2021학년도 논술 모의평가
자연계열 [문제 1] 해설 및 모범답안

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 이은 선분 AB를 $m:n\,(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는
$\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

2. 명제 $p \to q$에 대하여 $\sim q \to \sim p$를 대우라고 한다.

3. 함수 $f: X \to Y$에서 정의역 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여
$x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$
일 때, 함수 f를 일대일함수라고 한다.

4. 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A와 사건 B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이면 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$

5. 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수는 $m \times n$

[1] 두 점 $A(-1, -3)$, $B(5, 3)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 선분 AB를 $m:(3-m)$으로 내분하는 점이 제 1사분면 위에 존재할 때, m값의 범위를 구하시오. [5점]

(2) 원 $(x-2)^2+y^2=1$ 위의 점 C에 대하여 $\overline{AC}^2-\overline{BC}^2$의 값의 범위를 구하고 $\overline{AC}^2-\overline{BC}^2$의 값이 최소가 되는 점 C의 y좌표를 구하시오. [8점]

[2] 다음 등식이 x에 대한 항등식일 때 $a_4+a_6+a_8+a_{10}$의 값을 구하시오. [8점]

$$x^{10}-1=\sum_{k=0}^{10} a_k(x-1)^k, \qquad (\text{단, } a_k\ (0 \le k \le 10)\text{는 상수})$$

[3] 자연수 n에 대하여 집합 A_n이 $A_n=\{k \mid 1 \le k \le n,\ k\text{는 자연수}\}$이다. 다음 조건 p를 만족시키는 함수의 개수를 a_n이라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

p: A_n에서 A_n으로의 함수 f에 대하여 합성함수 $f \circ f$가 집합 A_n에서의 항등함수이다.

(1) $n=1, 2$ 각각에 대하여 조건 p를 만족시키는 함수를 모두 찾고 a_1, a_2를 구하시오. [5점]

(2) 조건 p를 만족시키는 함수 f는 일대일함수임을 증명하시오. [10점]

(3) (2)을 이용하여 a_3, a_4를 구하시오. [6점]

(4) (3)를 이용하여 a_n, a_{n-1}, a_{n-2} 사이의 관계식을 구하시오. (단, $n \ge 3$) [8점]

■ 출제 의도

[1] (1) 내분점을 구하고 미지수가 1개인 연립일차부등식 풀 수 있는 능력을 평가한다.
(2) 판별식을 의미를 활용하여 조건을 만족하는 값의 범위를 찾는 능력을 평가한다.

[2] 항등식의 성질을 이용하여 미정계수를 결정할 수 있는 능력을 평가한다.
[3] (1) 함수의 합성에 대한 명제를 읽고 진리집합을 찾는 능력을 평가한다.
(2) 대우명제를 활용하여 명제를 증명할 수 있는 능력을 평가한다.
(3) 함수 합성을 이해하고 주어진 조건을 만족하는 경우의 수를 찾는 능력을 평가한다.
(4) 합의 법칙과 곱의 법칙을 이용하여 조건을 만족하는 경우의 수를 찾는 능력을 평가한다.

■ 문항 해설

내분점, 일차부등식, 명제 및 일대일대응, 역함수 및 합성함수 등의 개념은 인문학과 자연과학을 포함한 모든 분야에서 유용하게 활용되고 있는 가장 기본적인 수학 개념이다. 이러한 개념들을 이해하고 기본적인 논리력을 활용하여 다음과 같은 기본적인 과정을 통해 해결할 수 있는 간단한 문항이라고 할 수 있다.

[1] (1) 내분점이 정의되기 위한 조건을 활용하면 주어진 값의 범위를 구할 수 있는 문항이다.
(2) 판별식의 의미를 이해하고 활용하면 해결할 수 있는 문항이다.
[2] 미정계수를 모두 결정하지 않고 주어진 항등식의 성질을 활용하면 쉽게 해결할 수 있는 문항이다.
[3] (1) 합성함수의 개념을 이해하면 간단히 해결할 수 있는 문항이다.
(2) 합성함수의 개념과 일대일대응의 개념에 대한 이해를 기반으로 대우명제를 활용하면 쉽게 해결할 수 있는 문항이다.
(3) 합의 법칙과 곱의 법칙을 이용하면 해결할 수 있는 문항이다.
(4) 합의 법칙과 곱의 법칙을 활용하고 사례로부터 규칙성을 도출해내면 해결할 수 있는 문항이다.

■ 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
1-1	내분점의 좌표 $(2m-1, 2m-3)$을 구했으면	3
	m의 범위를 올바로 구했으면	2
1-2	$\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = 12x - 24 + 12y$를 올바로 계산했으면	2
	이차방정식 $2y^2 - 2ky + k^2 - 1 = 0$을 올바로 유도했으면	2
	판별식을 이용하여 $-\sqrt{2} \le k \le \sqrt{2}$을 구했으면	2
	$y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$을 구했으면	2
2	$2^{10} - 1 = \sum_{k=0}^{10} a_k$ 와 $-1 = \sum_{k=0}^{10} (-1)^k a_k$를 구했으면	2
	$\sum_{k=0}^{5} a_{2k} = 2^9 - 1$과 $a_0 = 0$을 구했으면	2
	$a_2 = 45$과 $a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 2^9 - 1 - 45 = 466$을 구했으면	4
3-1	$n = 1$일 때 f를 모두 구하고 $a_1 = 1$을 구했으면	2
	$n = 2$일 때 f를 모두 구하고 $a_2 = 2$을 구했으면	3
3-2	대우명제를 올바로 기술했으면	3
	$f(x_1) = f(x_2)$라고 가정했으면	2
	$f(f(x_1)) = f(f(x_2))$를 적용했으면	3
	$f \circ f$는 항등함수임을 이용하여 $x_1 = x_2$를 보였으면	2
3-3	f는 일대일대응임을 기술하고 $f = f^{-1}$를 보였으면	2
	$a_3 = a_2 + 2a_1 = 4$를 구했으면	2
	$a_4 = a_3 + 3a_2 = 10$을 구했으면	2
3-4	$f(1) = 1$이면 조건 p를 만족하는 함수의 개수는 a_{n-1}임을 보이면	3
	$f(1) = k$이면 $f = f^{-1}$로부터 $f(k) = 1$이어야 하므로 조건 p를 만족하는 함수의 개수는 a_{k-2}임을 보이면	3
	$a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$임을 보이면	2

■ 예시 답안

[1]

(1) 선분 AB를 $m:(3-m)$으로 내분하는 점의 좌표는 $\left(\dfrac{5m-(3-m)}{m+(3-m)}, \dfrac{3m-3(3-m)}{m+(3-m)}\right)=(2m-1, 2m-3)$

이 점이 제 1사분면 위에 존재하므로 $2m-1>0$, $2m-3>0$

또한 내분하는 점의 정의에 의해 $m:3-m$으로부터 $m>0, 3-m>0$

이 부등식들을 동시에 만족시키는 m의 값의 범위는 $\dfrac{2}{3}<m<3$

(2) 점 C의 좌표를 (x,y)로 놓으면

$\overline{AC}^2-\overline{BC}^2=(x+1)^2+(y+3)^2-(x-5)^2-(y-3)^2=12x-24+12y$

$12x-24+12y=12k$라 하면

$x-2+y=k$ ----- ①

점 C는 원

$(x-2)^2+y^2=1$ ----- ②

위의 점이므로 ①,②에서 x를 소거하면 $2y^2-2ky+k^2-1=0$

이차방정식

$2y^2-2ky+k^2-1=0$ ----- ③

의 판별식D 가 $D\geq 0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=k^2-2(k^2-1)=-k^2+2\geq 0$ 이고 $-\sqrt{2}\leq k\leq \sqrt{2}$

따라서 $\overline{AC}^2-\overline{BC}^2=12k$의 범위는 $-12\sqrt{2}\leq \overline{AC}^2-\overline{BC}^2\leq 12\sqrt{2}$

$\overline{AC}^2-\overline{BC}^2=12k$의 최솟값은 $k=-\sqrt{2}$일 때 $-12\sqrt{2}$

$k=-\sqrt{2}$을 ③에 대입하면 $(\sqrt{2}y+1)^2=0$이므로 $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

[2]

$x=2$를 대입하면 $2^{10}-1=\sum_{k=0}^{10}a_k$ ------ ①

$x=0$을 대입하면 $-1=\sum_{k=0}^{10}(-1)^k a_k$ ------ ②

①,②를 더하고 2로 나누면 $\sum_{k=0}^{5}a_{2k}=2^9-1$ ----- ③

$x=1$을 대입하면 $a_0=0$ ----- ④

$f(x)=x^{10}-1$이라 하면 $f''(1)=90=2a_2$이므로 $a_2=45$ ----- ⑤

③,④,⑤에 의해 $a_4+a_6+a_8+a_{10}=2^9-1-45=466$

[3]

(1) $n=1$일 때, $f(1)=1$이면 $f\circ f$는 $A_1=\{1\}$에서의 항등함수이다. 그러므로 $a_1=1$

$n=2$일 때, 조건 p를 만족하는 함수는 $f(1)=1, f(2)=2$인 경우와 $f(1)=2, f(2)=1$인 경우뿐이다. 그러므로 $a_2=2$

(2) 일대일함수의 정의에서 조건 p를 $x_1 \neq x_2$, 조건 q를 $f(x_1) \neq f(x_2)$라고 명제 $p \rightarrow q$의 대우는

$f(x_1) = f(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$

이제 정의역 A_n의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1) = f(x_2)$라고 하면 $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$이고 $f \circ f$는 항등함수이므로 $x_1 = x_2$

따라서 조건 p를 만족시키는 함수 f는 일대일함수이다.

(3) f는 A_n에서 A_n으로의 일대일함수이므로 일대일대응이고 역함수가 존재한다.

$f \circ f = I$ (I는 항등함수)로부터 $f = f^{-1}$

$n = 3$일 때, $f(1) = 1$이면서 조건 p를 만족하는 함수의 개수는 a_2

$f(1) = 2$이면 $f = f^{-1}$로부터 $f(2) = 1$이어야 하므로 조건 p를 만족하는 함수의 개수는 a_1

$f(1) = 3$이면 $f = f^{-1}$로부터 $f(3) = 1$이어야 하므로 조건 p를 만족하는 함수의 개수는 a_1

따라서 $a_3 = a_2 + 2a_1 = 4$

$n = 4$일 때, $f(1) = 1$이면서 조건 p를 만족하는 함수의 개수는 a_3

$f(1) = 2$이면 $f = f^{-1}$로부터 $f(2) = 1$이어야 하므로 조건 p를 만족하는 함수의 개수는 a_2

$f(1) = 3$이면 $f = f^{-1}$로부터 $f(3) = 1$이어야 하므로 조건 p를 만족하는 함수의 개수는 a_2

$f(1) = 4$이면 $f = f^{-1}$로부터 $f(4) = 1$이어야 하므로 조건 p를 만족하는 함수의 개수는 a_2

따라서 $a_4 = a_3 + 3a_2 = 10$

(4) $n \geq 3$일 때 $f(1) = 1$이면 조건 p를 만족하는 함수의 개수는 a_{n-1}

$f(1) = 2$이면 $f = f^{-1}$로부터 $f(2) = 1$이어야 하므로 조건 p를 만족하는 함수의 개수는 a_{n-2}

$f(1) = 3$이면 $f = f^{-1}$로부터 $f(3) = 1$이어야 하므로 조건 p를 만족하는 함수의 개수는 a_{n-2}

....

$f(1) = n$이면 $f = f^{-1}$로부터 $f(n) = 1$이어야 하므로 조건 p를 만족하는 함수의 개수는 a_{n-2}

따라서 $a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$