수학 영역

[A형]

1. 계산 능력 – 지수함수와 로그함수 〔2점〕 정답 ①

$\sqrt[9]{\sqrt{8}}\times\sqrt[6]{32}=\sqrt[9]{2^{\frac{3}{2}}}\times 2^{\frac{5}{6}}=2^{\frac{1}{6}}\times 2^{\frac{5}{6}}=2^{\frac{1}{6}+\frac{5}{6}}=2$

2. 계산 능력 – 함수의 극한과 연속 〔2점〕 정답 ②

$$\lim_{x\to1}\frac{3x^2-2x-1}{2x-2}=\lim_{x\to1}\frac{(3x+1)(x-1)}{2(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{3x+1}{2}=2$$

3. 계산 능력 – 수열의 극한 〔2점〕 정답 ①

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n})(\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n})}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+3n)-(n^2+n)}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$
$$=1$$

4. 이해력 – 수열 〔3점〕 정답 ②

$S_n=n^2+5n$이므로

$a_1=S_1=1^2+5\times1=6$

$a_7=S_7-S_6=(7^2+5\times7)-(6^2+5\times6)=18$

$\therefore\ a_1+a_7=6+18=24$

5. 이해력 – 수열의 극한 〔3점〕 정답 ②

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+2x}{x^{n-1}+1}$ 에서

$$f(2)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+4}{2^{n-1}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{4}{2^{n-1}}}{1+\frac{1}{2^{n-1}}}=4$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1}=1$$

$\therefore\ f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)=4+1=5$

6. 이해력 – 수열 〔3점〕 정답 ③

$a_1=\frac{1}{2}$

$a_2=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

$a_3=\frac{1}{1-2}=-1$

$a_4=\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}$

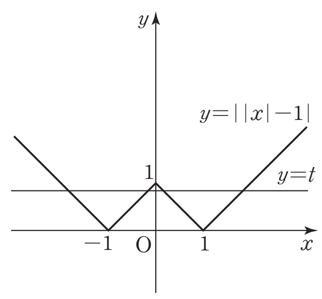
$\vdots$

$\therefore\ a_{3n-2}=\frac{1}{2},\ a_{3n-1}=2,\ a_{3n}=-1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$\therefore\ a_{22}=a_{3\times8-2}=\frac{1}{2}$

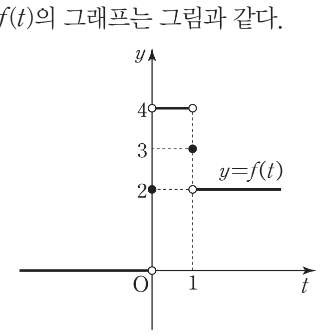
7. 추론 능력(추측) – 함수의 극한과 연속 〔3점〕 정답 ④

함수 $y=||x|-1|$의 그래프는 그림과 같으므로



$$f(t)=\begin{cases}0\ (t<0)\\2\ (t=0)\\4\ (0<t<1)\\3\ (t=1)\\2\ (t>1)\end{cases}$$

함수 $y=f(t)$의 그래프는 그림과 같다.



$\therefore\ \lim_{t\to1-0}f(t)=4$

8. 이해력 – 행렬과 그래프 〔3점〕 정답 ③

$A=\begin{pmatrix}a&b\\a&b\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}c&d\\c&d\end{pmatrix}$라 하면

$AB=\begin{pmatrix}a&b\\a&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c&d\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac+bc&ad+bd\\ac+bc&ad+bd\end{pmatrix}$

행렬 AB의 모든 성분의 합은

$2(ac+bc)+2(ad+bd)=2(a+b)(c+d)$

$ab=3,\ cd=3$이므로

$a+b\ge2\sqrt{ab}=2\sqrt{3},\ c+d\ge2\sqrt{cd}=2\sqrt{3}$ (단, 등호는 $a=b,\ c=d$일 때, 성립)

따라서, 행렬 AB의 모든 성분의 합의 최솟값은 24이다.

9. 이해력 – 함수의 극한과 연속 〔3점〕 정답 ⑤

ㄱ. (참) $\lim_{x\to1+0}f(x)=-1$

ㄴ. (참) $\lim_{x\to1-0}f(x)g(x)=1\times(-1)=-1$

ㄷ. (참) $f(1)g(1)=(-1)\times1=-1$

$\lim_{x\to1+0}f(x)g(x)=(-1)\times1=-1$

$\lim_{x\to1-0}f(x)g(x)=1\times(-1)=-1$

따라서, 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

10. 이해력 – 행렬과 그래프 〔3점〕 정답 ③

$2A-B=O$에서 $B=2A$

$AB=2E$에서 $2A^2=2E$

$\therefore\ A^2=E$

$A=\frac{1}{2}B$이므로 $AB=2E$에서

$\frac{1}{2}B^2=2E$

$\therefore\ B^2=4E$

$\therefore\ A^3+B^3=AA^2+BB^2=A+4B=A+8A=9A$

따라서, A^3+B^3의 모든 성분의 합은 18이다.

11. 수학 내적 문제 해결 능력 – 수열 〔3점〕 정답 ②

$2^{-9}=\frac{1}{512},\ 2^{-8}=\frac{1}{256},\ 2^{-7}=\frac{1}{128},\ 2^{-6}=\frac{1}{64}$

$2^{-5}=\frac{1}{32},\ 2^{-4}=\frac{1}{16},\ 2^{-3}=\frac{1}{8},\ 2^{-2}=\frac{1}{4},\ 2^{-1}=\frac{1}{2}$

$2^0=1,\ 2^1=2,\ 2^2=4,\ 2^3=8,\ 2^4=16,\ 2^5=32,\ 2^6=64$

$2^7=128,\ 2^8=256,\ 2^9=512,\ 2^{10}=1024$이므로

$\frac{1}{1000}<\frac{1}{512},\ \frac{1}{256},\ \frac{1}{128}<\frac{1}{100}$

$\frac{1}{100}<\frac{1}{64},\ \frac{1}{32},\ \frac{1}{16}<\frac{1}{10}$

$\frac{1}{10}<\frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2}<1$

$f(2^{-9})=f(2^{-8})=f(2^{-7})=-3$

$f(2^{-6})=f(2^{-5})=f(2^{-4})=-2$

$f(2^{-3})=f(2^{-2})=f(2^{-1})=-1$

$f(2^0)=f(2^1)=f(2^2)=f(2^3)=0$

$f(2^4)=f(2^5)=f(2^6)=1$

$f(2^7)=f(2^8)=f(2^9)=2$

$f(2^{10})=3$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{20}f(2^{n-10})$

$=(-3)\times3+(-2)\times3+(-1)\times3$
$+0\times4+1\times3+2\times3+3$

$=-6$

12. 추론 능력(증명) – 수열 〔4점〕 정답 ③

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^k}=2\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^k}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^k}\right)$$
$$=2\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-1}}\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}\right)\right\}$$
$$=2\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k}-\frac{\boxed{n-1}}{2^n}\right)$$
$$=2\left\{\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n-1}{2^n}\right\}$$
$$=2\left(1-\frac{n+1}{2^n}\right)$$
$$=2-\frac{n+1}{2^{n-1}}$$

$$\frac{a_n}{n}=-2+2-\frac{n+1}{2^{n-1}}$$

$$\therefore\ a_n=-\frac{\boxed{n(n+1)}}{2^{n-1}}$$

$\therefore\ f(n)=n-1,\ g(n)=n(n+1)$

$\therefore\ f(6)+g(5)=5+30=35$

13. 이해력 - 수열의 극한 〔3점〕 정답 ⑤

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{4^6}+\cdots$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^6}+\cdots\right)$$
$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{16}}$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{15}=\frac{11}{15}$$

14. 이해력 - 지수함수와 로그함수 〔4점〕 정답 ①

(ⅰ) m, n이 모두 홀수이면 $m+n$은 짝수이므로

$f(m+n)=\left(\frac{1}{4}\right)^{m+n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+2n}$

$f(m)=\left(\frac{1}{2}\right)^{m}$, $f(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

$16f(m)f(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{m+n-4}$

$\therefore\ 2m+2n=m+n-4$

$\therefore\ m+n=-4$

따라서, 만족하는 순서쌍은 없다.

(ⅱ) m, n이 모두 짝수이면 $m+n$도 짝수이므로

$f(m+n)=\left(\frac{1}{4}\right)^{m+n}$

$f(m)=\left(\frac{1}{4}\right)^{m}$, $f(n)=\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$

$16f(m)f(n)=\left(\frac{1}{4}\right)^{m+n-2}$

$\therefore\ m+n=m+n-2$

따라서, 만족하는 순서쌍은 없다.

(ⅲ) m이 짝수, n이 홀수이면 $m+n$은 홀수이므로

$f(m+n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{m+n}$

$f(m)=\left(\frac{1}{4}\right)^{m}$, $f(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

$16f(m)f(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+n-4}$

$\therefore\ m+n=2m+n-4$

$m=4$

따라서, 만족하는 순서쌍은 $(4,\ 1)$, $(4,\ 3)$, $\cdots$, $(4,\ 29)$의 15개이다.

(ⅳ) m이 홀수, n이 짝수이면 $m+n$은 홀수이므로 (ⅲ)과 같은 방법으로 하면 만족하는 순서쌍은 $(1,\ 4)$, $(3,\ 4)$, $\cdots$, $(29,\ 4)$의 15개이다.

따라서, 주어진 조건을 만족하는 순서쌍은 30개이다.

15. 이해력 - 행렬과 그래프 〔4점〕 정답 ①

$a_{ij}+a_{ji}=0$ $(i=1,\ 2,\ j=1,\ 2)$에서

$a_{ij}=-a_{ji}$이므로

$a_{11}=a_{22}=0$, $a_{12}=-a_{21}$

$a_{12}=a$라 하면

$A=\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$이므로

$A^2=\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix}$

$A^2+A=\begin{pmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$이고

A^2+A의 모든 성분의 합이 -2이므로

$a+(-a)+(-a^2)+(-a^2)=-2$

$-2a^2=-2$

$\therefore\ a^2=1$

$A^3=AA^2=\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 0 & -a^3 \\ a^3 & 0 \end{pmatrix}$

$A^4=AA^3=\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -a^3 \\ a^3 & 0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a^4 & 0 \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}=E$

행렬 A^{4n-3}, A^{4n-1}의 모든 성분의 합은 0, 행렬 A^{4n-2}의 모든 성분의 합은 -2, A^{4n}의 모든 성분의 합은 2이다.

따라서, 행렬 $A+2A^2+3A^3+\cdots+10A^{10}$의 모든 성분의 합은 행렬 $2A^2+4A^4+6A^6+8A^8+10A^{10}$의 모든 성분의 합과 같다.

$2\times(-2)+4\times2+6\times(-2)+8\times2+10\times(-2)$

$=-12$

16. 이해력 - 수열 〔4점〕 정답 ⑤

등차수열 $\{x_n\}$에서 x_n은 n에 대한 일차식($an+b$ 꼴)이므로 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(x_n)$은 n에 대한 이차식(pn^2+qn+r 꼴)이 된다. 이때, $f(x_{n+1})-f(x_n)$은 n에 대한 일차식이 되므로 계차수열 $\{f(x_{n+1})-f(x_n)\}$은 등차수열이 된다.

$f(x_1)=3$, $f(x_2)=5$, $f(x_3)=9$, $f(x_4)=15$, $\cdots$

$\{f(x_{n+1})-f(x_n)\}$: 2, 4, 6, $\cdots$

$\therefore\ f(x_{n+1})-f(x_n)=2n$

$\therefore\ f(x_n)=f(x_1)+\sum_{k=1}^{n-1}2k$

$=3+2\times\frac{n(n-1)}{2}$

$=n^2-n+3$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{10}f(x_n)=\sum_{n=1}^{10}(n^2-n+3)$

$=\frac{10\times11\times21}{6}-\frac{10\times11}{2}+3\times10$

$=385-55+30$

$=360$

17. 수학 외적 문제 해결 능력 - 지수함수와 로그함수 〔4점〕 정답 ④

현재 회사 전체 예산을 a, 연구비를 b라 하면 현재 회사 전체 예산에서 연구비가 차지하는 비율이 4%이므로

$b=0.04a$

n년 후 회사 전체 예산은 $(1+0.1)^n a$, 연구비는 $(1+0.2)^n b$이다.

n년 후 처음으로 회사 전체 예산에서 연구비가 차지하는 비율이 8% 이상이 되므로

$0.08\times(1.1)^n a\le(1.2)^n b$

$0.08\times(1.1)^n a\le(1.2)^n\times0.04a$

$2\le\left(\frac{1.2}{1.1}\right)^n$

$\log2\le n\log\left(\frac{1.2}{1.1}\right)$

$n\ge\frac{\log2}{\log1.2-\log1.1}=\frac{0.3010}{0.0792-0.0414}=7.96\cdots$

$\therefore\ n=8$

18. 수학 내적 문제 해결 능력 - 수열의 극한 〔4점〕 정답 ①

원 $x^2+y^2=\frac{1}{2^{2n}}$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=\frac{1}{2^{2n}}$이다.

이 직선이 점 $\mathrm{P}_n\left(\frac{1}{2^{n-1}},\ 0\right)$을 지나므로

$x_1\times\frac{1}{2^{n-1}}+y_1\times0=\frac{1}{2^{2n}}$

$\therefore\ x_1=\frac{1}{2^{n+1}}$

${x_1}^2+{y_1}^2=\frac{1}{2^{2n}}$이므로

$\frac{1}{2^{2n+2}}+{y_1}^2=\frac{1}{2^{2n}}$

${y_1}^2=\frac{1}{2^{2n}}-\frac{1}{2^{2n+2}}=\frac{3}{2^{2n+2}}$

$\therefore\ y_1=\frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}}\ (\because\ y_1>0)$

따라서, 접선의 방정식은

$\frac{1}{2^{n+1}}x+\frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}}y=\frac{1}{2^{2n}}$

따라서, 점 A_n의 y좌표를 구해 보면

$\frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}}y=\frac{1}{2^{2n}}$

$y=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2^{n-1}}$

$\therefore\ a_n=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2^{n-1}}$

따라서, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{\sqrt{3}}{3}$이고, 공비가 $\frac{1}{2}$

인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

19. 추론 능력(추측) – 행렬과 그래프 〔4점〕 정답 ⑤

ㄱ. (참) $A+B=E$에서

$AA+AB=A$이므로 $AB=A-A^2$

$AA+BA=A$이므로 $BA=A-A^2$

$\therefore AB=BA$

ㄴ. (참) ㄱ에서 $AB=A-A^2$이므로

$A+AB=3E$에 대입하면

$A+A-A^2=3E$

$\therefore A^2-2A=-3E$

ㄷ. (참) ㄴ에서 $A^2=2A-3E$

$A^3=2A^2-3A=2(2A-3E)-3A=A-6E$

이때, $A+B=E$에서

$A=E-B$이고

$AB=B-B^2$이므로

$A+AB=3E$에 대입하면

$E-B+B-B^2=3E$

$B^2=-2E$

$B^3=-2B$

$A^3-B^3=A-6E-(-2B)=A+2B-6E$

$\quad=-A-4E$ ($\because B=E-A$)

이때, $A^2-2A+3E=O$에서

$(A+4E)(A-6E)=-27E$

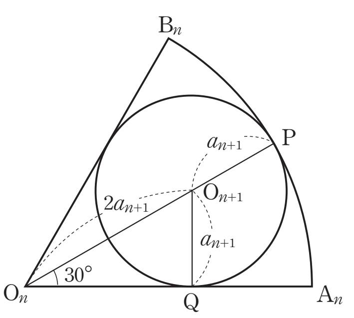
$(-A-4E)(A-6E)=27E$

$\therefore (-A-4E)^{-1}=\frac{1}{27}(A-6E)$

따라서, A^3-B^3은 역행렬을 갖는다.

20. 이해력 – 수열의 극한 〔4점〕 정답 ④

호 A_nB_n과 내접원이 접하는 점을 P, 선분 O_nA_n과 내접원이 접하는 점을 Q라 하면



$\overline{O_{n+1}Q}=a_{n+1}$, $\overline{O_nO_{n+1}}=2a_{n+1}$, $\overline{O_{n+1}P}=a_{n+1}$이므로

$\overline{O_nA_n}=\overline{O_nO_{n+1}}+\overline{O_{n+1}P}$

$a_n=3a_{n+1}$

$\therefore a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$

따라서, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3이고, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

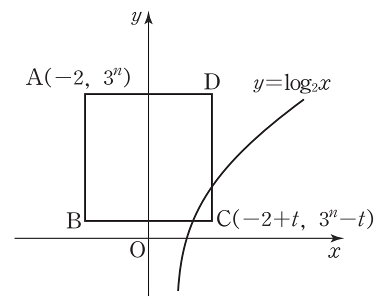
$a_n=3\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2=\sum_{n=1}^{\infty}9\times\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}=\frac{9}{1-\frac{1}{9}}=\frac{81}{8}$

21. 수학 내적 문제 해결 능력 – 지수함수와 로그함수 〔4점〕 정답 ④

정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 t라 하면

점 $A(-2,\ 3^n)$이므로 점 C의 좌표는 $C(-2+t,\ 3^n-t)$이다.



$a=-2+t$, $b=3^n-t$ $(t>0)$

$3^n-t\le\log_2(t-2)$

$2^{3^n-t}\le t-2$

(i) $n=1$이면

$2^{3-t}\le t-2$

$t=2$이면 $2^{3-t}=2$이고 $t-2=0$

$t=3$이면 $2^{3-t}=1$이고 $t-2=1$

$\therefore t\ge3$

(ii) $n=2$이면

$2^{9-t}\le t-2$

$t=6$이면 $2^{9-t}=8$이고 $t-2=4$

$t=7$이면 $2^{9-t}=4$이고 $t-2=5$

$\therefore t\ge7$

(iii) $n=3$이면

$2^{27-t}\le t-2$

$t=22$이면 $2^{27-t}=32$이고 $t-2=20$

$t=23$이면 $2^{27-t}=16$이고 $t-2=21$

$\therefore t\ge23$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)=3+7+23=33$

22. 이해력 – 행렬과 그래프 〔3점〕 정답 16

주어진 그래프의 변의 개수가 8이므로 그래프의 연결 관계를 나타내는 행렬의 성분 중 1의 개수는 $8\times2=16$이다. 따라서, 행렬의 모든 성분의 합은 16이다.

23. 이해력 – 지수함수와 로그함수 〔3점〕 정답 4

$(\log_2 x)^2-\log_2 x^2-3=0$에서

$\log_2 x=t$라 하면

$t^2-2t-3=0$

$(t-3)(t+1)=0$

$t=3$ 또는 $t=-1$

$\log_2 x=3$이면 $x=2^3$

$\log_2 x=-1$이면 $x=2^{-1}$

$\therefore \alpha\beta=2^3\times2^{-1}=2^2=4$

24. 이해력 – 수열 〔3점〕 정답 15

$a_1=3$, $(2n+3)a_{n+1}=(2n+5)a_n$에서

$a_{n+1}=\frac{2n+5}{2n+3}a_n$이므로

$a_2=\frac{7}{5}a_1$

$a_3=\frac{9}{7}a_2$

$\vdots$

$a_{11}=\frac{25}{23}a_{10}$

변끼리 모두 곱하면

$a_{11}=\frac{25}{5}\times a_1=\frac{25}{5}\times3=15$

25. 이해력 – 다항함수의 미분법 〔3점〕 정답 28

$\lim_{x\to2}\frac{xf(x)}{x-2}=7$에서 (분모) → 0이므로 (분자) → 0이어야 한다.

$\lim_{x\to2}xf(x)=2f(2)=0$

$f(2)=0$

이때, $f(0)=0$, $f'(0)=0$이므로 삼차함수 $f(x)$는 $f(x)=ax^2(x-2)$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

$\lim_{x\to2}\frac{xf(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{ax^3(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}ax^3=8a=7$

$\therefore a=\frac{7}{8}$

$\therefore f(x)=\frac{7}{8}x^2(x-2)$

$\therefore f(4)=\frac{7}{8}\times16\times2=28$

26. 이해력 – 지수함수와 로그함수 〔3점〕 정답 126

일차함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(-1,\ 0)$, $(0,\ 2)$를 지나므로

$f(x)=2x+2$

$y=2^{5-f(x)}=2^{5-(2x+2)}=2^{-2x+3}$

$x=-2$일 때, $2^{-2\times(-2)+3}=2^7=128$

$x=1$일 때, $2^{-2\times1+3}=2^1=2$

$\therefore M=128$, $m=2$

$\therefore M-m=128-2=126$

27. 이해력 – 행렬과 그래프 〔4점〕 정답 75

$\begin{pmatrix} a-2 & -b \\ b & a+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2y \\ 2x \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} a-2 & -b \\ b & a+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a-2 & -b+2 \\ b-2 & a+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

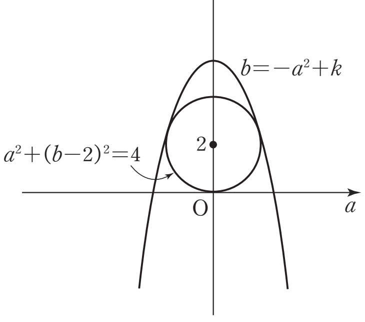
위의 연립방정식이 $x=y=0$ 이외의 해를 가지므로

$(a-2)(a+2)-(-b+2)(b-2)=0$

$a^2+(b-2)^2=4$ …………… ㉠

$a^2+b=k$라 하면

$a^2=-b+k$ …………… ㉡



㉠과 ㉡을 연립하면

$-b+k+(b-2)^2=4$

$b^2-5b+k=0$

k가 최댓값을 갖기 위해서는 위의 이차방정식의 판별식의 값이 0이 되어야 한다.

$\therefore 25-4k=0$

$k=\frac{25}{4}$

$\therefore 12m=12\times\frac{25}{4}=75$

28. 이해력 – 지수함수와 로그함수 [4점] 정답 27

로그의 진수 조건에서

$f(x)>0$

$\therefore x<3$ 또는 $x>6$ ······························ ㉠

$\log_{\frac{1}{6}} f(x) \geq -1$에서

$\log_{\frac{1}{6}} f(x) \geq \log_{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$

$f(x) \leq 6$

한편, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{9}{2}$에 대하여 대칭이다.

$\therefore 0 \leq x \leq 9$ ······························ ㉡

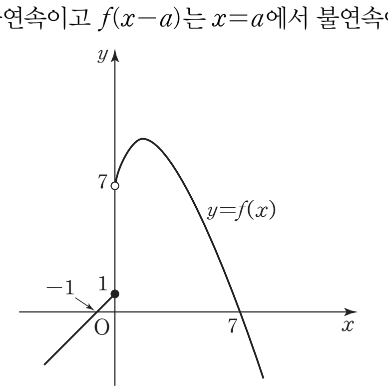
㉠, ㉡에서

$0 \leq x<3$ 또는 $6<x \leq 9$

따라서, 주어진 부등식을 만족하는 정수는 0, 1, 2, 7, 8, 9이므로 그 합은 27이다.

29. 이해력 – 함수의 극한과 연속 [4점] 정답 9

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속, $f(x+a)$는 $x=-a$에서 불연속이고 $f(x-a)$는 $x=a$에서 불연속이다.



(i) $a=0$일 때

$\lim_{x \to a+0} f(x+a)f(x-a) = \lim_{x \to +0} f(x)f(x) = 49$

$\lim_{x \to a-0} f(x+a)f(x-a) = \lim_{x \to -0} f(x)f(x) = 1$

$\lim_{x \to a+0} f(x+a)f(x-a) \neq \lim_{x \to a-0} f(x+a)f(x-a)$

이므로 $x=a$에서 불연속이다.

(ii) $a \neq 0$일 때

$\lim_{x \to a+0} f(x+a)f(x-a) = 7f(2a)$

$\lim_{x \to a-0} f(x+a)f(x-a) = f(2a)$

$f(2a)f(0)=f(2a)$

함수 $f(x+a)f(x-a)$가 $x=a$에서 연속이려면

$7f(2a)=f(2a)$

$f(2a)=0$

$\therefore 2a=-1$ 또는 $2a=7$

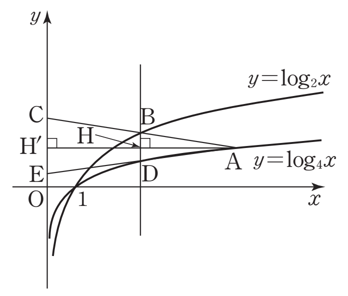
$\therefore a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=\frac{7}{2}$

따라서, 양수 a의 값은 $\frac{7}{2}$이다.

$\therefore p+q=9$

30. 수학 내적 문제 해결 능력 – 지수함수와 로그함수 [4점] 정답 8

점 A에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H, 선분 CE에 내린 수선의 발을 H′이라 하면 삼각형 ABH와 삼각형 ACH′이 서로 닮은 삼각형이고 닮음비가 $\overline{BH} : \overline{CH'} = 1 : 2$이다.



따라서, 점 B의 x좌표를 $k(k>1)$라 하면 점 A의 x좌표는 $2k$이므로 $B(k, \log_2 k)$, $D(k, \log_4 k)$, $A(2k, \log_4 2k)$이다.

이때, 삼각형 ABD는 $\overline{AB}=\overline{AD}$인 이등변삼각형이므로 점 H는 선분 BD의 중점이다.

두 점 A와 H의 y좌표가 같으므로

$\frac{\log_2 k+\log_4 k}{2}=\log_4 2k$

$\log_2 k+\frac{1}{2}\log_2 k=\log_2 2k$

$\frac{3}{2}\log_2 k=1+\log_2 k$

$\frac{1}{2}\log_2 k=1$

$\log_2 k=2$

$\therefore k=4$

$\therefore B(4, 2), D(4, 1), A\left(8, \frac{3}{2}\right)$

$\therefore \triangle ABD=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{AH}=\frac{1}{2}\times1\times4=2$

삼각형 ABD와 삼각형 ACE의 닮음비가 1 : 2이므로

$\triangle ACE=2\times2^2=8$

● [B형]

1. 계산 능력 – 지수함수와 로그함수 [2점] 정답 ①

$2\log_2 3-\log_2 24-\log_2 12$

$=2\log_2 3-(3+\log_2 3)-(2+\log_2 3)$

$=-5$

2. 계산 능력 – 행렬과 그래프 [2점] 정답 ⑤

$AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

이므로

$AB-BA=O$

따라서, 행렬 $AB-BA$의 모든 성분의 합은 0이다.

3. 계산 능력 – 적분법 [2점] 정답 ②

$\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx-\int_0^{\ln 2}\frac{1}{e^x+1}dx$

$=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx$

$=\int_0^{\ln 2}(e^x-1)dx$

$=\left[e^x-x\right]_0^{\ln 2}$

$=(e^{\ln 2}-\ln 2)-(e^0-0)$

$=1-\ln 2$

4. 이해력 – 일차변환과 행렬 [3점] 정답 ⑤

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\therefore a=1, b=-1$

$\therefore a+b=1+(-1)=0$

5. 이해력 – 삼각함수 [3점] 정답 ①

$f(x)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\sin x$

$=2\cos x\cos\frac{\pi}{3}+2\sin x\sin\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}\sin x$

$=\cos x+\sqrt{3}\sin x+\sqrt{3}\sin x$

$=2\sqrt{3}\sin x+\cos x$

$=\sqrt{13}\sin(x+\alpha)$

$\left(\text{단}, \cos\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}, \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{13}}\right)$

$\therefore M=\sqrt{13}, m=-\sqrt{13}$

$\therefore M\times m=-13$

6. 이해력 – 삼각함수 [3점] 정답 ②

$2\sin x-2\sin 2x\cos x-\cos 2x+1=0$에서

$2\sin x-4\sin x\cos^2 x-(1-2\sin^2 x)+1=0$

$2\sin x-4\sin x(1-\sin^2 x)-(1-2\sin^2 x)+1=0$

$4\sin^3 x+2\sin^2 x-2\sin x=0$

$\sin x=t$라 하면

$4t^3+2t^2-2t=0$

$t(2t-1)(t+1)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=-1$

$\therefore \sin x=0$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=-1$

$\sin x=0$에서 $x=0, \pi$

$\sin x=\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$

$\sin x=-1$에서 $x=\frac{3}{2}\pi$

따라서, 모든 근의 합은

$0+\pi+\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi+\frac{3}{2}\pi=\frac{7}{2}\pi$

7. 이해력 – 수열의 극한 〔3점〕 정답 ②

$n-1=\sqrt{n^2-2n+1}\le\sqrt{n^2-n}<\sqrt{n^2}=n$이므로

$\sqrt{n^2-n}$의 정수 부분은 $n-1$,

소수 부분은 $\sqrt{n^2-n}-(n-1)$이다.

$\therefore a_n=\sqrt{n^2-n}-(n-1)$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_n$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2-n}-(n-1)\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\{\sqrt{n^2-n}-(n-1)\}\{\sqrt{n^2-n}+(n-1)\}}{\sqrt{n^2-n}+(n-1)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2-n)-(n^2-2n+1)}{\sqrt{n^2-n}+(n-1)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{\sqrt{n^2-n}+(n-1)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\left(1-\frac{1}{n}\right)}=\dfrac{1}{2}$

8. 이해력 – 행렬과 그래프 〔3점〕 정답 ②

$AB-B=O$에서

$(A-E)B=O$

$(A-E)^{-1}$이 존재하면

$(A-E)^{-1}(A-E)B=(A-E)^{-1}O$에서 $B=O$이므로 영행렬이 아닌 이차정사각행렬 B가 존재하려면 $(A-E)^{-1}$이 존재하지 않아야 한다.

$A-E=\begin{pmatrix}2&1\\a&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\a&2\end{pmatrix}$

$2-a=0$

$\therefore a=2$

9. 이해력 – 적분법 〔3점〕 정답 ③

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\,dt=a$라 하면 $f(x)=\sin x+\dfrac{a}{\pi}$이므로

$a=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t+\dfrac{a}{\pi}\right)dt$

$=\left[-\cos t+\dfrac{at}{\pi}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=-\cos\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{a}{2}-(-\cos 0)=\dfrac{a}{2}+1$

$\therefore a=2$

$\therefore f(x)=\sin x+\dfrac{2}{\pi}$

$\therefore \int_0^{\pi}f(x)\,dx=\int_0^{\pi}\left(\sin x+\dfrac{2}{\pi}\right)dx$

$=\left[-\cos x+\dfrac{2}{\pi}x\right]_0^{\pi}$

$=-\cos\pi+2-(-1)=4$

10. 이해력 – 함수의 극한과 연속 〔3점〕 정답 ⑤

ㄱ. $f(1)+g(1)=-1+1=0$

$\lim\limits_{x\to1+0}\{f(x)+g(x)\}=-1+1=0$

$\lim\limits_{x\to1-0}\{f(x)+g(x)\}=1-1=0$

따라서, 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄴ. $f(1)g(1)=(-1)\times1=-1$

$\lim\limits_{x\to1+0}f(x)g(x)=(-1)\times1=-1$

$\lim\limits_{x\to1-0}f(x)g(x)=1\times(-1)=-1$

따라서, 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. $f(g(1))=f(1)=-1$

$\lim\limits_{x\to1+0}f(g(x))=\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=-1$

$\lim\limits_{x\to1-0}f(g(x))=\lim\limits_{x\to-1+0}f(x)=-1$

따라서, 함수 $f(g(x))$는 $x=1$에서 연속이다.

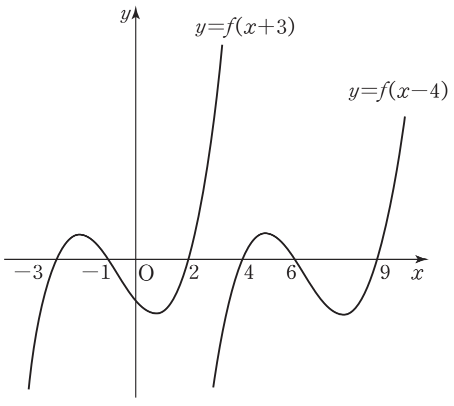
11. 이해력 – 방정식과 부등식 〔3점〕 정답 ①

$\dfrac{f(x+3)}{f(x-4)}\le0$의 양변에 $\{f(x-4)\}^2$을 곱하면

$f(x+3)f(x-4)\le0,\ f(x-4)\ne0$

$y=f(x+3)$과 $y=f(x-4)$의 그래프가 그림과 같으므로 $f(x+3)f(x-4)\le0$, $f(x-4)\ne0$을 만족하는 x의 범위는 $-3\le x\le-1$, $2\le x<4$, $6<x<9$

따라서, 만족하는 정수는 -3, -2, -1, 2, 3, 7, 8이므로 그 합은 14이다.



12. A형 12번과 동일 〔4점〕 정답 ③

13. 이해력 – 수열의 극한 〔3점〕 정답 ④

점 $(-n,\ 0)$을 지나고 기울기가 n인 직선 l_n의 방정식은 $y=n(x+n)$

$\mathrm{A}_n(\alpha_n,\ \alpha_n^2)$, $\mathrm{B}_n(\beta_n,\ \beta_n^2)$이라 하면 α_n, β_n은

$x^2=n(x+n)$

$x^2-nx-n^2=0$

의 두 근이다.

$\therefore \alpha_n+\beta_n=n,\ \alpha_n\beta_n=-n^2$

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}^2=(\beta_n-\alpha_n)^2+(\beta_n^2-\alpha_n^2)^2$

$=(\beta_n-\alpha_n)^2\{1+(\beta_n+\alpha_n)^2\}$

$=\{(\beta_n+\alpha_n)^2-4\alpha_n\beta_n\}\{1+(\beta_n+\alpha_n)^2\}$

$=(n^2+4n^2)(1+n^2)$

$=5n^2(1+n^2)$

$\therefore \overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=n\sqrt{5(1+n^2)}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt{5(1+n^2)}}{n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{5(1+n^2)}}{n}$

$=\sqrt{5}$

14. 수학 내적 문제 해결 능력 – 미분법 〔4점〕 정답 ④

$y=x^2$에서 $y'=2x$이므로

점 $\mathrm{A}_n(\alpha_n,\ \alpha_n^2)$에서의 접선의 방정식은

$y-\alpha_n^2=2\alpha_n(x-\alpha_n)$

$y=2\alpha_nx-\alpha_n^2$ ······························ ㉠

점 $\mathrm{B}_n(\beta_n,\ \beta_n^2)$에서의 접선의 방정식은

$y-\beta_n^2=2\beta_n(x-\beta_n)$

$y=2\beta_nx-\beta_n^2$ ······························ ㉡

$2\alpha_nx-\alpha_n^2=2\beta_nx-\beta_n^2$에서

$2(\alpha_n-\beta_n)x=\alpha_n^2-\beta_n^2$

$x=\dfrac{\alpha_n+\beta_n}{2}=\dfrac{n}{2}$ ······························ ㉢

㉢을 ㉠, ㉡에 대입하면

$y=n\alpha_n-\alpha_n^2$

$y=n\beta_n-\beta_n^2$

위의 식을 변끼리 더하면

$2y=n(\alpha_n+\beta_n)-(\alpha_n^2+\beta_n^2)$

$=n(\alpha_n+\beta_n)-\{(\alpha_n+\beta_n)^2-2\alpha_n\beta_n\}$

$=n^2-(n^2+2n^2)=-2n^2$

$y=-n^2$

$\therefore a_n=\dfrac{n}{2},\ b_n=-n^2$

$$\sum_{n=1}^{10}(2a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{10}(n+n^2)$$
$$=\frac{10\times11}{2}+\frac{10\times11\times21}{6}=440$$

15. 수학 내적 문제 해결 능력 – 적분법 〔4점〕 정답 ③

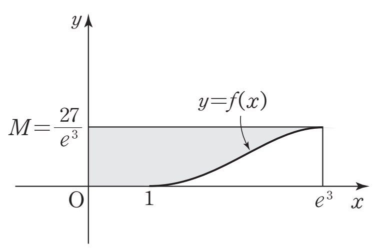
$f(x)=\dfrac{(\ln x)^3}{x}$에서

$$f'(x)=\frac{3(\ln x)^2\times\frac{1}{x}\times x-(\ln x)^3\times1}{x^2}$$
$$=\frac{(\ln x)^2(3-\ln x)}{x^2}$$

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	e^3	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	변곡	↗	극대	↘

$x=e^3$일 때 $f(x)$는 극대이고 최대이다.

$\therefore M=f(e^3)=\dfrac{27}{e^3}$



한편, $\displaystyle\int_1^{e^3}f(x)\,dx=\int_1^{e^3}\frac{(\ln x)^3}{x}\,dx$에서

$\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{dx}{dt}=1$이고

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e^3$일 때 $t=3$

$\therefore \displaystyle\int_1^{e^3}f(x)\,dx=\int_0^3 t^3\,dt=\left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^3=\frac{81}{4}$

따라서, 구하는 넓이는

$\left(e^3\times\dfrac{27}{e^3}\right)-\dfrac{81}{4}=\dfrac{27}{4}$

16. A형 17번과 동일 〔4점〕 정답 ④

17. A형 19번과 동일 〔4점〕 정답 ⑤

18. 수학 내적 문제 해결 능력 – 함수의 극한과 연속 〔4점〕 정답 ③

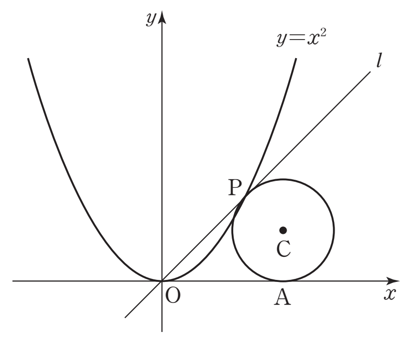
직선 l의 방정식은 $y=tx$이므로 직선 l에 수직이고 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-t^2=-\dfrac{1}{t}(x-t)$

$\therefore y=-\dfrac{1}{t}x+t^2+1$ ……………………………… ㉠

점 $\mathrm{C}(a,\ b)$는 직선 ㉠ 위에 있으므로

$b=-\dfrac{1}{t}a+t^2+1$ ……………………………… ㉡



원과 x축의 접점을 A라 하면 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OP}}$이므로

$a=\sqrt{t^2+t^4}=t\sqrt{1+t^2}$ ……………………………… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$b=-\sqrt{1+t^2}+t^2+1=\sqrt{t^2+1}\,(\sqrt{t^2+1}-1)$

$$\lim_{t\to+0}\frac{b}{t(a+b)}$$
$$=\lim_{t\to+0}\frac{\sqrt{t^2+1}\,(\sqrt{t^2+1}-1)}{t\{t\sqrt{t^2+1}+\sqrt{t^2+1}(\sqrt{t^2+1}-1)\}}$$
$$=\lim_{t\to+0}\frac{\sqrt{t^2+1}-1}{t(t+\sqrt{t^2+1}-1)}$$
$$=\lim_{t\to+0}\frac{(\sqrt{t^2+1}-1)(\sqrt{t^2+1}+1)}{t(t+\sqrt{t^2+1}-1)(\sqrt{t^2+1}+1)}$$
$$=\lim_{t\to+0}\frac{t^2}{t(t\sqrt{t^2+1}+t+t^2)}$$
$$=\lim_{t\to+0}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}+1+t}=\frac{1}{2}$$

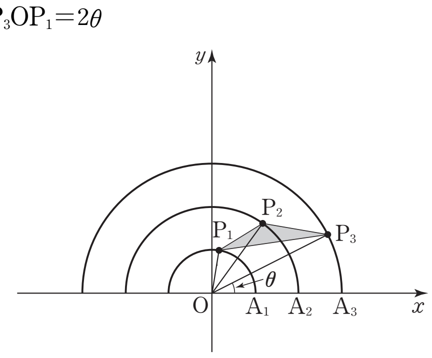
19. A형 20번과 동일 〔4점〕 정답 ④

20. A형 21번과 동일 〔4점〕 정답 ④

21. 이해력 – 삼각함수 〔4점〕 정답 ③

$\angle\mathrm{A_3OP_3}=\theta$라 하면 $\angle\mathrm{A_2OP_2}=2\theta$이므로

$\angle\mathrm{P_3OP_1}=2\theta$



삼각형 $\mathrm{P_3OP_1}$에서

$\cos2\theta=\dfrac{1^2+3^2-(\sqrt{6})^2}{2\times1\times3}=\dfrac{2}{3}$

$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{1-\cos2\theta}{2}}=\sqrt{\dfrac{1-\frac{2}{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

$\sin2\theta=\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$\triangle\mathrm{P_1P_2P_3}=\triangle\mathrm{OP_1P_2}+\triangle\mathrm{OP_2P_3}-\triangle\mathrm{OP_1P_3}$

$=\dfrac{1}{2}\times1\times2\times\sin\theta+\dfrac{1}{2}\times2\times3\times\sin\theta$

$-\dfrac{1}{2}\times1\times3\times\sin2\theta$

$=4\sin\theta-\dfrac{3}{2}\sin2\theta$

$=4\times\dfrac{\sqrt{6}}{6}-\dfrac{3}{2}\times\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$=\dfrac{4\sqrt{6}-3\sqrt{5}}{6}$

22. 계산 능력 – 방정식과 부등식 〔3점〕 정답 5

$x-\sqrt{2x-1}=2$에서

$x-2=\sqrt{2x-1}$

$x^2-4x+4=2x-1$

$x^2-6x+5=0$

$(x-1)(x-5)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=5$

$x=1$은 무연근이므로 구하는 실근은 5이다.

23. 이해력 – 미분법 〔3점〕 정답 54

$f(x)=\dfrac{2}{2x-1}$로 놓으면

$f'(x)=-\dfrac{2(2x-1)'}{(2x-1)^2}=-\dfrac{4}{(2x-1)^2}$

$\therefore f'(1)=-4$

따라서, 접선의 방정식은

$y-2=-4(x-1)$

$y=-4x+6$

이므로 두 점 $(0,\ 6)$, $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$을 지난다.

따라서, 구하는 도형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times6\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{2}$

$\therefore 12S=12\times\dfrac{9}{2}=54$

24. 이해력 – 미분법 〔3점〕 정답 64

$y=x^2e^{\frac{x}{2}}$에서

$y'=2xe^{\frac{x}{2}}+\dfrac{1}{2}x^2e^{\frac{x}{2}}$

$y''=2e^{\frac{x}{2}}+xe^{\frac{x}{2}}+xe^{\frac{x}{2}}+\dfrac{1}{4}x^2e^{\frac{x}{2}}$

$=\left(\dfrac{1}{4}x^2+2x+2\right)e^{\frac{x}{2}}$

$e^{\frac{x}{2}}>0$이므로 $\dfrac{1}{4}x^2+2x+2=0$

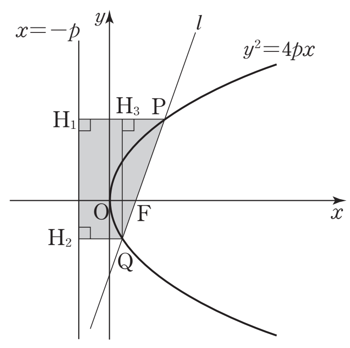
$1^2-\dfrac{1}{4}\times2=\dfrac{1}{2}>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$\therefore x_1+x_2=-\dfrac{2}{\frac{1}{4}}=-8$

$\therefore (x_1+x_2)^2=64$

25. 이해력 – 이차곡선 〔3점〕 정답 96

점 Q에서 선분 $\mathrm{H_1P}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_3}$이라 하면



$\overline{\mathrm{H_1H_2}}=\overline{\mathrm{QH_3}}$
$\overline{\mathrm{PH_3}}=\overline{\mathrm{PH_1}}-\overline{\mathrm{H_1H_3}}$
$=\overline{\mathrm{PH_1}}-\overline{\mathrm{H_2Q}}$
$=\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{QF}}$
$=8-4=4$
$\overline{\mathrm{PQ}}=8+4=12$
$\overline{\mathrm{QH_3}}=\sqrt{12^2-4^2}=\sqrt{128}=8\sqrt{2}$
$\therefore\ S=\dfrac{1}{2}(8+4)\times 8\sqrt{2}=48\sqrt{2}$
$\therefore\ \sqrt{2}S=\sqrt{2}\times 48\sqrt{2}=96$

26. 이해력 – 일차변환과 행렬 〔3점〕 정답 7

$\mathrm{A}(a,\ 0)\ (0<a<4)$이라 하면
$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka \\ 0 \end{pmatrix}$
에서 $\mathrm{B}(ka,\ 0)$이다.
원 C의 중심 $(4,\ 1)$에서 선분 AB에 내린 수선의 발이 선분 AB의 중점이므로
$\dfrac{a+ka}{2}=4,\ (1+k)a=8$
한편, 원 C의 반지름의 길이는 점 A와 중심 $(4,\ 1)$ 사이의 거리이므로 원 C의 넓이가 10π이려면
$(a-4)^2+1=10$
$a-4=\pm 3$
$\therefore\ a=1$
$\therefore\ k=7$

27. 추론 능력(추측) – 수열의 극한 〔4점〕 정답 2

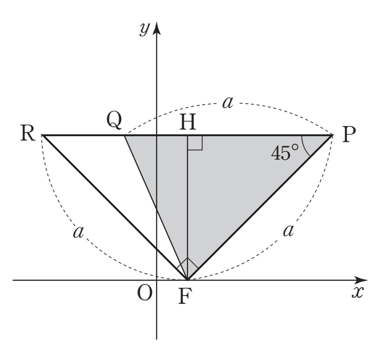
$a_n=1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$
도형 F_n의 겉넓이를 구해 보면
(앞면의 넓이)$=1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$
(옆면의 넓이)$=n$
(윗면의 넓이)$=2n-1$
(도형 F_n의 겉넓이)
$=2\{$(앞면의 넓이)$+$(옆면의 넓이)$+$(윗면의 넓이)$\}$
$=2\{n^2+n+2n-1\}$
$=2n^2+6n-2$
$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+6n-2}{n^2}=2$

28. 이해력 – 함수의 극한과 연속 〔4점〕 정답 24

$\angle\mathrm{OQP}=\pi-\left(\theta+\dfrac{\theta}{3}\right)=\pi-\dfrac{4}{3}\theta$
삼각형 OPQ에서
$\dfrac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\sin\dfrac{\theta}{3}}=\dfrac{\overline{\mathrm{OP}}}{\sin\left(\pi-\dfrac{4}{3}\theta\right)}$
$\overline{\mathrm{OQ}}=\dfrac{\sin\dfrac{\theta}{3}}{\sin\dfrac{4}{3}\theta}\ \ (\because\ \overline{\mathrm{OP}}=1)$
$S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{OQ}}\times\sin\theta$
$=\dfrac{\sin\dfrac{\theta}{3}\sin\theta}{2\sin\dfrac{4}{3}\theta}\ \ (\because\ \overline{\mathrm{OP}}=1)$
$\therefore\ \lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{3\theta}{S(\theta)}=\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{6\theta\sin\dfrac{4}{3}\theta}{\sin\dfrac{\theta}{3}\sin\theta}$
$=6\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{\theta}{\sin\theta}\times\dfrac{\sin\dfrac{4}{3}\theta}{\dfrac{4}{3}\theta}\times\dfrac{\dfrac{\theta}{3}}{\sin\dfrac{\theta}{3}}\times 4$
$=24$

29. 이해력 – 이차곡선 〔4점〕 정답 8

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{FR}}=a$라 하고 점 F에서 직선 m에 내린 수선의 발을 H라 하면, 직각이등변삼각형 PHF에서
$\overline{\mathrm{HP}}=\overline{\mathrm{PF}}\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$



한편, 포물선의 정의로부터
$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF}}=a$
$\overline{\mathrm{OF}}=\sqrt{2}-1$
$\overline{\mathrm{HQ}}=2\overline{\mathrm{OF}}=2(\sqrt{2}-1)$
$\overline{\mathrm{HQ}}=\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{HP}}=a-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-1)a$
$\therefore\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-1)a=2(\sqrt{2}-1)$
$a=2\sqrt{2}$
$\therefore\ S=\dfrac{1}{2}a^2\sin 45^\circ$
$=\dfrac{1}{2}\times 8\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$
$\therefore\ S^2=8$

30. 이해력 – 적분법 〔4점〕 정답 350

$x_1=2+\dfrac{2}{n},\ x_2=2+\dfrac{4}{n},\ \cdots,\ x_k=2+\dfrac{2k}{n}$ 이므로
$f(x_k)=\ln\left(2+\dfrac{2k}{n}\right)$
$\therefore\ A_k=\dfrac{1}{2}\left(2+\dfrac{2k}{n}\right)\ln\left(2+\dfrac{2k}{n}\right)$
$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}A_k=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2}\left(2+\dfrac{2k}{n}\right)\ln\left(2+\dfrac{2k}{n}\right)$
$=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(2+\dfrac{2k}{n}\right)\ln\left(2+\dfrac{2k}{n}\right)$
$=\dfrac{1}{4}\int_2^4 x\ln x\,dx$
$p(x)=\ln x,\ q'(x)=x$라 하면
$p'(x)=\dfrac{1}{x},\ q(x)=\dfrac{1}{2}x^2$
$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}A_k=\dfrac{1}{4}\int_2^4 x\ln x\,dx$
$=\dfrac{1}{4}\left(\left[\dfrac{1}{2}x^2\ln x\right]_2^4-\int_2^4\dfrac{1}{2}x\,dx\right)$
$=\dfrac{1}{4}\left\{(8\ln 4-2\ln 2)-\left[\dfrac{1}{4}x^2\right]_2^4\right\}$
$=\dfrac{1}{4}(14\ln 2-3)$
$=-\dfrac{3}{4}+\dfrac{7}{2}\ln 2$
$\therefore\ a=\dfrac{7}{2}$
$\therefore\ 100a=350$