^2$

$\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$에서 $(x-4)^2+(y-7)^2=(x-1)^2+\{y-(-2)\}^2$

정리하면 $x+3y-10=0$ ...... ㉠

$\overline{\mathrm{BP}}^2=\overline{\mathrm{CP}}^2$에서 $(x-1)^2+\{y-(-2)\}^2=(x-6)^2+(y-3)^2$

정리하면 $x+y-4=0$ ...... ㉡

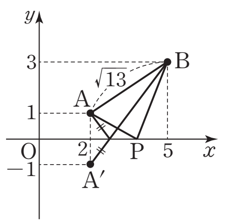
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=1,\ y=3$ $\quad\therefore\ \mathrm{P}(1,\ 3)$

따라서 외접원의 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(1-4)^2+(3-7)^2}=5$

이므로 외접원의 넓이는 $\pi\times5^2=25\pi$이다. 답 25π

498



$\mathrm{A}(2,\ 1),\ \mathrm{B}(5,\ 3)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(5-2)^2+(3-1)^2}=\sqrt{13}$

점 A와 x축에 대하여 대칭인 점을 A′이라 하면 $\mathrm{A'}(2,\ -1)$

이때 삼각형 ABP의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$

$=\sqrt{13}+\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$

$=\sqrt{13}+\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}$

$\geq\sqrt{13}+\overline{\mathrm{A'B}}$

$=\sqrt{13}+\sqrt{(5-2)^2+\{3-(-1)\}^2}$

$=\sqrt{13}+5$

따라서 삼각형 ABP의 둘레의 길이의 최솟값은 $5+\sqrt{13}$이다.

답 $5+\sqrt{13}$

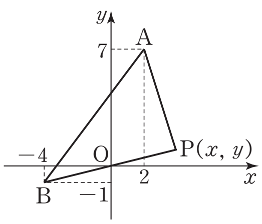
499

$\sqrt{(x-2)^2+(y-7)^2}$은 두 점 $(x,\ y)$, $(2,\ 7)$ 사이의 거리이고 $\sqrt{(x+4)^2+(y+1)^2}$은 두 점 $(x,\ y)$, $(-4,\ -1)$ 사이의 거리이다.

즉, 세 점 A, B, P를 $\mathrm{A}(2,\ 7)$, $\mathrm{B}(-4,\ -1)$, $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면

$\sqrt{(x-2)^2+(y-7)^2}+\sqrt{(x+4)^2+(y+1)^2}$

$=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ ...... ㉠



이때 세 점 A, B, P는 오른쪽 그림과 같고 점 P는 좌표평면 위의 임의의 점이므로 점 P가 선분 AB 위에 있을 때 ㉠은 최솟값을 갖는다.

따라서 구하는 최솟값은 선분 AB의 길이와 같으므로

$\sqrt{(-4-2)^2+(-1-7)^2}=10$ 답 10

500

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 $\overline{\mathrm{PA}}^2-\overline{\mathrm{PB}}^2=5$에서

$(x-2)^2+\{y-(-1)\}^2-[\{x-(-3)\}^2+(y-1)^2]=5$

$10x-4y+5=-5$ $\quad\therefore\ 5x-2y+5=0$

따라서 점 P의 자취의 방정식은 $5x-2y+5=0$이다.

답 $5x-2y+5=0$

501

두 점 A, B 사이의 거리가 5이므로 $\mathrm{A}(0)$, $\mathrm{B}(5)$라 하자.

선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$\dfrac{2\times5+3\times0}{2+3}=2$ $\quad\therefore\ \mathrm{P}(2)$

선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점 Q의 좌표는

$\dfrac{1\times5-2\times0}{1-2}=-5$ $\quad\therefore\ \mathrm{Q}(-5)$

따라서 선분 PQ의 길이는 $|2-(-5)|=7$이다. 답 7

tip

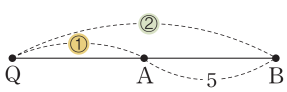
선분 PQ의 길이를 구하는 문제이므로 수직선 위의 두 점 A, B를 $\mathrm{A}(0)$, $\mathrm{B}(5)$로 놓고 구하여도 일반성을 잃지 않는다.

[다른 풀이]

$\overline{\mathrm{AB}}=5$이고 점 P는 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점이므로

$\overline{\mathrm{PA}}=\dfrac{2}{2+3}\times\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{2}{5}\times5=2$, $\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{AB}}-\overline{\mathrm{PA}}=3$

또한 점 Q는 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore \overline{QA}=\overline{AB}=5$

$\therefore \overline{PQ}=\overline{QA}+\overline{PA}=5+2=7$

502

$A\left(\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{2}\right)$에서 점 A는 선분 PQ의 중점이다.

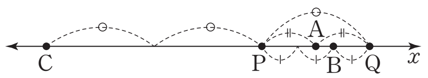
$B\left(\dfrac{\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{3}\right)$에서 $\dfrac{\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{3}=\dfrac{2\times\sqrt{7}+1\times\sqrt{5}}{2+1}$

즉, 점 B는 선분 PQ를 2 : 1로 내분하는 점이다.

$C(3\sqrt{5}-2\sqrt{7})$에서 $3\sqrt{5}-2\sqrt{7}=\dfrac{3\times\sqrt{5}-2\times\sqrt{7}}{3-2}$

즉, 점 C는 선분 QP를 3 : 2로 외분하는 점이다.

즉, 두 점 P, Q 및 세 점 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 가장 왼쪽에 있는 점부터 순서대로 나열하면 C, A, B이다.

답 C, A, B

503

선분 AB를 1 : 2로 외분하는 점 C의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times(-4)-2\times2}{1-2},\ \dfrac{1\times(-3)-2\times(-5)}{1-2}\right)$

$\therefore C(8,\ -7)$

선분 AB를 3 : 2로 외분하는 점 D의 좌표는

$\left(\dfrac{3\times(-4)-2\times2}{3-2},\ \dfrac{3\times(-3)-2\times(-5)}{3-2}\right)$

$\therefore D(-16,\ 1)$

$\therefore \overline{CD}^2=(-16-8)^2+\{1-(-7)\}^2$

$=24^2+8^2=640$

답 640

504

삼각형 ABC에서 점 D는 선분 BC를 1 : 3으로 내분하므로

$\overline{BD}:\overline{DC}=1:3$에서 $\overline{DC}=3\overline{BD}$

점 E는 선분 BC를 2 : 3으로 외분하므로

$\overline{BE}:\overline{EC}=2:3$에서 $\overline{BE}:(\overline{BE}+\overline{BC})=2:3$

$2(\overline{BE}+\overline{BC})=3\overline{BE}$

$\therefore \overline{BE}=2\overline{BC}$

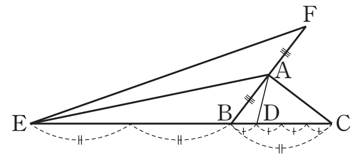
점 F는 선분 AB를 1 : 2로 외분하므로

$\overline{AF}:\overline{BF}=1:2$에서 $\overline{AF}:(\overline{AF}+\overline{AB})=1:2$

$\overline{AF}+\overline{AB}=2\overline{AF}$

$\therefore \overline{AF}=\overline{AB}$

따라서 세 점 D, E, F의 위치는 다음 그림과 같다.



$\overline{BD}:\overline{EB}=1:8$이므로 삼각형 AEB의 넓이는 삼각형 ABD의 넓이의 8배이고, $\overline{AB}:\overline{BF}=1:2$이므로 삼각형 FEB의 넓이는 삼각형 AEB의 넓이의 2배이다.

즉, 삼각형 FEB의 넓이는 삼각형 ABD의 넓이의 16배이므로

$k=16$

답 16

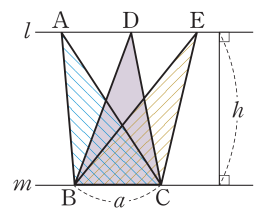
tip

두 직선 l, m이 평행할 때, 세 삼각형 ABC, DBC, EBC는 밑변 BC가 공통이고 높이는 h로 같으므로

$\triangle ABC=\triangle DBC$

$=\triangle EBC$

$=\dfrac{1}{2}ah$



505

좌표평면 위의 점과 y축 사이의 거리는 그 점의 x좌표의 절댓값과 같다. 즉, y축과 만나지 않는 삼각형 ABC에 대하여 세 꼭짓점의 x좌표가 각각 2, 6, 10이므로 무게중심의 x좌표는 $\dfrac{2+6+10}{3}=6$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심 G와 y축 사이의 거리는 6이다.

답 6

tip

세 꼭짓점의 x좌표가 각각 -2, -6, -10이어도 삼각형의 무게중심과 y축 사이의 거리는 6이다.

506

선분 AD는 각 A의 이등분선이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

이때 $\overline{AB}=\sqrt{(-2-2)^2+(3-5)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$,

$\overline{AC}=\sqrt{(-1-2)^2+(-1-5)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$이므로

$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}$

$=2\sqrt{5}:3\sqrt{5}$

$=2:3$

따라서 점 D는 선분 BC를 2 : 3으로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$\left(\frac{2\times(-1)+3\times(-2)}{2+3}, \frac{2\times(-1)+3\times3}{2+3}\right)$

$\therefore$ D$\left(-\frac{8}{5}, \frac{7}{5}\right)$ 답 $\left(-\frac{8}{5}, \frac{7}{5}\right)$

507

A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)이라 하면

변 AB를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{x_2+2x_1}{3}, \frac{y_2+2y_1}{3}\right)$

이 점이 점 (10, 8)과 일치하므로

$\frac{x_2+2x_1}{3}=10$, $\frac{y_2+2y_1}{3}=8$

$\therefore \begin{cases} 2x_1+x_2=30 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2y_1+y_2=24 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

변 BC를 1 : 3으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{x_3+3x_2}{4}, \frac{y_3+3y_2}{4}\right)$

이 점이 점 (5, −3)과 일치하므로

$\frac{x_3+3x_2}{4}=5$, $\frac{y_3+3y_2}{4}=-3$

$\therefore \begin{cases} 3x_2+x_3=20 & \cdots\cdots ㉢ \\ 3y_2+y_3=-12 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

변 CA를 2 : 3으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2x_1+3x_3}{5}, \frac{2y_1+3y_3}{5}\right)$

이 점이 점 (2, 12)와 일치하므로

$\frac{2x_1+3x_3}{5}=2$, $\frac{2y_1+3y_3}{5}=12$

$\therefore \begin{cases} 3x_3+2x_1=10 & \cdots\cdots ㉤ \\ 3y_3+2y_1=60 & \cdots\cdots ㉥ \end{cases}$

㉠+㉢+㉤을 하면

$4(x_1+x_2+x_3)=60 \qquad \therefore x_1+x_2+x_3=15$

㉡+㉣+㉥을 하면

$4(y_1+y_2+y_3)=72 \qquad \therefore y_1+y_2+y_3=18$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$, 즉 $\left(\frac{15}{3}, \frac{18}{3}\right)$이므로

G(5, 6) $\qquad \therefore a=5, b=6$

$\therefore a+b=5+6=11$ 답 11

508

(1) 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\frac{1+(-3)+8}{3}, \frac{6+4+(-1)}{3}\right)$

$\therefore$ G(2, 3)

(2) P(x, y)로 놓으면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$

$=\{(x-1)^2+(y-6)^2\}+\{(x+3)^2+(y-4)^2\}+\{(x-8)^2+(y+1)^2\}$

$=3x^2-12x+3y^2-18y+127$

$=3(x-2)^2+3(y-3)^2+88$

따라서 $x=2$, $y=3$, 즉 P(2, 3)일 때, $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$은 최솟값 88을 갖는다.

답 (1) (2, 3) (2) P(2, 3), 88

tip

삼각형의 세 꼭짓점에서의 거리의 제곱의 합이 최소인 점은 무게중심과 같다.

2 직선의 방정식

32 직선의 방정식

체크 509

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{4-(-2)}{3-1}=3$

즉, 직선 AB에 평행한 직선의 기울기도 3이다.

따라서 기울기가 3이고 점 $(1,\ -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-(-2)=3(x-1)\qquad \therefore y=3x-5$ 답 $y=3x-5$

체크 510

x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60°이므로

(직선의 기울기)$=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

점 $(-3,\ 1)$을 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선의 방정식은

$y-1=\sqrt{3}\{x-(-3)\}\qquad \therefore y=\sqrt{3}x+3\sqrt{3}+1$

답 $y=\sqrt{3}x+3\sqrt{3}+1$

체크 511

두 점 $(4,\ 4)$, $(-1,\ -6)$을 지나는 직선 l의 방정식은

$y-4=\frac{-6-4}{-1-4}(x-4)\qquad \therefore l : y=2x-4$

직선 l이 점 $(5,\ a)$를 지나므로

$a=2\times5-4=6$

직선 l이 점 $(b,\ 2)$를 지나므로

$2=2b-4\qquad \therefore b=3$

$\therefore ab=6\times3=18$ 답 18

체크 512

x절편을 $2a$, y절편을 a $(a\neq0)$라 하면 이 직선의 방정식은

$\frac{x}{2a}+\frac{y}{a}=1$

이 직선이 점 $(4,\ 1)$을 지나므로

$\frac{4}{2a}+\frac{1}{a}=1\qquad \therefore a=3$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1\qquad \therefore y=-\frac{1}{2}x+3$ 답 $y=-\frac{1}{2}x+3$

체크 513

세 점이 삼각형을 이루지 않으려면 한 직선 위에 있어야 한다.

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으면

(직선 AB의 기울기)$=$(직선 BC의 기울기)이므로

$\frac{5-(-2)}{3-(-4)}=\frac{3-5}{k-3}$

즉, $1=\frac{-2}{k-3}$에서 $k-3=-2\qquad \therefore k=1$ 답 1

체크 514

직선 $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$의 x절편은 $\frac{x}{6}=1$에서 $x=6$,

y절편은 $\frac{y}{3}=1$에서 $y=3$이다.

즉, 이 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면

$\mathrm{A}(6,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 3)$이다.

직선 $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$과 x축, y축으로 둘러싸인 부분, 즉 직각삼각형 OAB의 넓이를 이등분하고 원점 O를 지나는 직선은 선분 AB의 중점을 지나야 한다.

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{6+0}{2},\ \frac{0+3}{2}\right)\qquad \therefore \left(3,\ \frac{3}{2}\right)$

따라서 직선 $y=mx$가 점 $\left(3,\ \frac{3}{2}\right)$을 지나므로

$\frac{3}{2}=3m\qquad \therefore m=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

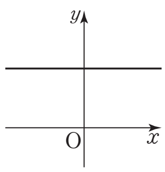
체크 515

$ab=0$에서 $a=0$ 또는 $b=0$

이때 $bc>0$이므로 $b\neq0\qquad \therefore a=0$

$ax+by-c=0$에서 $by=c\qquad \therefore y=\frac{c}{b}$

이때 $bc>0$에서 $\frac{c}{b}>0$



따라서 주어진 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같고 이 직선은 제1사분면, 제2사분면을 지난다. 답 제1사분면, 제2사분면

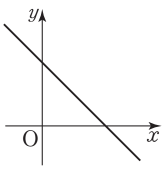
체크 516

$ax-by+c=0$에서 $y=\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$

이 직선의 기울기는 양수, y절편은 양수이므로

$\frac{a}{b}>0,\ \frac{c}{b}>0\qquad \therefore ac>0$

$bx+cy-a=0$에서 $y=-\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}$



이때 $-\frac{b}{c}<0$, $\frac{a}{c}>0$, 즉 기울기가 음수이고 y절편이 양수이므로 직선 $bx+cy-a=0$의 개형은 오른쪽 그림과 같고 이 직선은 제3사분면을 지나지 않는다. 답 제3사분면

33 직선의 위치 관계

체크 517

두 직선 $ax+3y+5=0$, $3x+ay-5=0$이 평행하므로

$\frac{a}{3}=\frac{3}{a}\neq\frac{5}{-5}$, 즉 $a^2=9$, $a\neq-3$

$a=\pm3$, $a\neq-3$

$\therefore a=3$ 답 3

체크 518

두 직선 $y=ax-2$, $y=-\frac{1}{3}x+5$가 수직이므로

$a\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-1 \qquad \therefore a=3$

두 직선 $y=3x-2$와 $y=(b+4)x+2$가 평행하므로

$3=b+4 \qquad \therefore b=-1$

$\therefore a+b=3+(-1)=2$ 답 2

체크 519

세 직선이 한 점에서 만나려면 어느 두 직선의 교점을 나머지 한 직선이 지나야 한다.

두 직선 $x-2y+3=0$, $2x+y-4=0$의 방정식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=2$

즉, 이 두 직선의 교점이 $(1, 2)$이므로 직선

$kx+(k+1)y-5=0$은 점 $(1, 2)$를 지나야 한다.

$k+2(k+1)-5=0 \qquad \therefore k=1$ 답 1

체크 520

세 직선에 의하여 생기는 교점이 두 개가 되려면 두 직선은 평행하고 다른 한 직선은 이들 두 직선과 평행하지 않아야 한다.

이때 두 직선 $2x-3y+1=0$, $5x+2y-7=0$은 평행하지 않으므로 다음 두 가지 경우가 가능하다.

(i) $2x-3y+1=0$, $mx+4y+3=0$이 평행할 때

$\frac{2}{m}=\frac{-3}{4}\neq\frac{1}{3}$, $-3m=8 \qquad \therefore m=-\frac{8}{3}$

(ii) $5x+2y-7=0$, $mx+4y+3=0$이 평행할 때

$\frac{5}{m}=\frac{2}{4}\neq\frac{-7}{3}$, $2m=20 \qquad \therefore m=10$

(i), (ii)에서 $m=-\frac{8}{3}$ 또는 $m=10$이다. 답 $-\frac{8}{3}$, 10

체크 521

직선 $2x+y-4=0$, 즉 $y=-2x+4$와 직선 AH가 서로 수직이므로 직선 AH의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

또한 직선 AH가 점 $(-3, 0)$을 지나므로 직선 AH의 방정식은

$y-0=\frac{1}{2}\{(x-(-3)\} \qquad \therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

점 H는 두 직선 $2x+y-4=0$, $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$의 교점이므로 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$x=1$, $y=2 \qquad \therefore \mathrm{H}(1, 2)$ 답 $(1, 2)$

체크 522

(i) 변 AB의 수직이등분선

선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{4+(-2)}{2}, \frac{3+(-3)}{2}\right)$

$\therefore (1, 0)$

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{-3-3}{-2-4}=1$

즉, 변 AB의 수직이등분선의 기울기는 -1이고, 점 $(1, 0)$을 지나므로 직선의 방정식은

$y-0=-(x-1) \qquad \therefore y=-x+1$ …… ㉠

(ii) 변 BC의 수직이등분선

선분 BC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-2+6}{2}, \frac{-3+(-3)}{2}\right) \qquad \therefore (2, -3)$

두 점 B, C를 지나는 직선은 x축에 평행하므로 변 BC의 수직이등분선은 y축에 평행하다.

이때 점 $(2, -3)$을 지나므로 직선의 방정식은

$x=2$ …… ㉡

삼각형 ABC의 각 변의 수직이등분선은 모두 한 점에서 만나므로 이 점은 두 직선 ㉠, ㉡의 교점과 일치한다.

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=-1$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(2, -1)$이다. 답 $(2, -1)$

연습 문제 18

523

① 기울기가 $\frac{1}{2}$이고 y절편이 3인 직선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x+3$

② 한 점 $(4, 5)$를 지나고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선의 방정식은

$y-5=\frac{1}{2}(x-4) \qquad \therefore y=\frac{1}{2}x+3$

③ 두 점 $(-2, 2)$, $(6, 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{6-2}{6-(-2)}\{x-(-2)\} \qquad \therefore y=\frac{1}{2}x+3$

④ 일차방정식 $x-2y+3=0$에서 $2y=x+3$

$\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

⑤ x절편이 -6이고 y절편이 3인 직선의 방정식은

$\frac{x}{-6}+\frac{y}{3}=1 \qquad \therefore y=\frac{1}{2}x+3$

따라서 나머지 넷과 다른 직선은 ④이다. 답 ④

524

선분 AB를 1 : 2로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times9-2\times(-6)}{1-2}, \frac{1\times1-2\times4}{1-2}\right) \qquad \therefore (-21, 7)$

따라서 점 $(-21, 7)$을 지나고 y축에 수직인 직선의 방정식은 $y=7$이다. 답 $y=7$

525

x절편이 -4, y절편이 5인 직선의 방정식은

$\frac{x}{-4}+\frac{y}{5}=1 \qquad \therefore 5x-4y+20=0$

따라서 $a=5$, $b=-4$이므로 $a+b=5+(-4)=1$ 답 1

526

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+3}{2}, \frac{7+(-1)}{2}\right) \qquad \therefore (2, 3)$

x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45°인 직선의 기울기는 $\tan 45°=1$

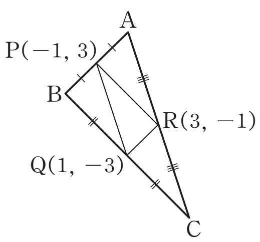
즉, 직선의 방정식은

$y-3=x-2 \qquad \therefore y=x+1$

직선 $y=x+1$이 점 $(p, 2p-1)$을 지나므로

$2p-1=p+1 \qquad \therefore p=2$ 답 2

527



삼각형 ABC와 삼각형 PQR는 오른쪽 그림과 같다.

삼각형에서 각 변의 중점을 연결한 선분의 성질에 의하여

$\overline{PR} /\!/ \overline{BC}$

이때 직선 PR의 기울기는

$\frac{-1-3}{3-(-1)}=-1$이므로 직선 BC의 기울기도 -1이다.

따라서 기울기가 -1이고 점 Q$(1, -3)$을 지나는 직선 BC의 방정식은

$y-(-3)=-(x-1) \qquad \therefore y=-x-2$

답 $y=-x-2$

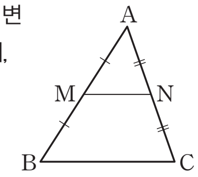
tip

삼각형에서 각 변의 중점을 연결한 선분의 성질

오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에서 두 변 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라 할 때,

$\overline{BC} /\!/ \overline{MN}$, $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}$

가 성립한다.



528

삼각형 ABC의 꼭짓점 C의 좌표를 (p, q)라 하면 무게중심이 G$(4, 3)$이므로

$\frac{0+7+p}{3}=4$, $\frac{6+4+q}{3}=3 \qquad \therefore p=5, q=-1$

$\therefore$ C$(5, -1)$

두 점 G$(4, 3)$, C$(5, -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{-1-3}{5-4}(x-4)$, $y=-4x+19$

$\therefore 4x+y-19=0$

따라서 $a=4$, $b=-19$이므로

$5a+b=5\times4+(-19)=1$ 답 1

529

주어진 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형이 존재하지 않으려면 세 점은 한 직선 위에 있어야 한다. 즉, 직선 AB의 기울기와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$\frac{4-3}{2-(a+2)}=\frac{(a-1)-4}{1-2}$

$\frac{1}{-a}=\frac{a-5}{-1} \qquad \therefore a^2-5a-1=0$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 5이다. 답 5

530

색칠한 부분의 넓이는 $2\times6+6\times10=72$

직선 l이 직선 $x=8$과 만나는 점을 A$(8, a)$라 하면 색칠한 부분 중 직선 l의 아랫부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(2+a)\times8=\frac{1}{2}\times72 \qquad \therefore a=7$

따라서 직선 l은 두 점 $(0, 2)$, $(8, 7)$을 지나므로 그 기울기는 $\frac{7-2}{8-0}=\frac{5}{8}$이다. 답 $\frac{5}{8}$

531

점 A$(-2, 7)$을 지나면서 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하는 직선은 변 BC의 중점 $(2, -1)$을 지나므로 기울기는

$\dfrac{-1-7}{2-(-2)}=-2$이다.

기울기가 -2이고 점 $(-3, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=-2\{x-(-3)\}$ $\qquad \therefore y=-2x-4$

따라서 $m=-2$, $n=-4$이므로

$m^2+n^2=(-2)^2+(-4)^2=20$ 답 20

532

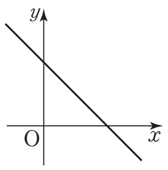
$cx-ay+b=0$에서 $ay=cx+b$

$\therefore y=\dfrac{c}{a}x+\dfrac{b}{a}$

이때 $ab>0$, $bc<0$에서 $ac<0$이므로

$\dfrac{c}{a}<0$, $\dfrac{b}{a}>0$

따라서 직선 $cx-ay+b=0$의 기울기는 음수이고 y절편은 양수이므로 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같고, 이 직선은 제3사분면을 지나지 않는다.



답 제3사분면

533

$x+3y-2=0$에서 $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$

직선 $x+3y-2=0$에 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면

$-\dfrac{1}{3}\times m=-1$ $\qquad \therefore m=3$

따라서 기울기가 3이고 점 $(1, 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=3(x-1)$

$\therefore y=3x-2$ 답 $y=3x-2$

534

두 직선 $ax+2y-1=0$, $(b-3)x+2y+1=0$이 평행하므로

$\dfrac{a}{b-3}=\dfrac{2}{2}\neq\dfrac{-1}{1}$ $\qquad \therefore a-b=-3$

두 직선 $ax+2y-1=0$, $bx-y+5=0$이 수직이므로

$ab-2=0$ $\qquad \therefore ab=2$

$\therefore a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

$=(-3)^3+3\times2\times(-3)=-45$ 답 -45

535

직선 l_1의 x절편은 4, y절편은 -2이므로 이 직선의 방정식은

$\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{-2}=1$ $\qquad \therefore l_1: y=\dfrac{1}{2}x-2$

두 직선 l_1, l_2는 수직이므로 l_2의 기울기를 m이라 하면

$\dfrac{1}{2}\times m=-1$ $\qquad \therefore m=-2$

즉, 직선 l_2는 기울기가 -2이고 점 $(4, 0)$을 지나므로 이 직선의 방정식은

$y-0=-2(x-4)$ $\qquad \therefore l_2: y=-2x+8$

따라서 $a=-2$, $b=8$이므로

$\dfrac{b}{a}=\dfrac{8}{-2}=-4$ 답 -4

536

직선 PH와 직선 $x-y-1=0$, 즉 $y=x-1$이 서로 수직이므로 직선 PH의 기울기는 -1이다.

또한 직선 PH는 점 $P(2, 3)$을 지나므로 직선 PH의 방정식은

$y-3=-(x-2)$ $\qquad \therefore y=-x+5$

점 H는 두 직선 $y=x-1$, $y=-x+5$의 교점이므로 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=2$

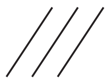
$\therefore H(3, 2)$

따라서 두 점 $A(-2, -3)$, $H(3, 2)$에 대하여

$\overline{AH}=\sqrt{\{3-(-2)\}^2+\{2-(-3)\}^2}=5\sqrt{2}$ 답 $5\sqrt{2}$

537

서로 다른 세 직선에 의하여 좌표평면이 네 부분으로 나누어지는 경우는 오른쪽 그림과 같이 세 직선이 모두 평행할 때이다.



$$\begin{cases} 4x+3y-6=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+my+1=0 & \cdots\cdots ㉡ \\ nx-y-4=0 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠, ㉡이 평행하므로 $\dfrac{4}{3}=\dfrac{3}{m}\neq\dfrac{-6}{1}$

$4m=9$ $\qquad \therefore m=\dfrac{9}{4}$

㉠, ㉢이 평행하므로 $\dfrac{4}{n}=\dfrac{3}{-1}\neq\dfrac{-6}{-4}$

$3n=-4$ $\qquad \therefore n=-\dfrac{4}{3}$

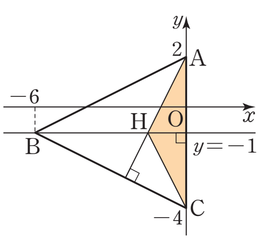
$\therefore mn=\dfrac{9}{4}\times\left(-\dfrac{4}{3}\right)=-3$ 답 -3

538

삼각형 ABC를 좌표평면 위에 그리면 오른쪽 그림과 같다.

변 AC는 y축 위에 있으므로 꼭짓점 B에서 변 AC에 그은 수선, 즉 직선 BH의 방정식은

$y=-1$

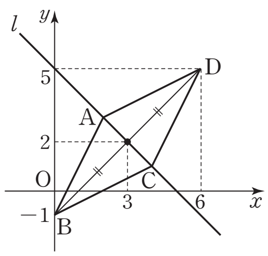


꼭짓점 A에서 변 BC에 그은 수선은 직선 BC에 수직이고 직선 BC의 기울기는 $\frac{-4-(-1)}{0-(-6)}=-\frac{1}{2}$이므로 직선 AH의 기울기는 2이다.
즉, 기울기가 2이고 점 A(0, 2)를 지나는 직선 AH의 방정식은 $y=2x+2$
점 H는 두 직선 $y=-1$, $y=2x+2$의 교점이므로 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면 $x=-\frac{3}{2}$, $y=-1$

$\therefore \mathrm{H}\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$

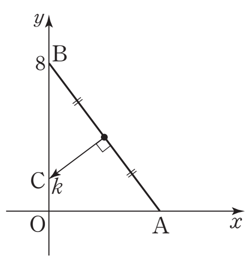
$\therefore \triangle\mathrm{HAC}=\frac{1}{2}\times 6\times\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$ 답 $\frac{9}{2}$

539
마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분하므로 직선 l은 선분 BD의 수직이등분선이다. 즉, 직선 l은 선분 BD의 중점을 지나고 직선 BD에 수직이다.
선분 BD의 중점의 좌표는
$\left(\frac{0+6}{2}, \frac{-1+5}{2}\right)$ $\therefore$ (3, 2)



직선 BD의 기울기는 $\frac{5-(-1)}{6-0}=1$이므로 직선 BD와 수직인 직선 AC의 기울기는 -1이다.
즉, 직선 l의 기울기는 -1이고 점 (3, 2)를 지나므로 직선의 방정식은
$y-2=-(x-3)$ $\therefore x+y-5=0$
이 방정식은 $ax+y-b=0$과 일치해야 하므로 $a=1$, $b=5$
$\therefore \frac{b}{a}=\frac{5}{1}=5$ 답 5

540
오른쪽 그림과 같이 땅을 x축, 벽을 y축이라 하고 양궁 과녁판이 땅과 닿는 점을 A, 벽과 닿는 점을 B(0, 8), 화살촉이 벽에 닿는 점을 C(0, k)라 하자.

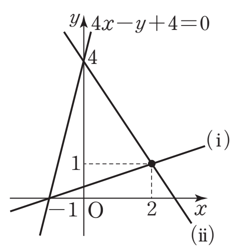


$\overline{\mathrm{AB}}=10$, $\overline{\mathrm{OB}}=8$에서 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{OA}}=6$이므로
A(6, 0)
즉, 직선 AB의 기울기는 $\frac{8-0}{0-6}=-\frac{4}{3}$이므로 과녁판에 수직으로 박힌 화살을 직선 l이라 하면 직선 l의 기울기는 $\frac{3}{4}$이다.
또한 과녁의 정중앙의 좌표는 (3, 4)이므로 직선 l의 방정식은
$y-4=\frac{3}{4}(x-3)$ $\therefore y=\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}$
따라서 k는 직선 l의 y절편이므로 $k=\frac{7}{4}$
$\therefore 20k=20\times\frac{7}{4}=35$ 답 35

34 두 직선의 교점을 지나는 직선

체크 **541**
주어진 직선의 방정식을 k에 대하여 정리하면
$(3x-y-2)k+(x+4y-5)=0$
이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로
$3x-y-2=0$, $x+4y-5=0$
두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=1$
즉, 주어진 직선이 항상 지나는 점은 P(1, 1)이다.
점 P(1, 1)을 지나고 기울기가 -3인 직선의 방정식은
$y-1=-3(x-1)$ $\therefore y=-3x+4$
따라서 x절편은 $0=-3x+4$ $\therefore x=\frac{4}{3}$ 답 $\frac{4}{3}$

체크 **542**
$mx+2y-2m-2=0$에서
$(x-2)(m)+(2y-2)=0$ …… ㉠
㉠이 m의 값에 관계없이 항상 성립하므로
$x-2=0$, $2y-2=0$ $\therefore x=2$, $y=1$
즉, 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 점 (2, 1)을 지난다.
직선 $4x-y+4=0$과 직선 ㉠이 제2사분면에서 만나려면 오른쪽 그림의 (i), (ii) 사이를 지나야 한다.



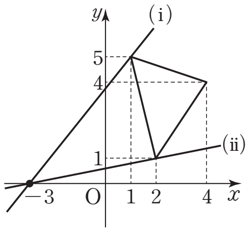
(i) 직선 ㉠이 점 (−1, 0)을 지날 때
$-m-2m-2=0$에서 $m=-\frac{2}{3}$
(ii) 직선 ㉠이 점 (0, 4)를 지날 때
$8-2m-2=0$에서 $m=3$
(i), (ii)에서 $-\frac{2}{3}<m<3$ 답 $-\frac{2}{3}<m<3$

체크 543

$y=ax+3a$에서 $a(x+3)-y=0$ …… ㉠

즉, 직선 ㉠은 a의 값에 관계없이 점 $(-3, 0)$을 지난다.

직선 ㉠이 주어진 삼각형과 만나려면 오른쪽 그림의 (i), (ii)와 그 사이를 지나야 한다.



(i) 직선 ㉠이 점 $(1, 5)$를 지날 때

$a(1+3)-5=0 \qquad \therefore a=\frac{5}{4}$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(2, 1)$을 지날 때

$a(2+3)-1=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{5}$

(i), (ii)에서 $\frac{1}{5}\le a\le\frac{5}{4}$ 　답 $\frac{1}{5}\le a\le\frac{5}{4}$

체크 544

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선 l의 방정식은

$(3x-4y+2)+k(x+y-4)=0$ (단, k는 실수) …… ㉠

직선 l이 점 $(-3, -1)$을 지나므로

$3\times(-3)-4\times(-1)+2+k\times\{-3+(-1)-4\}=0$

$-3-8k=0 \qquad \therefore k=-\frac{3}{8}$

$k=-\frac{3}{8}$을 ㉠에 대입하면 $(3x-4y+2)-\frac{3}{8}(x+y-4)=0$

$\therefore l$: $3x-5y+4=0$

점 $(k, 5)$가 직선 l 위의 점이므로

$3k-5\times5+4=0$, $3k=21 \qquad \therefore k=7$ 　답 7

[다른 풀이]

두 직선 $3x-4y+2=0$, $x+y-4=0$의 방정식을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=2$이므로 교점의 좌표는 $(2, 2)$이다.

두 점 $(2, 2)$, $(-3, -1)$을 지나는 직선 l의 방정식은

$y-2=\frac{-1-2}{-3-2}(x-2) \qquad \therefore y=\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}$

점 $(k, 5)$가 직선 l 위의 점이므로

$5=\frac{3}{5}k+\frac{4}{5} \qquad \therefore k=7$

체크 545

두 직선 $2x-y+3=0$, $4x+3y-4=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(2x-y+3)+k(4x+3y-4)=0$

$\therefore (2+4k)x+(-1+3k)y+3-4k=0$ …… ㉠

직선 ㉠이 직선 $x-4y+5=0$과 수직이므로

$(2+4k)\times1+(-1+3k)\times(-4)=0$

$6-8k=0 \qquad \therefore k=\frac{3}{4}$

$k=\frac{3}{4}$을 ㉠에 대입하면 $5x+\frac{5}{4}y=0 \qquad \therefore y=-4x$

따라서 구하는 y절편은 0이다. 　답 0

35 점과 직선 사이의 거리

체크 546

$kx+(k-1)y-3=0$에서 $k(x+y)+(-y-3)=0$

즉, k의 값에 관계없이 항상 점 $P(3, -3)$을 지난다.

점 $P(3, -3)$과 직선 $2x-y+1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2\times3-(-3)+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$ 　답 $2\sqrt{5}$

체크 547

원점을 지나는 직선의 방정식을 $y=mx$, 즉 $mx-y=0$이라 하면 점 $(2, 3)$과 직선 $mx-y=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2m-3|}{\sqrt{m^2+1}}=3$에서 $|2m-3|=3\sqrt{m^2+1}$의 양변을 제곱하면

$4m^2-12m+9=9m^2+9$

$5m^2+12m=0$, $m(5m+12)=0$

$\therefore m=0$ 또는 $m=-\frac{12}{5}$

$\therefore m_1+m_2=-\frac{12}{5}$ 　답 $-\frac{12}{5}$

체크 548

주어진 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x+2y-k=0$ 위의 한 점 $\left(0, \frac{k}{2}\right)$와 직선 $3x+2y+k=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{\left|3\times0+2\times\frac{k}{2}+k\right|}{\sqrt{3^2+2^2}}=2\sqrt{13}$

$\frac{|2k|}{\sqrt{13}}=2\sqrt{13}$, $2k=26$ ($\because k$는 양수)

$\therefore k=13$ 　답 13

체크 549

점 $C(3, -1)$과 직선 $5x-12y-1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|5\times3-12\times(-1)-1|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{26}{13}=2$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times6\times2=6$ ($\because \overline{AB}=6$) 　답 6

체크 550

$\overline{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(-4-4)^2}=2\sqrt{17}$

직선 AB의 방정식은

$y-4=\frac{-4-4}{3-1}(x-1)$ $\therefore 4x+y-8=0$

점 $(0, 0)$과 직선 $4x+y-8=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-8|}{\sqrt{4^2+1^2}}=\frac{8}{\sqrt{17}}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{17}\times\frac{8}{\sqrt{17}}=8$ 답 8

체크 551

삼각형 ABC가 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로

$\sqrt{(-5-a)^2+(4-1)^2}=\sqrt{(-1-a)^2+(0-1)^2}$

$a^2+10a+25+9=a^2+2a+1+1$

$8a=-32$ $\therefore a=-4$

즉, 점 A의 좌표는 $(-4, 1)$이다.

$\overline{AB}=\sqrt{\{-5-(-4)\}^2+(4-1)^2}=\sqrt{10}$

직선 AB의 방정식은

$y-1=\frac{4-1}{-5-(-4)}\{x-(-4)\}$ $\therefore 3x+y+11=0$

점 C와 직선 AB 사이의 거리는

$\frac{|3\times(-1)+11|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\frac{4\sqrt{10}}{5}=4$ 답 4

체크 552

주어진 두 직선으로부터의 거리가 같은 점을 $P(x, y)$라 하면

$\frac{|x-2y+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|4x+2y-1|}{\sqrt{4^2+2^2}}$

$2|x-2y+1|=|4x+2y-1|$

$2x-4y+2=\pm(4x+2y-1)$

$\therefore 2x+6y-3=0$ 또는 $6x-2y+1=0$

따라서 $a=2$, $b=6$, $c=6$, $d=-2$이므로

$ab-cd=2\times6-6\times(-2)=24$ 답 24

체크 553

임의의 점 P의 좌표를 (a, b), 선분 AP의 중점을 $Q(x, y)$라 하면 $x=\frac{a+k}{2}$, $y=\frac{b}{2}$

$\therefore a=2x-k$, $b=2y$ …… ㉠

점 $P(a, b)$는 직선 $x+3y-5=0$ 위의 점이므로

$a+3b-5=0$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2x-k+3\times 2y-5=0$

$\therefore 2x+6y-k-5=0$

이 방정식이 $x+3y-3=0$, 즉 $2x+6y-6=0$과 일치해야 하므로 $-k-5=-6$ $\therefore k=1$ 답 1

연습 문제 19

554

$(-k+2)x-(k-1)y+(5k-3)=0$에서

$k(-x-y+5)+(2x+y-3)=0$

이 등식은 k의 값에 관계없이 성립하므로

$-x-y+5=0$, $2x+y-3=0$

두 식을 연립하여 풀면

$x=-2$, $y=7$

즉, 주어진 직선이 k의 값에 관계없이 지나는 점 P의 좌표는 $(-2, 7)$이다.

따라서 두 점 $(-2, 7)$, $(3, -5)$ 사이의 거리는

$\sqrt{\{3-(-2)\}^2+(-5-7)^2}=13$ 답 13

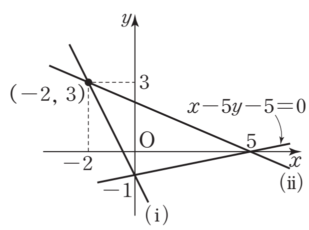
555

$2mx+y+4m-3=0$ …… ㉠에서

$m(2x+4)+(y-3)=0$

즉, 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 점 $(-2, 3)$을 지난다.

이때 직선 $x-5y-5=0$과 직선 ㉠이 제4사분면에서 만나려면 직선 ㉠이 오른쪽 그림의 (i)과 (ii)의 사이를 지나야 한다.



(i) 직선 ㉠이 점 $(0, -1)$을 지날 때

$2m\times0+(-1)+4m-3=0$ $\therefore m=1$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(5, 0)$을 지날 때

$2m\times5+0+4m-3=0$ $\therefore m=\frac{3}{14}$

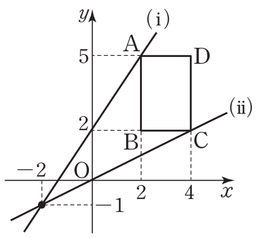
(i), (ii)에서 $\frac{3}{14}<m<1$ 답 $\frac{3}{14}<m<1$

556

$kx-y+2k-1=0$ …… ㉠에서

$k(x+2)-(y+1)=0$

즉, 직선 ㉠은 k의 값에 관계없이 점 $(-2,\ -1)$을 지난다.
이때 주어진 직사각형과 직선 ㉠이 두 점에서 만나려면 직선 ㉠이 오른쪽 그림의 (i)과 (ii)의 사이를 지나야 한다.



(i) 직선 ㉠이 점 A를 지날 때

$2k-5+2k-1=0 \qquad \therefore k=\frac{3}{2}$

(ii) 직선 ㉠이 점 C를 지날 때

$4k-2+2k-1=0 \qquad \therefore k=\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $\frac{1}{2}<k<\frac{3}{2}$ 답 $\frac{1}{2}<k<\frac{3}{2}$

557

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(x-5y+3)+k(x-2y+4)=0$ (단, k는 실수) …… ㉠
직선 ㉠이 점 $(1,\ 2)$를 지나므로
$(1-5\times2+3)+k(1-2\times2+4)=0$
$-6+k=0 \qquad \therefore k=6$
$k=6$을 ㉠에 대입하면 $(x-5y+3)+6(x-2y+4)=0$
$\therefore 7x-17y+27=0$
이 방정식이 $ax-17y+b=0$과 일치해야 하므로
$a=7,\ b=27$
$\therefore a+b=7+27=34$ 답 34

558

$y=m(x-1)+3$에서 $m(x-1)-(y-3)=0$ …… ㉠
이때 ㉠은 두 직선 $x-1=0$, $y-3=0$의 교점을 지나는 직선이므로 m의 값에 관계없이 점 $(1,\ 3)$을 지나고 $m=0$일 때는 직선 $y-3=0$을 나타낸다.
그러나 m이 어떠한 값을 갖더라도 ㉠이 직선 $x=1$을 나타낼 수는 없다. 즉, 직선 ㉠은 좌표평면의 모든 점을 지날 수 있지만 직선 $x=1$ 위의 점 중 $(1,\ 3)$을 제외한 다른 점은 지날 수 없다.
따라서 주어진 직선이 지날 수 없는 점은 ④ $(1,\ 5)$이다.
답 ④

559

$(2x-y+4)+k(x+y-1)=0$에서
$(2+k)x+(k-1)y-k+4=0$
① $k=1$이면 $3x+3=0 \qquad \therefore x=-1$
즉, y축에 평행하다.
② $k=-2$이면 $-3y+6=0 \qquad \therefore y=2$
즉, x축에 평행하다.
③ $k=-1$이면 $x-2y+5=0$
즉, 직선 $x-2y+3=0$과 평행하다.
④ $k=2$이면 $4x+y+2=0$
즉, 직선 $x-4y+1=0$과 수직이다.
⑤ k의 값에 관계없이 두 직선 $2x-y+4=0$, $x+y-1=0$의 교점 $(-1,\ 2)$를 지난다.
따라서 옳지 않은 것은 ②이다. 답 ②

560

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(4x+5y-2)+k(3x-4y+1)=0$ (단, k는 실수)
$\therefore (3k+4)x+(-4k+5)y+(k-2)=0$ …… ㉠
직선 ㉠과 직선 $x+y+1=0$이 수직이므로
$(3k+4)\times1+(-4k+5)\times1=0 \qquad \therefore k=9$
$k=9$를 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은
$31x-31y+7=0$ 답 $31x-31y+7=0$

561

$(k+3)x-(2k+5)y-2=0$ …… ㉠에서
$k(x-2y)+(3x-5y-2)=0$
이 등식은 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로
$x-2y=0,\ 3x-5y-2=0$
두 식을 연립하여 풀면 $x=4,\ y=2$
즉, 직선 ㉠이 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점 P의 좌표는 $(4,\ 2)$이다.
점 $P(4,\ 2)$와 직선 $5x-12y+17=0$ 사이의 거리는
$\frac{|5\times4-12\times2+17|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{13}{13}=1$ 답 1

562

점 $(a,\ 0)$에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로
$\frac{|3a+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|4a-1|}{\sqrt{4^2+3^2}}$
즉, $|3a+1|=|4a-1|$에서 $3a+1=\pm(4a-1)$
$3a+1=4a-1$에서 $a=2$, $3a+1=-(4a-1)$에서 $a=0$
따라서 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은
$2+0=2$ 답 2

563

직선 $x-3y+5=0$과 수직인 직선의 방정식을
$3x+y+k=0$ (k는 실수)이라 하면 원점 $(0,\ 0)$과 직선 $3x+y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{10}}$, 즉 $\frac{|k|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$에서 $k=\pm10$

$\therefore 3x+y+10=0$ 또는 $3x+y-10=0$

답 $3x+y+10=0$ 또는 $3x+y-10=0$

564

주어진 두 직선이 이루는 각을 이등분하는 직선 위의 임의의 점 (x, y)에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$\frac{|2x-3y+1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{|3x+2y+k|}{\sqrt{3^2+2^2}}$

즉, $|2x-3y+1|=|3x+2y+k|$에서

$2x-3y+1=\pm(3x+2y+k)$

$\therefore x+5y+k-1=0$ 또는 $5x-y+k+1=0$

직선 $x+5y+k-1=0$이 점 $(1, -1)$을 지나면

$1-5+k-1=0 \qquad \therefore k=5$

직선 $5x-y+k+1=0$이 점 $(1, -1)$을 지나면

$5+1+k+1=0 \qquad \therefore k=-7$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$5+(-7)=-2$

답 -2

565

$(m+2)x-(m+1)y+(m-2)=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠에서

$m(x-y+1)+(2x-y-2)=0$

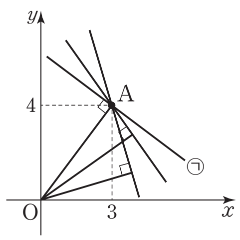
이 등식은 m에 대한 항등식이므로

$x-y+1=0$, $2x-y-2=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=4$

즉, 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(3, 4)$를 지난다.

이때 $A(3, 4)$라 하면 원점 $O(0, 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리 $f(m)$이 최대가 되는 것은 오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠과 직선 OA가 수직일 때이고 최댓값은 $\overline{OA}$이다.



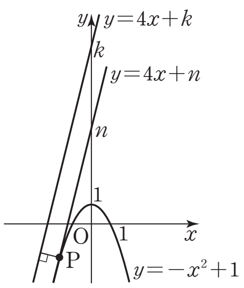
따라서 구하는 최댓값은

$\overline{OA}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

답 5

566

이차함수 $y=-x^2+1$의 그래프와 직선 $y=4x+k$ 사이의 거리의 최솟값은 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=4x+k$에 평행하고 포물선에 접하는 직선 $y=4x+n$의 접점 P와 직선 $y=4x+k$ 사이의 거리이다.



이차함수 $y=-x^2+1$의 그래프와 직선 $y=4x+n$이 접하면 이차방정식 $-x^2+1=4x+n$, 즉 $x^2+4x+n-1=0$은 중근을 갖는다. 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-n+1=0 \qquad \therefore n=5$

즉, 접선의 방정식은 $y=4x+5$이다.

접선 위의 한 점 $(0, 5)$와 직선 $y=4x+k$, 즉 $4x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|4\times0-5+k|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\sqrt{17}$, $\frac{|k-5|}{\sqrt{17}}=\sqrt{17}$

$k-5=\pm17 \qquad \therefore k=22$ 또는 $k=-12$

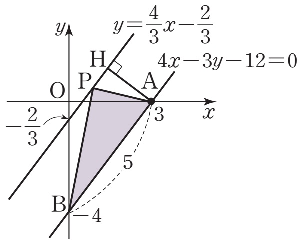
이때 그림에서와 같이 되려면 $k>5$이어야 하므로 구하는 실수 k의 값은 22이다.

답 22

567

$A(3, 0)$, $B(0, -4)$이므로 $\overline{AB}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

이때 직선 $4x-3y-12=0$과 직선 $y=\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}$, 즉 $4x-3y-2=0$은 평행하므로 점 A에서 직선 $4x-3y-2=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 $A(3, 0)$과 직선 $4x-3y-2=0$ 사이의 거리는



$\overline{AH}=\frac{|4\times3-3\times0-2|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{10}{5}=2$

$\therefore \triangle ABP=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AP}=\frac{1}{2}\times5\times2=5$

답 5

568

세 직선 $\begin{cases} x+2y-13=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-y-4=0 & \cdots\cdots ㉡ \\ 2x-3y-5=0 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$에 대하여

두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 좌표는 $(3, 5)$

두 직선 ㉡, ㉢의 교점의 좌표는 $(1, -1)$

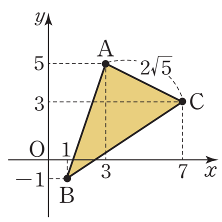
두 직선 ㉠, ㉢의 교점의 좌표는 $(7, 3)$

$A(3, 5)$, $B(1, -1)$, $C(7, 3)$이라 하면

$\overline{AC}=\sqrt{(7-3)^2+(3-5)^2}=2\sqrt{5}$

또한 직선 AC의 방정식은 직선 ㉠이므로 점 $B(1, -1)$과 직선 ㉠ 사이의 거리는

$\frac{|1-2-13|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{14}{\sqrt{5}}$



$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times\frac{14}{\sqrt{5}}=14$ 답 14

569

점 A의 좌표를 (a, b)라 하면 $2a-5b-6=0$ …… ㉠

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 점 P는 선분 OA를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$x=\frac{2\times a+1\times 0}{2+1}=\frac{2a}{3}$, $y=\frac{2\times b+1\times 0}{2+1}=\frac{2b}{3}$

$\therefore a=\frac{3}{2}x,\ b=\frac{3}{2}y$

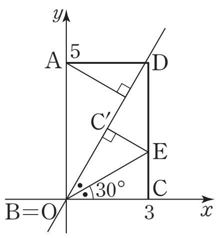
이를 ㉠에 대입하면 $2\times\frac{3}{2}x-5\times\frac{3}{2}y-6=0$

$6x-15y-12=0 \qquad \therefore 2x-5y-4=0$

답 $2x-5y-4=0$

570

점 B를 원점으로 하고, 직선 BC를 x축, 직선 AB를 y축으로 하는 좌표평면 위에 주어진 직사각형을 놓으면 오른쪽 그림과 같다.



$\angle CBC'=2\angle EBC=60°$이므로 직선 BC′의 방정식은

$y=\sqrt{3}x$

점 A(0, 5)와 직선 $y=\sqrt{3}x$, 즉 $\sqrt{3}x-y=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-5|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\frac{5}{2}$ 답 $\frac{5}{2}$

571

두 직선 $2x-y-6=0$과 $kx-2y+8=0$이 평행하므로

$\frac{2}{k}=\frac{-1}{-2}\neq\frac{-6}{8} \qquad \therefore k=4$

직선 $4x-2y+8=0$ 위의 한 점 $(-2, 0)$과 직선 $2x-y-6=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2\times(-2)-0-6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$

따라서 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 $2\sqrt{5}$이므로 그 넓이는 $(2\sqrt{5})^2=20$ 답 20

tip

두 직선 $2x-y-6=0$, $kx-2y+8=0$이 평행함을 이미 알고 있으므로 k의 값을 구하지 않아도 답을 얻을 수 있다. 직선 $kx-2y+8=0$ 위의 점을 $(0, 4)$로 잡고, 점 $(0, 4)$와 직선 $2x-y-6=0$ 사이의 거리를 구해도 되기 때문이다.

3 원의 방정식

36 원의 방정식

체크 572

선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점을 P라 하면 점 P의 좌표는

$\left(\frac{3\times 6+2\times 1}{3+2}, \frac{3\times 4+2\times(-1)}{3+2}\right) \qquad \therefore P(4, 2)$

선분 AB를 1 : 2로 외분하는 점을 Q라 하면 점 Q의 좌표는

$\left(\frac{1\times 6-2\times 1}{1-2}, \frac{1\times 4-2\times(-1)}{1-2}\right) \qquad \therefore Q(-4, -6)$

구하는 원의 지름이 $\overline{PQ}$이므로 중심은 $\overline{PQ}$의 중점이다.

즉, 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{4+(-4)}{2}, \frac{2+(-6)}{2}\right) \qquad \therefore (0, -2)$

원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{PQ}=\frac{1}{2}\sqrt{\{4-(-4)\}^2+\{2-(-6)\}^2}$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{128}=\frac{1}{2}\times 8\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$x^2+(y+2)^2=32$ 답 $x^2+(y+2)^2=32$

체크 573

삼각형 OAB의 외접원의 방정식을

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$ …… ㉠

이라 하자.

㉠이 점 O(0, 0)을 지나므로 $C=0$ …… ㉡

㉠이 점 A(1, 3)을 지나고 ㉡이므로

$A+3B=-10$ …… ㉢

㉠이 점 B(−1, 2)를 지나고 ㉡이므로

$-A+2B=-5$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $A=-1$, $B=-3$

즉, 삼각형 OAB의 외접원의 방정식은

$x^2+y^2-x-3y=0$

이 원이 점 C$(k, 1)$을 지나므로

$k^2+1^2-k-3=0$, $k^2-k-2=0$, $(k+1)(k-2)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=2$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은 -2이다. 답 -2

체크 574

$x^2+y^2+2kx-2(k-1)y+k^2+1=0$에서

$(x^2+2kx+k^2)+\{y^2-2(k-1)y+(k-1)^2\}$

$=-k^2-1+k^2+(k-1)^2$

$\therefore (x+k)^2+(y-k+1)^2=k^2-2k$

따라서 주어진 방정식이 원을 나타내려면 $k^2-2k>0$이어야 하므로

$k(k-2)>0 \qquad \therefore k<0$ 또는 $k>2$

답 $k<0$ 또는 $k>2$

체크 575

중심이 직선 $y=3x+1$ 위에 있으므로 원의 중심을 $C(a,\ 3a+1)$이라 하자.

원의 정의에 의하여 $\overline{AC}=\overline{BC}$이므로

$\sqrt{(a+3)^2+\{(3a+1)-4\}^2}=\sqrt{(a-1)^2+\{(3a+1)-8\}^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$10a^2-12a+18=10a^2-44a+50$

$32a=32 \qquad \therefore a=1$

따라서 원의 중심은 $C(1,\ 4)$이고 반지름의 길이는

$\overline{AC}=|1-(-3)|=4$이므로 원의 넓이는

$\pi\times4^2=16\pi$

답 16π

체크 576

원 $x^2+y^2+4ax-8y+1+3b=0$에서

$(x+2a)^2+(y-4)^2=4a^2-3b+15$

즉, 주어진 원은 중심의 좌표가 $(-2a,\ 4)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{4a^2-3b+15}$이며 중심이 제1사분면 위의 점이므로

$-2a>0 \qquad \therefore a<0$

이 원이 x축, y축에 동시에 접하므로

$|-2a|=4=\sqrt{4a^2-3b+15}$

$|-2a|=4$에서 $a=-2\ (\because a<0)$

$4=\sqrt{4a^2-3b+15}$에서 $31-3b=16 \qquad \therefore b=5$

$\therefore a+b=(-2)+5=3$

답 3

체크 577

원의 중심이 직선 $y=x+2$ 위에 있으므로 구하는 원의 중심을 $C(a,\ a+2)$라 하자.

x축에 접하는 원의 반지름의 길이는

중심 $C(a,\ a+2)$에서 x축까지의 거리와 같으므로

$|(\text{중심의 }y\text{좌표})|=|a+2|$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a-2)^2=(a+2)^2$

이 원이 점 $(4,\ 3)$을 지나므로 $x=4$, $y=3$을 대입하면

$(4-a)^2+(1-a)^2=(a+2)^2$, $a^2-14a+13=0$

$(a-1)(a-13)=0 \qquad \therefore a=1$ 또는 $a=13$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-3)^2=9$ 또는 $(x-13)^2+(y-15)^2=225$

이고 중심의 좌표는 각각 $(1,\ 3)$, $(13,\ 15)$이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(13-1)^2+(15-3)^2}=\sqrt{288}=12\sqrt{2}$

답 $12\sqrt{2}$

체크 578

원 $x^2+y^2-8x-2y+1=0$에서

$(x-4)^2+(y-1)^2=16$

이 원 위의 임의의 점을 $P(a,\ b)$라 하면

$(a-4)^2+(b-1)^2=16 \qquad \cdots\cdots ㉠$

선분 AP의 중점을 $M(x,\ y)$라 하면

$x=\dfrac{a-1}{2},\ y=\dfrac{b+2}{2}$

$\therefore a=2x+1,\ b=2y-2 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면

$(2x-3)^2+(2y-3)^2=16$

$\therefore \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=4$

따라서 선분 AP의 중점 M이 나타내는 도형은 원이고 중심이 $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$, 반지름의 길이는 2이다.

답 2

체크 579

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$이므로

$\overline{AP}=2\overline{BP}$, 즉 $\overline{AP}^2=4\overline{BP}^2$에서

$(x+2)^2+(y-5)^2=4\{(x-4)^2+(y-2)^2\}$

정리하면 $x^2+y^2-12x-2y+17=0$

$\therefore (x-6)^2+(y-1)^2=20$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 $(6,\ 1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$인 원이므로 그 넓이는

$\pi\times(2\sqrt{5})^2=20\pi$

답 20π

[다른 풀이]

점 P는 두 점 A, B로부터의 거리의 비가 일정한 점이므로 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점과 외분하는 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다.

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점을 M이라 하면

$\left(\dfrac{2\times4+1\times(-2)}{2+1},\ \dfrac{2\times2+1\times5}{2+1}\right) \qquad \therefore M(2,\ 3)$

선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점을 N이라 하면

$\left(\dfrac{2\times4-1\times(-2)}{2-1},\ \dfrac{2\times2-1\times5}{2-1}\right) \qquad \therefore N(10,\ -1)$

즉, 점 P가 나타내는 도형은 $\overline{MN}$을 지름으로 하는 원이므로

이 원의 반지름의 길이는

$\dfrac{1}{2}\overline{MN}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{(10-2)^2+(-1-3)^2}=2\sqrt{5}$

따라서 구하는 넓이는 $\pi\times(2\sqrt{5})^2=20\pi$

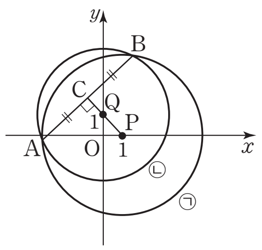
37 두 원의 교점을 지나는 도형의 방정식

체크 580

두 원의 두 교점을 잇는 선분, 즉 두 원의 공통현의 중점은 두 원의 중심을 잇는 직선과 공통현의 교점이다.
이때 공통현을 포함하는 직선, 즉
두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$x^2+y^2-2x-17-(x^2+y^2-6x-4y-9)=0$
$\therefore\ x+y-2=0$ ...... ㉠
한편, 원 $x^2+y^2-2x-17=0$에서 $(x-1)^2+y^2=18$이고,
원 $x^2+y^2-6x-4y-9=0$에서 $(x-3)^2+(y-2)^2=22$이므로 두 원의 중심은 각각 $(1, 0)$, $(3, 2)$이다.
두 원의 중심을 지나는 직선의 방정식은
$y=\dfrac{2}{3-1}(x-1)\qquad\therefore\ y=x-1$ ...... ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=\dfrac{3}{2}$, $y=\dfrac{1}{2}$
따라서 공통현의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$이므로
$a=\dfrac{3}{2}$, $b=\dfrac{1}{2}$
$\therefore\ a^2+b^2=\dfrac{9}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{2}$ 답 $\dfrac{5}{2}$

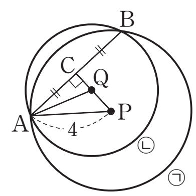
체크 581

원 $x^2+y^2-2x-15=0$에서 $(x-1)^2+y^2=16$ ...... ㉠
이므로 원 ㉠의 중심을 P라 하면 $\mathrm{P}(1, 0)$이고 반지름의 길이는 4이다.
또한 원 $x^2+y^2-2y+k=0$에서
$x^2+(y-1)^2=1-k$ ...... ㉡
이므로 원 ㉡의 중심을 Q라 하면 $\mathrm{Q}(0, 1)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{1-k}$이다.
오른쪽 그림과 같이 두 원 ㉠, ㉡의 교점을 A, B, 직선 PQ와 선분 AB가 만나는 점을 C라 하자.
두 원의 공통현의 길이가 $\overline{\mathrm{AB}}=4\sqrt{2}$이므로

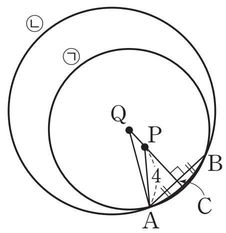


$\overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{1}{2}\,\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$
직각삼각형 PAC에서 $\overline{\mathrm{PA}}=4$이므로
$\overline{\mathrm{PC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PA}}^2-\overline{\mathrm{AC}}^2}=\sqrt{4^2-(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$ ...... ㉢
한편, 두 원의 공통현의 방정식은
$x^2+y^2-2x-15-(x^2+y^2-2y+k)=0$
$\therefore\ 2x-2y+k+15=0$
원 ㉠의 중심 $\mathrm{P}(1, 0)$과 이 직선 사이의 거리는
$\overline{\mathrm{PC}}=\dfrac{|2-0+k+15|}{\sqrt{2^2+(-2)^2}}=\dfrac{|k+17|}{2\sqrt{2}}$ ...... ㉣
㉢=㉣이므로 $\dfrac{|k+17|}{2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$, $|k+17|=8$
$k+17=\pm 8\qquad\therefore\ k=-9$ 또는 $k=-25$
따라서 모든 실수 k의 값의 합은
$(-9)+(-25)=-34$ 답 -34

[다른 풀이]
원 ㉠의 중심과 반지름의 길이는 고정되어 있고 원 ㉡은 중심은 고정되어 있으나 반지름의 길이를 알 수 없다. 즉, 다음과 같이 두 가지 경우를 생각할 수 있다.
(i) 오른쪽 그림과 같을 때,



$\overline{\mathrm{PC}}=2\sqrt{2}$이고
$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$
이므로
$\overline{\mathrm{QC}}=\overline{\mathrm{PC}}-\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2}$
또한, $\overline{\mathrm{QA}}$는 원 ㉡의 반지름이므로 $\overline{\mathrm{QA}}=\sqrt{1-k}$
직각삼각형 QCA에서 $\overline{\mathrm{QA}}^2=\overline{\mathrm{QC}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2$이고 $\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{2}$
이므로
$1-k=2+8\qquad\therefore\ k=-9$
(ii) 오른쪽 그림과 같을 때,



$\overline{\mathrm{PC}}=2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2}$이므로
$\overline{\mathrm{QC}}=\overline{\mathrm{PC}}+\overline{\mathrm{PQ}}=3\sqrt{2}$
또한 $\overline{\mathrm{QA}}$는 원 ㉡의 반지름이므로
$\overline{\mathrm{QA}}=\sqrt{1-k}$
직각삼각형 QCA에서
$\overline{\mathrm{QA}}^2=\overline{\mathrm{QC}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2$이므로
$1-k=18+8\qquad\therefore\ k=-25$
(i), (ii)에서 구하는 k의 값은 -9 또는 -25이므로 그 합은
$(-9)+(-25)=-34$

체크 582

$k\neq -1$인 실수일 때, 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을
$x^2+y^2+2y-6+k(x^2+y^2-6x-2ay+3)=0$ ...... ㉠
이라 하자. 이 원이 원점을 지나므로
$-6+3k=0\qquad\therefore\ k=2$
$k=2$를 ㉠에 대입하면
$x^2+y^2+2y-6+2(x^2+y^2-6x-2ay+3)=0$
$x^2+y^2-4x+\dfrac{2(1-2a)}{3}y=0$

$\therefore\ (x-2)^2+\left(y+\frac{1-2a}{3}\right)^2=\frac{4a^2-4a+37}{9}$

이 원의 넓이가 4π이므로

$\frac{4a^2-4a+37}{9}=4$, $4a^2-4a+1=0$

$(2a-1)^2=0$ $\quad\therefore\ a=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

체크 583

두 원의 교점을 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 것은 두 원의 공통현을 지름으로 하는 원이다.

두 원 $x^2+y^2-4=0$, $x^2+y^2-4x-4y+4=0$의 공통현의 방정식은

$x^2+y^2-4-(x^2+y^2-4x-4y+4)=0$

$\therefore\ y=-x+2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 $x^2+y^2-4=0$에 대입하면

$x^2+(-x+2)^2-4=0$

$2x^2-4x=0$, $x(x-2)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2$

$x=0$일 때 ㉠에서 $y=2$

$x=2$일 때 ㉠에서 $y=0$

즉, 두 원의 두 교점의 좌표는 $(0,\ 2)$, $(2,\ 0)$이므로 구하는 원은 이 두 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다.

두 점 $(0,\ 2)$, $(2,\ 0)$을 연결한 선분의 중점이 구하는 원의 중심이므로 그 좌표는

$\left(\frac{0+2}{2},\ \frac{2+0}{2}\right)$ $\quad\therefore\ (1,\ 1)$

따라서 $a=1$, $b=1$이므로 $a+b=2$ 답 2

연습 문제 20

584

구하는 원의 중심은 선분 AB의 중점이므로

$a=\frac{(-2)+2}{2}=0$, $b=\frac{(-4)+(-1)}{2}=-\frac{5}{2}$

또한 원의 반지름의 길이는 지름 AB의 길이의 $\frac{1}{2}$이므로

$r=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{\{2-(-2)\}^2+\{(-1)-(-4)\}^2}=\frac{5}{2}$

$\therefore\ a+b+r=0+\left(-\frac{5}{2}\right)+\frac{5}{2}=0$ 답 0

585

주어진 방정식이 원을 나타내려면 방정식을

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 꼴로 나타낼 때 $r^2>0$이어야 한다.

① $x^2+y^2-2x+6y+1=0$에서

$(x-1)^2+(y+3)^2=9$

즉, 중심이 점 $(1,\ -3)$이고 반지름의 길이가 3인 원을 나타낸다.

② $x^2+y^2+4x+4y+1=0$에서

$(x+2)^2+(y+2)^2=7$

즉, 중심이 점 $(-2,\ -2)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{7}$인 원을 나타낸다.

③ $x^2+y^2-4x+4y+9=0$에서

$(x-2)^2+(y+2)^2=-1$

이므로 이 방정식은 원을 나타내지 않는다.

④ $x^2+y^2+6x+2y+9=0$에서

$(x+3)^2+(y+1)^2=1$

즉, 중심이 점 $(-3,\ -1)$이고 반지름의 길이가 1인 원을 나타낸다.

⑤ $x^2+y^2-6x+2y+5=0$에서

$(x-3)^2+(y+1)^2=5$

즉, 중심이 점 $(3,\ -1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원을 나타낸다.

따라서 원을 나타내지 않는 것은 ③이다. 답 ③

586

$x^2+y^2+axy+4x-6y+b=0$이 원의 방정식이므로 xy항이 존재하지 않아야 한다.

$\therefore\ a=0$

즉, $x^2+y^2+4x-6y+b=0$에서

$(x+2)^2+(y-3)^2=13-b$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로

$13-b=2^2$에서 $b=9$ $\quad\therefore\ a+b=9$ 답 9

587

원 $x^2+y^2+2kx-2ky+8k-9=0$에서

$(x+k)^2+(y-k)^2=2k^2-8k+9$

원의 반지름의 길이가 최소일 때 원의 넓이가 최소이므로

$2k^2-8k+9$의 값이 최소일 때 원의 넓이가 최소가 된다.

이때 $2k^2-8k+9=2(k-2)^2+1$이므로

$k=2$일 때 $2k^2-8k+9$의 최솟값은 1이다.

따라서 주어진 원의 반지름의 길이의 최솟값이 1이므로 넓이의 최솟값은 π이다. 답 π

588

원이 두 직선에 의하여 4등분되려면 두 직선은 모두 원의 중심을 지나고 서로 수직이어야 한다.

원 $x^2+y^2-4x+2y=0$에서

$(x-2)^2+(y+1)^2=5$

즉, 주어진 원의 중심은 점 $(2,\ -1)$이다.

직선 $y=ax$가 점 $(2,\ -1)$을 지나므로

$-1=2a \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$

직선 $y=ax$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x$와 직선 $y=bx+c$가 수직이므로

$-\frac{1}{2}\times b=-1 \qquad \therefore b=2$

직선 $y=bx+c$, 즉 $y=2x+c$가 점 $(2,\ -1)$을 지나므로

$-1=2\times 2+c \qquad \therefore c=-5$

$\therefore abc=-\frac{1}{2}\times 2\times(-5)=5$ 　답 5

589

중심이 점 $(2,\ k)$이고 x축에 접하는 원의 반지름의 길이는 $|k|$이므로 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-k)^2=k^2$

이 원이 점 $(3,\ 3)$을 지나므로

$1+(3-k)^2=k^2,\ 10-6k=0$

$\therefore k=\frac{5}{3}$ 　답 $\frac{5}{3}$

590

중심이 직선 $y=x$ 위에 있으므로 주어진 원의 방정식에서

$a=b$

즉, 구하는 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y-a)^2=c^2$

원의 중심을 C라 하면 $\mathrm{C}(a,\ a)$이고 원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{CB}}$이므로 $\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{CB}}^2$, 즉

$(4-a)^2+(-1-a)^2=(7-a)^2+a^2$

$2a^2-6a+17=2a^2-14a+49,\ 8a=32 \qquad \therefore a=4,\ b=4$

따라서 원의 중심은 $\mathrm{C}(4,\ 4)$이고 반지름의 길이는

$c=\overline{\mathrm{CA}}=|4-(-1)|=5$

$\therefore a+b+c=4+4+5=13$ 　답 13

591

$\angle\mathrm{OAP}=90°$이므로 $\overline{\mathrm{OP}}$는 주어진 원의 지름이고 원의 중심을 지난다.

원 $x^2+y^2-6x-8y=0$에서

$(x-3)^2+(y-4)^2=25$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(3,\ 4)$이므로 직선 OP의 기울기는 $\frac{4}{3}$이다. 　답 $\frac{4}{3}$

592

원 $x^2+y^2=1$ 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면

$a^2+b^2=1$ …… ㉠

이때 선분 AP를 $1:2$로 내분하는 점 Q의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$x=\frac{1\times a+2\times 2}{1+2}=\frac{a+4}{3},\ y=\frac{1\times b+2\times 5}{1+2}=\frac{b+10}{3}$

$\therefore a=3x-4,\ b=3y-10$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(3x-4)^2+(3y-10)^2=1$

$\therefore \left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{10}{3}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2$

따라서 점 Q가 나타내는 도형은 중심이 $\left(\frac{4}{3},\ \frac{10}{3}\right)$이고 반지름의 길이가 $\frac{1}{3}$인 원이므로 그 넓이는 $\frac{\pi}{9}$이다. 　답 $\frac{\pi}{9}$

593

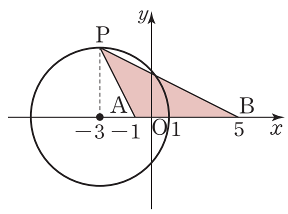
$\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=1:2$에서 $2\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$이므로

$4\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$, 즉

$4\{(x+1)^2+y^2\}=(x-5)^2+y^2$

$x^2+y^2+6x-7=0 \qquad \therefore (x+3)^2+y^2=16$ …… ㉠

오른쪽 그림과 같이 원 ㉠ 위의 점 P에 대하여 선분 AB를 삼각형 PAB의 밑변으로 정하면 높이가 원의 반지름의 길이와 같을 때 그 넓이는 최대가 된다.



따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times 6\times 4=12$ 　답 12

[다른 풀이]

점 P의 자취는 아폴로니오스의 원을 이용하여 구할 수도 있다. 즉, 두 점 A, B로부터의 거리의 비가 $1:2$로 일정한 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 C, 외분하는 점 D를 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다.

이때 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times 5+2\times(-1)}{1+2},\ \frac{1\times 0+2\times 0}{1+2}\right) \qquad \therefore \mathrm{C}(1,\ 0)$

선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times5-2\times(-1)}{1-2}, \frac{1\times0-2\times0}{1-2}\right)$ $\quad\therefore$ D$(-7, 0)$

또한 선분 CD의 중점을 E라 하면 점 E의 좌표는

$\left(\frac{1+(-7)}{2}, 0\right)$ $\quad\therefore$ E$(-3, 0)$

따라서 점 P가 그리는 도형은 중심이 E$(-3, 0)$이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{EC}}=|1-(-3)|=4$인 원이다.

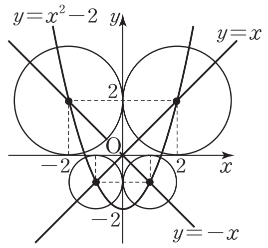
594

x축, y축에 동시에 접하는 원의 중심은 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-x$ 위에 있다. 즉, 구하는 원의 중심은 곡선 $y=x^2-2$와 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-x$의 교점이다.

(i) 중심이 곡선 $y=x^2-2$와 직선 $y=x$의 교점일 때,
교점의 x좌표는 $x^2-2=x$의 실근이므로
$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$
즉, 원의 중심의 좌표는 $(-1, -1)$ 또는 $(2, 2)$이다.

(ii) 중심이 곡선 $y=x^2-2$와 직선 $y=-x$의 교점일 때,
교점의 x좌표는 $x^2-2=-x$의 실근이므로
$x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$
즉, 원의 중심의 좌표는 $(-2, 2)$ 또는 $(1, -1)$이다.

(i), (ii)에서 구하는 원은



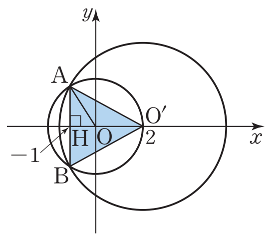
$(x+1)^2+(y+1)^2=1$,
$(x-2)^2+(y-2)^2=4$,
$(x+2)^2+(y-2)^2=4$,
$(x-1)^2+(y+1)^2=1$
의 4개이고 그 넓이는 각각
4π, π, 4π, π이다.
이때 넓이의 합은 $4\pi+\pi+4\pi+\pi=10\pi$
따라서 $m=4$, $n=10$이므로
$m+n=4+10=14$ 답 14

595

원 $(x+4)^2+(y-1)^2=7$에서
$x^2+y^2+8x-2y+10=0$
원 $(x-2)^2+(y-3)^2=15$에서
$x^2+y^2-4x-6y-2=0$
즉, 주어진 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$x^2+y^2+8x-2y+10-(x^2+y^2-4x-6y-2)=0$
$12x+4y+12=0$ $\quad\therefore y=-3x-3$
직선 $y=-3x-3$과 평행하고 점 $(-1, 8)$을 지나는 직선의 방정식은
$y-8=-3\{x-(-1)\}$ $\quad\therefore y=-3x+5$
따라서 직선 $y=-3x+5$의 y절편은 5이다. 답 5

596

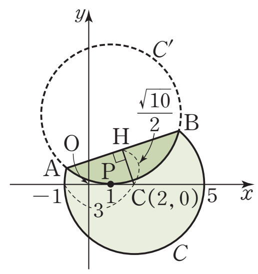
원 $(x-2)^2+y^2=12$에서 $x^2+y^2-4x-8=0$
이때 두 원 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2-4x-8=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$x^2+y^2-4-(x^2+y^2-4x-8)=0$
$\therefore x=-1$
오른쪽 그림과 같이 점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 H$(-1, 0)$



직각삼각형 OAH에서
$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OH}}^2}$
$=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$
따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}=2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{O'H}}=3$이므로
(삼각형 O′AB의 넓이)$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times3=3\sqrt{3}$ 답 $3\sqrt{3}$

597

원 C : $(x-2)^2+y^2=9$가 x축과 만나는 점의 x좌표는
$(x-2)^2=9$, $x-2=\pm3$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=5$
즉, 원 C는 x축과 두 점 $(-1, 0)$, $(5, 0)$에서 만난다.
이때 점 P는 x축 위의 원 C의 지름을 1 : 2로 내분하는 점이므로 P$(1, 0)$
원 C의 반지름의 길이가 3이므로 호 APB는 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 3이고 점 P$(1, 0)$에서 x축에 접하는 원 C'의 일부분이다. 원 C'의 중심을 C′이라 하면 C′$(1, 3)$이므로 원의 방정식은



C' : $(x-1)^2+(y-3)^2=9$
$\therefore C'$: $x^2+y^2-2x-6y+1=0$
또한 원 C : $(x-2)^2+y^2=9$에서 C : $x^2+y^2-4x-5=0$
이때 직선 AB는 두 원 C, C'의 두 교점 A, B를 지나는 직선이므로 그 방정식은
$x^2+y^2-4x-5-(x^2+y^2-2x-6y+1)=0$
$\therefore x-3y+3=0$
한편, 원 C의 중심을 C$(2, 0)$이라 하고 점 C에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{\mathrm{CH}}=\frac{|2+3|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{5}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$
따라서 직각삼각형 ACH에서

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AC}}^2-\overline{\mathrm{CH}}^2}=\sqrt{9-\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{26}}{2}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{26}$ 답 $\sqrt{26}$

598

$k\neq-1$인 실수일 때, 주어진 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2+3x-y-4+k(x^2+y^2-6x+2y-4)=0$

이라 하면

$(1+k)x^2+(1+k)y^2+3(1-2k)x$

$-(1-2k)y-4(k+1)=0$ …… ㉠

이때 ㉠의 중심이 점 $(0,\ 0)$이므로 x항과 y항이 존재하지 않아야 한다.

즉, $1-2k=0$에서 $k=\frac{1}{2}$이므로 ㉠에 대입하여 정리하면

$\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}y^2-6=0\qquad \therefore\ x^2+y^2=4$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 2이다. 답 2

599

$k\neq-1$인 실수일 때, 주어진 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2+6x-m+k(x^2+y^2-2x-4y)=0$ …… ㉠

이라 하자.

이 원이 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$4-m+k(4-8)=0$

$\therefore\ m+4k=4$ …… ㉡

또한 ㉠이 점 $(4,\ 0)$을 지나므로

$16+24-m+k(16-8)=0$

$\therefore\ m-8k=40$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $m=16$, $k=-3$

이를 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2+6x-16-3(x^2+y^2-2x-4y)=0$

$\therefore\ x^2+y^2-6x-6y+8=0$

따라서 $a=-6$, $b=-6$, $c=8$이므로

$a-b+c=(-6)-(-6)+8=8$ 답 8

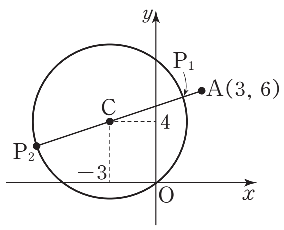
600

원 $x^2+y^2+6x-8y=0$에서

$(x+3)^2+(y-4)^2=25$

한편, $\sqrt{(a-3)^2+(b-6)^2}$ …… ㉠

은 두 점 $(a,\ b)$, $(3,\ 6)$ 사이의 거리를 나타내고 점 $(a,\ b)$는 원 위의 점이다.



오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C라 하고 직선 AC가 원과 만나는 두 점 중 점 A에 가까운 점을 P_1, 나머지 한 점을 P_2라 하면 ㉠의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AP}_1}$, 최댓값은 $\overline{\mathrm{AP}_2}$가 된다.

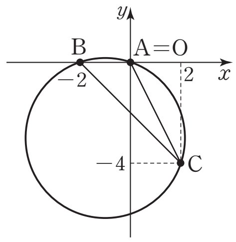
이때 $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\{3-(-3)\}^2+(6-4)^2}=2\sqrt{10}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}_1}=\overline{\mathrm{AC}}-\overline{\mathrm{CP}_1}=2\sqrt{10}-5$, $\overline{\mathrm{AP}_2}=\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{CP}_2}=2\sqrt{10}+5$

따라서 ㉠의 최댓값과 최솟값의 합은

$\overline{\mathrm{AP}_1}+\overline{\mathrm{AP}_2}=4\sqrt{10}$ 답 $4\sqrt{10}$

601



A공장의 위치를 원점, 동서 방향을 x축, 남북 방향을 y축으로 하는 좌표평면에 세 공장 A, B, C의 위치를 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$\mathrm{A}(0,\ 0)$, $\mathrm{B}(-2,\ 0)$, $\mathrm{C}(2,\ -4)$

이때 물류창고의 위치, 즉 세 점 A, B, C로부터의 거리가 같은 지점은 삼각형 ABC의 외접원의 중심이다.

이 원의 방정식을

$x^2+y^2+ax+by+c=0$ …… ㉠

이라 하면 원 ㉠은 점 $\mathrm{A}(0,\ 0)$을 지나므로 $c=0$

또한 원 ㉠은 점 $\mathrm{B}(-2,\ 0)$을 지나고 $c=0$이므로

$4-2a=0\qquad \therefore\ a=2$

원 ㉠은 점 $\mathrm{C}(2,\ -4)$를 지나고 $a=2$, $c=0$이므로

$4+16+4-4b=0\qquad \therefore\ b=6$

즉, 삼각형 ABC의 외접원의 방정식은

$x^2+y^2+2x+6y=0\qquad \therefore\ (x+1)^2+(y+3)^2=10$

따라서 세 공장 A, B, C로부터 물류창고까지의 거리는 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이와 같으므로 $\sqrt{10}$ km이다.

답 $\sqrt{10}$ km

38 원과 직선의 위치 관계

체크 **602**

중심의 좌표가 $(3,\ -1)$이고 반지름의 길이가 3인 원의 방정식은 $(x-3)^2+(y+1)^2=9$

이 원과 직선 $y=mx-2$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

이차방정식 $(x-3)^2+(mx-1)^2=9$, 즉

$(1+m^2)x^2-2(m+3)x+1=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(m+3)\}^2-(1+m^2)>0$

$6m+8>0 \qquad \therefore m>-\frac{4}{3}$ 답 $m>-\frac{4}{3}$

[다른 풀이]

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이보다 작아야 한다.

주어진 원의 중심 $(3,\ -1)$과 직선 $y=mx-2$, 즉 $mx-y-2=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 3보다 작아야 하므로

$\frac{|3m-(-1)-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}<3$

$|3m-1|<3\sqrt{m^2+1}$의 양변을 제곱하면

$(3m-1)^2<9(m^2+1)$

$-6m+1<9,\ 6m>-8 \qquad \therefore m>-\frac{4}{3}$

체크 603

원 $x^2+y^2-2x-4y+4=0$에서

$(x-1)^2+(y-2)^2=1$

즉, 중심이 점 $(1,\ 2)$이고 반지름의 길이가 1인 원이다.

원과 직선이 만나므로 원의 중심 $(1,\ 2)$와 직선 $y=mx+m+1$, 즉 $mx-y+m+1=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1보다 작거나 같아야 한다.

즉, $\frac{|m-2+m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}\le 1$

$\frac{|2m-1|}{\sqrt{m^2+1}}\le 1,\ |2m-1|\le\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면 $3m^2-4m\le 0$

$m(3m-4)\le 0 \qquad \therefore 0\le m\le\frac{4}{3}$

따라서 정수 m의 값은 0, 1로 그 개수는 2이다. 답 2

체크 604

원의 넓이가 13π이므로 반지름의 길이는 $\sqrt{13}$이다.

원과 직선이 접하므로 원의 중심 $(-4,\ 2)$와 직선 $2x+3y+k=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{13}$과 같아야 한다.

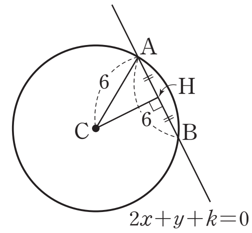
즉, $\frac{|-8+6+k|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\sqrt{13}$이므로

$\frac{|k-2|}{\sqrt{13}}=\sqrt{13},\ |k-2|=13,\ k-2=\pm 13$

$\therefore k=-11$ 또는 $k=15$ 답 $-11,\ 15$

체크 605

오른쪽 그림과 같이 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하고 원의 중심 $\mathrm{C}(-2,\ 1)$에서 현 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.



선분 CH는 현 AB를 수직이등분하므로

$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\times 6=3$

직각삼각형 CHA에서 선분 CA는 원의 반지름이므로

$\overline{\mathrm{CA}}=6$

$\therefore \overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CA}}^2-\overline{\mathrm{AH}}^2}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$

한편, 원의 중심 $\mathrm{C}(-2,\ 1)$과 직선 $2x+y+k=0$ 사이의 거리가 $\overline{\mathrm{CH}}$이므로

$\frac{|-4+1+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=3\sqrt{3},\ \frac{|k-3|}{\sqrt{5}}=3\sqrt{3}$

$|k-3|=3\sqrt{15},\ k-3=\pm 3\sqrt{15}$

$\therefore k=3-3\sqrt{15}$ 또는 $k=3+3\sqrt{15}$

따라서 구하는 모든 실수 k의 값의 합은

$(3-3\sqrt{15})+(3+3\sqrt{15})=6$ 답 6

체크 606

원 $x^2+y^2-4x+4y-8=0$에서

$(x-2)^2+(y+2)^2=16$

즉, 중심은 점 $(2,\ -2)$이고, 반지름의 길이는 4이다.

원의 중심 $(2,\ -2)$와 직선 $3x-4y+16=0$ 사이의 거리는

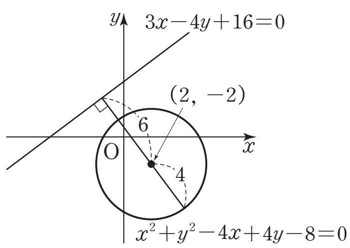
$\frac{|6+8+16|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=6$

이때 원의 반지름의 길이가 4이므로 원 위의 점 P와 직선 $3x-4y+16=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$2\le d\le 10$

따라서 정수 d는 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10이다.

그런데 거리가 2, 10인 점 P는 각각 1개, 거리가 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9인 점 P는 2개씩 있으므로 구하는 점 P의 개수는 $1\times 2+2\times 7=16$이다.



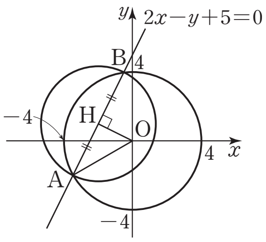
답 16

체크 607

주어진 원과 직선의 교점을 A, B라 하면 두 점 A, B를 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 것은 선분 AB를 지름으로 하는

원이다.

오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O에서 직선 $2x-y+5=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{OH}=\dfrac{|5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

직각삼각형 OHA에서

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OH}^2}$

$=\sqrt{4^2-(\sqrt{5})^2}$

$=\sqrt{11}$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{11}$이므로 그 넓이는

$\pi\times(\sqrt{11})^2=11\pi$ 답 11π

39 원의 접선의 방정식

체크 608

x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60°인 직선의 기울기를 m이라 하면

$m=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

원 $x^2+y^2=r^2$에서 $r>0$이라 하면 원 C의 반지름의 길이는 r이므로 원 C에 접하는 접선의 방정식은

$y=\sqrt{3}x\pm r\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}$ $\quad\therefore y=\sqrt{3}x\pm 2r$

이 직선이 점 A(4, 0)을 지나므로

$0=4\sqrt{3}\pm 2r$ $\quad\therefore r=2\sqrt{3}$ ($\because r>0$)

따라서 구하는 원 C의 넓이는

$\pi\times(2\sqrt{3})^2=12\pi$ 답 12π

체크 609

원 $x^2+y^2-4x-2y=0$에서

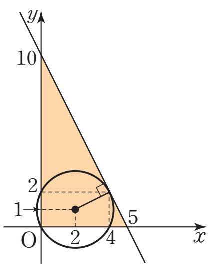
$(x-2)^2+(y-1)^2=5$

즉, 중심이 (2, 1)이고 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$인 원이다.

원의 중심 (2, 1)과 접점 (4, 2)를 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{2-1}{4-2}=\dfrac{1}{2}$이므로 접선의 기울기는 -2이다.

따라서 기울기가 -2이고 점 (4, 2)를 지나는 접선의 방정식은



$y-2=-2(x-4)$

$\therefore y=-2x+10$

이 직선의 x절편과 y절편은 각각 5, 10이므로 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times5\times10=25$ 답 25

체크 610

접선의 기울기를 m이라 하면 접선은 점 (3, 1)을 지나므로 방정식은

$y-1=m(x-3)$ $\quad\therefore mx-y-3m+1=0$

이때 원의 중심 $(2, -4)$에서 접선 $mx-y-3m+1=0$에 이르는 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{3}$과 같으므로

$\dfrac{|2m+4-3m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{3}$

$|-m+5|=\sqrt{3m^2+3}$의 양변을 제곱하면

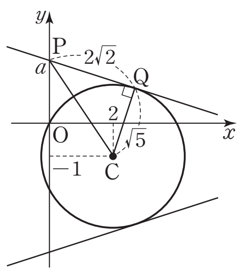
$(m-5)^2=3m^2+3$ $\quad\therefore m^2+5m-11=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 m_1, m_2는 이차방정식 ㉠의 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$m_1+m_2=-5$ 답 -5

체크 611

점 P의 좌표를 $(0, a)$, 원의 중심을 C(2, −1)이라 하면



$\overline{CP}=\sqrt{(-2)^2+(a+1)^2}$

$=\sqrt{a^2+2a+5}$

이때 삼각형 CQP가 직각삼각형이므로

$\overline{CP}^2=\overline{CQ}^2+\overline{PQ}^2$

$a^2+2a+5=(\sqrt{5})^2+(2\sqrt{2})^2$

$a^2+2a-8=0$, $(a+4)(a-2)=0$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=2$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $(0, -4)$ 또는 $(0, 2)$이므로 y좌표의 곱은 $(-4)\times2=-8$ 답 -8

연습 문제 21

612

중심의 좌표가 $(-1, 0)$이고 반지름의 길이가 1인 원의 방정식은 $(x+1)^2+y^2=1$이다.

이 원과 직선 $y=mx+2$가 만나므로 이차방정식

$(x+1)^2+(mx+2)^2=1$, 즉

$(1+m^2)x^2+2(2m+1)x+4=0$이 실근을 가져야 한다.

판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(2m+1)^2-4(1+m^2)\geq0$

$4m-3\geq0$ $\quad\therefore m\geq\dfrac{3}{4}$ 답 $m\geq\dfrac{3}{4}$

613

원의 중심 $(2,\ 0)$과 직선 $x+y+k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 3보다 커야 하므로

$\frac{|2+k|}{\sqrt{1^2+1^2}}>3$, $|k+2|>3\sqrt{2}$

$k+2<-3\sqrt{2}$ 또는 $k+2>3\sqrt{2}$

$\therefore\ k<-2-3\sqrt{2}$ 또는 $k>-2+3\sqrt{2}$

따라서 자연수 k의 최솟값은 3이다. ($\because\ 4<3\sqrt{2}<5$) **답** 3

614

원의 중심이 직선 $y=x+1$ 위에 있으므로 그 좌표를 $(a,\ a+1)$이라 하자.

원의 중심 $(a,\ a+1)$과 직선 $x+2y-1=0$ 사이의 거리를 d_1이라 하면

$$d_1=\frac{|a+2(a+1)-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|3a+1|}{\sqrt{5}}$$

또한 원의 중심 $(a,\ a+1)$과 직선 $2x+y+1=0$ 사이의 거리를 d_2라 하면

$$d_2=\frac{|2a+(a+1)+1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|3a+2|}{\sqrt{5}}$$

이때 d_1, d_2는 모두 구하는 원의 반지름의 길이이므로

$d_1=d_2$

즉, $\frac{|3a+1|}{\sqrt{5}}=\frac{|3a+2|}{\sqrt{5}}$에서

$|3a+1|=|3a+2|$, $3a+1=\pm(3a+2)$

(i) $3a+1=3a+2$일 때

$1\neq 2$이므로 a는 존재하지 않는다.

(ii) $3a+1=-3a-2$일 때

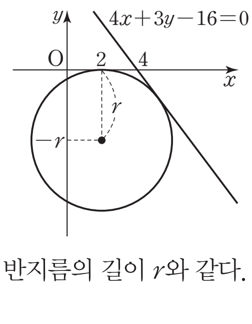
$6a=-3 \qquad \therefore\ a=-\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 구하는 원의 중심의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$이다.

답 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

615

점 $(2,\ 0)$에서 x축에 접하고 중심이 제4사분면 위에 있는 원의 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 $(2,\ -r)$이다.



이때 원과 직선이 접하므로 원의 중심 $(2,\ -r)$와 직선

$4x+3y-16=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 r와 같다.

즉, $\frac{|8-3r-16|}{\sqrt{4^2+3^2}}=r$이므로

$|-3r-8|=5r$, $-3r-8=\pm 5r$

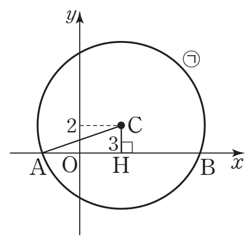
$\therefore\ r=4$ ($\because\ r>0$) **답** 4

616

원 $x^2+y^2-6x-4y-23=0$에서

$(x-3)^2+(y-2)^2=36$ …… ㉠

오른쪽 그림과 같이 원 ㉠과 x축의 두 교점을 A, B라 하고, 이 원의 중심을 C라 하자.



중심 C$(3,\ 2)$에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 CH는 현 AB를 수직이등분한다.

이때 $\overline{\text{CH}}=|(\text{중심의 }y\text{좌표})|=2$이고, 삼각형 CHA는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\text{AH}}=\sqrt{\overline{\text{CA}}^2-\overline{\text{CH}}^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$

$\therefore\ \overline{\text{AB}}=2\overline{\text{AH}}=8\sqrt{2}$ **답** $8\sqrt{2}$

[다른 풀이]

주어진 원이 x축과 두 점에서 만날 때, 이 두 점의 좌표를 각각 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$이라 하면 α, β는 원의 방정식에서 $y=0$일 때의 실수 x의 값이다.

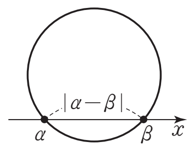
즉, $x^2+y^2-6x-4y-23=0$에 $y=0$을 대입하면

$x^2-6x-23=0$

이 이차방정식의 두 실근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=-23$

$\therefore\ (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=6^2-4\times(-23)=128$

따라서 주어진 원이 x축과 만나서 생기는 현의 길이는 $|\alpha-\beta|$이므로 구하는 현의 길이는



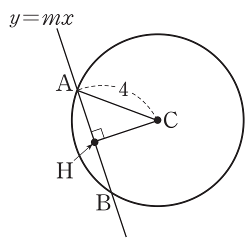
$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{128}=8\sqrt{2}$

617

원 $(x-3)^2+(y-1)^2=16$의 중심을 C라 하면 C$(3,\ 1)$

직선 $y=mx$는 원 내부의 점 O$(0,\ 0)$을 지나는 직선이다.

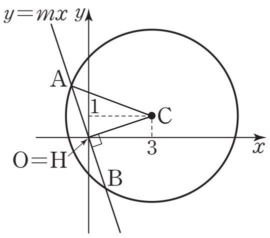
원과 직선 $y=mx$가 두 점 A, B에서 만날 때, 오른쪽 그림과 같이 원의 중심 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\text{AB}}=2\overline{\text{AH}}$



이때 직각삼각형 AHC에서

$\overline{\text{AC}}=4$로 일정하므로 $\overline{\text{CH}}$가 길수록 $\overline{\text{AH}}$는 짧아지고 $\overline{\text{AB}}$도 짧아진다. 즉, 원점 O를 지나는 직선 $y=mx$와 점 C 사이의 거리가 최대가 될 때, 현 AB의 길이는 최소가 된다.

한편, 원점 O를 지나는 직선 $y=mx$와 점 C 사이의 거리는 두 점 O, H가 일치할 때 최대이고 직선 HC, 즉 직선 OC의 기울기는 $\frac{1}{3}$이다.



따라서 직선 OC와 직선 $y=mx$는 서로 수직이므로 구하는 직선의 기울기는 $m=-3$이다.

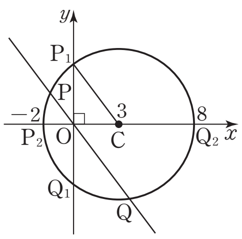
답 -3

618

원 $x^2+y^2-6x-16=0$에서 $(x-3)^2+y^2=25$

즉, 중심이 점 $(3,\ 0)$이고 반지름의 길이는 5이다.

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C, 원점을 지나는 직선과 원이 만나는 두 점을 P, Q라 하고 원이 y축과 만나는 두 점을 P_1, Q_1, 원이 x축과 만나는 두 점을 P_2, Q_2라 하자.



이때 $\overline{PQ}$의 길이가 최소가 되는 경우는 $\overline{PQ}=\overline{P_1Q_1}$일 때이고 $\overline{PQ}$의 길이가 최대가 되는 경우는 $\overline{PQ}=\overline{P_2Q_2}$일 때이다.

(i) $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값

직각삼각형 OCP_1에서 $\overline{CP_1}=5$, $\overline{OC}=3$이므로

$\overline{OP_1}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

즉, $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은 $\overline{P_1Q_1}=2\overline{OP_1}=8$

(ii) $\overline{PQ}$의 길이의 최댓값

$\overline{P_2Q_2}$는 주어진 원의 지름이므로 $\overline{PQ}$의 길이의 최댓값은 $\overline{P_2Q_2}=10$

(i), (ii)에서 주어진 원의 현 중에서 원점을 지나고 그 길이가 자연수인 현의 길이로 가능한 값은 8, 9, 10이다.

그런데 길이가 8인 현은 $\overline{P_1Q_1}$로 하나, 길이가 10인 현은 $\overline{P_2Q_2}$로 하나 존재하고 길이가 9인 현은 2개 존재한다.

따라서 구하는 현의 개수는

$1+2+1=4$

답 4

619

(1) 원 $x^2+y^2=4$에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$y=3x\pm2\sqrt{3^2+1}$ $\quad\therefore y=3x\pm2\sqrt{10}$

(2) 원 $x^2+y^2=13$ 위의 점 $(-2,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$-2x+3y=13$ $\quad\therefore 2x-3y+13=0$

답 (1) $y=3x\pm2\sqrt{10}$ (2) $2x-3y+13=0$

620

원 $x^2+y^2=16$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$ax+by=16$ $\quad\therefore y=-\frac{a}{b}x+\frac{16}{b}$

접선의 기울기가 $-\frac{a}{b}$이므로 $-\frac{a}{b}=\sqrt{3}$

$\therefore a=-\sqrt{3}b$ …… ㉠

또한 점 $(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=16$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=16$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $(-\sqrt{3}b)^2+b^2=16$

$b^2=4$ $\quad\therefore b=-2$ 또는 $b=2$

이를 각각 ㉠에 대입하면

$b=-2$일 때 $a=2\sqrt{3}$, $b=2$일 때 $a=-2\sqrt{3}$

$\therefore ab=-4\sqrt{3}$

답 $-4\sqrt{3}$

621

기울기가 -1인 접선의 방정식을 $y=-x+n$ (n은 실수)이라 하면 원의 중심 $(1,\ 2)$와 접선 $x+y-n=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|1+2-n|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$

$|-n+3|=2$, $-n+3=\pm2$

$\therefore n=1$ 또는 $n=5$

즉, 두 접선 중 y절편이 작은 접선 l의 방정식은

$l : y=-x+1$ …… ㉠

한편, 원 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은 $y-1=m(x-2)$

원의 중심 $(1,\ 2)$와 접선 $mx-y-2m+1=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|m-2-2m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$

$|-m-1|=\sqrt{2m^2+2}$의 양변을 제곱하면

$m^2-2m+1=0$, $(m-1)^2=0$ $\quad\therefore m=1$

$\therefore l' : y=x-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=0$

따라서 두 접선 l, l'의 교점의 x좌표는 1이다.

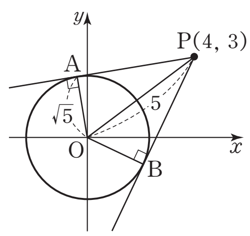
답 1

622

오른쪽 그림에서 원의 접선의 성질에 의하여

$\overline{OA}\perp\overline{AP}$, $\overline{OB}\perp\overline{BP}$

따라서 두 삼각형 AOP, BOP는 서로 합동인 직각삼각형이다.



이때 원점과 점 P(4, 3) 사이의 거리, 즉 선분 OP의 길이는

$\overline{OP}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OA}^2}=\sqrt{5^2-(\sqrt{5})^2}=2\sqrt{5}$

$\therefore \square OAPB=2\triangle OAP$

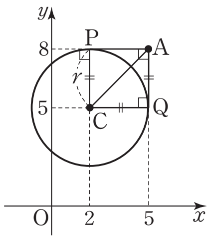
$=2\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{AO}\right)$

$=2\times\left(\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times\sqrt{5}\right)=10$ 답 10

623

원 $(x-2)^2+(y-5)^2=r^2$의 중심을 C라 하면 C(2, 5)

점 A(5, 8)에서 원에 그은 두 접선이 서로 수직이려면 접선과 원의 두 교점 P, Q에 대하여 오른쪽 그림과 같이 사각형 APCQ가 한 변의 길이가 r인 정사각형이 되어야 한다.



이때 $\overline{CA}=\sqrt{(2-5)^2+(5-8)^2}=3\sqrt{2}=r\sqrt{2}$이므로

$r=3$ ($\because r>0$) 답 3

624

접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 원 $x^2+y^2=8$의 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=8$ …… ㉠

접선 ㉠이 점 (0, 4)를 지나므로

$4y_1=8 \qquad \therefore y_1=2$ …… ㉡

또한 점 (x_1, y_1)이 원 $x^2+y^2=8$ 위에 있으므로

${x_1}^2+{y_1}^2=8$ …… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면 $x_1=-2$ 또는 $x_1=2$ …… ㉣

㉡, ㉣을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$-x+y=4$ 또는 $x+y=4$

이때 두 접선의 x절편은 각각 -4, 4이고, y절편은 모두 4이므로 두 직선 l, m과 x축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 8\times 4=16$ 답 16

625

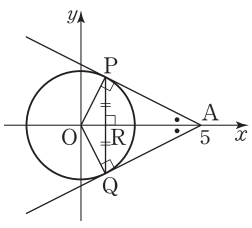
원 $x^2+y^2=5$의 중심이 O(0, 0)이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로

$\overline{OP}=\sqrt{5}$, $\overline{OA}=5$

직각삼각형 OAP에서

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OP}^2}$

$=\sqrt{5^2-(\sqrt{5})^2}=2\sqrt{5}$



이때 $\triangle OAP\equiv\triangle OAQ$이므로 $\overline{PQ}\perp\overline{OA}$

선분 OA와 선분 PQ의 교점을 R라 하면

$\triangle OAP=\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{OP}=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{PR}$

$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times\sqrt{5}=\frac{1}{2}\times 5\times\overline{PR} \qquad \therefore \overline{PR}=2$

$\therefore \overline{PQ}=2\overline{PR}=4$ 답 4

626

원 $x^2+y^2-2x+4y+1=0$에서

$(x-1)^2+(y+2)^2=4$

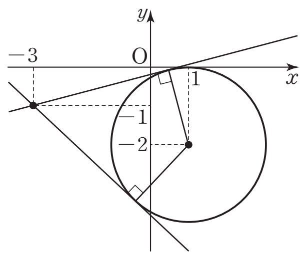
즉, 중심은 $(1, -2)$, 반지름의 길이는 2이다.

$\frac{y+1}{x+3}=k$ (k는 상수)라 하면

$y+1=k(x+3)$ …… ㉠

이때 ㉠은 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로 직선 ㉠은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-3, -1)$을 지난다.

또한 k는 직선 ㉠의 기울기를 의미하므로 오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 원의 접선이 될 때 최댓값과 최솟값을 가진다.



직선 ㉠과 원의 중심 $(1, -2)$ 사이의 거리가 2이고, ㉠에서

$kx-y+3k-1=0$이므로

$\frac{|k+2+3k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=2$

$|4k+1|=2\sqrt{k^2+1}$

양변을 제곱하면

$16k^2+8k+1=4k^2+4$

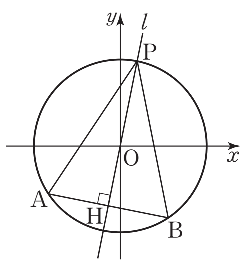
$\therefore 12k^2+8k-3=0$

k의 최댓값 M, 최솟값 m은 k에 대한 이 이차방정식의 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$M+m=-\frac{8}{12}=-\frac{2}{3}$ 답 $-\frac{2}{3}$

627

두 점 $A(-3, -2)$, $B(2, -3)$은 고정된 점이므로 삼각형 ABP의 넓이가 최대가 되려면 나머지 한 꼭짓점 P가 변 AB로부터 최대한 멀리 떨어져 있어야 한다. 즉, 오른쪽 그림과 같이 직선 AB에 수직이고 원점 O를 지나는 직선 l이 제1사분면



에서 원과 만나는 점이 P일 때, 삼각형 ABP의 넓이는 최대이다.
이때 직선 AB의 방정식은

$$y-(-2)=\frac{-3-(-2)}{2-(-3)}\{x-(-3)\}$$

$\therefore x+5y+13=0$

직선 l이 변 AB와 만나는 점을 H라 하면 원점 O와 직선 AB 사이의 거리는

$$\overline{OH}=\frac{|13|}{\sqrt{1^2+5^2}}=\frac{13}{\sqrt{26}}=\frac{\sqrt{26}}{2}$$

원 $x^2+y^2=13$의 반지름의 길이는 $\overline{OP}=\sqrt{13}$이므로

$$\overline{PH}=\overline{OP}+\overline{OH}=\sqrt{13}+\frac{\sqrt{26}}{2}$$

또한 $\overline{AB}=\sqrt{\{2-(-3)\}^2+\{-3-(-2)\}^2}=\sqrt{26}$이므로 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{PH}=\frac{1}{2}\times\sqrt{26}\times\left(\sqrt{13}+\frac{\sqrt{26}}{2}\right)$$
$$=\frac{13}{2}(1+\sqrt{2})$$

따라서 $p=2$, $q=13$이므로

$pq=2\times13=26$ 답 26

[다른 풀이]

직선 AB에 수직이고 원점 O를 지나는 직선 l이 제1사분면에서 원과 만나는 점이 P일 때, 삼각형 ABP의 넓이는 최대이다. 직선 l이 변 AB와 만나는 점을 H라 하면 H는 선분 AB의 중점이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{(-3)+2}{2}, \frac{(-2)+(-3)}{2}\right) \qquad \therefore H\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$$

$$\therefore \overline{OH}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{25}{4}}=\frac{\sqrt{26}}{2}$$

628

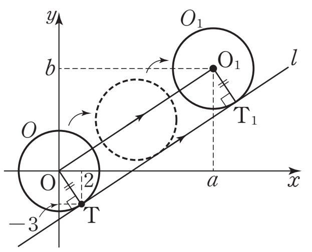
원점을 중심으로 하는 원 O의 방정식을 $x^2+y^2=R^2$ $(R>0)$이라 하면 점 T$(2, -3)$이 원 O 위의 점이므로

$2^2+(-3)^2=R^2$, $R^2=13$ $\qquad \therefore R=\sqrt{13}$ $(\because R>0)$

이때 원 O'은 직선 l을 따라 원 O를 굴려서 생긴 원이므로 두 원 O, O_1의 반지름의 길이는 같다.

$\therefore r=R=\sqrt{13}$

한편, 오른쪽 그림과 같이 직선 l과 원 O_1의 교점을 T_1이라 하면 직선 l은 두 원 O, O_1에 모두 접하므로 사각형 OTT_1O_1은 직사각형이다. 즉, 직선 OO_1과 직선 l은 평행하다.



이때 직선 l은 점 T에서의 원의 접선이므로 그 방정식은

$2x-3y=13 \qquad \therefore l : y=\frac{2}{3}x-\frac{13}{3}$

$$\therefore \frac{b}{a}=(\text{직선 } OO_1\text{의 기울기})$$
$$=(\text{직선 } l\text{의 기울기})=\frac{2}{3}$$

$\therefore r^2+\frac{b}{a}=13+\frac{2}{3}=\frac{41}{3}$ 답 $\frac{41}{3}$

4 도형의 이동

40 평행이동

체크 629

점 $(1,\ -3)$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(2,\ -5)$라 하면

$1+m=2,\ -3+n=-5 \qquad \therefore m=1,\ n=-2$

따라서 점 $(a,\ 6)$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(a+1,\ 6-2) \qquad \therefore (a+1,\ 4)$ ······ ㉠

㉠이 점 $(-2,\ b)$와 일치해야 하므로

$a+1=-2,\ 4=b \qquad \therefore a=-3,\ b=4$

$\therefore b-a=4-(-3)=7$ 답 7

체크 630

점 $(6,\ 5)$가 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$(6+4,\ 5-3)$, 즉 $(10,\ 2)$

이 점이 직선 $y=2x+a$ 위의 점이므로

$2=2\times10+a \qquad \therefore a=-18$ 답 -18

체크 631

점 $(a,\ b)$가 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x-1,\ y+3)$에 의하여 옮겨진 점의 좌표는 $(a-1,\ b+3)$

점 $(a-1,\ b+3)$이 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+3,\ y-4)$에 의하여 옮겨진 점의 좌표는

$(a-1+3,\ b+3-4) \qquad \therefore (a+2,\ b-1)$

점 $(a+2,\ b-1)$이 점 $(4,\ 3)$과 일치하므로

$a+2=4,\ b-1=3$

$\therefore a=2,\ b=4 \qquad \therefore a+b=2+4=6$ 답 6

체크 632

직선 $2x+3y+k=0$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은 x 대신 $x-2$, y 대신 $y+1$을 대입하면

$2(x-2)+3(y+1)+k=0 \qquad \therefore 2x+3y+k-1=0$

이 직선이 점 $(3,\ -4)$를 지나므로

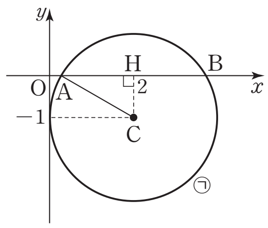
$2\times3+3\times(-4)+k-1=0 \qquad \therefore k=7$ 답 7

체크 633

원 $x^2+y^2=4$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 원의 방정식은 x 대신 $x-2$, y 대신 $y+1$을 대입하면

$(x-2)^2+(y+1)^2=4$ ······ ㉠

즉, 원 ㉠의 중심의 좌표는 $(2,\ -1)$, 반지름의 길이는 2이다.



오른쪽 그림과 같이 원 ㉠이 x축과 만나는 두 점을 각각 A, B, 원 ㉠의 중심을 C라 하고 점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ACH는 직각삼각형이므로

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

따라서 원 ㉠이 x축에 의하여 잘린 현의 길이는

$\overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{3}$ 답 $2\sqrt{3}$

[다른 풀이]

원 ㉠이 x축과 만나는 두 점의 x좌표는 ㉠에 $y=0$을 대입하여 만든 이차방정식의 두 실근이다.

즉, $(x-2)^2+(0+1)^2=4$에서 $(x-2)^2=3$이므로

$x=2\pm\sqrt{3} \qquad \therefore \mathrm{A}(2-\sqrt{3},\ 0),\ \mathrm{B}(2+\sqrt{3},\ 0)$

$\therefore \overline{AB}=2\sqrt{3}$

체크 634

점 $(1,\ 0)$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(2,\ k)$라 하면

$1+m=2,\ 0+n=k \qquad \therefore m=1,\ n=k$

이때 포물선 $y=x^2+2x-1$, 즉 $y=(x+1)^2-2$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 포물선의 방정식은 x 대신 $x-1$, y 대신 $y-k$를 대입하면

$y-k=(x-1+1)^2-2 \qquad \therefore y=x^2+k-2$

이 포물선이 x축과 접하므로 꼭짓점의 y좌표는 0이다.

따라서 $k-2=0$이므로 $k=2$ 답 2

체크 635

원 $C:(x-1)^2+y^2=1$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 원 C'의 방정식은 x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$을 대입하면

$(x-m-1)^2+(y-n)^2=1$

직선 $y=-x+3$이 원 C'의 넓이를 이등분하므로 이 직선은 원 C'의 중심 $(m+1,\ n)$을 지난다.

즉, $n=-(m+1)+3 \qquad \therefore m+n=2$ 답 2

체크 636

포물선 $y=-2(x-1)^2+3$을 x축의 방향으로 -2만큼, y

축의 방향으로 5만큼 평행이동한 포물선의 방정식은 x 대신 $x+2$, y 대신 $y-5$를 대입하면

$y-5=-2(x+2-1)^2+3 \qquad \therefore y=-2(x+1)^2+8$

이 포물선이 직선 $y=-3x+k+4$와 접하므로 이차방정식 $-3x+k+4=-2(x+1)^2+8$, 즉 $2x^2+x+k-2=0$이 중근을 가져야 한다. 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times2\times(k-2)=0$

$1-8k+16=0 \qquad \therefore k=\frac{17}{8}$

답 $\frac{17}{8}$

연습 문제 22

637

점 $(2, 3)$을 점 $(5, -1)$로 옮기는 평행이동은 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하는 것이므로

$2+m=5$, $3+n=-1 \qquad \therefore m=3, n=-4$

점 (a, b)를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 점이 $(1, 4)$이므로

$a+3=1$, $b-4=4 \qquad \therefore a=-2, b=8$

$\therefore a-b=(-2)-8=-10$

답 -10

638

직선 $3x-y-7=0$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$3x-y-7=0$에 x 대신 $x+2$, y 대신 $y-5$를 대입하면

$3(x+2)-(y-5)-7=0 \qquad \therefore 3x-y+4=0$

따라서 이 직선의 y절편은 4이다.

답 4

639

y절편이 3인 직선 l의 방정식을 $y=ax+3$ (a는 실수)이라 하자.

직선 $y=ax+3$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y=ax+3$에 x 대신 $x-1$, y 대신 $y-4$를 대입하면

$y-4=a(x-1)+3 \qquad \therefore y=ax-a+7$

이 직선이 직선 $y=ax+3$과 일치해야 하므로

$-a+7=3 \qquad \therefore a=4$

따라서 직선 l의 방정식은 $y=4x+3$이고 점 $(k, -5)$를 지나므로

$-5=4k+3 \qquad \therefore k=-2$

답 -2

640

직선 $3x-y+2=0$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$3x-y+2=0$에 x 대신 $x+1$, y 대신 $y-1$을 대입하면

$3(x+1)-(y-1)+2=0 \qquad \therefore 3x-y+6=0$

이 직선이 주어진 두 원 $(x-m)^2+(y-n)^2=1$, $(x-2m)^2+(y+4-n)^2=1$의 넓이를 동시에 이등분하므로 직선 $3x-y+6=0$은 두 원의 중심을 모두 지난다.

직선 $3x-y+6=0$이 점 (m, n)을 지나므로

$3m-n+6=0$ …… ㉠

또한 직선 $3x-y+6=0$이 점 $(2m, n-4)$를 지나므로

$3\times2m-(n-4)+6=0 \qquad \therefore 6m-n+10=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=-\frac{4}{3}$, $n=2$

$\therefore m+n=\left(-\frac{4}{3}\right)+2=\frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

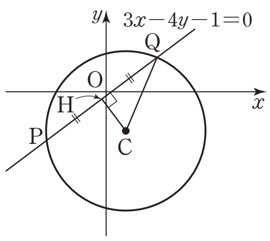
641

직선 $3x-4y+12=0$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$3x-4y+12=0$에 x 대신 $x-3$, y 대신 $y+1$을 대입하면

$3(x-3)-4(y+1)+12=0 \qquad \therefore 3x-4y-1=0$

이 직선이 원 $x^2+y^2-2x+4y-11=0$, 즉 $(x-1)^2+(y+2)^2=16$과 서로 다른 두 점에서 만나므로 원과 직선의 두 교점을 P, Q, 원의 중심을 C라 하고 점 C에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면 다음 그림과 같다.



원의 반지름의 길이는 4이므로 $\overline{CQ}=4$

$C(1, -2)$와 직선 $3x-4y-1=0$ 사이의 거리는

$\overline{CH}=\frac{|3\times1-4\times(-2)-1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$

직각삼각형 CQH에서 $\overline{CQ}^2=\overline{CH}^2+\overline{QH}^2$이므로

$4^2=2^2+\overline{QH}^2$, $\overline{QH}^2=12 \qquad \therefore \overline{QH}=2\sqrt{3}$ ($\because \overline{QH}>0$)

$\therefore \overline{PQ}=2\overline{QH}=4\sqrt{3}$

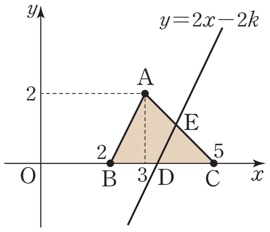
답 $4\sqrt{3}$

642

직선 $y=2x$를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $y=2x$에 x 대신 $x-k$를 대입하면

$y=2(x-k) \qquad \therefore y=2x-2k$

직선 AB의 기울기는 $\frac{2-0}{3-2}=2$이므로 직선 $y=2x-2k$와 선분 AB는 평행하다. 이때 직선 $y=2x-2k$와 삼각형 ABC의 교점을 D, E라 하면 두 삼각형 ABC와 EDC는 서로 닮음이고



넓이의 비가 2 : 1이므로 닮음비는 $\sqrt{2}:1$이다.
즉, 점 D의 좌표를 $(k,\ 0)$이라 하면 $\overline{BC}:\overline{DC}=\sqrt{2}:1$에서
$3:(5-k)=\sqrt{2}:1$
$\sqrt{2}(5-k)=3,\ 5\sqrt{2}-\sqrt{2}k=3 \qquad \therefore k=\frac{10-3\sqrt{2}}{2}$

답 $\frac{10-3\sqrt{2}}{2}$

643
원 $x^2+y^2-4x+10y+5=0$에서
$(x-2)^2+(y+5)^2=24$ …… ㉠
원 ㉠을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은
㉠에서 x 대신 $x-a$, y 대신 $y-b$를 대입하면
$(x-a-2)^2+(y-b+5)^2=24$ …… ㉡
원 ㉡이 원 $x^2+y^2=24$와 일치해야 하므로
$-a-2=0,\ -b+5=0 \qquad \therefore a=-2,\ b=5$
$\therefore a+b=(-2)+5=3$

답 3

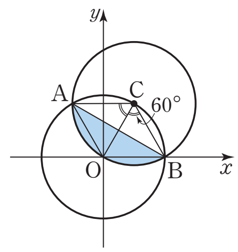
644
주어진 평행이동은 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이므로 원 $x^2+y^2=1$에 x 대신 $x-k$를 대입하면
$C:(x-k)^2+y^2=1$
원 C의 둘레가 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=9$에 의하여 이등분되므로 두 원의 교점을 지나는 직선이 원 C의 중심을 지나야 한다.
두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$x^2+y^2-2kx+k^2-1-(x^2+y^2-2x-4y-4)=0$
$\therefore 2(1-k)x+4y+k^2+3=0$ …… ㉠
직선 ㉠이 원 C의 중심 $(k,\ 0)$을 지나므로
$2(1-k)k+k^2+3=0$
$k^2-2k-3=0,\ (k+1)(k-3)=0$
$\therefore k=-1$ 또는 $k=3$
따라서 양수 k는 3이다.

답 3

645
포물선 $y=2x^2-4x+3$, 즉 $y=2(x-1)^2+1$ …… ㉠
을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 포물선의 방정식은
㉠에 x 대신 $x+2$, y 대신 $y-3$을 대입하면
$y-3=2(x+2-1)^2+1 \qquad \therefore y=2(x+1)^2+4$
이 포물선이 직선 $y=-2x+k$와 접하므로 이차방정식
$2(x+1)^2+4=-2x+k$, 즉 $2x^2+6x+6-k=0$은 중근을 가져야 한다. 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=3^2-2(6-k)=0 \qquad \therefore k=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

646
원 $C_1:x^2+y^2=4$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 $\sqrt{3}$만큼 평행이동한 원 C_2의 방정식은 원 C_1의 방정식에 x 대신 $x-1$, y 대신 $y-\sqrt{3}$을 대입하면
$C_2:(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=4$에서 $x^2+y^2-2x-2\sqrt{3}y=0$
원 C_2의 중심을 C, 두 원의 교점을 각각 A, B라 하면 원 C_2가 원점을 지나고 두 원 C_1, C_2는 합동이므로 두 삼각형 OAC, OBC는 정삼각형이다. 두 원 C_1, C_2의 공통부분의 넓이는 색칠한 도형의 넓이의 2배와 같고 $\overline{AC}\,/\!/\,\overline{OB}$이므로 $\triangle CAB=\triangle OAC$



따라서 구하는 넓이는
{(부채꼴 ACB의 넓이)−(삼각형 CAB의 넓이)}×2
$=\left(\pi\times2^2\times\frac{120^\circ}{360^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2\right)\times2$
$=\frac{8}{3}\pi-2\sqrt{3}$

답 $\frac{8}{3}\pi-2\sqrt{3}$

647
이차함수 $y=-x^2+6x-7$, 즉 $y=-(x-3)^2+2$ …… ㉠
의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프를 갖는 이차함수의 식은
㉠에 x 대신 $x+2$, y 대신 $y+5$를 대입하면
$y+5=-(x+2-3)^2+2 \qquad \therefore y=-(x-1)^2-3$
이 포물선이 직선 $y=mx$와 두 점 P, Q에서 만나므로 이차방정식 $-(x-1)^2-3=mx$, 즉 $x^2+(m-2)x+4=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.
이 두 실근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=2-m$
또한 α, β는 각각 두 점 P, Q의 x좌표이고, 선분 PQ의 중점이 원점이므로
$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{2-m}{2}=0 \qquad \therefore m=2$

답 2

648

원 $x^2+y^2=3$ ...... ㉠을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 원의 방정식은

㉠에 x 대신 $x-2$, y 대신 $y-3$을 대입하면

$(x-2)^2+(y-3)^2=3$ ...... ㉡

원 ㉡에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식을

$y=x+m$ (m은 상수)이라 하면 원의 중심 $(2,\ 3)$과 직선 $x-y+m=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{3}$이므로

$\dfrac{|2-3+m|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{3}$

$|m-1|=\sqrt{6}$, $m-1=\pm\sqrt{6}$ $\quad\therefore m=1\pm\sqrt{6}$

즉, 원 ㉡에 접하고 기울기가 1인 두 직선의 방정식은

$y=x+1+\sqrt{6}$, $y=x+1-\sqrt{6}$

따라서 두 직선의 y절편은 각각 $1+\sqrt{6}$, $1-\sqrt{6}$이므로 그 합은

$(1+\sqrt{6})+(1-\sqrt{6})=2$ 답 2

[다른 풀이]

원 $x^2+y^2=3$을 원 O, 원 O를 주어진 평행이동에 의하여 옮긴 원을 O'이라 하면

$O' : (x-2)^2+(y-3)^2=3$

원 O에 접하고 기울기가 1인 접선의 방정식은

$y=x\pm\sqrt{3}\sqrt{1^2+1}$ $\quad\therefore y=x\pm\sqrt{6}$ ...... ㉠

원 O를 원 O'으로 옮기는 평행이동에 의하여 이 접선도 평행이동되므로 그 방정식은

㉠에 x 대신 $x-2$, y 대신 $y-3$을 대입하면

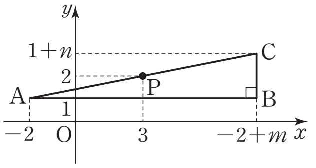
$y-3=(x-2)\pm\sqrt{6}$ $\quad\therefore y=x+1\pm\sqrt{6}$

649

점 $A(-2,\ 1)$을 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 점은 $B(-2+m,\ 1)$

점 $B(-2+m,\ 1)$을 y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점은 $C(-2+m,\ 1+n)$

삼각형 ABC는 다음 그림과 같으므로 $\angle B=90°$인 직각삼각형이다.



세 점 A, B, C를 지나는 원은 삼각형 ABC의 외접원이고 그 중심은 빗변 AC의 중점과 일치한다.

세 점 A, B, C를 지나는 원의 중심을 P라 하면 $P(3,\ 2)$이므로 반지름의 길이는

$\overline{AP}=\sqrt{\{3-(-2)\}^2+(2-1)^2}=\sqrt{26}$

즉, 삼각형 ABC의 외접원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-2)^2=26$ ...... ㉠

이때 점 B는 원 ㉠ 위의 점이므로

$(-2+m-3)^2+(1-2)^2=26$

$(m-5)^2=25$, $m-5=\pm5$ $\quad\therefore m=10$ ($\because m>0$)

점 C도 원 ㉠ 위의 점이므로

$(-2+m-3)^2+(1+n-2)^2=26$

$(m-5)^2+(n-1)^2=26$

$25+(n-1)^2=26$, $(n-1)^2=1$, $n-1=\pm1$

$\therefore n=2$ ($\because n>0$)

$\therefore mn=10\times2=20$ 답 20

[다른 풀이]

삼각형 ABC는 $\angle B$가 직각이므로 변 AC가 원의 지름이고, 변 AC의 중점이 원의 중심이다.

세 점 A, B, C를 지나는 원의 중심 $P(3,\ 2)$는 두 점 $A(-2,\ 1)$, $C(-2+m,\ 1+n)$을 잇는 선분 AC의 중점과 일치하므로

$\dfrac{-2+(-2+m)}{2}=3$, $\dfrac{1+(1+n)}{2}=2$ $\quad\therefore m=10$, $n=2$

650

포물선 $y=x^2-2x$에서 $y=(x-1)^2-1$이므로 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ -1)$이다.

포물선 $y=x^2-12x+30$에서 $y=(x-6)^2-6$이므로 꼭짓점의 좌표는 $(6,\ -6)$이다.

포물선 $y=x^2-2x$를 포물선 $y=x^2-12x+30$으로 옮기는 평행이동은 점 $(1,\ -1)$을 점 $(6,\ -6)$으로 옮기는 평행이동과 같으므로 주어진 평행이동은 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동하는 것이다.

직선 l을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 직선 l'의 방정식은

l의 방정식에 x 대신 $x-5$, y 대신 $y+5$를 대입하면

$(x-5)-2(y+5)=0$ $\quad\therefore x-2y-15=0$

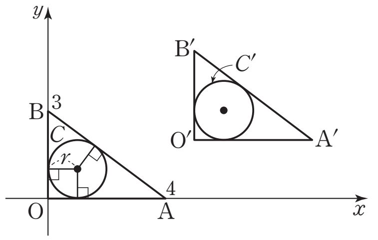
이때 두 직선 $l : x-2y=0$과 $l' : x-2y-15=0$이 평행하므로 두 직선 사이의 거리 d는 직선 l 위의 점 $(0,\ 0)$에서 직선 l'에 이르는 거리로 일정하다.

$d=\dfrac{|-15|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=3\sqrt{5}$ $\quad\therefore d^2=45$ 답 45

651

두 삼각형 OAB, O'A'B'에 내접하는 원을 각각 C, C'이라 하면 삼각형을 옮기는 평행이동에 의하여 원 C는 원 C'으로 옮겨진다.

원 C는 x축, y축에 모두 접하고 제1사분면 위에 중심이 있으므로 원 C의 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 (r, r)이다.



두 점 A(4, 0), B(0, 3)에 대하여 직선 AB의 방정식은

$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ $\therefore$ $3x+4y-12=0$

원 C가 직선 AB에 접하므로 원의 중심 (r, r)와 직선 AB 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 r와 같다.

즉, $\frac{|3r+4r-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=r$에서 $|7r-12|=5r$

$7r-12=5r$ 또는 $7r-12=-5r$

$\therefore$ $r=6$ 또는 $r=1$

그런데 $0<r<3$이므로 $r=1$

따라서 원 C의 방정식은 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ …… ㉠

한편, 점 A(4, 0)을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 점 A′(9, 2)가 된다. 이 평행이동에 의하여 원 C가 평행이동한 원 C'의 방정식은

㉠에 x 대신 $x-5$, y 대신 $y-2$를 대입하면

$(x-5-1)^2+(y-2-1)^2=1$

$(x-6)^2+(y-3)^2=1$

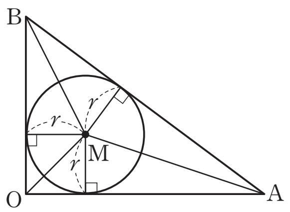
$\therefore$ $x^2+y^2-12x-6y+44=0$

따라서 $a=-12$, $b=-6$, $c=44$이므로

$a+b+c=(-12)+(-6)+44=26$ 답 26

[다른 풀이]

내접원 C의 반지름의 길이 r를 다음과 같은 방법으로도 구할 수 있다.



원의 중심을 M이라 하면 점 M에서 세 변 OA, OB, AB에 내린 수선의 길이는 원의 반지름의 길이 r와 같으므로

$\triangle OAB=\triangle MOA+\triangle MAB+\triangle MBO$

$\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times r+\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times r+\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times r$

$6=\frac{1}{2}r(4+5+3)$ $\therefore$ $r=1$

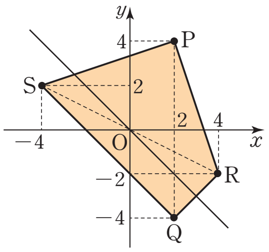
41 대칭이동

체크 652

점 P(2, 4)를 x축에 대하여 대칭이동한 점은 Q(2, −4)

점 Q(2, −4)를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점은 R(4, −2)

점 R(4, −2)를 원점에 대하여 대칭이동한 점은 S(−4, 2)



$\therefore$ (사각형 PSQR의 넓이)

$=$(삼각형 PSQ의 넓이)$+$(삼각형 PQR의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times8\times6+\frac{1}{2}\times8\times2$

$=32$ 답 32

체크 653

점 (−2, 6)을 y축에 대하여 대칭이동한 점은 (2, 6)

점 (2, 6)을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 −4만큼 평행이동한 점은 (5, 2)

점 (5, 2)를 원점에 대하여 대칭이동한 점은 (−5, −2)

점 (−5, −2)가 직선 $kx-7y+1=0$ 위의 점이므로

$k\times(-5)-7\times(-2)+1=0$ $\therefore$ $k=3$ 답 3

체크 654

원 $(x-1)^2+(y+5)^2=9$ …… ㉠를 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

㉠에 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면

$(-x-1)^2+(-y+5)^2=9$

$\therefore$ $(x+1)^2+(y-5)^2=9$ …… ㉡

㉡을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

㉡에 x 대신 $-y$, y 대신 $-x$를 대입하면

$(-y+1)^2+(-x-5)^2=9$

$\therefore$ $(x+5)^2+(y-1)^2=9$

이 원의 중심 (−5, 1)이 직선 $y=-3x-2k$ 위의 점이므로

$1=-3\times(-5)-2k$, $2k=14$ $\therefore$ $k=7$ 답 7

[다른 풀이]

대칭이동에 의하여 원이 옮겨질 때, 중심도 함께 옮겨진다.

원 $(x-1)^2+(y+5)^2=9$의 중심 (1, −5)를 원점에 대하여 대칭이동한 점은 (−1, 5)

점 (−1, 5)를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점은 (−5, 1)

즉, 주어진 대칭이동에 의하여 옮겨진 원의 중심은 (−5, 1)이고 이 점이 직선 $y=-3x-2k$ 위의 점이므로

$1=-3\times(-5)-2k,\ 2k=14 \qquad \therefore k=7$

체크 655

원 $x^2+y^2=4$ …… ㉠를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 원의 방정식은

㉠에 x 대신 $x-1$, y 대신 $y+3$을 대입하면

$(x-1)^2+(y+3)^2=4$ …… ㉡

원 ㉡을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

㉡에 x 대신 $-y$, y 대신 $-x$를 대입하면

$(-y-1)^2+(-x+3)^2=4$

$\therefore (x-3)^2+(y+1)^2=4$ …… ㉢

원 ㉢이 직선 $2x-y+k=0$에 접하므로 원 ㉢의 중심 $(3, -1)$에서 직선 $2x-y+k=0$에 이르는 거리가 원의 반지름의 길이 2와 같다.

즉, $\dfrac{|2\times3-(-1)+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2$에서 $|k+7|=2\sqrt{5}$

$\therefore k=-7\pm2\sqrt{5}$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$(-7-2\sqrt{5})(-7+2\sqrt{5})=(-7)^2-(2\sqrt{5})^2=29$ 답 29

체크 656

(1) 두 점 $(a, 2)$, $(-5, b)$의 중점이 $(2, 3)$이므로

$\dfrac{a-5}{2}=2,\ \dfrac{2+b}{2}=3 \qquad \therefore a=9,\ b=4$

$\therefore ab=9\times4=36$

(2) 포물선 $y=-x^2+2x+5$에서 $y=-(x-1)^2+6$이므로 꼭짓점의 좌표는 $(1, 6)$

포물선 $y=x^2-10x+29$에서 $y=(x-5)^2+4$이므로 꼭짓점의 좌표는 $(5, 4)$

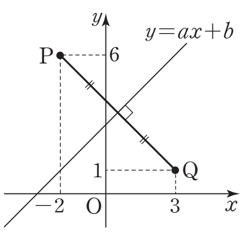
점 $\mathrm{P}(a, b)$라 하면 두 점 $(1, 6)$, $(5, 4)$를 이은 선분의 중점이 P이므로

$\dfrac{1+5}{2}=a,\ \dfrac{6+4}{2}=b \qquad \therefore a=3,\ b=5 \qquad \therefore \mathrm{P}(3, 5)$

답 (1) 36 (2) $(3, 5)$

체크 657

두 점 $\mathrm{P}(-2, 6)$, $\mathrm{Q}(3, 1)$이 직선 $y=ax+b$에 대하여 대칭이므로 다음 조건을 만족시킨다.



(i) 수직 조건

직선 PQ와 직선 $y=ax+b$가 수직이므로

$\dfrac{1-6}{3-(-2)}\times a=-1 \qquad \therefore a=1$

(ii) 중점 조건

$\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점 $\left(\dfrac{(-2)+3}{2}, \dfrac{6+1}{2}\right)$, 즉 점 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$이

직선 $y=x+b$ 위의 점이므로

$\dfrac{7}{2}=\dfrac{1}{2}+b \qquad \therefore b=3$

(i), (ii)에서 $a-b=1-3=-2$ 답 -2

체크 658

원 $x^2+y^2-4x-6y+12=0$에서 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$이므로 중심의 좌표는 $(2, 3)$

원 $x^2+y^2+8x+2y+16=0$에서 $(x+4)^2+(y+1)^2=1$이므로 중심의 좌표는 $(-4, -1)$

두 점 $(2, 3)$, $(-4, -1)$이 직선 $ax+by+1=0$, 즉 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{1}{b}$에 대하여 대칭이므로 다음 조건을 만족시킨다.

(i) 수직 조건

두 원의 중심을 지나는 직선과 직선 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{1}{b}$이 수직이므로

$\dfrac{-1-3}{-4-2}\times\left(-\dfrac{a}{b}\right)=-1 \qquad \therefore 2a=3b$ …… ㉠

(ii) 중점 조건

두 점 $(2, 3)$, $(-4, -1)$을 이은 선분의 중점

$\left(\dfrac{2+(-4)}{2}, \dfrac{3+(-1)}{2}\right)$, 즉 점 $(-1, 1)$이

직선 $ax+by+1=0$ 위의 점이므로

$-a+b+1=0$

$\therefore b=a-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

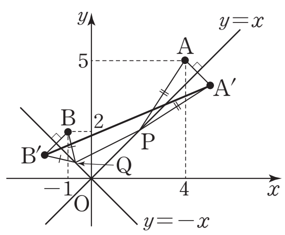
$a=3,\ b=2 \qquad \therefore a+b=5$ 답 5

체크 659

점 $\mathrm{A}(4, 5)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{A'}$이라 하면 $\mathrm{A'}(5, 4)$

점 $\mathrm{B}(-1, 2)$를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{B'}$이라 하면 $\mathrm{B'}(-2, 1)$

오른쪽 그림에서



$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$, $\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{B'Q}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$

$=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB'}}$

$\geq\overline{\mathrm{A'B'}}$

$=\sqrt{(-2-5)^2+(1-4)^2}$

$=\sqrt{58}$ 답 $\sqrt{58}$

체크 **660**

점 B(1, 3)을 직선 $y=2x$에 대하여 대칭이동한 점을 B$'(a, b)$라 하면

(i) 수직 조건

직선 BB$'$과 직선 $y=2x$가 수직이므로

$\frac{b-3}{a-1}\times2=-1 \quad \therefore a+2b=7$ …… ㉠

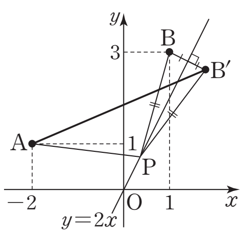
(ii) 중점 조건

$\overline{BB'}$의 중점 $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+3}{2}\right)$이 직선 $y=2x$ 위의 점이므로

$\frac{b+3}{2}=2\times\frac{a+1}{2} \quad \therefore 2a-b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{9}{5}, b=\frac{13}{5} \quad \therefore B'\left(\frac{9}{5}, \frac{13}{5}\right)$



오른쪽 그림에서 $\overline{BP}=\overline{B'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}$

$\geq\overline{AB'}$

$=\sqrt{\left\{\frac{9}{5}-(-2)\right\}^2+\left(\frac{13}{5}-1\right)^2}$

$=\sqrt{17}$

답 $\sqrt{17}$

연습 문제 23

661

점 $(-1, 2)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점은 $(1, 2)$

점 $(1, 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 $(2, 1)$

즉, $a=2$, $b=1$이므로 $2a+b=2\times2+1=5$

답 5

662

점 $(3, -4)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점은 $(3+m, -4+n)$

점 $(3+m, -4+n)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점은 $(-3-m, 4-n)$

점 $(-3-m, 4-n)$이 점 $(3, -4)$와 일치해야 하므로

$-3-m=3, 4-n=-4 \quad \therefore m=-6, n=8$

$\therefore m+n=(-6)+8=2$

답 2

663

점 P(3, 2)를 원점에 대하여 대칭이동한 점은 Q$(-3, -2)$

점 P(3, 2)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 R(2, 3)

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{(-3-3)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{52}$

$\overline{QR}=\sqrt{\{2-(-3)\}^2+\{3-(-2)\}^2}=\sqrt{50}$

$\overline{RP}=\sqrt{(3-2)^2+(2-3)^2}=\sqrt{2}$

즉, $\overline{PQ}^2=\overline{QR}^2+\overline{RP}^2$이므로 삼각형 PQR는 $\overline{PQ}$를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

따라서 삼각형 PQR의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{QR}\times\overline{RP}=\frac{1}{2}\times\sqrt{50}\times\sqrt{2}=5$

답 5

664

포물선 $y=-(x+2)^2-7$의 꼭짓점 $(-2, -7)$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점은 $(7, 2)$

점 $(7, 2)$가 직선 $y=kx-2k-3$ 위의 점이므로

$2=7k-2k-3 \quad \therefore k=1$

답 1

665

직선 l의 방정식을 $ax+by+1=0$ (a, b는 실수)이라 하자.

직선 l을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 직선의 방정식은

직선 l에 x 대신 $x-3$, y 대신 $y+2$를 대입하면

$a(x-3)+b(y+2)+1=0$

$\therefore ax+by-3a+2b+1=0$ …… ㉠

직선 $ax+by-3a+2b+1=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 ㉠에 x 대신 $-x$를 대입하면

$a\times(-x)+by-3a+2b+1=0$

$\therefore ax-by+3a-2b-1=0$

이 직선이 직선 $3x-2y+1=0$과 일치해야 하므로

$\frac{a}{3}=\frac{-b}{-2}=\frac{3a-2b-1}{1}$

$\frac{a}{3}=\frac{-b}{-2}$에서 $2a-3b=0$ …… ㉡

$\frac{a}{3}=\frac{3a-2b-1}{1}$에서 $8a-6b-3=0$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=\frac{3}{4}, b=\frac{1}{2}$

따라서 직선 l의 방정식은

$\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}y+1=0 \quad \therefore 3x+2y+4=0$

답 $3x+2y+4=0$

[다른 풀이]

직선 l을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 직선을 l'이라 하면 직선 l'을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식이 $3x-2y+1=0$이다.

이때 직선 $3x-2y+1=0$을 다시 y축에 대하여 대칭이동하면 직선 l'이 된다.

즉, 직선 l'의 방정식은 $3x-2y+1=0$에 x 대신 $-x$를 대입하면

$-3x-2y+1=0$　　$\therefore l' : 3x+2y-1=0$

또한 직선 l'을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 직선 l이 된다.

따라서 직선 l의 방정식은 직선 l'에 x 대신 $x+3$, y 대신 $y-2$를 대입하면

$3(x+3)+2(y-2)-1=0$　　$\therefore l : 3x+2y+4=0$

666

직선 $x+ky+5=0$ …… ㉠

을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 ㉠에 x 대신 y, y 대신 x를 대입하면

$y+kx+5=0$　　$\therefore kx+y+5=0$ …… ㉡

직선 ㉠을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 직선의 방정식은

㉡에 x 대신 $x+1$, y 대신 $y-6$을 대입하면

$k(x+1)+(y-6)+5=0$　　$\therefore kx+y+k-1=0$

이 직선이 원 $(x+3)^2+(y-5)^2=4$의 넓이를 이등분하므로 원의 중심 $(-3, 5)$를 지난다.

따라서 $-3k+5+k-1=0$이므로 $k=2$이다. 답 2

667

원 $C_1 : x^2+y^2-2x-4y+4=0$에서

$(x-1)^2+(y-2)^2=1$

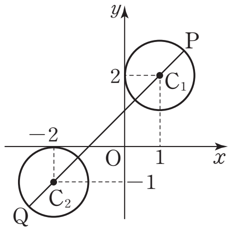
이므로 원 C_1의 중심의 좌표는 $(1, 2)$이다.

점 $(1, 2)$를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점은 $(-2, -1)$

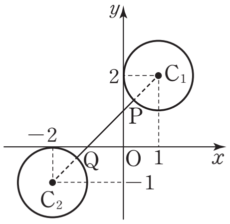
즉, 원 C_1을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 원 C_2의 방정식은

$(x+2)^2+(y+1)^2=1$

두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 C_1, C_2라 하면 직선 C_1C_2가 각 원과 만나는 두 점 P, Q가 [그림 1]과 같을 때 선분 PQ의 길이는 최대이고 [그림 2]와 같을 때 선분 PQ의 길이는 최소이다.



[그림 1]



[그림 2]

이때 $\overline{C_1C_2}=\sqrt{\{1-(-2)\}^2+\{2-(-1)\}^2}=3\sqrt{2}$이므로

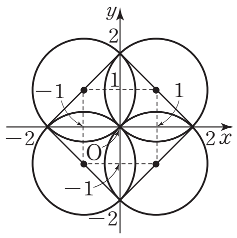
$M=\overline{C_1C_2}+\overline{PC_1}+\overline{QC_2}=3\sqrt{2}+1+1=3\sqrt{2}+2$

$m=\overline{C_1C_2}-\overline{PC_1}-\overline{QC_2}=3\sqrt{2}-1-1=3\sqrt{2}-2$

$\therefore Mm=(3\sqrt{2}+2)(3\sqrt{2}-2)=14$ 답 14

668

원 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$를 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 원을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



네 원으로 둘러싸인 도형의 넓이는 한 변의 길이가 $2\sqrt{2}$인 정사각형의 넓이와 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 반원 4개의 넓이의 합과 같으므로

$(2\sqrt{2})^2+\frac{1}{2}\times\pi\times(\sqrt{2})^2\times4=4\pi+8$ 답 $4\pi+8$

669

점 $(-1, 2)$를 점 P라 하자.

직선 $2x-3y+7=0$ 위의 점 $A(-2, 1)$을 점 P에 대하여 대칭이동한 점을 $A'(p, q)$라 하면 $\overline{AA'}$의 중점이 점 P이므로

$\frac{-2+p}{2}=-1$, $\frac{1+q}{2}=2$　　$\therefore p=0$, $q=3$

$\therefore A'(0, 3)$

이때 점 A'이 직선 $2x+ay+b=0$ 위의 점이므로

$3a+b=0$ …… ㉠

직선 $2x-3y+7=0$ 위의 점 $B(1, 3)$을 점 P에 대하여 대칭이동한 점을 $B'(r, s)$라 하면 $\overline{BB'}$의 중점이 점 P이므로

$\frac{1+r}{2}=-1$, $\frac{3+s}{2}=2$　　$\therefore r=-3$, $s=1$

$\therefore B'(-3, 1)$

점 B'도 직선 $2x+ay+b=0$ 위의 점이므로

$-6+a+b=0$　　$\therefore a+b=6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=9$

$\therefore ab=(-3)\times9=-27$ 답 -27

[다른 풀이]

직선 $2x-3y+7=0$을 점 $(-1, 2)$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 x 대신 $-2-x$, y 대신 $4-y$를 대입하면

$2(-2-x)-3(4-y)+7=0$　　$\therefore 2x-3y+9=0$

670

원 $x^2+y^2-10x-8y+40=0$에서 $(x-5)^2+(y-4)^2=1$

이 원의 중심을 A라 하면 $A(5, 4)$

점 A를 직선 $3x-2y+6=0$에 대하여 대칭이동한 점을 $B(p, q)$라 하면

(i) 수직 조건

직선 AB와 직선 $3x-2y+6=0$이 수직이므로

$\frac{q-4}{p-5}\times\frac{3}{2}=-1 \qquad \therefore 2p+3q=22$ …… ㉠

(ii) 중점 조건

$\overline{AB}$의 중점 $\left(\frac{5+p}{2}, \frac{4+q}{2}\right)$가 직선 $3x-2y+6=0$ 위의 점이므로

$3\times\frac{5+p}{2}-2\times\frac{4+q}{2}+6=0$

$\therefore 3p-2q=-19$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=-1$, $q=8$ $\qquad\therefore B(-1, 8)$

따라서 원 $(x-5)^2+(y-4)^2=1$을 직선 $3x-2y+6=0$에 대하여 대칭이동한 원은 중심이 $B(-1, 8)$이고 반지름의 길이가 1이므로

$(x+1)^2+(y-8)^2=1$

$\therefore x^2+y^2+2x-16y+64=0$

따라서 $a=2$, $b=-16$, $c=64$이므로

$a+b+c=2+(-16)+64=50$ 답 50

671

직선 $3x-2y+4=0$ 위의 점을 $P(x, y)$라 하자.

점 P를 직선 $2x+y-1=0$에 대하여 대칭이동한 점을 $Q(x', y')$이라 하면

(i) 수직 조건

직선 PQ와 직선 $2x+y-1=0$이 수직이므로

$\frac{y'-y}{x'-x}\times(-2)=-1$

$\therefore x-2y=x'-2y'$ …… ㉠

(ii) 중점 조건

$\overline{PQ}$의 중점 $\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$은 직선 $2x+y-1=0$ 위의 점이므로

$2\times\frac{x+x'}{2}+\frac{y+y'}{2}-1=0$

$\therefore 2x+y=-2x'-y'+2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=\frac{-3x'-4y'+4}{5}$, $y=\frac{-4x'+3y'+2}{5}$

점 (x, y)는 직선 $3x-2y+4=0$ 위의 점이므로

$3\times\frac{-3x'-4y'+4}{5}-2\times\frac{-4x'+3y'+2}{5}+4=0$

정리하면 $x'+18y'-28=0$

따라서 점 (x', y')은 직선 $x+18y-28=0$ 위의 점이다.

답 $x+18y-28=0$

672

$f(1-y, x-1)=0$에서 $f(-(y-1), x-1)=0$

즉, 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 다음 순서로 이동하여 방정식 $f(1-y, x-1)=0$이 나타내는 도형을 얻을 수 있다.

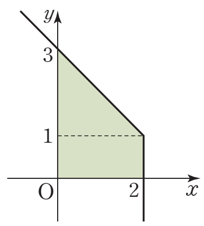
(i) 도형 $f(x, y)=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(y, x)=0$

(ii) 도형 $f(y, x)=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-y, x)=0$

(iii) 도형 $f(-y, x)=0$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$f(-(y-1), x-1)=0$

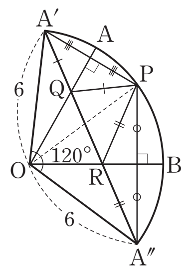
따라서 주어진 도형을 (i), (ii), (iii)의 순서로 옮기면 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $f(1-y, x-1)=0$이 나타내는 도형과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는



$\frac{1}{2}\times(1+3)\times2=4$ 답 4

673

부채꼴 AOP를 $\overline{OA}$에 대하여 대칭이동한 부채꼴 AOA′을 그리면



$\triangle OPQ\equiv\triangle OA'Q$, $\overline{PQ}=\overline{A'Q}$

부채꼴 BOP를 $\overline{OB}$에 대하여 대칭이동한 부채꼴 BOA″을 그리면

$\triangle OPR\equiv\triangle OA''R$, $\overline{RP}=\overline{RA''}$

이때 $\angle AOA'=\angle AOP$,

$\angle BOA''=\angle BOP$이므로

$\angle A'OA''=2\angle AOB=120°$

따라서 삼각형 PQR의 둘레의 길이는

$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}=\overline{A'Q}+\overline{QR}+\overline{RA''}$

$\geq\overline{A'A''}$

$=6\sqrt{3}$

답 $6\sqrt{3}$

674

원 O_1의 방정식은 $(x-4)^2+(y-2)^2=4$

원 O_1을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은 x 대신 y, y 대신 x를 대입하면

$(y-4)^2+(x-2)^2=4 \qquad \therefore (x-2)^2+(y-4)^2=4$

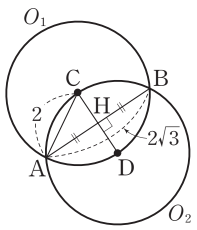
원 $(x-2)^2+(y-4)^2=4$를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원 O_2의 방정식은 y 대신 $y-a$를 대입하면

$(x-2)^2+(y-a-4)^2=4$

원 O_1과 원 O_2의 중심을 각각 C, D라 하면

$\mathrm{C}(4,\ 2)$, $\mathrm{D}(2,\ 4+a)$

이때 선분 AB는 선분 CD에 의하여 수직이등분된다.



선분 AB와 선분 CD가 만나는 점을 H라 하면

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{BH}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}=\sqrt{3}$

원 O_1과 원 O_2의 반지름의 길이가 모두 2이므로

$\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{DH}}=1$

즉, 원 O_2는 원 O_1의 중심을 지나고 $\overline{\mathrm{CD}}=2$이므로

$(4-2)^2+(2-4-a)^2=4$

$(a+2)^2=0 \qquad \therefore a=-2$ 답 -2

675

점 $\mathrm{C}(-8,\ 1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점은

$\mathrm{C'}(-8,\ -1)$

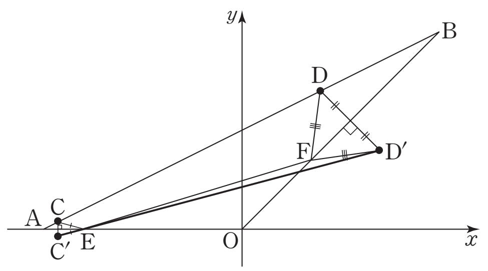
$\overline{\mathrm{OB}}$는 직선 $y=x$의 일부분이므로

점 $\mathrm{D}(4,\ 7)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은

$\mathrm{D'}(7,\ 4)$

즉, 다음 그림과 같이 $\overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{C'E}}$, $\overline{\mathrm{FD}}=\overline{\mathrm{FD'}}$이므로

$\overline{\mathrm{CE}}+\overline{\mathrm{EF}}+\overline{\mathrm{FD}}=\overline{\mathrm{C'E}}+\overline{\mathrm{EF}}+\overline{\mathrm{FD'}}\geq\overline{\mathrm{C'D'}}$



$\overline{\mathrm{CE}}+\overline{\mathrm{EF}}+\overline{\mathrm{FD}}$의 값이 최소일 때에는 두 점 E, F가 직선 C′D′ 위에 있을 때이다.

두 점 $\mathrm{C'}(-8,\ -1)$, $\mathrm{D'}(7,\ 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\frac{4-(-1)}{7-(-8)}(x-7) \qquad \therefore y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$

이때 점 E는 직선 $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$와 x축의 교점이므로 점 E의 x좌표는

$0=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3} \qquad \therefore x=-5$ 답 -5

Memo