2023학년도 경북대학교 논술(AAT) 모의고사

자연계열 I 문제지

(의예과, 치의예과, 수의예과 제외)

시 험 시 간	100분	
지원학과(부)	학과(부, 전공)	감독위원 확인
수 험 번 호		㊞
성 명		

감독관의 지시가 있기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

< 수험생 유의 사항 >

※ 자연계열I 문제지와 자연계열I 답안지가 맞는지 반드시 확인(의예과, 치의예과, 수의예과 제외)

1. 문제지 및 답안지에 지원학과(부, 전공), 수험번호, 성명을 정확하게 기입할 것[반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것]
2. 문제지는 표지를 포함하여 4쪽으로 구성되어 있으며, 답안지는 3쪽으로 구성되어 있음
3. 답안지에 주어진 물음 번호에 맞추어 답안을 작성하되, 반드시 주어진 테두리 안에 답안을 작성할 것(테두리를 벗어난 부분은 채점 대상에서 제외함)
4. 답안의 작성은 반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것
5. 답안을 수정할 경우 지우개를 사용하거나 두 줄을 긋고 다시 작성하여야 함
6. 답안지에 자신의 신원을 드러내거나 문제와 관계없는 내용을 기록할 경우에는 “0”점 처리함
7. 연습지가 필요한 경우 문제지의 빈 공간을 사용할 수 있음

수학(문제 1)

[1] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 계승 $n! = n(n-1)(n-2)\times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$, $0! = 1$

순열의 수 ${}_n\mathrm{P}_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

조합의 수 ${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$

(나) 자연수의 거듭제곱의 합

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

(다) 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \quad (\text{단, } a < x < b)$$

(라) 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f'(a) = 0$이고 $x = a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x = a$에서 극소이고, 극솟값은 $f(a)$이다.

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

【1-1】 다음 물음에 답하시오.

(1) $\displaystyle\sum_{r=0}^{4} \frac{{}_{10}\mathrm{P}_r}{{}_{10}\mathrm{C}_{10-r}}$의 값을 구하시오. (25점)

(2) 등식 ${}_{n+1}\mathrm{P}_2 + {}_n\mathrm{C}_{n-2} = 26$을 만족시키는 자연수 n에 대하여 $\sin\dfrac{\pi}{n}$의 값을 구하시오. (25점)

【1-2】 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x) = 0$의 두 실근이 -3, 3일 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 함수 $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$가 $x = \alpha$에서 극솟값을 가질 때, α의 값을 구하시오. (20점)

(2) 함수 $h(x) = \displaystyle\int_x^{x+3} f(t)dt$의 최솟값이 $-\dfrac{33}{4}$일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} h(k)$의 값을 구하시오. (40점)

수학(문제 2)

[2] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) $x=a$에서 함수 $f(x)$의 우극한과 좌극한이 모두 존재하고, 그 값이 모두 L이면 $\lim_{x\to a} f(x)=L$이다.

(나) 함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 조건을 만족시킬 때, $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

(i) $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다.
(ii) 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재한다.
(iii) $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

(다) 함수 $f(x)$에 대하여 극한값

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

가 존재하면, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) a, b, c, d는 4 이하인 자연수
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=(x-m)(x+1)$ (단, $m>0$)
(다) $f'(1)=10$

다음 물음에 답하시오.

【2-1】 $f(2)$의 값을 모두 구하시오. (50점)

【2-2】 $\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=6$일 때, 두 함수 $g(x)$와 $\frac{4}{g(x)}$의 그래프의 교점의 개수가 1이 되도록 하는 m의 값을 구하시오. (30점)

【2-3】 $f(0)=3$일 때, 함수

$$h(x)=\begin{cases} k-g(x-m) & (x<m) \\ (x-m)g(x) & (x\ge m) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 상수 k의 값을 구하시오. (40점)

수학(문제 3)

[3] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x = f(t)$, $y = g(t)$일 때, 시각 $t = a$에서 $t = b$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}\, dt$$

(나) 미분가능한 함수 $t = g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 닫힌구간 $[\alpha, \beta]$에서 연속이고, 함수 $f(t)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$이면

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_\alpha^\beta f(g(x))\, g'(x)\, dx$$

(다) 함수 $f(x)$가 임의의 세 실수 a, b, c를 포함하는 닫힌구간에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx$$

(라) 두 함수 $f(x), g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(x) \le g(x)$일 때,

$$\int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b g(x)\, dx$$

(마) $|r| < 1$일 때, $\lim_{n \to \infty} r^n = 0$

(바) 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = \alpha \quad (\alpha\text{는 실수})$$

일 때, 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이면

$$\lim_{n \to \infty} c_n = \alpha$$

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가

$$x = \cos^n t, \quad y = \sin^n t$$

이다. 점 P가 $t = 0$에서 $t = \frac{\pi}{2}$까지 움직인 거리를 s_n, 점 P가 $t = 0$에서 $t = \frac{\pi}{4}$까지 움직인 거리를 a_n, 점 P가 $t = \frac{\pi}{4}$에서 $t = \frac{\pi}{2}$까지 움직인 거리를 b_n이라 하자. (단, n은 2 이상의 자연수)
다음 물음에 답하시오.

【3-1】 s_2의 값과 s_3의 값을 각각 구하시오. (30점)

【3-2】 $a_n = b_n$임을 증명하시오. (30점)

【3-3】 음이 아닌 모든 실수 α, β에 대하여 성립하는 부등식

$$(\alpha - \beta)^2 \le \alpha^2 + \beta^2 \le (\alpha + \beta)^2$$

을 이용하여 $\lim_{n \to \infty} s_n$의 값을 구하시오. (60점)

2023학년도 논술(AAT) 모의고사 예시 답안 및 채점 기준(자연계열 I)

[문항카드 1]

1. 예시 답안

【1-1】

(1) $\sum_{r=0}^{4}\frac{{}_{10}\mathrm{P}_r}{{}_{10}\mathrm{C}_{10-r}}=\sum_{r=0}^{4}\frac{{}_{10}\mathrm{P}_r}{{}_{10}\mathrm{C}_r}=\sum_{r=0}^{4}r!=1+1+2+6+24=34$

(2) ${}_{n+1}\mathrm{P}_2+{}_{n}\mathrm{C}_{n-2}=(n+1)n+\frac{n(n-1)}{2}=26$

따라서 $(n+1)n+\frac{n(n-1)}{2}-26=(n-4)(3n+13)=0$이므로 $n=4$이고 $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

【1-2】

(1) $g'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt=f(x)$이고 $f(x)=a(x-3)(x+3)$이다. $a>0$이므로 $x=3$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 갖는다.

(2) $f(x)=a(x-3)(x+3)$이라 할 때, $h(x)=a(3x^2+9x-18)$이므로 $x=-\frac{3}{2}$일 때, $h(x)$는 최솟값을 갖는다. $h(-\frac{3}{2})=-\frac{99a}{4}$이므로 $a=\frac{1}{3}$이고 $h(x)=x^2+3x-6$이다.

따라서 $\sum_{k=1}^{10}h(k)=385+165-60=490$이다.

$h(x)=a(3x^2+9x-18)$ (5점)

$x=-\frac{3}{2}$(10점)

$a=\frac{1}{3}$ (10점)

$h(x)=x^2+3x-6$ (5점)

$\sum_{k=1}^{10}h(k)=385+165-60=490$ (10점)

2. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	(1) $\sum_{r=0}^{4}r!$ 를 구하면 20점	50
	(2) 34를 구하면 5점	
	(2) $n=4$를 구하면 20점	
	(2) $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 를 구하면 5점	
1-2	(1) $g'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt=f(x)$를 구하면 5점	60
	(1) $\alpha=3$ 를 구하면 15점	
	(2) $h(x)=a(3x^2+9x-18)$를 구하면 5점	
	(2) $x=-\frac{3}{2}$를 구하면 10점	
	(2) $a=\frac{1}{3}$를 구하면 10점	
	(2) $h(x)=x^2+3x-6$를 구하면 5점	
	(2) $\sum_{k=1}^{10}h(k)=385+165-60=490$를 구하면 10점	

[문항카드 2]

1. 예시 답안

【2-1】 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라 하자.
m이 양수이므로 조건 (가)에 의해 $f(m)>0$이고 조건 (나)에 의해 $g(m)=0$이다.

조건 (나)에 의해 $f(x)=0$의 근이 아닌 실수 x에 대하여 $g(x)=\dfrac{(x-m)(x+1)}{f(x)}$이다.

만약 $f(-1)\neq 0$이라고 가정하면 삼차식 $f(x)$는 $x-m$과 $x+1$를 인수로 가지지 않는다.
한편, $f(x)=0$은 삼차방정식이므로 적어도 실근 1개를 항상 가진다. 그 실근을 $x=\alpha$라고 하면 $\lim_{x\to\alpha+}g(x)=\infty$ 또는 $\lim_{x\to\alpha+}g(x)=-\infty$이므로 $g(x)$는 $x=\alpha$에서 불연속이고 $g(x)$는 연속함수라는 조건에 모순이다. 그러므로 $f(-1)=0$이다.

조건 (다)에 의해 $3a+2b+c=10$이고 $1\le a,b,c,d\le 4$인 자연수이므로 다음 두 가지 경우가 존재한다.
(i) $a=2, b=1, c=2, d=3$; (ii) $a=1, b=2, c=3, d=2$
$f(-1)=0$을 이용하면 $f(x)$와 $g(x)$를 각각 다음과 같이 구할 수 있다.
(i) $f(x)=2x^3+x^2+2x+3=(x+1)(2x^2-x+3)$이고 $g(x)=\dfrac{x-m}{2x^2-x+3}$
(ii) $f(x)=x^3+2x^2+3x+2=(x+1)(x^2+x+2)$이고 $g(x)=\dfrac{x-m}{x^2+x+2}$
(i)과 (ii)는 모두 $g(x)$의 분모가 0인 실수 x가 존재하지 않으므로 $g(x)$는 연속함수이다. 즉, 조건을 만족하는 $f(x)$와 $g(x)$는 (i)와 (ii) 경우 모두 성립한다. 그러므로 $f(2)$의 값은 27 또는 24이다

【2-2】 $\lim_{x\to-1}\dfrac{f(x)}{(x+1)}=6$을 만족하는 경우는 오직 (i) 경우이다. 그러므로 $g(x)=\dfrac{x-m}{2x^2-x+3}$ 이다.
$g(x)=\dfrac{4}{g(x)}$ 에서 $\{g(x)\}^2=4$ 이므로, $g(x)=2$ 또는 $g(x)=-2$ 이다.
① $g(x)=2$이면 $4x^2-3x+6+m=0$이고 $m=-\dfrac{87}{16}$이다. 그러나 $m>0$이라는 조건에 모순이다.
② $g(x)=-2$이면 $4x^2-x+6-m=0$이고 $m=\dfrac{95}{16}$이다.

【2-3】 $f(0)=3$만족하는 경우는 오직 (i)경우이다. 따라서 $g(x)=\dfrac{x-m}{2x^2-x+3}$ 이다.
함수 $h(x)$가 $x=m$에서 미분가능하므로
$\lim_{x\to m-}\dfrac{h(x)-h(m)}{x-m}=\lim_{x\to m+}\dfrac{h(x)-h(m)}{x-m}$ 에서
$\lim_{x\to m-}\dfrac{\{k-g(x-m)\}-k}{x-m}=\lim_{x\to m+}\dfrac{(x-m)g(x)-0}{x-m}$ 이고 $-g'(0)=g(m)$.
따라서 $m=3$이다.
함수 $h(x)$가 $x=m$에서 연속이므로
$\lim_{x\to m-}\{k-g(x-m)\}=\lim_{x\to m+}(x-m)g(x)=h(m)$ 에서 $k=g(0)$ 이다.

그러므로 $k=-\dfrac{m}{3}=-1$이다.

2. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
【2-1】	$g(m)=0$임을 보이면 10점 $f(-1)=0$임을 보이면 10점 조건을 모두 만족하는 $f(x)$와 $g(x)$는 각각 다음과 같음을 보이면 20점 (i) $f(x)=2x^3+x^2+2x+3=(x+1)(2x^2-x+3)$이고 $g(x)=\dfrac{x-m}{2x^2-x+3}$ (ii) $f(x)=x^3+2x^2+3x+2=(x+1)(x^2+x+2)$이고 $g(x)=\dfrac{x-m}{x^2+x+2}$ $f(2)$의 값은 27 또는 24임을 보이면 10점	50
【2-2】	$\lim_{x\to-1}\dfrac{f(x)}{(x+1)}=6$을 만족하는 경우 $g(x)=\dfrac{x-m}{2x^2-x+3}$ 임을 보이면 10점 조건을 만족하는 경우는 오직 $g(x)=2$일때이고 그때 $m=\dfrac{95}{16}$임을 보이면 20점	30
【2-3】	조건을 만족할 때 $g(x)=\dfrac{x-m}{2x^2-x+3}$ 임을 보이면 10점 미분조건을 이용하여 $-g'(0)=g(m)$ 이고 $m=3$임을 보이면 20점 연속조건을 이용하여 $k=g(0)$ 이고 $k=-\dfrac{m}{3}=-1$임을 보이면 10점	40

[문항카드 3]

1. 예시 답안

【3-1】 $\frac{dx}{dt} = -n\cos^{n-1}t\sin t$, $\frac{dy}{dt} = n\sin^{n-1}t\cos t$이므로

$$s_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-n\cos^{n-1}t\sin t)^2 + (n\sin^{n-1}t\cos t)^2}\, dt = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\sqrt{\cos^{2n-4}t + \sin^{2n-4}t}\, dt$$

임을 알 수 있다. 따라서,

$$s_2 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\sqrt{1+1}\, dt = 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t dt = \sqrt{2},$$

$$s_3 = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\, dt = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t dt = \frac{3}{2}$$

이다.

【3-2】 임의의 실수 t에 대하여 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \cos t$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \sin t$가 성립하므로, $\frac{\pi}{2}-t = u$라 두고 치환적분을 이용하면

$$a_n = n\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t\cos t\sqrt{\cos^{2n-4}t + \sin^{2n-4}t}\, dt = n\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u\sin u\sqrt{\sin^{2n-4}u + \cos^{2n-4}u}\, du = b_n$$

임을 알 수 있다.

【3-3】

$$s_n = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\sqrt{\cos^{2n-4}t + \sin^{2n-4}t}\, dt$$
$$= n\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t\cos t\sqrt{\cos^{2n-4}t + \sin^{2n-4}t}\, dt + n\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\sqrt{\cos^{2n-4}t + \sin^{2n-4}t}\, dt = a_n + b_n$$

이고 $a_n = b_n$이므로, $s_n = 2a_n$이 성립함을 알 수 있다.

한편, $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$인 실수 t에 대하여,

$$\cos^{n-2}t - \sin^{n-2}t \le \sqrt{\cos^{2n-4}t + \sin^{2n-4}t} \le \cos^{n-2}t + \sin^{n-2}t$$

가 성립하므로,

$$n\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t\cos t(\cos^{n-2}t - \sin^{n-2}t)\, dt \le a_n = n\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t\cos t\sqrt{\cos^{2n-4}t + \sin^{2n-4}t}\, dt$$
$$\le n\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t\cos t(\cos^{n-2}t + \sin^{n-2}t)\, dt$$

임을 알 수 있다. 여기서

$$n\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t\cos t(\cos^{n-2}t - \sin^{n-2}t)\, dt = \left[-\cos^n t - \sin^n t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n,$$

$$n\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t\cos t(\cos^{n-2}t + \sin^{n-2}t)\, dt = \left[-\cos^n t + \sin^n t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$$

이므로, $1 - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \le a_n \le 1$이 성립함을 알 수 있다.

따라서, $2 - 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \le s_n \le 2$가 성립하므로 $\lim_{n\to\infty} s_n = 2$이다.

2. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-1	$s_2 = \sqrt{2}$를 구하면 15점	30
	$s_3 = \frac{3}{2}$를 구하면 15점	
3-2	$\frac{\pi}{2} - t = u$라 두고 치환적분을 이용하면 15점	30
	$a_n = b_n$임을 보이면 15점	
3-3	부등식 $n\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t\cos t(\cos^{n-2}t - \sin^{n-2}t)\, dt \le a_n = n\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t\cos t\sqrt{\cos^{2n-4}t + \sin^{2n-4}t}\, dt \le n\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t\cos t(\cos^{n-2}t + \sin^{n-2}t)\, dt$ 를 보이면 20점	60
	부등식 $2 - 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \le s_n \le 2$를 보이면 20점	
	$\lim_{n\to\infty} s_n = 2$를 구하면 20점	