# 수학 영역

## [A형]

**1. 계산 능력 – 지수함수와 로그함수** [2점] 정답 ①

$$\log_3\frac{4}{9}-\log_3\sqrt{48}=\log_3\left(\frac{4}{9}\times\frac{1}{\sqrt{48}}\right)$$
$$=\log_3\left(\frac{4}{9}\times\frac{1}{4\sqrt{3}}\right)$$
$$=\log_3\frac{1}{9\sqrt{3}}$$
$$=\log_3 3^{-\frac{5}{2}}$$
$$=-\frac{5}{2}$$

**2. 계산 능력 – 수열의 극한** [2점] 정답 ③

$$\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n(n+1)}-n\}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)-n^2}{\sqrt{n(n+1)}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$
$$=\frac{1}{2}$$

**3. 이해력 – 수열** [2점] 정답 ②

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차를 각각 $a$, $d$라 하면
$a_2=5$에서 $a+d=5$
$a_5=17$에서 $a+4d=17$
이므로
$a=1$, $d=4$
$\therefore a_{10}=a+9d=1+9\cdot4=37$

**4. 이해력 – 지수함수와 로그함수** [3점] 정답 ②

$3^x+3^{1-x}=4$에서 $3^x=t\,(t>0)$라 하면
$t+\frac{3}{t}=4$
$t^2-4t+3=0$
$(t-1)(t-3)=0$
$\therefore t=1$ 또는 $t=3$
$3^x=1$에서 $x=0$
$3^x=3$에서 $x=1$
따라서, 구하는 모든 실근의 합은
$0+1=1$

**5. 이해력 – 수열의 극한** [3점] 정답 ①

$S_n=n^2-2n$이므로
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(n^2-2n)-\{(n-1)^2-2(n-1)\}$
$=2n-3\,(n\ge2)$
이때, $a_1=S_1=-1$이므로
$a_n=2n-3\,(n\ge1)$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{a_na_{n+1}}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-3)(2n-1)}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{(-1-1)+\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(-1-\frac{1}{2n-1}\right)$$
$$=-1$$

**6. 이해력 – 함수의 극한과 연속** [3점] 정답 ②

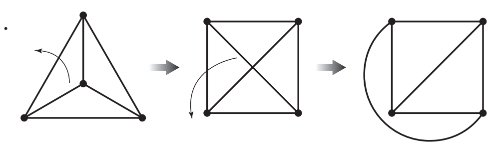
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=2$에서도 연속이다.
$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$에서
$\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=1$ ······ ㉠
$x\to2$일 때 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.
$\therefore \lim_{x\to2}(x^2+ax+b)=4+2a+b=0$
$\therefore b=-2a-4=-2(a+2)$ ······ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-2(a+2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}(x+a+2)=4+a$$

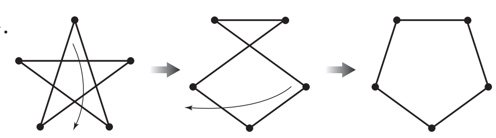
㉠에 의해 $4+a=1$이므로 $a=-3$이고, $b=2$이다.
$\therefore a+b=(-3)+2=-1$

**7. 이해력 – 행렬과 그래프** [3점] 정답 ⑤

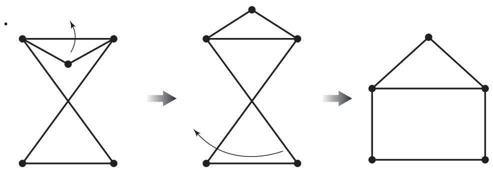
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.



따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ은 각각 서로 같은 그래프이다.

**8. 추론 능력(추측) – 행렬과 그래프** [3점] 정답 ②

$A=\begin{pmatrix}2&m\\1&-2\end{pmatrix}$에서
$A^2=\begin{pmatrix}2&m\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&m\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m+4&0\\0&m+4\end{pmatrix}$
$=(m+4)E$
$A^9=(A^2)^4A=(m+4)^4\begin{pmatrix}2&m\\1&-2\end{pmatrix}$
따라서, 행렬 $A^9$의 모든 성분의 합은
$(m+4)^4(2+m+1-2)=(m+4)^4(m+1)=-2$
이때, $m$이 정수이므로 $m+4$와 $m+1$도 정수이다.
따라서, $(m+4)^4=1$이고, $m+1=-2$이어야 한다.
$(m+4)^4=1$에서 $m+4=\pm1$
$\therefore m=-3$ 또는 $m=-5$ ······ ㉠
또, $m+1=-2$에서 $m=-3$ ······ ㉡
㉠, ㉡에서 $m=-3$

**9. 이해력 – 지수함수와 로그함수** [3점] 정답 ⑤

$n$이 두 자리의 수이므로 $f(n)=1$이다.
$f(2n)=f(n)+1$에서 $f(2n)=1+1=2$이므로
$2\le\log2n<3$
$100\le2n<1000$
$\therefore 50\le n<500$
이때, $n$이 두 자리의 수이므로
$50\le n<100$
$\therefore m=50$, $M=99$
$\therefore M-m=99-50=49$

**10. 추론 능력(증명) – 수열** [3점] 정답 ②

㉡ – ㉠을 하면
$a_{n+1}-a_n=2\cdot3^n+2a_n$
$\therefore a_{n+1}=\boxed{2\cdot3^n}+3a_n\,(n\ge2)$ ······ (*)
이때, $a_2=3^2+2a_1=9+2\cdot3=15$이고, (*)에 $n=1$을 대입하면 $a_2=2\cdot3^1+3a_1=2\cdot3+3\cdot3=15$이므로 $n=1$일 때도 (*)이 성립한다.
(*)의 양변을 $3^{n+1}$으로 나누면 $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{2}{3}+\frac{a_n}{3^n}$
따라서, 수열 $\left\{\frac{a_n}{3^n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{a_1}{3}=\frac{3}{3}=1$이고 공차가 $\frac{2}{3}$인 등차수열이다.
$\frac{a_n}{3^n}=1+(n-1)\cdot\frac{2}{3}=\frac{2n+1}{3}$
$\therefore a_n=(\boxed{2n+1})\cdot3^{n-1}$
$\therefore f(n)=2\cdot3^n$, $g(n)=2n+1$
$\therefore \frac{f(5)}{g(13)}=\frac{2\cdot3^5}{27}=18$

**11. 이해력 – 수열** [3점] 정답 ③

점 $\mathrm{P}(n,\,n^2)$일 때, 점 $\mathrm{C}(0,\,a_n)$이므로 원의 방정식은
$x^2+(y-a_n)^2=a_n^{\,2}$이다.
따라서, 위의 원의 방정식을 $y=x^2$과 연립하면
$x^2+(x^2-a_n)^2=a_n^{\,2}$
$x^2+x^4-2a_nx^2+a_n^{\,2}=a_n^{\,2}$
$x^2(x^2-2a_n+1)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x^2=2a_n-1$ ······ ㉠
점 P의 $x$좌표가 $n$이므로 ㉠에 $x=n$을 대입하면
$n^2=2a_n-1$
$a_n=\frac{n^2+1}{2}$
$\therefore \sum_{n=1}^{10}2a_n=\sum_{n=1}^{10}(n^2+1)=\frac{10\cdot11\cdot21}{6}+10=395$

**12. 이해력 – 함수의 극한과 연속** [4점] 정답 ④

점 C의 좌표가 $(0,\,2t)$이므로 $\overline{\mathrm{CO}}=\overline{\mathrm{CP}}=2t$이다.
점 P의 $x$좌표를 $a$라 할 때, $\mathrm{P}(a,\,a^2)$이므로
$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{a^2+(a^2-2t)^2}=2t$
$a^2+a^4-4ta^2+4t^2=4t^2$
$1+a^2-4t=0\,(\because a\ne0)$
$a^2=4t-1$
$\therefore a=\sqrt{4t-1}\,(\because a>0)$
$\therefore \mathrm{P}(\sqrt{4t-1},\,4t-1)$
이때, 삼각형 COP에서 밑변을 $\overline{\mathrm{CO}}$로 보면 높이는 점 P의 $x$좌표이므로
$f(t)=\frac{1}{2}\times2t\times\sqrt{4t-1}=t\sqrt{4t-1}$

$$\therefore \lim_{t\to\frac{1}{4}+0}\frac{f(t)}{\sqrt{t-\frac{1}{4}}}=\lim_{t\to\frac{1}{4}+0}\frac{t\sqrt{4t-1}}{\sqrt{t-\frac{1}{4}}}$$
$$=\lim_{t\to\frac{1}{4}+0}2t=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

**13. 이해력 – 행렬과 그래프** [3점] 정답 ③

ㄱ. $A+B=E$에서 $A=E-B$이므로
$AB=(E-B)B=B-B^2=B(E-B)=BA$
따라서, $A+B=E$는 $AB=BA$이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. 【반례】 $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$이면
$A^2=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$, $B^2=(AB)^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$이므로
$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$에서 $(AB)^2=A^2B^2$이다.
한편, $AB=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$이므로
$AB\ne BA$이다.
따라서, $(AB)^2=A^2B^2$은 $AB=BA$이기 위한 충분조건이 아니다.

ㄷ. $A^2B+A=E$에서 ······························ ㉠

$A(AB+E)=E$

$\therefore A^{-1}=AB+E$

$A^{-1}A=(AB+E)A$

$E=ABA+A$ ······························ ㉡

㉠, ㉡에서

$A^2B+A=ABA+A$

$A^2B=ABA$

$A^{-1}A^2B=A^{-1}ABA$

$\therefore AB=BA$

따라서, $A^2B+A=E$는 $AB=BA$이기 위한 충분조건이다.

**14. 추론 능력(추측) – 함수의 극한과 연속** [4점] 정답 ①

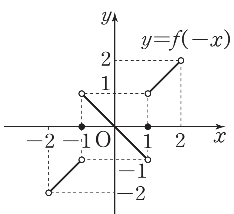
문제의 그래프에 의해

$$f(x)=\begin{cases} -x & (-2<x<-1 \text{ 또는 } 1<x<2) \\ 0 & (x=\pm1) \\ x & (-1<x<1) \end{cases}$$

ㄱ. 함수 $y=f(-x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 $y$축에 대하여 대칭이동시킨 것이므로 [그림 1]과 같다.

$\therefore f(x)+f(-x)=0$

따라서, 함수 $y=f(x)+f(-x)$는 열린 구간 $(-2, 2)$에서 연속이다.




[그림 1]

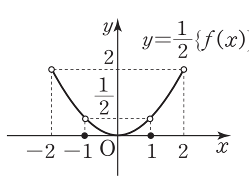
ㄴ. $\frac{1}{2}\{f(x)\}^2=\begin{cases} \frac{x^2}{2} & (x\neq\pm1) \\ 0 & (x=\pm1) \end{cases}$

함수 $y=\frac{1}{2}\{f(x)\}^2$의 그래프는 [그림 2]와 같으므로

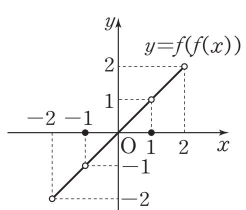
함수 $y=\frac{1}{2}\{f(x)\}^2$는 $x=\pm1$에서 불연속이다.

ㄷ. $f(f(x))=\begin{cases} x & (x\neq\pm1) \\ 0 & (x=\pm1) \end{cases}$

함수 $y=f(f(x))$의 그래프는 [그림 3]과 같으므로 함수 $y=f(f(x))$는 $x=\pm1$에서 불연속이다.



[그림 2]




[그림 3]

**15. 수학 외적 문제 해결 능력 – 지수함수와 로그함수**

[4점] 정답 ④

어제 하루 동안 제품 K를 50톤 생산하였으므로 어제 제품 K의 1톤당 가격은

$F(50)=\log_2\left(30+\frac{300}{50}\right)^{10}=10\log_2 36$

오늘 제품 K의 1톤당 가격이 어제보다 10(천 원)이 올랐으므로 오늘 하루 동안 생산한 제품 K의 생산량을 $t$톤이라 하면

$F(50)+10=\log_2\left(30+\frac{300}{t}\right)^{10}$

$10\log_2 36+10=10\log_2\left(30+\frac{300}{t}\right)$

$\log_2 36+1=\log_2\left(30+\frac{300}{t}\right)$

$\log_2(36\times2)=\log_2\left(30+\frac{300}{t}\right)$

$72=30+\frac{300}{t}$

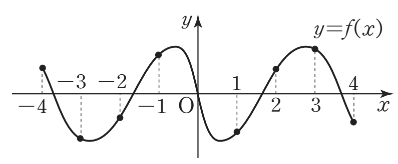
$\therefore t=\frac{300}{42}=\frac{50}{7}$(톤)

**16. 추론 능력(추측) – 함수의 극한과 연속** [4점] 정답 ④

$f(-x)=-f(x)$에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=0$이므로 $x=0$은 방정식 $f(x)=0$의 근이다.

조건 (나)에서 $f(1)f(2)<0$이므로 $f(1)$과 $f(2)$의 부호가 다르고, $f(3)f(4)<0$이므로 $f(3)$과 $f(4)$의 부호가 다르다. 또, 조건 (가)에 의해 $f(-1)f(-2)<0$, $f(-3)f(-4)<0$이므로 $f(-1)$과 $f(-2)$의 부호가 다르고, $f(-3)$과 $f(-4)$의 부호가 다르다. 이때, 함수 $f(x)$가 연속함수이므로 중간값의 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$은 열린 구간 $(-4, -3)$, $(-2, -1)$, $(1, 2)$, $(3, 4)$에서 각각 적어도 하나의 근을 가진다.

따라서, 방정식 $f(x)=0$은 $x=0$과 열린 구간 $(-4, -3)$, $(-2, -1)$, $(1, 2)$, $(3, 4)$에서 모두 4개의 실근을 가지므로 실근의 개수 $m$의 최솟값은 $1+4=5$이다.




**17. 이해력 – 행렬과 그래프** [4점] 정답 ①

두 직선 $l: ax+by=1$, $m: cx+dy=1$이 점 $(3, 1)$에서 만나므로

$\begin{cases} 3a+b=1 \\ 3c+d=1 \end{cases}$ (⋯ ㉠), 즉 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

이때, 두 직선 $l$, $m$이 한 점에서 만나므로 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$는 역행렬을 가진다.

$\therefore ad-bc\neq0$

연립방정식 ㉠에서

$\begin{cases} (-3)(-a)+b=1 \\ (-3)(-c)+d=1 \end{cases}$, 즉 $\begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

이때, $-ad+bc\neq0$이므로 행렬 $\begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix}$는 역행렬을 가진다.

$\therefore \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

이때, 문제에서 주어진 연립방정식의 해가 $x=\alpha$, $y=\beta$이므로

$\begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha-1 \\ \beta+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} \alpha-1 \\ \beta+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

따라서, $\alpha-1=-3$에서 $\alpha=-2$

$\beta+2=1$에서 $\beta=-1$

$\therefore \alpha+\beta=-3$

【다른 풀이】

$\begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$에서

$-a(x-1)+b(y+2)=1$ ······························ ㉠

$-c(x-1)+d(y+2)=1$ ······························ ㉡

따라서, ㉠, ㉡은 각각 두 직선 $l$, $m$을 $y$축에 대하여 대칭이동한 후 $x$축의 방향으로 1, $y$축의 방향으로 $-2$만큼 평행이동한 것이다.

그러므로 ㉠, ㉡의 교점 $(\alpha, \beta)$는 점 $(3, 1)$을 $y$축에 대하여 대칭이동한 후 $x$축의 방향으로 1, $y$축의 방향으로 $-2$만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore \alpha=-3+1=-2$, $\beta=1-2=-1$

$\therefore \alpha+\beta=-3$

**18. 수학 내적 문제 해결 능력 – 지수함수와 로그함수**

[4점] 정답 ⑤

$2^x=t\,(t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-4t+n=0$ ······························ ㉠

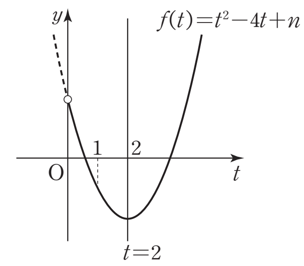
$x<0$에서 $0<t<1$이므로 주어진 방정식이 음의 실근을 갖기 위해서는 ㉠의 방정식이 $0<t<1$에서 근을 가져야 한다.

$f(t)=t^2-4t+n$

$=(t-2)^2+n-4$

라 하면 곡선 $y=f(t)$의 축의 방정식은 $t=2$이다.

따라서, $0<t<1$에서 근을 갖기 위해서는 그림과 같이




$\lim_{t\to+0}f(t)>0$, $f(1)<0$을 만족시켜야 한다.

$\therefore \lim_{t\to+0}f(t)=n>0$, $f(1)=-3+n<0$, 즉 $n<3$

$\therefore 0<n<3$

따라서, 구하는 정수 $n$은 1과 2이므로

$1+2=3$

**19. 수학 내적 문제 해결 능력 – 수열의 극한**

[4점] 정답 ③

$A_1(2, 3)$에서 $a_1=2$이다.

점 $A_n$의 $x$좌표가 $a_n$이고 점 $A_n$은 직선 $y=2x-1$ 위의 점이므로 $A_n(a_n, 2a_n-1)$, $A_{n+1}(a_{n+1}, 2a_{n+1}-1)$이다.

이때, 점 $B_n$의 $y$좌표와 점 $A_n$의 $y$좌표가 같고, 점 $B_n$은 직선 $y=x$ 위의 점이므로

$B_n(2a_n-1, 2a_n-1)$이다.

또, 점 $B_n$의 $x$좌표와 점 $A_{n+1}$의 $x$좌표가 같으므로

$a_{n+1}=2a_n-1$

$\therefore a_{n+1}-1=2(a_n-1)$

따라서, 수열 $\{a_n-1\}$은 첫째항이 $a_1-1=2-1=1$이고 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n-1=2^{n-1}$

$\therefore a_n=2^{n-1}+1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+5}-a_{n+3}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+4}-2^{n+2}}{2^{n-1}+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^5-2^3}{1+\frac{1}{2^{n-1}}}$$

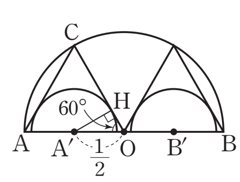
$$=2^5-2^3=24$$

**20. 추론 능력(추측) – 수열의 극한** [4점] 정답 ①

[그림 1]에서 $\overline{AO}=1$이므로

$S_1=2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times1^2\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

오른쪽 그림과 같이 정삼각형의 꼭짓점을 C라 하고, 점 A′에서 선분 CO에 내린 수선의 발을 H라 하면




$\overline{A'O}=\frac{1}{2}$이고

$\angle A'OH=60°$이므로

$\overline{A'H}=\frac{1}{2}\sin60°=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\therefore S_2=2^2\times\left\{\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2\right\}=\frac{3\sqrt{3}}{16}$

따라서, 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{\sqrt{3}}{2}$이고 공비가 $\frac{3}{8}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{3}{8}}=\frac{4\sqrt{3}}{5}$$

**21. 수학 내적 문제 해결 능력 – 지수함수와 로그함수** [4점] 정답 ①

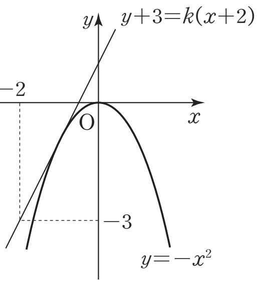
로그의 진수 조건에 의해

$x>-2,\ y>-3$ ······ ㉠

$\log_3(y+3)-\log_3(x+2)=\log_3\dfrac{y+3}{x+2}$에서 밑이 1보다 크므로 $\dfrac{y+3}{x+2}$이 최대일 때, 주어진 식도 최댓값을 가진다.

$\dfrac{y+3}{x+2}=k$라 하면 $y+3=k(x+2)$ ······ ㉡

이때, 직선 ㉡은 항상 점 $(-2,\ -3)$을 지나고, $k$는 직선 ㉡의 기울기이므로 곡선 $y=-x^2(\cdots ㉢)$과 직선 ㉡이 접할 때 $k$는 최댓값을 가진다.




㉡, ㉢을 연립하면

$-x^2+3=k(x+2)$

$x^2+kx+2k-3=0$

위의 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면 직선과 곡선이 접하므로 $D=0$이 되어야 한다.

$D=k^2-4(2k-3)=k^2-8k+12$

$=(k-2)(k-6)=0$

$\therefore k=2$ 또는 $k=6$

(i) $k=2$이면 $y+3=2(x+2),\ y=2x+1$
이때, 직선 $y=2x+1$과 곡선 $y=-x^2$의 교점의 좌표는 $(-1,\ -1)$이다.

(ii) $k=6$이면 $y+3=6(x+2),\ y=6x+9$
이때, 직선 $y=6x+9$와 곡선 $y=-x^2$의 교점의 좌표는 $(-3,\ -9)$이다. 따라서, 조건 ㉠에 모순이다.

(i), (ii)에서 $k=2$이므로 구하는 최댓값은 $\log_3 2$이다.

**22. 계산 능력 – 수열** [3점] 정답 420

$\sum_{k=1}^{10}(2k+1)(k+1)-\sum_{k=1}^{9}k(2k-1)$

$=\sum_{k=1}^{9}(2k+1)(k+1)+21\cdot 11-\sum_{k=1}^{9}k(2k-1)$

$=231+\sum_{k=1}^{9}\{(2k^2+3k+1)-(2k^2-k)\}$

$=231+\sum_{k=1}^{9}(4k+1)$

$=231+4\cdot\dfrac{9\cdot 10}{2}+9$

$=420$

**23. 이해력 – 지수함수와 로그함수** [3점] 정답 90

점 A의 $y$좌표와 점 B의 $y$좌표가 $k$이므로

$\mathrm{A}(2^k,\ k),\ \mathrm{B}(4^k,\ k)$

이때, $\overline{\mathrm{AB}}=2$이므로

$4^k-2^k=2$

$(2^k)^2-2^k-2=0$

$(2^k-2)(2^k+1)=0$

$\therefore 2^k=2\ (\because 2^k>0)$

$\therefore k=1$

$\therefore \mathrm{A}(2,\ 1),\ \mathrm{B}(4,\ 1),\ \mathrm{A}'\left(2,\ \dfrac{1}{2}\right),\ \mathrm{B}'(4,\ 2)$

$\therefore \overline{\mathrm{AA}'}=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2},\ \overline{\mathrm{BB}'}=2-1=1$

$\therefore m=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$

$\therefore 60m=90$

**24. 이해력 – 행렬과 그래프** [3점] 정답 18

$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2=A^2+2AB+B^2$에서 $AB=BA$

$AB=\begin{pmatrix}a & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -b\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a-1 & -ab+1\\ 7 & -2b-3\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}2 & -b\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a-2b & -2-3b\\ a-2 & -4\end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에서

$7=a-2 \qquad \therefore a=9$

$-2b-3=-4 \qquad \therefore b=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \dfrac{a}{b}=\dfrac{9}{\frac{1}{2}}=18$

**25. 이해력 – 수열** [3점] 정답 363

$a_1=2,\ a_{n+1}-a_n=2n-1$이므로

$a_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$

$=2+2\times\dfrac{(n-1)n}{2}-(n-1)$

$=n^2-2n+3$

$\therefore a_{20}=20^2-2\times 20+3=363$

**26. 이해력 – 행렬과 그래프** [3점] 정답 8

$A=\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}$라 하면

$\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$에서

$x+y=2,\ z+w=1$ ······ ㉠

$\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ 4\end{pmatrix}$에서

$2x+3y=a,\ 2z+3w=4$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$x=6-a,\ y=a-4,\ z=-1,\ w=2$

$\therefore A=\begin{pmatrix}6-a & a-4\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

이때, 행렬 $A$가 역행렬을 갖지 않으므로

$2(6-a)+(a-4)=0$

$\therefore a=8$

【다른 풀이】

$A\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ 4\end{pmatrix}$에서

$A\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & a\\ 1 & 4\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}2 & a\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & a\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}6-a & a-4\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

이때, 행렬 $A$가 역행렬을 갖지 않으므로

$2(6-a)+(a-4)=0$

$\therefore a=8$

**27. 수학 내적 문제 해결 능력 – 수열** [4점] 정답 21

$y=\log_{\frac{1}{2}}x$와 $y=\log_2 x-2n$에서

$\log_{\frac{1}{2}}x=\log_2 x-2n$

$-\log_2 x=\log_2 x-2n$

$2\log_2 x=2n$

$x=2^n$

$\therefore a_n=2^n$

$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}2^k=\dfrac{2(2^n-1)}{2-1}=2^{n+1}-2$

$\therefore \log_2(S_{20}+2)=\log_2 2^{21}=21$

**28. 이해력 – 수열의 극한** [4점] 정답 320

선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$의 중점이 $\mathrm{A}_{n+2}$이므로

$a_{n+2}=\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$

$a_{n+2}-a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)$

이므로 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 첫째항이 $a_2-a_1=3-2=1$이고 공비가 $-\dfrac{1}{2}$인 등비수열이다.

$a_{n+1}-a_n=1\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}=2+\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{2+\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}\right\}$

$=2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$=2+\dfrac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=2+\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{3}$

$\therefore 120m=120\times\dfrac{8}{3}=320$

**29. 추론 능력(추측) – 수열** [4점] 정답 575

$a_1=1,\ a_2=6,\ a_3=11,\ a_4=3,\ a_5=8,\ a_6=13,$
$a_7=5,\ a_8=10,\ a_9=2,\ a_{10}=7,\ a_{11}=12,\ a_{12}=4,$
$a_{13}=9,\ a_{14}=1,\ \cdots$

$\therefore a_{n+13}=a_n$

이때, $83=13\times 6+5$이고

$a_1+a_2+\cdots+a_{13}=1+2+\cdots+13$

$=\dfrac{13\cdot 14}{2}=91$

$\therefore \sum_{n=1}^{83}a_n=6\sum_{n=1}^{13}a_n+\sum_{n=1}^{5}a_n$

$=6\times 91+(1+6+11+3+8)=575$

**30. 수학 내적 문제 해결 능력 – 지수함수와 로그함수** [4점] 정답 102

$\log a^{50}$의 지표가 20이므로

$20\le\log a^{50}<21$

$\therefore 0.4\le\log a<0.42$ ······ ㉠

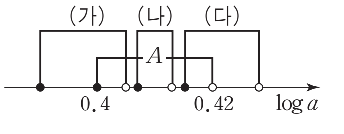
또, $\log a^n$의 지표가 10이므로

$10\le\log a^n<11$

$10\le n\log a<11$

$\therefore \dfrac{10}{n}\le\log a<\dfrac{11}{n}$ ······ ㉡

$A\cap B_n\ne\varnothing$이므로 ㉠, ㉡의 공통 부분이 존재해야 한다.




㉡의 범위가 위의 그림의 (가) 또는 (나) 또는 (다)이어야 하므로

$\dfrac{10}{n}<0.42$이고 $\dfrac{11}{n}>0.4$

$0.42n>10$이고 $0.4n<11$

$\therefore 23.8\cdots<n<27.5$

따라서, 구하는 자연수는 24, 25, 26, 27이므로 그 합은 $24+25+26+27=102$이다.

## ● [B형]

**1. A형 1번과 동일** [2점] 정답 ①

**2. 계산 능력 – 적분법** [2점] 정답 ①

$\int_0^1(x-e^{2x})dx=\left[\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1$

$=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}e^2\right)-\left(0-\dfrac{1}{2}\right)$

$=\dfrac{2-e^2}{2}$

**3. 이해력 – 방정식과 부등식** [2점] 정답 ③

$\sqrt{x(x+1)}=(x-2)\sqrt{x+1}$의 양변을 제곱하면

$x(x+1)=(x-2)^2(x+1)$

$(x+1)(x^2-4x+4-x)=0$

$(x+1)(x^2-5x+4)=0$

$(x+1)(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=4$

이때, $x=1$은 무연근이므로 모든 실근의 합은

$(-1)+4=3$

**4. 이해력 – 삼각함수** [3점] 정답 ⑤

삼각형 ABC가 예각삼각형이므로

$\cos A=\frac{1}{3}$에서 $\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{3}$에서 $\cos B=\frac{\sqrt{6}}{3}$

$$\begin{aligned}\therefore \sin C&=\sin(\pi-A-B)\\&=\sin(A+B)\\&=\sin A\cos B+\cos A\sin B\\&=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\\&=\frac{5\sqrt{3}}{9}\end{aligned}$$

**5. A형 5번과 동일** [3점] 정답 ①

**6. 이해력 – 삼각함수** [3점] 정답 ③

$\cos 2x=\cos x-\sin x$에서

$\cos^2 x-\sin^2 x=\cos x-\sin x$

$(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)=\cos x-\sin x$

$(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x-1)=0$

$\therefore \cos x=\sin x$ 또는 $\cos x+\sin x=1$

(i) $\cos x=\sin x$일 때

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

(ii) $\cos x+\sin x=1$일 때

$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$

(i), (ii)에서 구하는 모든 근의 합은

$\frac{\pi}{4}+\frac{5}{4}\pi+0+\frac{\pi}{2}=2\pi$

**7. 이해력 – 미분법** [3점] 정답 ②

$\tan\theta$의 최댓값은 직선 OP가 곡선 $y=\frac{\ln x}{x}$에 접할 때의 접선의 기울기이다. ………… ㉠

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{\ln t}{t}\right)$라 하면 $y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$이므로 점 P를 지나는 접선의 방정식은

$y-\frac{\ln t}{t}=\frac{1-\ln t}{t^2}(x-t)$

위의 직선이 원점을 지나야 하므로

$0-\frac{\ln t}{t}=\frac{1-\ln t}{t^2}(0-t)$

$\ln t=\frac{1}{2}\qquad \therefore t=e^{\frac{1}{2}}$

따라서, $\tan\theta$의 최댓값은 ㉠에 의해

$\frac{1-\ln t}{t^2}=\frac{1-\ln e^{\frac{1}{2}}}{\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2}=\frac{\frac{1}{2}}{e}=\frac{1}{2e}$

**8. A형 8번과 동일** [3점] 정답 ②

**9. A형 10번과 동일** [3점] 정답 ②

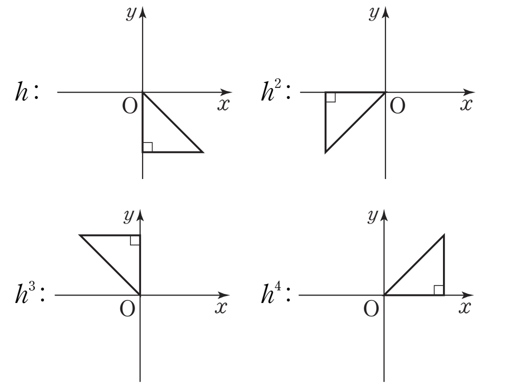
**10. A형 14번과 동일** [3점] 정답 ①

**11. A형 11번과 동일** [3점] 정답 ③

**12. A형 12번과 동일** [4점] 정답 ④

**13. 추론 능력(추측) – 일차변환과 행렬** [4점] 정답 ⑤

두 일차변환 $f, g$를 나타내는 행렬이 각각 $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$이므로 합성변환 $g\circ f$, 즉 $h$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후, $x$축에 대하여 대칭이동한 것이다. 따라서, $h, h^2, h^3, h^4$에 의하여 주어진 도형이 옮겨지는 도형은 각각 그림과 같다.




따라서, $h^4$은 항등변환이다. 이때, $2014=4\times503+2$이므로 일차변환 $h^{2014}$에 의하여 옮겨지는 도형은 일차변환 $h^2$에 의하여 옮겨지는 도형인 ⑤와 같다.

**14. A형 13번과 동일** [3점] 정답 ③

**15. 수학 외적 문제 해결 능력 – 방정식과 부등식** [4점] 정답 ④

A 호스만을 사용하여 비어있는 물탱크에 물을 가득 채우는 데 걸리는 시간을 $x$라 하면 B 호스만을 사용하여 비어있는 물탱크에 물을 가득 채우는 데 걸리는 시간은 $x+5$이므로

(A 호스로 1시간 동안 채우는 물의 양)$=\frac{20}{x}$

(B 호스로 1시간 동안 채우는 물의 양)$=\frac{20}{x+5}$

$\therefore \left(\frac{20}{x}+\frac{20}{x+5}\right)\times6=20$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{6}$

$6(x+5)+6x=x(x+5)$

$x^2-7x-30=0$

$(x+3)(x-10)=0$

$\therefore x=10\,(\because x>0)$

**16. 이해력 – 삼각함수** [4점] 정답 ④

$\angle \mathrm{P_1OH_1}=\theta$라 하면

$\triangle \mathrm{OH_1P_1}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OH_1}}\cdot\overline{\mathrm{H_1P_1}}=\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{4}\sin2\theta$

$\frac{1}{4}\sin2\theta=\frac{1}{8}$에서 $\sin2\theta=\frac{1}{2}$이고

$\cos2\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\because 0<2\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ ………… ㉠

$$\begin{aligned}\therefore \triangle\mathrm{OH_2P_2}&=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OH_2}}\cdot\overline{\mathrm{H_2P_2}}\\&=\frac{1}{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\\&=\frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)\\&=\frac{1}{4}\cos2\theta\\&=\frac{\sqrt{3}}{8}\ (\because ㉠)\end{aligned}$$

**17. 수학 내적 문제 해결 능력 – 일차변환과 행렬** [4점] 정답 ②

$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$이므로

$\begin{cases}a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}b_n & \cdots\cdots ㉠\\ b_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}b_n & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠+㉡을 하면

$a_{n+1}+b_{n+1}=a_n+b_n$

$\therefore a_n+b_n=a_{n-1}+b_{n-1}=a_{n-2}+b_{n-2}=\cdots=a_1+b_1$

$=4+(-2)=2$

$\therefore b_n=2-a_n$ ………… ㉢

㉠에 ㉢을 대입하면

$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}(2-a_n)=-\frac{1}{3}a_n+\frac{4}{3}$

$\therefore a_{n+1}-1=-\frac{1}{3}(a_n-1)$

따라서, 수열 $\{a_n-1\}$은 첫째항이 $a_1-1=4-1=3$이고 공비가 $-\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$a_n-1=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore a_n=1+3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

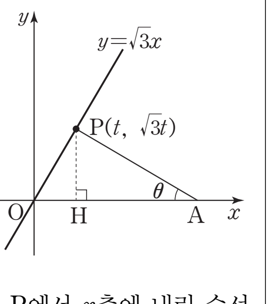
$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}(2-a_n)=2-1=1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n-2b_n)=1-2=-1$

**18. A형 20번과 동일** [4점] 정답 ①

**19. 이해력 – 미분법** [4점] 정답 ②




점 P가 원점을 출발한 지 $t$초가 될 때, $\overline{\mathrm{OP}}=2t$이다. 직선 $y=\sqrt{3}x$가 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이므로 점 P가 원점을 출발한 지 $t$초가 될 때, 점 P의 좌표는 $(t,\ \sqrt{3}t)$이다. 점 P에서 $x$축에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 AHP에서

$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}t}{4-t}$

위의 식의 양변을 $t$에 대하여 미분하면

$\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}=\frac{\sqrt{3}(4-t)+\sqrt{3}t}{(4-t)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{(4-t)^2}$

$\frac{d\theta}{dt}=\frac{4\sqrt{3}}{(4-t)^2}\times\cos^2\theta$ ………… ㉠

$t=2$일 때, 점 P의 좌표는 $(2,\ 2\sqrt{3})$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(4-2)^2+(0-2\sqrt{3})^2}=4$

$\overline{\mathrm{AH}}=4-2=2$

$\therefore \cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{AP}}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ ………… ㉡

㉠에 ㉡과 $t=2$를 대입하여 순간변화율을 구하면

$\frac{4\sqrt{3}}{(4-2)^2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$

**20. A형 18번과 동일** [4점] 정답 ⑤

**21. 수학 내적 문제 해결 능력 – 적분법** 〔4점〕 **정답** ①

점 $P_n$에서 $x$축에 내린 수선의 발을 $P_n'$이라 하면

$$a_n=\square P_nP_n'P_{n+1}'P_{n+1}-\int_{2^n}^{2^{n+1}}\frac{1}{x^2}dx$$

$$\square P_nP_n'P_{n+1}'P_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{2^{2n+2}}\right)(2^{n+1}-2^n)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+2}}\right)=\frac{5}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

이고

$$\int_{2^n}^{2^{n+1}}\frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_{2^n}^{2^{n+1}}=-\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n}$$

이므로

$$a_n=\frac{5}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{8}\times\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}$$

**22. A형 22번과 동일** 〔3점〕 **정답** 420

**23. A형 23번과 동일** 〔3점〕 **정답** 90

**24. 이해력 – 일차변환과 행렬** 〔3점〕 **정답** 4

주어진 일차변환에 의하여 직선 $l : x-y+1=0$ 위의 점 $(x, y)$가 점 $(x', y')$으로 옮겨진다고 하면

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\-1&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x'+2y'\\x'+y'\end{pmatrix}$$

$x=3x'+2y'$, $y=x'+y'$을 $x-y+1=0$에 대입하면

$(3x'+2y')-(x'+y')+1=0$

$2x'+y'+1=0$

즉, 직선 $m$의 방정식은 $2x+y+1=0$이므로

$x-y+1=0$과 $2x+y+1=0$을 연립하면

$x=-\frac{2}{3}$, $y=\frac{1}{3}$

$\therefore a=-\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{3}$

$$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^2=\left(\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}\right)^2=(-2)^2=4$$

**25. 이해력 – 미분법** 〔3점〕 **정답** 45

$y^2=\ln(2-x^2)+\frac{2}{x}+2$에서

$$2yy'=\frac{-2x}{2-x^2}-\frac{2}{x^2}$$

$$y'=\left(\frac{-x}{2-x^2}-\frac{1}{x^2}\right)\times\frac{1}{y}$$

위의 식에 $x=1$, $y=2$를 대입하면 $y'=-1$이다. 따라서, 곡선 $y^2=\ln(2-x^2)+\frac{2}{x}+2$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 방정식은

$y-2=-(x-1)$

$\therefore y=-x+3$

따라서, 구하는 도형의 넓이

$$S=\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}$$

$\therefore 10S=45$

**26. A형 26번과 동일** 〔3점〕 **정답** 8

**27. 수학 내적 문제 해결 능력 – 적분법** 〔4점〕 **정답** 230

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+2}x\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(1+\tan^2 x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\sec^2 x\,dx$$

$\tan x=t$라 하면 $\sec^2 x=\frac{dt}{dx}$이고, $x=0$일 때 $t=0$,

$x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=1$이므로

$$a_n=\int_0^1 t^n dt=\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{20}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{20}(n+1)=\frac{20\cdot21}{2}+20=230$$

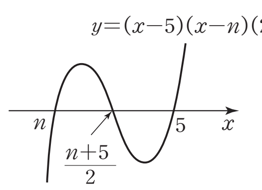
**28. 추론 능력(추측) – 방정식과 부등식** 〔4점〕 **정답** 130

$\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x-n}\le0$을 정리하면

$$\frac{2x-n-5}{(x-5)(x-n)}\le0$$

$(x-5)(x-n)(2x-n-5)\le0$, $x\ne5$, $x\ne n$

(i) $n<5$이면




$x<n$ 또는 $\frac{n+5}{2}\le x<5$

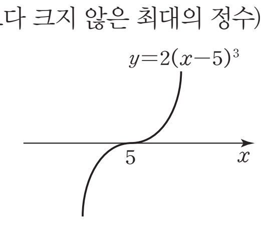
$$\therefore f(n)=n-1+\left[5-\frac{n+5}{2}\right]=n-1+\left[\frac{5-n}{2}\right]$$

(단, $[x]$는 $x$보다 크지 않은 최대의 정수)

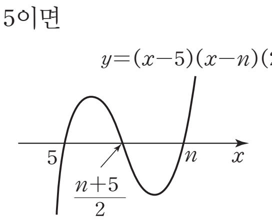
(ii) $n=5$이면

$x<5$

$\therefore f(5)=4$




(iii) $n>5$이면




$x<5$ 또는 $\frac{n+5}{2}\le x<n$

$$\therefore f(n)=4+\left[n-\frac{n+5}{2}\right]=4+\left[\frac{n-5}{2}\right]$$

(단, $[x]$는 $x$보다 크지 않은 최대의 정수)

$\therefore f(1)=2$, $f(2)=2$, $f(3)=3$, $f(4)=3$, $f(5)=4$, $f(6)=4$, $f(7)=5$, $f(8)=5$, $f(9)=6$, $f(10)=6$, $\cdots$, $f(19)=11$, $f(20)=11$

$$\therefore \sum_{n=1}^{20}f(n)=2(2+3+\cdots+11)$$

$$=2\times\frac{10(2+11)}{2}=130$$

**29. A형 29번과 동일** 〔4점〕 **정답** 575

신유형

**30. 수학 내적 문제 해결 능력 – 함수의 극한과 연속** 〔4점〕 **정답** 3

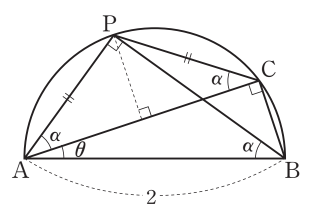
삼각형 PAC의 높이가 최대일 때, 즉 $\widehat{PA}=\widehat{PC}$일 때, 삼각형 PAC의 넓이는 최대가 된다. 이때, $\widehat{PA}=\widehat{PC}$이면 $\overline{PA}=\overline{PC}$이므로 삼각형 PAC는 이등변삼각형이다.

따라서, 보조선 PB를 긋고 $\angle CAP=\alpha$라 하면 $\angle PCA=\angle PBA=\alpha$이다.

삼각형 PAB에서 $\angle APB=\frac{\pi}{2}$이므로

$\alpha+\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$ $\therefore \alpha=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$ ……………… ㉠

또, 보조선 BC를 그으면 $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$




이므로

$\overline{AC}=\overline{AB}\cos\theta$

$=2\cos\theta$

$$\therefore S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\frac{1}{2}\overline{AC}\tan\alpha=\frac{1}{4}(2\cos\theta)^2\tan\alpha$$

$$=\cos^2\theta\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\ (\because ㉠)$$

$\frac{\pi}{2}-\theta=t$라 하면 $\theta=\frac{\pi}{2}-t$이고,

$\theta\to\frac{\pi}{2}-0$일 때, $t\to+0$이므로

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{S(\theta)}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^3}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\cos^2\theta\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^3}$$

$$=\lim_{t\to+0}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\tan\frac{t}{2}}{t^3}=\lim_{t\to+0}\frac{\sin^2 t\cdot\tan\frac{t}{2}}{t^3}$$

$$=\lim_{t\to+0}\frac{\sin^2 t}{t^2}\times\frac{\tan\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}\times2}=\frac{1}{2}$$

$\therefore p=2$, $q=1$

$\therefore p+q=3$