2023학년도 경북대학교 논술(AAT) 모의고사

자연계열 Ⅱ 문제지

(의예과, 치의예과, 수의예과)

시 험 시 간	100분	
지원학과(부)	학과(부, 전공)	감독위원 확인
수 험 번 호		㊞
성 명		

감독관의 지시가 있기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

< 수험생 유의 사항 >

※ 자연계열Ⅱ 문제지와 자연계열Ⅱ 답안지가 맞는지 반드시 확인(의예과, 치의예과, 수의예과)

1. 문제지 및 답안지에 지원학과(부, 전공), 수험번호, 성명을 정확하게 기입할 것[반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것]
2. 문제지는 표지를 포함하여 4쪽으로 구성되어 있으며, 답안지는 3쪽으로 구성되어 있음
3. 답안지에 주어진 물음 번호에 맞추어 답안을 작성하되, 반드시 주어진 테두리 안에 답안을 작성할 것(테두리를 벗어난 부분은 채점 대상에서 제외함)
4. 답안의 작성은 반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것
5. 답안을 수정할 경우 지우개를 사용하거나 두 줄을 긋고 다시 작성하여야 함
6. 답안지에 자신의 신원을 드러내거나 문제와 관계없는 내용을 기록할 경우에는 “0”점 처리함
7. 연습지가 필요한 경우 문제지의 빈 공간을 사용할 수 있음

수학(문제 1)

[1] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 중심의 좌표가 (a, b)이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

(나) 점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(다) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

(라) 등비수열 $\{r^n\}$은

① $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$ (발산)

② $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=1$ (수렴)

③ $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$ (수렴)

④ $r\le -1$일 때, 수열 $\{r^n\}$은 발산한다.

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

모든 자연수 n에 대하여

$$a_n=(2^n-2)r,\ b_n=2^{n-1}r \quad (\text{단, } r\text{는 자연수})$$

이다. 중심이 $(a_n, 0)$이고 반지름이 b_n인 원을 C_n이라 할 때, C_n과 C_{n+1}의 교점 중 y좌표가 양수인 점을 P_n이라 하자.
다음 물음에 답하시오.

【1-1】 점 P_3의 x좌표가 21이 되도록 하는 r의 값을 구하시오. (20점)

【1-2】 원점과 점 P_n을 지나는 직선의 기울기를 m_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} m_n$의 값을 구하시오. (30점)

【1-3】 점 P_n에서 원 C_n에 접하는 접선을 ℓ_n이라 하고, ℓ_n과 x축과의 교점을 Q_n이라 하자. 세 점 Q_n, P_n, P_{n+1}을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 s_n이라 할 때, 세 곡선 $y=s_nx^n$, $y=s_{n+1}x^n$, $y=s_nx^{n-1}$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 A_n이라 하자. 부등식 $\dfrac{A_{n+1}}{A_n}>3$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하시오. (60점)

수학(문제 2)

[2] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 L에 수렴한다고 한다. 수열 $\{a_n\}$이 수렴하지 않을 경우, 수열 $\{a_n\}$은 발산한다고 한다.

(나) 미분가능한 두 함수 $y=f(u), u=g(x)$에 대하여 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx} \text{ 또는 } y'=f'(g(x))g'(x)$$

(다) 두 함수 $f(x), g(x)$가 미분가능할 때

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

(라) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이면 최대 · 최소 정리에 의하여 $f(x)$는 닫힌구간 $[a,b]$에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다. 이때 이 구간에서 극댓값, 극솟값, $f(a)$, $f(b)$의 값 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이 된다.

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

【2-1】 함수 $f(x)=c+\sqrt{2cx-x^2}$에 대하여

$$f^1=f,\ f^{n+1}=f^n\circ f\ \ (n\text{은 자연수})$$

로 정의할 때, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항 a_1이 함수 $f(x)$의 정의역에 속하고 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=f^n(a_1)$$

을 만족시킨다고 하자. (단, c는 0이 아닌 실수)
다음 물음에 답하시오.

(1) $a_1=c$일 때, 수열 $\{a_n\}$의 수렴, 발산을 조사하시오. (20점)

(2) 수열 $\{a_n\}$이 수렴하도록 하는 a_1의 값을 모두 구하시오. (40점)

【2-2】 정의역과 공역이 모두 열린구간 $(0,\infty)$인 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 양수 x에 대하여

$$f(x)f'\left(\frac{1}{x}\right)=x$$

를 만족시킨다. 함수 $g(x)=f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) $\dfrac{g(2023)}{g(2022)}$의 값을 구하시오. (20점)

(2) $t=g(1)$일 때, $f(e)$의 값을 $h(t)$라 하자. 닫힌구간 $[1,3]$에서 함수 $h(t)$의 최솟값을 구하시오. (40점)

수학(문제 3)

[3] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 모든 실수 α,β에 대하여

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

(나) 삼각함수의 미분법

$$(\sin x)'=\cos x \qquad (\cos x)'=-\sin x$$
$$(\tan x)'=\sec^2 x \qquad (\cot x)'=-\csc^2 x$$
$$(\sec x)'=\sec x\tan x \qquad (\csc x)'=-\csc x\cot x$$

(다) 삼각함수의 성질

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$
$$\tan^2 x+1=\sec^2 x$$
$$\cot^2 x+1=\csc^2 x$$

(라) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 미분가능한 함수 $x=g(t)$에 대해서 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$일 때 도함수 $g'(t)$가 α,β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

(마) 닫힌구간 $[a,b]$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고, $f'(x)$, $g'(x)$가 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx=\left[f(x)g(x)\right]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

【3-1】 모든 실수 x에 대하여
$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)$$
가 성립함을 보이시오. (20점)

【3-2】 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\sin x+\cos x)^{10}}\,dx$의 값을 구하시오. (50점)

【3-3】 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{(\sin x+\cos x)^{10}}\,dx$의 값을 구하시오. (50점)

2023학년도 논술(AAT) 모의고사 예시 답안 및 채점 기준(자연계열Ⅱ)

[문항카드 11

1. 예시 답안

【1-1】 점 $\mathrm{P}_n(\mathrm{x_n},\mathrm{y_n})$은 원 C_n과 C_{n+1}위의 점이므로, $(x_n-a_n)^2+y_n^2=b_n^2$과 $(x_n-a_{n+1})^2+y_n^2=b_{n+1}^2$을 만족한다. $b_n^2-(x_n-a_n)^2=y_n^2=b_{n+1}^2-(x_n-a_{n+1})^2$으로부터 $x_n=(9\times 2^{n-3}-2)r$를 구할 수 있고, $r=3$일 때, $x_3=21$이다.

【1-2】 $(x_n-a_n)^2+y_n^2=b_n^2$과 y_n이 양수라는 것으로부터 $y_n=\sqrt{b_n^2-(x_n^2-a_n)^2}$이고, $x_n=(9\times 2^{n-3}-2)r$를 대입하면 $y_n=\sqrt{15}\times 2^{n-3}r$를 구할 수 있다. 그러므로 원점과 점 $\mathrm{P}_n(x_n,y_n)$을 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{y_n}{x_n}=\dfrac{\sqrt{15}\times 2^{n-3}}{9\times 2^{n-3}-2}$이고, 극한값은 $\dfrac{\sqrt{15}}{9}$이다.

【1-3】 $a_{n+1}-a_n=b_{n+1}$이므로 원 C_n의 중심 $(a_n,0)$은 원 C_{n+1}위의 점이고, 점 $(a_n,0)$과 점 P_n을 지나는 직선은 접선 ℓ_n에 수직이므로 점 Q_n의 좌표는 $(a_{n+1}+b_{n+1},0)=((3\times 2^n-2)r,0)$이다. 두 점 P_n과 P_{n+1}을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $\sqrt{15}x-9y+2\sqrt{15}r=0$이고, 점 Q_n에서 이 직선까지 거리를 구하면 $d_n=\dfrac{3\sqrt{15}\times 2^{n-2}r}{\sqrt{6}}$이다. 또한, 두 점 P_n과 P_{n+1} 사이의 거리는 $2^{n-1}r\sqrt{6}$이므로, 삼각형의 넓이 s_n은

$s_n=\dfrac{1}{2}\times 2^{n-1}r\sqrt{6}\times\dfrac{3\sqrt{15}\times 2^{n-2}r}{\sqrt{6}}=3\sqrt{15}\times 4^{n-2}r^2$이다.

세 곡선 $y=s_nx^n$, $y=s_{n+1}x^n$, $y=s_nx^{n-1}$으로 둘러싸인 도형의 넓이 A_n은 $s_{n+1}=4s_n$과

$A_n=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}}(s_{n+1}x^n-s_nx^n)dx+\int_{\frac{1}{4}}^{1}(s_nx^{n-1}-s_nx^n)dx$임을 이용하면, $A_n=\dfrac{s_n(4^n-1)}{n(n+1)4^n}$이고

$\dfrac{A_{n+1}}{A_n}=\dfrac{n(4^{n+1}-1)}{(n+2)(4^n-1)}$이다.

$\dfrac{n(4^{n+1}-1)}{(n+2)(4^n-1)}>3$의 양변에 양수 $(n+2)(4^n-1)$을 곱하여 정리하면 $2n+6>(6-n)4^n$이다. 6 이상의 자연수 n은 $2n+6>(6-n)4^n$을 만족시키고, 5 이하의 자연수 n은 $2n+6>(6-n)4^n$을 만족시키지 않는다는 것을 쉽게 알 수 있으므로, $\dfrac{A_{n+1}}{A_n}>3$을 만족 시키는 자연수 n의 최솟값은 6이다.

2. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	두 원의 방정식으로부터 하나의 식을 도출하면 10점 $x_n=(9\times 2^{n-3}-2)r$를 구하고 $r=3$을 찾으면 10점	20
1-2	$y_n=\sqrt{15}\times 2^{n-3}r$를 찾으면 20점 기울기는 $\dfrac{y_n}{x_n}=\dfrac{\sqrt{15}\times 2^{n-3}}{9\times 2^{n-3}-2}$이고, 극한값은 $\dfrac{\sqrt{15}}{9}$임을 찾으면 10점	30
1-3	Q_n의 좌표는 $(a_{n+1}+b_{n+1},0)=((3\times 2^n-2)r,0)$임을 찾으면 10점 $s_n=\dfrac{1}{2}\times 2^{n-1}r\sqrt{6}\times\dfrac{3\sqrt{15}\times 2^{n-2}r}{\sqrt{6}}=3\sqrt{15}\times 4^{n-2}r^2$임을 찾으면 20점 $A_n=\dfrac{s_n(4^n-1)}{n(n+1)4^n}$을 찾으면 10점 $\dfrac{A_{n+1}}{A_n}>3$을 만족 시키는 자연수 n의 최솟값은 6임을 찾으면 20점	60

[문항카드 2]

1. 예시 답안

【2-1】 (1) (i) c가 양수일 경우 $a_1 = c$이므로, $a_2 = 2c,\ a_3 = c,\ a_4 = 2c,\ \dots$

즉, $a_n = \begin{cases} c & (n\text{은 홀수}) \\ 2c & (n\text{은 짝수}) \end{cases}$ 임을 알 수 있다. 따라서, 수열 $\{a_n\}$은 발산한다.

(ii) c가 음수일 경우 $a_1 = c$이므로, $a_2 = 0,\ a_3 = c,\ a_4 = 0,\ \dots$

즉, $a_n = \begin{cases} c & (n\text{은 홀수}) \\ 0 & (n\text{은 짝수}) \end{cases}$ 임을 알 수 있다. 따라서, 수열 $\{a_n\}$은 발산한다.

(2)
$$\begin{aligned} f^2(x) &= (f \circ f)(x) \\ &= f\left(c + \sqrt{2cx - x^2}\right) \\ &= c + \sqrt{2c\left(c + \sqrt{2cx - x^2}\right) - \left(c + \sqrt{2cx - x^2}\right)^2} \\ &= c + \sqrt{(c - x)^2} \\ &= c + |x - c| \end{aligned}$$

위의 식으로부터

(i) c가 양수일 경우

$0 \le a_1 < c$이면 $a_n = \begin{cases} a_1 & (n = 1) \\ a_2 & (n\text{은 짝수}) \\ 2c - a_1 & (n\text{은 홀수}, n > 1) \end{cases}$ 이고 $c < a_1 \le 2c$이면 $a_n = \begin{cases} a_1 & (n\text{은 홀수}) \\ a_2 & (n\text{은 짝수}) \end{cases}$이다.

따라서, 수열 $\{a_n\}$이 수렴하기 위해 $0 \le a_1 < c$이면 $a_2 = 2c - a_1$이고, $c < a_1 \le 2c$이면 $a_1 = a_2$가 성립해야 한다.

즉, $0 \le a_1 < c$이면 $2c - a_1 = a_2 = f(a_1) = c + \sqrt{2ca_1 - a_1^2}$ 이고 $a_1 = \dfrac{2c - \sqrt{2c^2}}{2} = \dfrac{c\left(2 - \sqrt{2}\right)}{2}$ 이며,

$c < a_1 \le 2c$이면 $a_1 = a_2 = f(a_1) = c + \sqrt{2ca_1 - a_1^2}$ 이고 $a_1 = \dfrac{2c + \sqrt{2c^2}}{2} = \dfrac{c\left(2 + \sqrt{2}\right)}{2}$ 이다.

(ii) c가 음수일 경우

$2c \le a_1 < c$이면 $a_n = \begin{cases} a_1 & (n = 1) \\ a_2 & (n\text{은 짝수}) \\ 2c - a_1 & (n\text{은 홀수}, n > 1) \end{cases}$ 이고 $c < a_1 \le 0$이면 $a_n = \begin{cases} a_1 & (n\text{은 홀수}) \\ a_2 & (n\text{은 짝수}) \end{cases}$ 이다.

따라서, 수열 $\{a_n\}$이 수렴하기 위해 $2c \le a_1 < c$이면 $a_2 = 2c - a_1$이고 $c < a_1 \le 0$이면 $a_1 = a_2$가 성립해야 한다.

즉, $2c \le a_1 < c$이면 $2c - a_1 = a_2 = f(a_1) = c + \sqrt{2ca_1 - a_1^2}$ 이고 $a_1 = \dfrac{2c - \sqrt{2c^2}}{2} = \dfrac{c\left(2 + \sqrt{2}\right)}{2}$ 이며,

$c < a_1 \le 0$이면 $a_1 = a_2 = f(a_1) = c + \sqrt{2ca_1 - a_1^2}$ 이고 $a_1 = \dfrac{2c + \sqrt{2c^2}}{2} = \dfrac{c\left(2 - \sqrt{2}\right)}{2}$ 이다.

따라서, 답은 $\dfrac{c\left(2 \pm \sqrt{2}\right)}{2}$ 이다.

【2-2】(1) 문제의 조건으로부터 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)f'(x) = \dfrac{1}{x}$ 임을 알 수 있다.

한편,
$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x)f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{x} + x\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0. \end{aligned}$$

즉, $g(x)$는 상수함수이다. 따라서, $\dfrac{g(2023)}{g(2022)} = 1$이다.

(2) (1)에 의해 $g(x)$는 상수함수이므로 모든 x에 대하여 $g(x) = g(1) = t$이다.

즉, $f(x)f\left(\dfrac{1}{x}\right) = g(x) = t$ 이다.

한편, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)f'(x) = \dfrac{1}{x}$ 이므로 $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{tx}$ 이다.

따라서 $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{1}{tx}\,dx$ 이고 $\ln f(x) = \dfrac{1}{t}\ln x + C = \ln x^{\frac{1}{t}} + \ln e^C = \ln e^C x^{\frac{1}{t}}$,

즉, $f(x) = e^C x^{\frac{1}{t}}$ 이다. (C는 적분상수)

그러므로 $t = f(x)f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \left(e^C x^{\frac{1}{t}}\right)\left(e^C x^{-\frac{1}{t}}\right) = \left(e^C\right)^2$ 이고 $f(x) = \sqrt{t}\,x^{\frac{1}{t}}$ 이다.

함수 $h(t) = f(e) = \sqrt{t}\,e^{\frac{1}{t}}$에 대하여 $h'(t) = \dfrac{\sqrt[t]{e}\,(t-2)}{2\sqrt{t^3}}$ 이므로 구간 $1 \le t \le 3$에서 $h(t)$는 $t = 2$ 일 때 최솟값 $\sqrt{2e}$를 가진다.

2. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-1 (1)	c가 양수일 경우 수열 $\{a_n\}$은 발산함을 보이면 10점	20
	c가 음수일 경우 수열 $\{a_n\}$은 발산함을 보이면 10점	
2-1 (2)	$f^2(x) = c + \lvert x - c \rvert$임을 보이면 10점	40
	c가 양수일 경우 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하면 10점	
	c가 음수일 경우 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하면 10점	
	답 $a_1 = \dfrac{c\left(2 \pm \sqrt{2}\right)}{2}$ 을 구하면 각 5점	
2-2 (1)	$g(x)$가 상수함수임을 증명하면 10점	20
	$\dfrac{g(2023)}{g(2022)} = 1$를 구하면 10점	
2-2 (2)	$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{tx}$ 를 구하면 10점	40
	$f(x) = e^C x^{\frac{1}{t}}$를 구하면 10점	
	$h(t)$의 최솟값 $\sqrt{2e}$를 구하면 20점	

[문항카드 3]

1. 예시 답안

【3-1】 삼각함수의 덧셈정리에 의해

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)$$

이다.

【3-2】 모든 음이 아닌 정수 n에 대해, $I_n=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{(\sin x+\cos x)^n}dx$이라 하면, 3-1과 치환적분에 의해

$$\begin{aligned}I_n&=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{(\sin x+\cos x)^n}dx\\&=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\left(\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)^n}dx\\&=2^{-\frac{n}{2}}\int_0^{\pi/2}\sec^n\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx\\&=2^{-\frac{n}{2}}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sec^n x\,dx\end{aligned}$$

이다.

2보다 큰 정수 n에 대해, 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$에서 두 함수 $f(x)=\sec^{n-2}x$와 $g(x)=\tan x$이 미분가능하고 $f'(x)=(n-2)\sec^{n-2}x\tan x$와 $g'(x)=\sec^2 x$이 연속이므로, 부분적분법과 삼각함수의 성질에 의해

$$\begin{aligned}I_n&=2^{-\frac{n}{2}}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sec^n x\,dx\\&=2^{-\frac{n}{2}}[\sec^{n-2}x\tan x]_{-\pi/4}^{\pi/4}-2^{-\frac{n}{2}}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(n-2)\sec^{n-2}x\tan^2 x\,dx\\&=1-2^{-\frac{n}{2}}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(n-2)\sec^n x\,dx+2^{-\frac{n}{2}}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(n-2)\sec^{n-2}x\,dx\\&=1-(n-2)I_n+\frac{n-2}{2}I_{n-2}\end{aligned}$$

이다. 정리하면,

$$I_n=\frac{1}{n-1}+\frac{n-2}{2n-2}I_{n-2}$$

이고 $I_2=2^{-1}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sec^2 x\,dx=2^{-1}[\tan x]_{-\pi/4}^{\pi/4}=1$이다.

$$I_4=\frac{1}{3}+\frac{I_2}{3}=\frac{2}{3}\qquad I_6=\frac{1}{5}+\frac{2I_4}{5}=\frac{7}{15}$$

$$I_8=\frac{1}{7}+\frac{3I_6}{7}=\frac{12}{35}\qquad I_{10}=\frac{1}{9}+\frac{4I_8}{9}=\frac{83}{315}$$

따라서 $\int_0^{\pi/2}\frac{1}{(\sin x+\cos x)^{10}}dx=\frac{83}{315}$이다.

【3-3】 $x=\frac{\pi}{2}-t$에 대해, 치환적분법을 적용하면,

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi/2}\frac{x}{(\sin x+\cos x)^{10}}dx\\&=\int_{\pi/2}^{0}\frac{-\frac{\pi}{2}+t}{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)^{10}}dt\\&=\int_{\pi/2}^{0}\frac{-\frac{\pi}{2}+t}{(\sin t+\cos t)^{10}}dt\\&=\int_0^{\pi/2}\frac{\frac{\pi}{2}-t}{(\sin t+\cos t)^{10}}dt\\&=\int_0^{\pi/2}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{(\sin x+\cos x)^{10}}dx\\&=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{(\sin x+\cos x)^{10}}dx-\int_0^{\pi/2}\frac{x}{(\sin x+\cos x)^{10}}dx\end{aligned}$$

이다. 따라서 $\int_0^{\pi/2}\frac{x}{(\sin x+\cos x)^{10}}dx=\frac{\pi}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{(\sin x+\cos x)^{10}}dx=\frac{83\pi}{1260}$

이다.

2. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-1	삼각함수의 덧셈공식을 사용하여 항등식을 보이면 20점	20
3-2	삼각함수의 성질과 치환적분법 혹은 부분적분법을 통해 다항식의 적분 형태로 변형하거나 점화식의 형태로 변형하면 30점	50
	정확한 답 $\frac{83}{315}$를 구하면 20점	
3-3	치환적분 등을 통해 우함수, 기함수 성질을 사용하여 특정 항이 0임을 보이거나 모범답안과 같은 치환적분을 적용하면 30점	50
	3-2에서 계산한 적분값의 $\frac{\pi}{4}$배가 된다는 것을 구하면 20점	