2023학년도 논술 모의평가
자연계열 [문제 2] 해설 및 모범답안

[문제 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 극대와 극소의 판정

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서

(i) $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값 $f(a)$를 갖는다.

(ii) $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, 극솟값 $f(a)$를 갖는다.

2. 미분과 적분의 관계

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \quad (\text{단, } a<x<b)$$

3. 치환적분법을 이용한 정적분

미분가능한 함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$를 포함하는 열린구간에서 연속이고, $g(a)=\alpha$와 $g(b)=\beta$에 대하여 함수 $f(x)$가 α와 β를 포함한 구간에서 연속일 때 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt$$

4. 수학적 확률

표본공간 S에서 각각의 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 사건 A가 일어날 확률은 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

[1] 등식 $a+b=1$을 만족시키는 실수 a, b에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) $a \ge 0,\ b \ge 0$일 때, 실수 2^a+2^b의 최댓값과 최솟값을 구하시오. [5점]

(2) 다음 식을 만족시키는 a와 b를 구하시오.(단, $a \ne b$) [5점]

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+a^4}-\sqrt{x+b^4}}{\sqrt{4x+a}-\sqrt{4x+b}}=10$$

[2] $x>0$에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 등식을 만족시킬 때, $f(9)$의 값을 구하시오. [8점]

$$2xf(x)-x=\int_1^x\{f(t)-1\}dt$$

[3] 함수 $f(x)=e^{-x}(\sin x+\cos x)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) $x>0$에서 함수 $f(x)$의 극댓값을 큰 것부터 차례로 $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n, \cdots$이라고 할 때, 자연수 n에 대하여 $\ln\dfrac{b_n}{b_{n+1}}$의 값을 구하시오. [6점]

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{1}{x-\pi}\int_{\pi}^{\frac{x+\pi}{2}} f(2t-\pi)\,dt$의 값을 구하시오. [6점]

[4] 열린구간 $(0,1)$에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킬 때, 물음에 답하시오.

(가) $f(x)=\displaystyle\int\frac{1}{x}\cos(\ln x)\,dx$
(나) $f(e^{-\pi})=1$

(1) 함수 $f(x)$를 구하시오. [4점]

(2) 방정식 $f(x)=0$의 실근을 큰 수부터 차례로 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 합을 구하시오. [6점]

[5] 아래 글을 읽고 다음 물음에 답하시오.

같은 수준의 두 바둑 기사 A와 B가 우승 상금 8백만 원을 놓고 여러 차례 바둑 경기를 치렀고 4번의 경기가 남아있다. 현재 A가 상금을 타기 위해서는 앞으로 2승이 더 필요하고 B는 3승이 더 필요하다.(단, 비기는 경기는 없다.)

(1) 현재 상황에서 A와 B가 우승할 확률을 각각 구하시오. [6점]

(2) 더 이상 바둑 경기를 진행할 수 없게 돼서 현재 상황에서 우승 상금을 A와 B가 나누어야 한다. (1)의 결과를 이용하여 각각 나누어야할 금액을 구하시오. [4점]

■ 출제 의도

[1] (1) 연속함수의 성질을 이해하고 지수함수의 미분을 활용할 수 있는 능력을 평가한다.
(2) 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 무리함수의 극한값을 계산할 수 있는 능력을 평가한다.

[2] 미분과 적분의 관계를 이해하는 능력과 로그함수와 관련된 적분을 계산하는 능력을 평가한다.

[3] (1) 함수의 곱의 미분을 계산하는 능력과 함수의 극대와 극소를 판정하는 추론 능력을 평가한다.
(2) 도함수와 정적분의 정의를 이해하고, 극한값을 계산하는 능력을 평가한다.

[4] (1) 치환적분법을 이용하여 조건식을 만족시키는 함수를 계산하는 능력을 평가한다.
(2) 삼각방정식의 풀이 능력과 등비급수의 합을 계산하는 능력을 평가한다.

[5] (1) 확률의 기본 성질을 이해하는 능력과 여러 가지 경우의 수를 계산하는 능력을 평가한다.
(2) 확률의 뜻을 이해하는 능력과 이를 활용할 수 있는 능력을 평가한다.

■ 문항 해설

함수의 미분과 적분, 함수의 극대와 극소, 적분과 미분과의 관계, 삼각함수, 지수함수, 로그함수, 확률 등의 개념은 다양한 분야에서 유용하게 활용되는 중요한 수학적 개념이다. 이러한 개념들을 정확히 이해하고 기본적인 논리력을 갖추고 있다면, 다음과 같은 수학적이고 논리적인 과정을 통해 각 문항들을 해결할 수 있다.

[1] (1) 지수함수의 미분과 연속함수에 대한 최대·최소 정리를 적용하면 해결할 수 있는 문항이다.
(2) 함수의 극한에 대한 성질과 무리식의 유리화를 활용하여 해결할 수 있는 문항이다.

[2] 미분과 적분의 관계를 이해하고 로그함수와 관련된 적분을 이용하면 해결할 수 있는 문항이다.

[3] (1) 함수의 곱의 미분과 함수의 극대와 극소 판정을 이용하면 해결할 수 있는 문항이다.
(2) 도함수와 정적분의 정의를 써서 극한값을 계산하면 해결할 수 있는 문항이다.

[4] (1) 조건식과 치환적분법을 이용하여 해결할 수 있는 문항이다.
(2) 삼각방정식을 풀어서 무한등비급수의 합을 계산하면 해결할 수 있는 문항이다.

[5] (1) 조건에 맞는 경우의 수와 확률을 계산하면 해결할 수 있는 문항이다.
(2) 확률을 이용하면 해결할 수 있는 문항이다.

■ 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
1-1	$x=\frac{1}{2}$에서 $f(x)$가 극값을 갖는 것을 보였으면	2
	$x=0,\ x=1$에서 함숫값을 구했으면	1
	최댓값 3, 최솟값 $2\sqrt{2}$를 구했으면	2
1-2	$ab=-2$를 구했으면	3
	$a=2, b=-1$ 또는 $a=-1, b=2$를 구했으면	2
2	$f(1)=\frac{1}{2}$을 구했으면	2
	$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$을 구했으면	5
	$f(9)=\frac{1}{6}$을 구했으면	1
3-1	$b_m=e^{-2m\pi}$ $(m=1,2,3,\cdots)$을 구했으면	4
	$\ln\frac{b_n}{b_{n+1}}=2\pi$를 구했으면	2
3-2	극한값을 $\frac{1}{2}\lim_{x\to\pi}\frac{1}{x-\pi}\int_{\pi}^{x}f(s)\,ds$로 나타냈으면	2
	극한값이 $\frac{1}{2}f(\pi)$임을 보였으면	3
	$-\frac{1}{2e^{\pi}}$을 구했으면	1
4-1	$\ln x=t$로 치환하여 $f(x)=\int\cos t\,dt$로 나타냈으면	2
	$f(x)=\sin(\ln x)+1$을 구했으면	2
4-2	$a_n=e^{-\frac{1}{2}\pi}(e^{-2\pi})^{n-1}$을 구했으면	4
	$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{e^{\frac{3\pi}{2}}}{e^{2\pi}-1}$을 구했으면	2
5-1	A가 우승할 확률은 $\frac{11}{16}$을 구했으면	3
	B가 우승할 확률은 $\frac{5}{16}$를 구했으면	3
5-2	A의 상금 $5{,}500{,}000$원을 구했으면	2
	B의 상금 $2{,}500{,}000$원을 구했으면	2

■ 예시 답안

[1] (1) $b=1-a$이므로 $0\le a\le 1$일 때 2^a+2^{1-a}의 최댓값과 최솟값을 구하면 된다.

$f(x)=2^x+2^{1-x}$라 하면, $f'(x)=(2^x-2^{1-x})\ln 2=0$으로부터 $2^x=2^{1-x}$이므로 $x=\frac{1}{2}$이다.

$x=\frac{1}{2}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 극소이다.

$0\le x\le 1$에서 $x=0$ 또는 $x=1$일 때 최댓값 3, $x=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $2\sqrt{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\{(x+a^4)-(x+b^4)\}(\sqrt{4x+a}+\sqrt{4x+b})}{\{(4x+a)-(4x+b)\}(\sqrt{x+a^4}+\sqrt{x+b^4})}=\lim_{x\to\infty}\frac{(a^4-b^4)\left(\sqrt{4+\frac{a}{x}}+\sqrt{4+\frac{b}{x}}\right)}{(a-b)\left(\sqrt{1+\frac{a^4}{x}}+\sqrt{1+\frac{b^4}{x}}\right)}$

$\displaystyle =(a^2+b^2)(a+b)\left(\frac{\sqrt{4}+\sqrt{4}}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}\right)=2\{(a+b)^2-2ab\}=2(1-2ab)=10$

$ab=-2$, $a+b=1$로부터 $a=2, b=-1$ 또는 $a=-1, b=2$

[2] $2xf(x)-x=\displaystyle\int_1^x\{f(t)-1\}dt$ ……①

①의 양변에 $x=1$을 대입하면 $2f(1)-1=0$, 즉 $f(1)=\frac{1}{2}$ ……②

①의 양변을 x에 대하여 미분하면 $2f(x)+2xf'(x)-1=f(x)-1$

즉, $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-\dfrac{1}{2x}$ ……③

$\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|$이므로 ③의 양변을 적분하면 $\ln|f(x)|=-\frac{1}{2}\ln x+C$ ……④

양변에 $x=1$을 대입하면 $\ln f(1)=C$이고 ②로부터 $C=\ln\frac{1}{2}$

④로부터 $\ln|f(x)|=-\frac{1}{2}\ln x+\ln\frac{1}{2}=\ln\frac{1}{2\sqrt{x}}$

②로부터 $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$이고 $f(9)=\dfrac{1}{6}$

[3] (1) $f'(x)=-e^{-x}(\sin x+\cos x)+e^{-x}(\cos x-\sin x)=-2e^{-x}\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=0$이므로 $x=n\pi$ $(n=1,2,3,\cdots)$

$x=2m\pi$ $(m=1,2,3,\cdots)$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=2m\pi$에서 극대이다.

(이계도함수를 이용하여 $x=2m\pi$에서 $f''(x)=2e^{-x}(\sin x-\cos x)<0$이므로 극대임을 보여도 된다.)

함수의 극댓값은 $f(2m\pi)=e^{-2m\pi}(\sin 2m\pi+\cos 2m\pi)=e^{-2m\pi}$이고 $e^{-2m\pi}>e^{-2(m+1)\pi}$ $(m=1,2,3,\cdots)$이므로 $b_m=e^{-2m\pi}$이다.

따라서 $\ln\dfrac{b_n}{b_{n+1}}=\ln\dfrac{e^{-2n\pi}}{e^{-2(n+1)\pi}}=\ln e^{2\pi}=2\pi$

(2) $\displaystyle\int f(x)dx=F(x)+C$ (C는 적분상수)라 하면 $F'(x)=f(x)$

$s=2t-\pi$라 하면, $t=\dfrac{s+\pi}{2}$, $dt=\dfrac{1}{2}ds$, $t=\pi$일 때 $s=\pi$이고 $t=\dfrac{x+\pi}{2}$일 때 $s=x$

따라서 $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{1}{x-\pi}\int_\pi^{\frac{x+\pi}{2}}f(2t-\pi)dt=\lim_{x\to\pi}\frac{1}{x-\pi}\int_\pi^x f(s)\frac{1}{2}ds=\frac{1}{2}\lim_{x\to\pi}\frac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}=\frac{1}{2}F'(\pi)$

$\displaystyle =\frac{1}{2}f(\pi)=\frac{1}{2}e^{-\pi}(\sin\pi+\cos\pi)=-\frac{1}{2e^{\pi}}$

[4](1) 조건 (가)에서 $f(x)=\int \frac{1}{x}\cos(\ln x)dx$ 이고 $\ln x = t$라 하면 $\frac{1}{x}dx = dt$ 이므로

$f(x)=\int \cos t\, dt = \sin t + C = \sin(\ln x) + C$ (C는 적분상수)

조건 (나)에서 $f(e^{-\pi})=1$ 이므로 $\sin(\ln e^{-\pi}) + C = C = 1$

따라서 $f(x)=\sin(\ln x)+1$

(2) 방정식 $f(x)=0$ 에서 $\sin(\ln x) = -1$ ……①

$0 < x < 1$ 이므로 $\ln x < 0$ 이고, 사인함수는 주기가 2π인 주기함수이므로 ①로부터

$\ln x = -\frac{\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, \cdots, -\frac{(4n-3)\pi}{2}, \cdots$

그러므로 $a_1 = e^{-\frac{\pi}{2}}$, $a_2 = e^{-\frac{5\pi}{2}}$, $\cdots$, $a_n = e^{-\frac{(4n-3)\pi}{2}}$, $\cdots$ 이고, $a_n = e^{-\frac{\pi}{2}}(e^{-2\pi})^{n-1}$ (n은 자연수)

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{1-e^{-2\pi}} = \frac{e^{\frac{3\pi}{2}}}{e^{2\pi}-1}$

[5] (1) A가 이기는 경우 ${}_4C_4 + {}_4C_3 + {}_4C_2 = 1+4+6 = 11$(가지)

B가 이기는 경우 ${}_4C_4 + {}_4C_3 = 1+4 = 5$(가지)

따라서 A가 우승할 확률은 $\frac{11}{16}$이고 B가 우승할 확률은 $\frac{5}{16}$

(다른 풀이) A의 승리를 a, B의 승리를 b로 표시하면, 4번의 경기가 치러질 때 우승자가 가려지는 경우는 다음과 같은 16가지의 경우이다.

A가 이기는 경우(11가지)	B가 이기는 경우(5가지)
aaaa aaab aaba abaa baaa aabb abba bbaa abab baba baab	bbbb bbba bbab babb abbb

(2) A가 우승할 확률은 $\frac{11}{16}$이므로 A의 상금은 $8{,}000{,}000 \times \frac{11}{16} = 5{,}500{,}000$(원)

B가 우승할 확률은 $\frac{5}{16}$이므로 B의 상금은 $8{,}000{,}000 \times \frac{5}{16} = 2{,}500{,}000$(원)