新 수학의 바이블 유형서

BOB 밥

수학 I

정답과 풀이

I. 지수함수와 로그함수

01 지수

본문 p.9~15

001 (1) 2, $-1\pm\sqrt{3}i$ (2) ±2, $\pm2i$ **002** (1) 2 (2) 2, -2 (3) -3 (4) $\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$ **003** (1) 2 (2) -5 (3) $-\frac{2}{3}$ (4) 3

004 (1) 2 (2) 3 (3) 3 (4) 2 **005** (1) 1 (2) 1 (3) $\frac{1}{9}$ (4) 25 **006** (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{5}{6}$ (3) $-\frac{1}{2}$ (4) $\frac{1}{3}$

007 (1) $\sqrt{10}$ (2) $9\sqrt{3}$ (3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (4) $\sqrt[3]{3}$ **008** (1) 27 (2) 4 (3) a^5b^6 (4) ab^2 **009** (1) $3^{4\sqrt{2}}$ (2) $5^{6\sqrt{3}}$ (3) a^6 (4) ab^3 **010** ② **011** ㄷ

012 3 **013** ④ **014** ⑤ **015** 1 **016** ② **017** ① **018** $\frac{5}{2}$ **019** ⑤

020 ② **021** 18 **022** ① **023** ① **024** 6 **025** ⑤ **026** ④ **027** $\frac{3}{2}$

028 ② **029** 4 **030** $\frac{8}{3}$ **031** ② **032** ③ **033** $A<B<C$ **034** 276 **035** 24

036 ③ **037** ④ **038** ④ **039** 78 **040** ⑤ **041** ⑤ **042** ② **043** ①

044 ④ **045** (1) $2^{\frac{5}{4}}$ (2) 8 **046** ③ **047** 30 **048** -4 **049** $4\sqrt{3}$

02 로그

본문 p.17~25

050 (1) $2=\log_7 49$ (2) $-1=\log_2 0.5$ (3) $\frac{1}{3}=\log_{1000} 10$ (4) $0=\log_4 1$ **051** (1) $3^4=81$ (2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}=32$ (3) $(\sqrt{5})^4=25$ (4) $9^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{27}$

052 (1) $x>2$ (2) $0<x<5$ (3) $5<x<6$ 또는 $x>6$ (4) $-3<x<-2$ 또는 $-2<x<4$ 또는 $x>4$

053 (1) $\frac{1}{16}$ (2) 9 (3) $2^{\frac{6}{5}}$ (4) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **054** (1) 1 (2) $\frac{13}{2}$ (3) 6 (4) 0 **055** (1) $3a+2b$ (2) $4a-3b$ (3) $1-a$

056 (1) $\frac{b}{a}$ (2) $\frac{4a+2b}{a+b}$ (3) $\frac{2b+1}{a}$ **057** (1) 2 (2) 1 **058** (1) $-\frac{2}{3}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) 2 (4) $\sqrt{2}$ **059** (1) 2 (2) $\frac{4}{5}$ (3) $-\frac{2}{3}$ (4) -3

060 (1) 0.4048 (2) 2.6712 (3) -0.2336 (4) -2.9031 **061** (1) 1.5527 (2) 4.5527 (3) -0.4473 (4) -2.5527

062 (1) 정수 부분 : 1, 소수 부분 : 0.4983 (2) 정수 부분 : -3, 소수 부분 : 0.1703 (3) 정수 부분 : -5, 소수 부분 : 0.6201

063 (1) 0 (2) -3 (3) 5 (4) -2 **064** (1) 정수 부분 : 4, 소수 부분 : 0.8657 (2) 정수 부분 : -2, 소수 부분 : 0.8657

065 (1) 200 (2) 0.5 (3) 0.02 **066** (1) 258 (2) 0.258 **067** ② **068** ③ **069** 9 **070** ③

071 (1) -7 (2) $\frac{7}{2}$ (3) 1 **072** ① **073** ④ **074** ③ **075** 12 **076** -1 **077** ⑤

078 (1) 27 (2) 4 **079** ③ **080** ④ **081** ④ **082** $\frac{a(b+2)}{a+3}$ **083** ① **084** ④ **085** 36

086 ④ **087** 1 **088** 16 **089** ④ **090** ② **091** ③ **092** ④ **093** ②

094 90000 **095** ③ **096** 0.0753 **097** 2 **098** ① **099** ① **100** ③ **101** 16

102 ④ **103** 16 **104** 50 **105** ③ **106** ③ **107** $\frac{4}{3}$ **108** ④ **109** ③

110 21 **111** ② **112** 13 **113** 39

03 지수함수

본문 p.27~35

114 ㄴ, ㄷ **115** (1) $\frac{1}{9}$ (2) 1 (3) $3\sqrt[3]{3}$ (4) 27 **116** (1) 4 (2) 1 (3) $\frac{1}{8}$ (4) $\frac{1}{64}$

117 (1) ○ (2) ○ (3) × (4) × (5) ○ (6) × (7) ○ **118** (1) $y=2\times2^x+2$ (2) $y=-2^x$ (3) $y=2^{-x}$ (4) $y=-2^{-x}$

119 풀이 참조 **120** 풀이 참조 **121** (1) $\sqrt{3^3}>\sqrt[3]{3^2}$ (2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}>\left(\frac{1}{5}\right)^{3}$ (3) $\sqrt{2}<\sqrt[3]{4}<\sqrt{8}$ (4) $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^{3}<\frac{1}{3}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

122 (1) 최댓값 : 9, 최솟값 : $\frac{1}{9}$ (2) 최댓값 : 2, 최솟값 : $\frac{1}{8}$ (3) 최댓값 : 11, 최솟값 : 4 (4) 최댓값 : 29, 최솟값 : 11

123 (1) $x=3$ (2) $x=\frac{3}{2}$ (3) $x=2$ (4) $x=-\frac{1}{2}$ **124** (가) $t^2-2t-8=0$ (나) 4 (다) 1 **125** (1) $x=0$ (2) $x=1$ 또는 $x=2$ (3) $x=1$

126 (1) $x>3$ (2) $x\geq\frac{1}{4}$ (3) $x\geq-1$ (4) $x<1$ **127** (가) $t^2-12t+27\leq0$ (나) 3 (다) 9 (라) 1 (마) 2 **128** (1) $1<x<2$ (2) $x\leq2$

129 ④ **130** ③ **131** ㄴ **132** ⑤ **133** ① **134** ㄱ, ㄴ, ㄷ **135** 27 **136** 3

137 14 **138** 52 **139** ④ **140** $\{y\,|\,0<y\leq1\}$ **141** ④ **142** 4 **143** $A<B<C$ **144** -2

145 49 **146** 4 **147** ① **148** 2 **149** ④ **150** ① **151** ① **152** 12

153 ① **154** 25 **155** ④ **156** ⑤ **157** ① **158** $0<x<1$ 또는 $x>3$ **159** ②

160 ③ **161** 6 **162** ① **163** 121 **164** ② **165** ③ **166** ④ **167** ③

168 ④ **169** 81 **170** ④ **171** ⑤ **172** ① **173** ④ **174** 127 **175** 112

176 18 **177** 17

04 로그함수

본문 p.37~47

178 (1) $\{x\,|\,x<3\}$ (2) $\{x\,|\,x>0\}$ **179** (1) $y=\log x\ (x>0)$ (2) $y=\log_2 x+1\ (x>0)$ (3) $y=10^x+1$ (4) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$

180 (1) 0 (2) 1 (3) -1 (4) $\frac{1}{2}$ **181** ㄴ, ㄷ **182** 풀이 참조 **183** 풀이 참조

184 (1) $\log_2 7<2\log_2 3$ (2) $\log_{\frac{1}{3}} 4<\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 9$

185 (1) 최댓값 : 5, 최솟값 : 0 (2) 최댓값 : 1, 최솟값 : -2 (3) 최댓값 : 1 최솟값 : -1 **186** (1) $x=3$ (2) $x=\frac{10}{9}$ (3) $x=\frac{1}{2}$ (4) $x=3$

187 (1) $x=4$ (2) $x=4$ (3) $x=3$ (4) $x=1$ **188** (1) $x=1$ (2) $x=3$

189 (1) $x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=16$ (2) $x=10$ 또는 $x=1000$ **190** (1) $-3<x<1$ (2) $0<x<4$ (3) $-5<x<0$ (4) $1<x<\frac{10}{9}$

191 (1) $0<x<1$ (2) $x>\frac{1}{2}$ (3) $1\leq x<2$ (4) $x\geq5$ **192** (1) $0<x<2$ (2) $x\geq21$

193 (1) $0<x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>64$ (2) $1\leq x\leq125$ **194** ③ **195** ㄱ, ㄴ, ㄷ **196** ㄷ **197** ⑤

198 ㄱ, ㄴ, ㄹ **199** 1 **200** ⑤ **201** ④ **202** 67 **203** ② **204** ③ **205** 0

206 2 **207** ④ **208** $-\frac{1}{2}$ **209** ⑤ **210** 2 **211** 2 **212** ② **213** ④

214 $C<A<B$ **215** ⑤ **216** ③ **217** 2 **218** ④ **219** 1 **220** ⑤ **221** ②

222 ④ **223** 12 **224** $x=4$ 또는 $x=8$ **225** 2 **226** 3 **227** $x=\frac{1}{100}$ 또는 $x=10$

228 ③ **229** ④ **230** 3 **231** 10 **232** 6 **233** ③ **234** 7 **235** ②

236 15 % **237** ① **238** ④ **239** ② **240** 63 **241** ② **242** ③ **243** ①

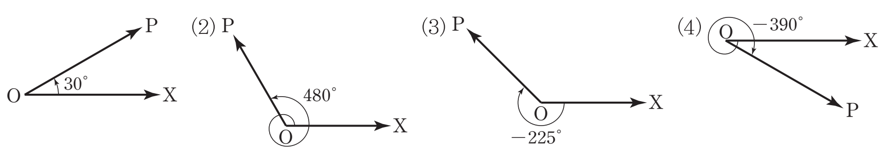
244 ④ **245** ③ **246** ② **247** ① **248** ④ **249** ⑤ **250** 504 **251** 1

252 12 **253** $\frac{1}{81}$

05 삼각함수

본문 p.51~59

254 (1) (2) (3) (4)



255 (1) $360^\circ\times n+150^\circ$ (n은 정수) (2) $360^\circ\times n+220^\circ$ (n은 정수)

256 (1) $360^\circ\times n+150^\circ$ (n은 정수) (2) $360^\circ\times n+30^\circ$ (n은 정수) (3) $360^\circ\times n+230^\circ$ (n은 정수) (4) $360^\circ\times n+120^\circ$ (n은 정수)

257 (1) 제2사분면 (2) 제4사분면 (3) 제3사분면 (4) 제1사분면 **258** (1) $\frac{3}{4}\pi$ (2) $-\frac{5}{6}\pi$ (3) $-\frac{4}{3}\pi$ (4) $\frac{3}{2}\pi$

259 (1) 225° (2) -120° (3) -108° (4) 150° **260** (1) $2n\pi+\frac{\pi}{3}$ (n은 정수) (2) $2n\pi+\frac{3}{4}\pi$ (n은 정수)

261 (1) $l=4\pi$, $S=12\pi$ (2) $l=2\pi$, $S=10\pi$ **262** $\theta=\frac{\pi}{4}$, $S=\frac{9}{8}\pi$ **263** $r=3$, $\theta=\frac{8}{3}$

264 (1) $\frac{4}{5}$ (2) $-\frac{3}{5}$ (3) $-\frac{4}{3}$ **265** (1) $\sin\theta=\frac{1}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (2) $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{1}{2}$, $\tan\theta=\sqrt{3}$

266 (1) $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta>0$ (2) $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$ (3) $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$
(4) $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$

267 (1) 제4사분면 (2) 제2사분면 **268** $\sin\theta=-\frac{4}{5}$, $\tan\theta=\frac{4}{3}$ **269** 1 **270** $\frac{2}{\cos\theta}$ **271** (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{\sqrt{15}}{3}$

272 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) 1 **273** (1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **274** (1) $\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\sqrt{3}$ **275** ④

276 ㄱ, ㄷ, ㄹ **277** 제2사분면 또는 제4사분면 **278** 제1사분면 또는 제3사분면 **279** ③ **280** ④

281 144° **282** ⑤ **283** ㄱ, ㄴ, ㄹ **284** 48 **285** 144 **286** ⑤ **287** ④ **288** -2

289 ① **290** ① **291** $\frac{5}{2}\pi$ **292** ④ **293** ④ **294** ㄱ, ㄴ **295** ② **296** ①

297 $\frac{1-2\sqrt{2}}{3}$ **298** ③ **299** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **300** ① **301** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **302** ④ **303** ⑤ **304** ②

305 ④ **306** ④ **307** $\frac{89}{2}$ **308** ② **309** ③ **310** ⑤ **311** ④ **312** ①

313 ⑤ **314** ① **315** ⑤ **316** $-\frac{8}{3}$ **317** ② **318** $15x^2+32x+15=0$ **319** ④

320 ⑤ **321** ④ **322** 2 **323** $\sqrt{15}$

06 삼각함수의 그래프

본문 p.61~69

324 (1) 실수 전체의 집합 (2) $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$ (3) 2π (4) 원점
325 풀이 참조
326 (1) 실수 전체의 집합 (2) $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$ (3) 2π (4) y축
327 풀이 참조
328 (1) $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수) (2) 실수 전체의 집합 (3) π (4) 원점
329 풀이 참조
330 (1) 최댓값 : 1, 최솟값 : -1, 주기 : π (2) 최댓값 : 3, 최솟값 : -1, 주기 : $\frac{\pi}{2}$ (3) 최댓값, 최솟값 : 없다, 주기 : $\frac{\pi}{3}$
331 (1) π (2) π (3) π
332 (1) $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ (2) $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$ (3) $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$
333 (1) $x=\frac{\pi}{12}$ 또는 $x=\frac{5}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{13}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{17}{12}\pi$ (2) $x=\frac{\pi}{2}$ (3) $x=\frac{2}{9}\pi$ 또는 $x=\frac{8}{9}\pi$ 또는 $x=\frac{14}{9}\pi$
334 (1) $x=\frac{\pi}{12}$ 또는 $x=\frac{17}{12}\pi$ (2) $x=\frac{3}{2}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$ (3) $x=\frac{\pi}{12}$또는 $x=\frac{13}{12}\pi$
335 (1) $\frac{5}{4}\pi<x<\frac{7}{4}\pi$ (2) $0\le x\le\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{3}\pi\le x<2\pi$ (3) $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi<x<\frac{3}{2}\pi$
336 (1) $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{2}{3}\pi<x<\frac{5}{6}\pi$ (2) $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi\le x\le\frac{5}{3}\pi$ (3) $\frac{\pi}{4}\le x<\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi\le x<\frac{4}{3}\pi$
337 ⑤

338 ㄱ, ㄴ	**339** ③	**340** ⑤	**341** 3	**342** ㄱ, ㄴ	**343** ④	**344** ⑤	

345 (가) $\frac{\pi}{2}$ (나) $\frac{\pi}{6}$ (다) -1 (라) $x=\frac{n}{2}\pi+\frac{5}{12}\pi$ (n은 정수)
346 ⑤ **347** ② **348** 6 **349** ②

350 ⑤	**351** 1	**352** ④	**353** ②	**354** ⑤	**355** ①	**356** ②	**357** $\frac{3}{2}\pi$
358 ②	**359** ③	**360** $\frac{3}{4}\pi$	**361** ③	**362** ②	**363** 4	**364** ③	

365 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\pi\le x\le\frac{5}{3}\pi$
366 ③ **367** ④ **368** ④ **369** ① **370** ② **371** ②

372 ③	**373** $\frac{3}{2}$	**374** 7	**375** ⑤	**376** ④	**377** ③	**378** ②	**379** ③

380 ④ **381** 4 **382** $0\le\theta<\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi<\theta<2\pi$

07 사인법칙과 코사인법칙

본문 p.71~77

383 (1) $6\sqrt{2}$ (2) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ (3) $4\sqrt{3}$
384 (1) 30° (2) 60° 또는 120° (3) 45° 또는 135°
385 (1) $4\sqrt{3}$ (2) 3
386 (1) $2\sqrt{5}$ (2) $\sqrt{31}$ (3) $2\sqrt{19}$
387 (1) $\frac{4}{5}$ (2) 60°
388 (1) $12\sqrt{2}$ (2) $3\sqrt{6}$
389 (1) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\sqrt{5}$
390 18 **391** (가) 18 (나) 9 (다) 6 (라) $6\sqrt{6}$ **392** ② **393** ① **394** $\sqrt{10}$ **395** ④ **396** ③

397 ①	**398** ③	**399** $64\pi\,\mathrm{cm}^3$	**400** $\frac{27\sqrt{2}}{2}$ m	**401** ③	**402** ⑤	**403** $\frac{\sqrt{3}}{2}$	**404** ③
405 ④	**406** ①	**407** ⑤	**408** $2\sqrt{110}$	**409** ⑤	**410** ③	**411** 25	**412** 6

413 ④ **414** ② **415** $120°$ **416** ⑤ **417** ④ **418** $\frac{4}{3}$ **419** ② **420** ①

421 ④ **422** ⑤ **423** $\frac{\sqrt{10}}{10}$ **424** ③ **425** $4\sqrt{3}$ **426** ③ **427** ③ **428** ④

429 2π **430** $6\sqrt{3}$ **431** 20

III. 수열

08 등차수열

본문 p.81~87

432 (1) 1, 5, 9, 13, 17 (2) 0, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{15}$ **433** (1) $a_n=(-1)^{n+1}\times n$ (2) $a_n=\frac{n}{n+10}$ **434** (1) 2, 6 (2) 81, 24

435 (1) $a_n=5n-4$ (2) $a_n=-2n+103$ **436** (1) 100 (2) $\frac{5}{6}$ (3) 8 **437** (1) 2 (2) -1 **438** 2

439 (1) 140 (2) 775 (3) 110 **440** (1) 429 (2) 92 **441** (1) $a_n=-4n+4$ (2) $a_1=-1$, $a_n=2n-2$ $(n\geq 2)$

442 39 **443** ② **444** ③ **445** -15 **446** ① **447** ⑤ **448** 제9항 **449** ④

450 ② **451** 1 **452** ② **453** ④ **454** 96 **455** ③ **456** ⑤ **457** 30

458 345 **459** 14 **460** 40 **461** 16 **462** 32 **463** 7 **464** 500 **465** ⑤

466 ③ **467** -2 **468** 15 **469** ② **470** 183 **471** 24 **472** ③ **473** ④

474 21 **475** ④ **476** 13 **477** ② **478** ③ **479** 15 **480** 22 **481** 2

482 ③ **483** 284 **484** 43

09 등비수열

본문 p.89~95

485 (1) 1, 4 (2) $-\frac{3}{2}$, 12 (3) -4, 1 **486** (1) $a_n=7\times 2^{n-1}$ (2) $a_n=8\times\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ (3) $a_n=-(-\sqrt{2})^{n-1}$

487 (1) 128 (2) $\frac{1}{243}$ (3) 3 **488** (1) $\frac{1}{2}$ (2) -2 또는 2 (3) $-\frac{1}{3}$ **489** -7 또는 7 **490** 24 **491** (1) $\frac{31}{16}$ (2) -728

492 (1) $\frac{63}{2}$ (2) $\frac{1}{9}(1-0.1^{10})$ (3) $\frac{1}{4}\{1-(-3)^{n+1}\}$ **493** (1) $a_n=4\times 3^{n-1}$ (2) $a_n=2^{n+2}$ **494** 2 **495** 1

496 제7항 **497** 제10항 **498** 1000 **499** ③ **500** ⑤ **501** ⑤ **502** ③ **503** 66

504 ② **505** ⑤ **506** 4 **507** ④ **508** ③ **509** 9 **510** ② **511** ⑤

512 1024 **513** 167 **514** 19 **515** ② **516** (가) $30(1+0.1)$ (나) $1+0.1$ (다) 528 **517** ③

518 ④ **519** ⑤ **520** ⑤ **521** 35 **522** ③ **523** 18 **524** ① **525** 50

526 ④ **527** 9 **528** ② **529** 54 **530** ③ **531** ④ **532** 9 **533** 65

10 합의 기호 $\sum$와 여러 가지 수열

본문 p.97~103

534 풀이 참조 **535** (1) $\sum_{k=1}^{17} 5^k$ (2) $\sum_{k=1}^{n}(3k-1)$ (3) $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ (4) $\sum_{k=1}^{8}(4k-1)$ **536** (1) 3 (2) 71 **537** (1) 20 (2) n

538 (1) 610 (2) 6060 (3) 32620 (4) 15690 **539** (1) 187 (2) 2465 (3) 36091 **540** (1) 330 (2) 680

541 (1) $\frac{10}{11}$ (2) $\frac{175}{264}$ (3) $\frac{n}{2n+1}$ **542** (1) $\sqrt{11}-1$ (2) $\sqrt{3}+\frac{\sqrt{11}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}$ (3) $\sqrt{n}$ **543** ① **544** ③ **545** 20

546 ③ **547** ① **548** 35 **549** ① **550** ⑤ **551** 650 **552** ③ **553** ④

554 31 **555** ⑤ **556** ④ **557** $a_n=2^n+1$, $S_n=2^{n+1}+n-2$ **558** ④ **559** ②

560 $\frac{53}{165}$ **561** ② **562** 4 **563** 8 **564** ① **565** ② **566** 14 **567** ①

568 ① **569** ④ **570** ② **571** ② **572** -185 **573** ④ **574** 12 **575** 12

576 ④ **577** ② **578** 12 **579** ③ **580** 37 **581** 65 **582** 211

11 수학적 귀납법

본문 p.105~111

583 (1) 13 (2) 31 (3) 56 (4) 8

584 (1) $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+2$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$) (2) $a_1=3$, $a_{n+1}=a_n-3$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)
(3) $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$) (4) $a_1=8$, $a_{n+1}=-\frac{3}{2}a_n$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

585 (1) $a_n=2n+3$ (2) $a_n=-4n$ (3) $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ (4) $a_n=2\times(-2)^{n-1}$

586 (1) $a_n=n^2-n+5$ (2) $a_n=2^n+1$ (3) $a_n=n$ (4) $a_n=9^{\frac{n(n-1)}{2}}$ **587** $(k+1)(k+2)$

588 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조 **589** ④ **590** ② **591** 27 **592** ④ **593** ③

594 6138 **595** ② **596** ① **597** 225 **598** ④ **599** ② **600** 11 **601** 1

602 ② **603** ③ **604** 1536 **605** (1) 36 (2) $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+6$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ (3) $\frac{194}{9}$

606 (1) 30 (2) $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+7$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ (3) $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}+14$ (4) 101 km **607** 262 **608** 15

609 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조 **610** 16 **611** (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조 **612** ④ **613** 9 **614** ③

615 22 **616** ② **617** 15 **618** ⑤ **619** 14 **620** 15 **621** 50 **622** ②

623 ③ **624** ⑤ **625** ① **626** 풀이 참조 **627** 풀이 참조

I. 지수함수와 로그함수

01 지수

개념 콕콕

본문 p.9

001

(1) 8의 세제곱근은 세제곱해서 8이 되는 수이므로 방정식 $x^3=8$의 근이다.

$x^3-8=0$에서 $(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

(2) 16의 네제곱근은 네제곱해서 16이 되는 수이므로 방정식 $x^4=16$의 근이다.

$x^4-16=0$에서 $(x^2-4)(x^2+4)=0$

$(x-2)(x+2)(x^2+4)=0$

$\therefore x=\pm2$ 또는 $x=\pm2i$

답 (1) $2,\ -1\pm\sqrt{3}i$ (2) $\pm2,\ \pm2i$

002

(1) 8의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=8$이므로

$x^3-8=0,\ (x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

따라서 8의 세제곱근 중 실수인 것은 2이다.

(2) 16의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=16$이므로

$x^4-16=0,\ (x^2-4)(x^2+4)=0$

$(x-2)(x+2)(x^2+4)=0$

$\therefore x=\pm2$ 또는 $x=\pm2i$

따라서 16의 네제곱근 중 실수인 것은 $2,\ -2$이다.

(3) -27의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-27$이므로

$x^3+27=0,\ (x+3)(x^2-3x+9)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=\dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

따라서 -27의 세제곱근 중 실수인 것은 -3이다.

(4) $\dfrac{16}{81}$의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=\dfrac{16}{81}$이므로

$81x^4-16=0,\ (9x^2-4)(9x^2+4)=0$

$(3x-2)(3x+2)(9x^2+4)=0$

$\therefore x=\pm\dfrac{2}{3}$ 또는 $x=\pm\dfrac{2}{3}i$

따라서 $\dfrac{16}{81}$의 네제곱근 중 실수인 것은 $\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{2}{3}$이다.

다른 풀이

실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 다음과 같다.

n \ a	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a},\ -\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

(1) 8의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$

(2) 16의 네제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt[4]{16}=\pm\sqrt[4]{2^4}=\pm2$

(3) -27의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{(-3)^3}=-3$

(4) $\dfrac{16}{81}$의 네제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}}=\pm\sqrt[4]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^4}=\pm\dfrac{2}{3}$

답 (1) 2 (2) $2,\ -2$ (3) -3 (4) $\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{2}{3}$

003

(1) $\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2$

(2) $\sqrt[3]{(-5)^3}=-5$

(3) $\sqrt[3]{-\dfrac{8}{27}}=\sqrt[3]{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3}=-\dfrac{2}{3}$

(4) $\sqrt[6]{(-3)^6}=\sqrt[6]{3^6}=3$

답 (1) 2 (2) -5 (3) $-\dfrac{2}{3}$ (4) 3

004

(1) $\sqrt[5]{4}\times\sqrt[5]{8}=\sqrt[5]{4\times8}=\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2$

(2) $\dfrac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}=\sqrt[4]{\dfrac{243}{3}}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$

(3) $(\sqrt[12]{27})^4=\sqrt[12]{27^4}=\sqrt[12]{(3^3)^4}=\sqrt[12]{3^{12}}=3$

(4) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$

답 (1) 2 (2) 3 (3) 3 (4) 2

005

(1) $(-3)^0=1$

(2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^0=1$

(3) $3^{-2}=\dfrac{1}{3^2}=\dfrac{1}{9}$

(4) $\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{-2}=\dfrac{1}{\left(-\dfrac{1}{5}\right)^2}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{25}}=25$

답 (1) 1 (2) 1 (3) $\dfrac{1}{9}$ (4) 25

006

(1) $\sqrt[3]{a}=a^{\boxed{\frac{1}{3}}}$

(2) $\sqrt[6]{a^5}=a^{\boxed{\frac{5}{6}}}$

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\dfrac{1}{a^{\frac{1}{2}}}=a^{\boxed{-\frac{1}{2}}}$

(4) $\dfrac{1}{\sqrt[12]{a^{-4}}}=\dfrac{1}{a^{-\frac{4}{12}}}=\dfrac{1}{a^{-\frac{1}{3}}}=a^{\boxed{\frac{1}{3}}}$

답 (1) $\dfrac{1}{3}$ (2) $\dfrac{5}{6}$ (3) $-\dfrac{1}{2}$ (4) $\dfrac{1}{3}$

007

(1) $10000^{0.125}=(10^4)^{\frac{1}{8}}=10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$

(2) $27^{\frac{5}{6}}=(3^3)^{\frac{5}{6}}=3^{\frac{5}{2}}=3^{2+\frac{1}{2}}=3^2\times3^{\frac{1}{2}}=9\sqrt{3}$

(3) $8^{-\frac{1}{6}}=(2^3)^{-\frac{1}{6}}=2^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(4) $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{9}}=(3^{-3})^{-\frac{1}{9}}=3^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{3}$

답 (1) $\sqrt{10}$ (2) $9\sqrt{3}$ (3) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (4) $\sqrt[3]{3}$

008

(1) $(3^{\frac{5}{6}})^3\times3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{5}{2}}\times3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}=3^3=27$

(2) $(4^{\frac{2}{9}})^3\div\sqrt[3]{4}\times(4^{\frac{1}{3}})^2=4^{\frac{2}{3}}\div4^{\frac{1}{3}}\times4^{\frac{2}{3}}$

$=4^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}=4^1=4$

(3) $(\sqrt[4]{a^2}\times\sqrt[5]{b^3})^{10}=(\sqrt{a}\times\sqrt[5]{b^3})^{10}$

$=(a^{\frac{1}{2}}\times b^{\frac{3}{5}})^{10}=a^5b^6$

(4) $(a^3b^4)^{\frac{1}{12}}\times(a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{5}{9}})^3=a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{5}{3}}$

$=a^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{3}+\frac{5}{3}}=ab^2$

답 (1) 27 (2) 4 (3) a^5b^6 (4) ab^2

009

(1) $3^{\sqrt{18}}\times3^{\sqrt{2}}=3^{3\sqrt{2}+\sqrt{2}}=3^{4\sqrt{2}}$

(2) $5^{\sqrt{75}}\div5^{\sqrt{27}}\times5^{\sqrt{48}}=5^{5\sqrt{3}-3\sqrt{3}+4\sqrt{3}}=5^{6\sqrt{3}}$

(3) $(a^{\sqrt{3}})^{\sqrt{12}}=a^{\sqrt{36}}=a^6$

(4) $(a^{\frac{1}{\sqrt{15}}}\times b^{\sqrt{\frac{3}{5}}})^{\sqrt{15}}=(a^{\frac{1}{\sqrt{15}}}\times b^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}})^{\sqrt{15}}=ab^3$

답 (1) $3^{4\sqrt{2}}$ (2) $5^{6\sqrt{3}}$ (3) a^6 (4) ab^3

유형 콕콕 본문 p.10~13

010 ②	011 ㄷ	012 3	013 ④	014 ⑤	015 1
016 ②	017 ①	018 $\frac{5}{2}$	019 ⑤	020 ②	021 18
022 ①	023 ①	024 6	025 ⑤	026 ④	027 $\frac{3}{2}$
028 ②	029 4	030 $\frac{8}{3}$	031 ②	032 ③	
033 $A<B<C$					

010

① 집합 $\{x|x$는 8의 세제곱근$\}$은 방정식 $x^3=8$의 근의 모임이므로 원소의 개수는 3이다.

② 집합 $\{x|x$는 5의 네제곱근$\}$은 방정식 $x^4=5$의 근의 모임이므로 원소의 개수는 4이다.

③ 집합 $\{x|x$는 -6의 세제곱근$\}$은 방정식 $x^3=-6$의 근의 모임이므로 원소의 개수는 3이다.

④ 집합 $\{x|x$는 10의 네제곱근, x는 실수$\}$는 10의 네제곱근 중 실수인 것의 모임이므로 $\{\sqrt[4]{10}, -\sqrt[4]{10}\}$이다.
즉, 원소의 개수는 2이다.

⑤ 집합 $\{x|x$는 12의 세제곱근, x는 실수$\}$는 12의 세제곱근 중 실수인 것의 모임이므로 $\{\sqrt[3]{12}\}$이다.
즉, 원소의 개수는 1이다.

따라서 원소의 개수가 가장 많은 집합은 ②이다. 답 ②

011

ㄱ. 제곱근 9는 $\sqrt{9}=3$이다. (거짓)

ㄴ. $(-2)^2$의 제곱근은 $\pm\sqrt{(-2)^2}=\pm\sqrt{4}=\pm2$이다. (거짓)

ㄷ. n이 홀수일 때, 2의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{2}$뿐이다. (참)

ㄹ. n이 짝수일 때, -3의 n제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ㄷ

012

-5의 제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않으므로

$R(-5, 2)=0$

-6의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-6}$뿐이므로

$R(-6, 3)=1$

7의 네제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[4]{7}$, $-\sqrt[4]{7}$의 2개이므로

$R(7, 4)=2$

$\therefore R(-5, 2)+R(-6, 3)+R(7, 4)=0+1+2=3$ 답 3

013

$$\sqrt[4]{3a^2b}\times\sqrt[12]{3a^8b^5}\div\sqrt[6]{3a^3b^2}=\frac{\sqrt[12]{3^3a^6b^3}\times\sqrt[12]{3a^8b^5}}{\sqrt[12]{3^2a^6b^4}}$$
$$=\frac{\sqrt[12]{3^4a^{14}b^8}}{\sqrt[12]{3^2a^6b^4}}$$
$$=\sqrt[12]{\frac{3^4a^{14}b^8}{3^2a^6b^4}}$$
$$=\sqrt[12]{3^2a^8b^4}$$
$$=\sqrt[12]{(3a^4b^2)^2}$$
$$=\sqrt[6]{3a^4b^2}$$

답 ④

014

① $\sqrt{7}\times\sqrt[3]{7}=\sqrt[6]{7^3}\times\sqrt[6]{7^2}=\sqrt[6]{7^3\times7^2}=\sqrt[6]{7^{3+2}}=\sqrt[6]{7^5}$

② $\sqrt[3]{-\sqrt{729}}=\sqrt[3]{-\sqrt{3^6}}=\sqrt[3]{-3^3}=\sqrt[3]{(-3)^3}=-3$

③ $\sqrt[4]{\sqrt[3]{16}}=\sqrt[12]{2^4}=\sqrt[3]{2}$

④ $\frac{\sqrt[3]{-27}}{\sqrt[3]{8}}=\frac{\sqrt[3]{(-3)^3}}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{-3}{2}=-\frac{3}{2}$, $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}=\sqrt[3]{\left(-\frac{3}{2}\right)^3}=-\frac{3}{2}$

$\therefore \frac{\sqrt[3]{-27}}{\sqrt[3]{8}}=\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}$

⑤ $\left(\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^6=(\sqrt{3})^6\times\frac{1}{(\sqrt[3]{5})^6}=\sqrt{(3^3)^2}\times\frac{1}{\sqrt[3]{(5^2)^3}}$

$=3^3\times\frac{1}{5^2}=\frac{27}{25}$

답 ⑤

015

$$\sqrt{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}}}\times\sqrt[3]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}}\times\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}}=\frac{\sqrt{\sqrt[4]{a}}}{\sqrt{\sqrt[3]{a}}}\times\frac{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}}\times\frac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[4]{\sqrt{a}}}$$
$$=\frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[6]{a}}\times\frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[12]{a}}\times\frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[8]{a}}=1$$

답 1

016

$a^2+a^{-2}=3$이므로

$(a+a^{-1})^2=a^2+2aa^{-1}+a^{-2}$

$=a^2+a^{-2}+2=3+2=5$

$\therefore a+a^{-1}=\sqrt{5}$ ($\because a>0$)

$\therefore a^3+a^{-3}=(a+a^{-1})^3-3aa^{-1}(a+a^{-1})$

$=(\sqrt{5})^3-3\sqrt{5}$

$=5\sqrt{5}-3\sqrt{5}=2\sqrt{5}$ 답 ②

017

$$\frac{a^{-1}+a^{-2}+a^{-3}+a^{-4}}{a+a^2+a^3+a^4}=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4}}{a+a^2+a^3+a^4}=\frac{\frac{a^3+a^2+a+1}{a^4}}{a(1+a+a^2+a^3)}$$
$$=\frac{a^3+a^2+a+1}{a^5(1+a+a^2+a^3)}=\frac{1}{a^5}$$
$$=\frac{1}{(\sqrt[5]{2})^5}=\frac{1}{2}$$

답 ①

018

$$\frac{1}{3^{-4}+1}+\frac{1}{3^4+1}=\frac{(3^4+1)+(3^{-4}+1)}{(3^{-4}+1)(3^4+1)}$$
$$=\frac{3^4+1+3^{-4}+1}{1+3^{-4}+3^4+1}=1$$
$$\frac{1}{3^{-2}+1}+\frac{1}{3^2+1}=\frac{(3^2+1)+(3^{-2}+1)}{(3^{-2}+1)(3^2+1)}$$
$$=\frac{3^2+1+3^{-2}+1}{1+3^{-2}+3^2+1}=1$$
$\therefore$ (주어진 식) $=1+\frac{1}{3^0+1}+1$
$$=2+\frac{1}{1+1}=\frac{5}{2}$$

다른 풀이

$$\frac{1}{3^{-4}+1}+\frac{1}{3^{-2}+1}+\frac{1}{3^0+1}+\frac{1}{3^2+1}+\frac{1}{3^4+1}$$
$$=\frac{3^4}{3^4(3^{-4}+1)}+\frac{3^2}{3^2(3^{-2}+1)}+\frac{1}{3^0+1}+\frac{1}{3^2+1}+\frac{1}{3^4+1}$$
$$=\frac{3^4}{1+3^4}+\frac{3^2}{1+3^2}+\frac{1}{1+1}+\frac{1}{3^2+1}+\frac{1}{3^4+1}$$
$$=\left(\frac{3^4}{3^4+1}+\frac{1}{3^4+1}\right)+\left(\frac{3^2}{3^2+1}+\frac{1}{3^2+1}\right)+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{3^4+1}{3^4+1}+\frac{3^2+1}{3^2+1}+\frac{1}{2}$$
$$=1+1+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

019

$$\left\{\left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}\times\left(\frac{5}{27}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left[\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^3\right\}^{-\frac{1}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}\times\left(\frac{27}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}\right\}^{\frac{3}{2}}\times\left(\frac{27}{5}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\times\left(\frac{3^3}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{5^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}}\times\frac{3^{\frac{3}{2}}}{5^{\frac{1}{2}}}=5^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}=5$$

답 ⑤

020

ㄱ. $3^{\frac{1}{6}}\times3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$ (참)

ㄴ. $(16^{-2})^{\frac{1}{4}}=(2^{-8})^{\frac{1}{4}}=2^{-2}=\frac{1}{4}$ (참)

ㄷ. $\{(-5)^2\}^{\frac{3}{2}}=(5^2)^{\frac{3}{2}}=5^3=125$ (거짓)

ㄹ. $(\sqrt{6})^{2\sqrt{2}}=\{(\sqrt{6})^2\}^{\sqrt{2}}=6^{\sqrt{2}}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

021

$(\sqrt[5]{a^2})^2=(a^{\frac{2}{5}})^2=a^{\frac{4}{5}}$

$\sqrt{a^3\sqrt[3]{a^k}}=\sqrt{a}\times\sqrt{\sqrt[3]{a^k}}=\sqrt{a}\times\sqrt[6]{a^k}$
$$=a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{k}{6}}=a^{\frac{3+k}{6}}$$

가

따라서 $a^{\frac{4}{5}}=a^{\frac{3+k}{6}}$이고 $a>0$이므로

$\frac{4}{5}=\frac{3+k}{6}$, $24=15+5k$, $5k=9$

$\therefore k=\frac{9}{5}$

나

$\therefore 10k=10\times\frac{9}{5}=18$

다

단계	채점 요소	비율
가	주어진 식을 a^r의 꼴로 나타내기	60%
나	유리수 k의 값 구하기	30%
다	$10k$의 값 구하기	10%

답 18

022

$$(a^{\frac{1}{8}}-b^{\frac{1}{8}})(a^{\frac{1}{8}}+b^{\frac{1}{8}})(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a+b)$$
$$=\{(a^{\frac{1}{8}})^2-(b^{\frac{1}{8}})^2\}(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a+b)$$
$$=(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a+b)$$
$$=\{(a^{\frac{1}{4}})^2-(b^{\frac{1}{4}})^2\}(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a+b)$$
$$=(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a+b)$$
$$=\{(a^{\frac{1}{2}})^2-(b^{\frac{1}{2}})^2\}(a+b)$$
$$=(a-b)(a+b)$$
$$=a^2-b^2$$
$$=(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2=2-3=-1$$

답 ①

023

$a^{\frac{1}{2}}=x$, $a^{-\frac{1}{2}}=y$로 놓으면

$x+y=a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=5$, $xy=a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}=1$이므로

$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=x^3+y^3$
$$=(x+y)^3-3xy(x+y)$$
$$=5^3-3\times1\times5=110$$

다른 풀이

$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=5$의 양변을 세제곱하면

$(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^3=(a^{\frac{1}{2}})^3+(a^{-\frac{1}{2}})^3+3a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})$
$$=a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}+3\times1\times5=125$$

$\therefore a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=125-15=110$

답 ①

024

$a=2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}}$의 양변을 세제곱하면

$a^3=(2^{\frac{1}{3}})^3-(2^{-\frac{1}{3}})^3-3\times2^{\frac{1}{3}}\times2^{-\frac{1}{3}}(2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}})$
$$=2-\frac{1}{2}-3(2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}})=\frac{3}{2}-3a$$

즉, $a^3+3a=\frac{3}{2}$이므로 $2a^3+6a-3=0$

$\therefore 2a^4+2a^3+6a^2+3a+3=a(2a^3+6a-3)+2a^3+6a+3$
$$=6$$

답 6

025

$a^{8x}=4$에서 $(a^{4x})^2=4$

$a>0$이므로 $a^{4x}>0$ $\quad\therefore a^{4x}=2$

주어진 식의 분모, 분자에 a^{2x}을 곱하면

$$\frac{a^{6x}-a^{-6x}}{a^{2x}+a^{-2x}}=\frac{a^{2x}(a^{6x}-a^{-6x})}{a^{2x}(a^{2x}+a^{-2x})}$$
$$=\frac{a^{8x}-a^{-4x}}{a^{4x}+1}$$

$$=\frac{(a^{4x})^2-\frac{1}{a^{4x}}}{a^{4x}+1}$$

$$=\frac{4-\frac{1}{2}}{2+1}\ (\because a^{4x}=2)$$

$$=\frac{\frac{7}{2}}{3}=\frac{7}{6}$$

답 ⑤

026

주어진 식의 분모, 분자에 2^x을 곱하면

$$\frac{2^{3x}+2^{-3x}}{2^x+2^{-x}}=\frac{2^x(2^{3x}+2^{-3x})}{2^x(2^x+2^{-x})}=\frac{2^{4x}+2^{-2x}}{2^{2x}+1}$$

$$=\frac{(2^{2x})^2+\frac{1}{2^{2x}}}{2^{2x}+1}=\frac{3^2+\frac{1}{3}}{3+1}\ (\because 2^{2x}=3)$$

$$=\frac{\frac{28}{3}}{4}=\frac{7}{3}$$

답 ④

027

$\frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}=\frac{1}{3}$의 좌변의 분모, 분자에 2^x을 곱하면

$\frac{2^x(2^x-2^{-x})}{2^x(2^x+2^{-x})}=\frac{1}{3}$, $\frac{2^{2x}-1}{2^{2x}+1}=\frac{1}{3}$

가

$3\times2^{2x}-3=2^{2x}+1$

$2\times2^{2x}=4$, $2^{2x}=2$

$\therefore 4^x=2$

나

$\therefore 4^x-4^{-x}=4^x-\frac{1}{4^x}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

다

단계	채점 요소	비율
가	주어진 식의 좌변의 분모, 분자에 2^x을 곱하여 정리하기	40%
나	4^x의 값 구하기	30%
다	4^x-4^{-x}의 값 구하기	30%

답 $\frac{3}{2}$

028

$7^x=27$에서 $7=27^{\frac{1}{x}}=(3^3)^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{3}{x}}$ …… ㉠

$21^y=9$에서 $21=9^{\frac{1}{y}}=(3^2)^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{2}{y}}$ …… ㉡

㉠÷㉡을 하면

$\frac{7}{21}=3^{\frac{3}{x}}\div3^{\frac{2}{y}}$, $\frac{1}{3}=3^{-1}=3^{\frac{3}{x}-\frac{2}{y}}$

$\therefore \frac{3}{x}-\frac{2}{y}=-1$

답 ②

029

$a^x=8$에서 $a=8^{\frac{1}{x}}$ …… ㉠

$b^y=8$에서 $b=8^{\frac{1}{y}}$ …… ㉡

$c^z=8$에서 $c=8^{\frac{1}{z}}$ …… ㉢

가

㉠÷㉡×㉢을 하면

$\frac{ac}{b}=8^{\frac{1}{x}}\div8^{\frac{1}{y}}\times8^{\frac{1}{z}}=8^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

나

$\therefore \frac{ac}{b}=8^{\frac{2}{3}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}=2^2=4$

다

단계	채점 요소	비율
가	a, b, c를 각각 8^r의 꼴로 나타내기	50%
나	$\frac{ac}{b}$를 8^s의 꼴로 나타내기	30%
다	$\frac{ac}{b}$의 값 구하기	20%

답 4

030

$8^x=9^y=12^z=k\ (k>0)$로 놓으면 $xyz\neq0$에서 $k\neq1$

$8^x=2^{3x}=k$에서 $2^3=k^{\frac{1}{x}}$

$9^y=3^{2y}=k$에서 $3^2=k^{\frac{1}{y}}$

$12^z=(2^2\times3)^z=k$에서 $2^2\times3=k^{\frac{1}{z}}$

이때, $\frac{a}{x}+\frac{2}{y}=\frac{4}{z}$이므로 $k^{\frac{a}{x}}k^{\frac{2}{y}}=k^{\frac{4}{z}}$

즉, $(k^{\frac{1}{x}})^a\times(k^{\frac{1}{y}})^2=(k^{\frac{1}{z}})^4$에서

$(2^3)^a\times(3^2)^2=(2^2\times3)^4$, $2^{3a}\times3^4=2^8\times3^4$

따라서 $3a=8$이므로

$a=\frac{8}{3}$

답 $\frac{8}{3}$

031

A, B, C를 각각 12제곱하면

$A^{12}=(\sqrt[3]{3\sqrt{2}})^{12}=(\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{\sqrt{2}})^{12}=(3^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{1}{6}})^{12}=3^4\times2^2=324$

$B^{12}=(\sqrt{2\sqrt[3]{5}})^{12}=(\sqrt{2}\times\sqrt{\sqrt[3]{5}})^{12}=(2^{\frac{1}{2}}\times5^{\frac{1}{6}})^{12}=2^6\times5^2=1600$

$C^{12}=(\sqrt{2\sqrt{2}})^{12}=(\sqrt{\sqrt{2^2\times2}})^{12}=(2^{\frac{3}{4}})^{12}=2^9=512$

따라서 $A^{12}<C^{12}<B^{12}$이므로

$A<C<B$

다른 풀이

거듭제곱근의 성질에 의하여

$A=\sqrt[3]{3\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\sqrt{3^2\times2}}=\sqrt[6]{18}=\sqrt[12]{18^2}=\sqrt[12]{324}$

$B=\sqrt{2\sqrt[3]{5}}=\sqrt{\sqrt[3]{2^3\times5}}=\sqrt[6]{40}=\sqrt[12]{40^2}=\sqrt[12]{1600}$

$C=\sqrt{2\sqrt{2}}=\sqrt{\sqrt{2^2\times2}}=\sqrt[4]{8}=\sqrt[12]{8^3}=\sqrt[12]{512}$

$\therefore A<C<B$

답 ②

032

A, B, C를 각각 6제곱하면

$A^6=\{(\sqrt{2})^3\}^6=2^{\frac{3}{2}\times6}=2^9=512$

$B^6=\{(0.5)^{\frac{3}{2}}\}^6=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}^6=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}\times6}=\left(\frac{1}{2}\right)^9=\frac{1}{512}$

$C^6=(\sqrt[3]{4})^6=(2^{\frac{2}{3}})^6=2^{\frac{2}{3}\times6}=2^4=16$

따라서 $B^6<C^6<A^6$이므로

$B<C<A$

다른 풀이

거듭제곱근의 성질에 의하여

$A=(\sqrt{2})^3=\sqrt{2^3}=\sqrt[6]{2^{3\times3}}=\sqrt[6]{2^9}=\sqrt[6]{512}$

$B=0.5^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2^3}}=\frac{1}{\sqrt[6]{2^{3\times3}}}=\frac{1}{\sqrt[6]{2^9}}=\frac{1}{\sqrt[6]{512}}$

$C=\sqrt[3]{4}=\sqrt[6]{4^2}=\sqrt[6]{16}$

$\therefore B<C<A$ 답 ③

033

$A=2^{60}$, $B=3^{50}$, $C=5^{40}$에서 지수 60, 50, 40의 최대공약수가 10이므로 지수를 10으로 같게 변형하면

$A=2^{60}=(2^6)^{10}=64^{10}$

$B=3^{50}=(3^5)^{10}=243^{10}$

$C=5^{40}=(5^4)^{10}=625^{10}$

따라서 지수가 모두 10으로 같고 $64<243<625$이므로

$64^{10}<243^{10}<625^{10}$

$\therefore A<B<C$ 답 $A<B<C$

실력 콕콕 본문 p. 14~15

034 276	035 24	036 ③	037 ④	038 ④	039 78
040 ⑤	041 ⑤	042 ②	043 ①	044 ④	
045 (1) $2^{\frac{5}{4}}$ (2) 8		046 ③	047 30	048 -4	
049 $4\sqrt{3}$					

034

x는 2의 여섯제곱근 중 양의 실수인 것이므로

$x=\sqrt[6]{2}=2^{\frac{1}{6}}$ $\quad\therefore x^n=2^{\frac{n}{6}}$

x^n이 네 자리의 자연수가 되려면

$2^{\frac{n}{6}}=2^{10}$ 또는 $2^{\frac{n}{6}}=2^{11}$ 또는 $2^{\frac{n}{6}}=2^{12}$ 또는 $2^{\frac{n}{6}}=2^{13}$

이어야 하므로

$\frac{n}{6}=10$ 또는 $\frac{n}{6}=11$ 또는 $\frac{n}{6}=12$ 또는 $\frac{n}{6}=13$

$\therefore n=60$ 또는 $n=66$ 또는 $n=72$ 또는 $n=78$

따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$60+66+72+78=276$ 답 276

035

실수 a의 n제곱근은 방정식 $x^n=a$의 근이므로 복소수의 범위에서 n개이다.

$\therefore p=n(A)+n(B)+n(C)=6+7+8=21$

한편, 집합 A에서 $(-3)^4>0$이므로 $(-3)^4$의 여섯제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[6]{(-3)^4}$, $-\sqrt[6]{(-3)^4}$의 2개이고, 집합 B에서 $(-3)^5<0$이므로 $(-3)^5$의 일곱제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[7]{(-3)^5}$의 1개 뿐이다.

또한 집합 C에서 $(-3)^9<0$이므로 $(-3)^9$의 여덟제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않는다.

$\therefore q=2+1+0=3$

$\therefore p+q=21+3=24$ 답 24

036

$(\sqrt[3]{6^5})^{\frac{1}{2}}$이 자연수 N의 n제곱근이라 하면

$\{(\sqrt[3]{6^5})^{\frac{1}{2}}\}^n=(6^{\frac{5}{3}})^{\frac{n}{2}}=6^{\frac{5n}{6}}=N$

따라서 $6^{\frac{5n}{6}}$이 자연수가 되려면 $5n$은 6의 배수이어야 하고, 5와 6은 서로소이므로 n이 6의 배수이어야 한다.

이때, $10\le n\le 99$이므로 구하는 n은 12, 18, 24, $\cdots$, 96의 15개이다.

답 ③

037

$\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$, $\sqrt[4]{256}=\sqrt[4]{4^4}=4$에서 $[\sqrt[4]{100}]=3$이므로

$[\sqrt[3]{a}]+[\sqrt{15-a}]=3$

이때, a는 자연수이므로 $\sqrt[3]{a}\ge1$, 즉 $[\sqrt[3]{a}]=1, 2, 3, \cdots$

(i) $[\sqrt[3]{a}]=1$, $[\sqrt{15-a}]=2$일 때

$[\sqrt[3]{a}]=1$에서 $1\le\sqrt[3]{a}<2$

$\therefore 1\le a<8$ …… ㉠

$[\sqrt{15-a}]=2$에서 $2\le\sqrt{15-a}<3$, $4\le15-a<9$

$\therefore 6<a\le11$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $6<a<8$이므로 주어진 등식을 만족시키는 자연수 a는 7뿐이다.

(ii) $[\sqrt[3]{a}]=2$, $[\sqrt{15-a}]=1$일 때

$[\sqrt[3]{a}]=2$에서 $2\le\sqrt[3]{a}<3$

$\therefore 8\le a<27$ …… ㉢

$[\sqrt{15-a}]=1$에서 $1\le\sqrt{15-a}<2$, $1\le15-a<4$

$\therefore 11<a\le14$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $11<a\le14$이므로 주어진 등식을 만족시키는 자연수 a는 12, 13, 14이다.

(iii) $[\sqrt[3]{a}]=3$, $[\sqrt{15-a}]=0$일 때

$[\sqrt[3]{a}]=3$에서 $3\le\sqrt[3]{a}<4$

$\therefore 27\le a<64$ …… ㉤

$[\sqrt{15-a}]=0$에서 $0\le\sqrt{15-a}<1$, $0\le15-a<1$

$\therefore 14<a\le15$ …… ㉥

㉤, ㉥에서 주어진 등식을 만족시키는 자연수 a는 없다.

(i)~(iii)에서 구하는 모든 자연수 a의 값의 합은

$7+12+13+14=46$ 답 ④

038

$$\frac{\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}}}{\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}}=\frac{\sqrt{a}\times\sqrt[6]{a}\times\sqrt[24]{a}}{\sqrt[4]{a}\times\sqrt[12]{a}\times\sqrt[24]{a}}$$

$$=\frac{\sqrt[24]{a^{12}\times a^4\times a}}{\sqrt[24]{a^6\times a^2\times a}}$$

$$=\frac{\sqrt[24]{a^{17}}}{\sqrt[24]{a^9}}=\sqrt[24]{\frac{a^{17}}{a^9}}$$

$$=\sqrt[24]{a^8}=\sqrt[3]{a}$$

따라서 $m=3$, $n=1$이므로

$m+n=3+1=4$ 답 ④

039

$$\sqrt[3n]{\frac{2^{21}(3^4+3^2+1)}{3^6-1}}=\sqrt[3n]{\frac{2^{21}(3^4+3^2+1)}{(3^2-1)(3^4+3^2+1)}}$$
$$=\left(\frac{2^{21}}{3^2-1}\right)^{\frac{1}{3n}}=\left(\frac{2^{21}}{2^3}\right)^{\frac{1}{3n}}$$
$$=(2^{18})^{\frac{1}{3n}}=2^{\frac{6}{n}}=x$$

이때, x가 자연수가 되도록 하는 자연수 n은

$n=1,\ 2,\ 3,\ 6$

즉, $A=\{2^6,\ 2^3,\ 2^2,\ 2^1\}=\{2,\ 4,\ 8,\ 64\}$

따라서 구하는 집합 A의 모든 원소의 합은

$2+4+8+64=78$

답 78

040

$3^{2x+y}=a,\ 3^{x-y}=b$에서

$3^{3x}=3^{2x+y}\times 3^{x-y}=ab \qquad \therefore\ 3^x=\sqrt[3]{ab}$

또한 $3^{2x+y}=a,\ 3^{2x-2y}=b^2$에서

$3^{3y}=3^{2x+y}\div 3^{2x-2y}=\frac{a}{b^2} \qquad \therefore\ 3^y=\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}$

$\therefore\ 3^{x+y}=3^x\times 3^y=\sqrt[3]{ab}\times\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}=\sqrt[3]{ab\times\frac{a}{b^2}}=\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}$

답 ⑤

041

$a*b=a^b b^{-\frac{a}{2}}$에서

$(2*4)*x=(2^4\times 4^{-\frac{2}{2}})*x=4*x=4^x\times x^{-\frac{4}{2}}=4^x\times x^{-2}$

즉, $4^x\times x^{-2}=8x^{-2}$이므로

$4^x=8 \qquad \therefore\ 2^{2x}=2^3$

따라서 $2x=3$이므로 $x=\frac{3}{2}$

답 ⑤

042

$\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{n}}=(2^{-6})^{\frac{1}{n}}=2^{-\frac{6}{n}}$이 자연수가 되도록 하는 정수 n은 6의 음의 약수이다.

$\therefore\ n=-1,\ -2,\ -3,\ -6$

$\therefore\ x=2^6,\ 2^3,\ 2^2,\ 2^1$

따라서 집합 A의 모든 원소의 곱은

$2^6\times 2^3\times 2^2\times 2^1=2^{6+3+2+1}=2^{12}$

답 ②

043

(i) $\sqrt{\frac{2^a\times 5^b}{2}}=2^{\frac{a-1}{2}}\times 5^{\frac{b}{2}}$이 자연수이므로

$a-1=2m$ (m은 음이 아닌 정수)

즉, $a=2m+1$이므로 $a=1,\ 3,\ 5,\ \cdots$

또한 $b=2n$(n은 자연수)이므로

$b=2,\ 4,\ 6,\ \cdots$

(ii) $\sqrt[3]{\frac{3^b}{2^{a+1}}}=\frac{3^{\frac{b}{3}}}{2^{\frac{a+1}{3}}}$이 유리수이므로

$a+1=3k$ (k는 자연수)

즉, $a=3k-1$이므로 $a=2,\ 5,\ 8,\ \cdots$

또한 $b=3l$ (l은 자연수)이므로 $b=3,\ 6,\ 9,\ \cdots$

(i), (ii)에서 a의 최솟값은 5, b의 최솟값은 6이므로 $a+b$의 최솟값은

$5+6=11$

답 ①

044

$3^x+3^{-x}=3$이므로

$3^{2x}+3^{-2x}=(3^x+3^{-x})^2-2\times 3^x 3^{-x}$
$=3^2-2=7$

이고

$3^{4x}+3^{-4x}=(3^{2x}+3^{-2x})^2-2\times 3^{2x}3^{-2x}$
$=7^2-2=47$

$\therefore\ \frac{3^{4x}+3^{-4x}+1}{3^{2x}+3^{-2x}+1}=\frac{47+1}{7+1}=6$

답 ④

045

(1) $x^2=(2^{\frac{1}{4}}+2^{-\frac{1}{4}})^2=2^{\frac{1}{2}}+2^{-\frac{1}{2}}+2$이므로

$x^2-4=2^{\frac{1}{2}}+2^{-\frac{1}{2}}-2=(2^{\frac{1}{4}}-2^{-\frac{1}{4}})^2$

$\therefore\ \sqrt{x^2-4}=2^{\frac{1}{4}}-2^{-\frac{1}{4}}\ (\because\ \sqrt{x^2-4}>0)$

$\therefore\ \sqrt{x^2-4}+x=(2^{\frac{1}{4}}-2^{-\frac{1}{4}})+(2^{\frac{1}{4}}+2^{-\frac{1}{4}})=2\times 2^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{5}{4}}$

(2) $x=2^{\frac{1}{2}}-2^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로

$x+\sqrt{x^2+4}=\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+4}$

$=\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

$\therefore\ (x+\sqrt{x^2+4})^2=(2\sqrt{2})^2=8$

다른 풀이

(2) $x^2=(2^{\frac{1}{2}}-2^{-\frac{1}{2}})^2=2+2^{-1}-2=\frac{1}{2}$이므로

$\sqrt{x^2+4}=\sqrt{\frac{1}{2}+4}=\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$

$x=2^{\frac{1}{2}}-2^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로

$(x+\sqrt{x^2+4})^2=\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2=(2\sqrt{2})^2=8$

답 (1) $2^{\frac{5}{4}}$ (2) 8

046

$a^x=7$에서 $a=7^{\frac{1}{x}} \qquad \therefore\ a^6=7^{\frac{6}{x}}$ …… ㉠

$b^{2y}=7$에서 $b=7^{\frac{1}{2y}} \qquad \therefore\ b^6=7^{\frac{3}{y}}$ …… ㉡

$c^{3z}=7$에서 $c=7^{\frac{1}{3z}} \qquad \therefore\ c^6=7^{\frac{2}{z}}$ …… ㉢

㉠×㉡×㉢을 하면

$a^6\times b^6\times c^6=7^{\frac{6}{x}}\times 7^{\frac{3}{y}}\times 7^{\frac{2}{z}}$

$(abc)^6=7^{\frac{6}{x}+\frac{3}{y}+\frac{2}{z}}$

이때, $abc=49$이므로 $(abc)^6=49^6=(7^2)^6=7^{12}$

$\therefore\ \frac{6}{x}+\frac{3}{y}+\frac{2}{z}=12$

다른 풀이

$a^x=b^{2y}=c^{3z}=7$에서

$a^{6xyz}=7^{6yz},\ b^{6xyz}=7^{3xz},\ c^{6xyz}=7^{2xy}$

$\therefore\ (abc)^{6xyz}=a^{6xyz}\times b^{6xyz}\times c^{6xyz}$
$=7^{6yz}\times 7^{3xz}\times 7^{2xy}$
$=7^{6yz+3xz+2xy}$

이때, $abc=49$이므로

$49^{6xyz}=7^{12xyz}=7^{6yz+3xz+2xy}$

$\therefore\ 12xyz=6yz+3xz+2xy$

위의 식의 양변을 xyz로 나누면

$12=\frac{6}{x}+\frac{3}{y}+\frac{2}{z}$

$\therefore \frac{6}{x}+\frac{3}{y}+\frac{2}{z}=12$

답 ③

047

$a^6=3$에서 $a=3^{\frac{1}{6}}$ …… ㉠

$b^5=5$에서 $b=5^{\frac{1}{5}}$ …… ㉡

$c^2=7$에서 $c=7^{\frac{1}{2}}$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$(abc)^n=(3^{\frac{1}{6}}\times 5^{\frac{1}{5}}\times 7^{\frac{1}{2}})^n=3^{\frac{n}{6}}\times 5^{\frac{n}{5}}\times 7^{\frac{n}{2}}$

이때, $(abc)^n$이 자연수이려면 3, 5, 7이 서로소이므로 $\frac{n}{6}$, $\frac{n}{5}$, $\frac{n}{2}$이 모두 자연수이어야 한다.

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 6, 5, 2의 최소공배수인 30이다.

답 30

048

$(x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{4}}-x^{-\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})$

$=\{(x^{\frac{1}{4}})^2-(x^{-\frac{1}{4}})^2\}(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})$

$=(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})$

$=(x^{\frac{1}{2}})^2-(x^{-\frac{1}{2}})^2$

$=x-x^{-1}$

가

이때, $x+x^{-1}=2\sqrt{5}$이므로

$(x-x^{-1})^2=(x+x^{-1})^2-4xx^{-1}$

$=(2\sqrt{5})^2-4=16$

나

그런데 $0<x<1$일 때 $x^{-1}>1$, 즉 $x<x^{-1}$이므로

$x-x^{-1}<0$

$\therefore$ (주어진 식)$=x-x^{-1}=-4$

다

단계	채점 요소	비율
가	주어진 식을 간단히 하기	40%
나	곱셈 공식의 변형을 이용하여 $(x-x^{-1})^2$의 값 구하기	30%
다	주어진 식의 값 구하기	30%

답 -4

049

$f(x)=\frac{1}{2}(a^x-a^{-x})$에서 $f(p)=\sqrt{3}$이므로

$\frac{1}{2}(a^p-a^{-p})=\sqrt{3}$, $a^p-a^{-p}=2\sqrt{3}$

$\therefore (a^p+a^{-p})^2=(a^p-a^{-p})^2+4a^pa^{-p}$

$=(2\sqrt{3})^2+4=16$

가

이때, $a^p+a^{-p}>0$이므로

$a^p+a^{-p}=4$

나

$\therefore f(2p)=\frac{1}{2}(a^{2p}-a^{-2p})$

$=\frac{1}{2}(a^p+a^{-p})(a^p-a^{-p})$

$=\frac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

다

단계	채점 요소	비율
가	곱셈 공식의 변형을 이용하여 $(a^p+a^{-p})^2$의 값 구하기	40%
나	a^p+a^{-p}의 값 구하기	20%
다	$f(2p)$의 값 구하기	40%

답 $4\sqrt{3}$

02 로그

개념 콕콕 본문 p.17~18

050

답 (1) $2=\log_7 49$ (2) $-1=\log_2 0.5$

(3) $\frac{1}{3}=\log_{1000} 10$ (4) $0=\log_4 1$

051

답 (1) $3^4=81$ (2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}=32$ (3) $(\sqrt{5})^4=25$ (4) $9^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{27}$

052

(1) 진수의 조건에서 $x-2>0$ $\quad\therefore x>2$

(2) 진수의 조건에서 $-x^2+5x>0$이므로

$x^2-5x<0,\ x(x-5)<0$ $\quad\therefore 0<x<5$

(3) 밑의 조건에서 $x-5>0,\ x-5\neq1$이므로 $x>5,\ x\neq6$

$\therefore 5<x<6$ 또는 $x>6$

(4) 밑의 조건에서 $x+3>0,\ x+3\neq1$이므로 $x>-3,\ x\neq-2$

$\therefore -3<x<-2$ 또는 $x>-2$ ...... ㉠

진수의 조건에서 $(x-4)^2>0$ $\quad\therefore x\neq4$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-3<x<-2$ 또는 $-2<x<4$ 또는 $x>4$

답 (1) $x>2$ (2) $0<x<5$ (3) $5<x<6$ 또는 $x>6$

(4) $-3<x<-2$ 또는 $-2<x<4$ 또는 $x>4$

053

(1) $\log_2 x=-4$에서 $2^{-4}=x$ $\quad\therefore x=\frac{1}{16}$

(2) $\log_{\sqrt{3}} x=4$에서 $(\sqrt{3})^4=x$ $\quad\therefore x=9$

(3) $\log_x 64=5$에서 $x^5=64$ $\quad\therefore x=\sqrt[5]{64}=2^{\frac{6}{5}}$

(4) $\log_x \frac{1}{3}=2$에서 $x^2=\frac{1}{3}$

이때, 밑의 조건에서 $x>0,\ x\neq1$이므로

$x=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

답 (1) $\frac{1}{16}$ (2) 9 (3) $2^{\frac{6}{5}}$ (4) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

054

(1) $\log_3 3+\log_5 1=1+0=1$

(2) $\log_2 16+\log_3 27-\log_5\sqrt{5}=\log_2 2^4+\log_3 3^3-\log_5 5^{\frac{1}{2}}$

$=4\log_2 2+3\log_3 3-\frac{1}{2}\log_5 5$

$=4+3-\frac{1}{2}=\frac{13}{2}$

(3) $\log_2 9+2\log_2\frac{8}{3}=\log_2 3^2+2(\log_2 8-\log_2 3)$

$=2\log_2 3+2(\log_2 2^3-\log_2 3)$

$=2\log_2 3+2(3\log_2 2-\log_2 3)$

$=2\log_2 3+2\times3-2\log_2 3=6$

(4) $\frac{1}{4}\log_2 81+\log_2\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\log_2 3^4+\log_2 3^{-1}$

$=\frac{1}{4}\times4\log_2 3+(-\log_2 3)$

$=\log_2 3-\log_2 3=0$

답 (1) 1 (2) $\frac{13}{2}$ (3) 6 (4) 0

055

(1) $\log_{10}72=\log_{10}(2^3\times3^2)=\log_{10}2^3+\log_{10}3^2$

$=3\log_{10}2+2\log_{10}3=3a+2b$

(2) $\log_{10}\frac{16}{27}=\log_{10}\frac{2^4}{3^3}=\log_{10}2^4-\log_{10}3^3$

$=4\log_{10}2-3\log_{10}3=4a-3b$

(3) $\log_{10}5=\log_{10}\frac{10}{2}=\log_{10}10-\log_{10}2=1-a$

답 (1) $3a+2b$ (2) $4a-3b$ (3) $1-a$

056

(1) $\log_2 3=\frac{\log_5 3}{\log_5 2}=\frac{b}{a}$

(2) $\log_6 144=\frac{\log_5 144}{\log_5 6}=\frac{\log_5(2^4\times3^2)}{\log_5(2\times3)}$

$=\frac{4\log_5 2+2\log_5 3}{\log_5 2+\log_5 3}=\frac{4a+2b}{a+b}$

(3) $\log_2 45=\frac{\log_5 45}{\log_5 2}=\frac{\log_5(3^2\times5)}{\log_5 2}$

$=\frac{2\log_5 3+\log_5 5}{\log_5 2}=\frac{2b+1}{a}$

답 (1) $\frac{b}{a}$ (2) $\frac{4a+2b}{a+b}$ (3) $\frac{2b+1}{a}$

057

(1) $\log_5 9\times\log_3 5=2\log_5 3\times\frac{1}{\log_5 3}=2$

(2) $\log_2 3\times\log_3 5\times\log_5 2=\frac{\log_{10}3}{\log_{10}2}\times\frac{\log_{10}5}{\log_{10}3}\times\frac{\log_{10}2}{\log_{10}5}=1$

답 (1) 2 (2) 1

058

(1) $\log_8 0.25=\log_8\frac{1}{4}=\log_{2^3}2^{-2}=-\frac{2}{3}\log_2 2=-\frac{2}{3}$

(2) $\log_7\frac{1}{\sqrt{7}}=\log_7 7^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\log_7 7=-\frac{1}{2}$

(3) $3^{\log_3 2}=2$

(4) $5^{\log_{25}2}=2^{\log_{25}5}=2^{\log_{5^2}5}=2^{\frac{1}{2}\log_5 5}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

답 (1) $-\frac{2}{3}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) 2 (4) $\sqrt{2}$

059

(1) $\log 100=\log 10^2=2$

(2) $\log\sqrt[5]{10000}=\log\sqrt[5]{10^4}=\log 10^{\frac{4}{5}}=\frac{4}{5}$

(3) $\log\frac{1}{\sqrt[3]{100}}=\log\frac{1}{\sqrt[3]{10^2}}=\log 10^{-\frac{2}{3}}=-\frac{2}{3}$

(4) $\log\frac{1}{40}+\log\frac{1}{25}=\log\left(\frac{1}{40}\times\frac{1}{25}\right)=\log\frac{1}{1000}=\log 10^{-3}=-3$

답 (1) 2 (2) $\frac{4}{5}$ (3) $-\frac{2}{3}$ (4) -3

060

(1) $\log 2.54=0.4048$

(2) $\log 469=\log(4.69\times10^2)=\log 4.69+\log 10^2$
$=0.6712+2$
$=2.6712$

(3) $\log 0.584=\log(5.84\times10^{-1})=\log 5.84+\log 10^{-1}$
$=0.7664-1$
$=-0.2336$

(4) $\log 0.00125=\log(1.25\times10^{-3})=\log 1.25+\log 10^{-3}$
$=0.0969-3$
$=-2.9031$

답 (1) 0.4048 (2) 2.6712 (3) -0.2336 (4) -2.9031

061

(1) $\log 35.7=\log(3.57\times10)=\log 3.57+\log 10$
$=0.5527+1$
$=1.5527$

(2) $\log 35700=\log(3.57\times10^4)=\log 3.57+\log 10^4$
$=0.5527+4$
$=4.5527$

(3) $\log 0.357=\log(3.57\times10^{-1})=\log 3.57+\log 10^{-1}$
$=0.5527-1$
$=-0.4473$

(4) $\log \dfrac{1}{357}=\log(3.57\times10^2)^{-1}=-(\log 3.57+\log 10^2)$
$=-(0.5527+2)$
$=-2.5527$

답 (1) 1.5527 (2) 4.5527 (3) -0.4473 (4) -2.5527

062

(1) $1.4983=1+0.4983$이므로 정수 부분은 1, 소수 부분은 0.4983이다.

(2) $-2.8297=-2-0.8297$
$=(-2-1)+(1-0.8297)$
$=-3+0.1703$
이므로 정수 부분은 -3, 소수 부분은 0.1703이다.

(3) $-4.3799=-4-0.3799$
$=(-4-1)+(1-0.3799)$
$=-5+0.6201$
이므로 정수 부분은 -5, 소수 부분은 0.6201이다.

답 (1) 정수 부분 : 1, 소수 부분 : 0.4983
(2) 정수 부분 : -3, 소수 부분 : 0.1703
(3) 정수 부분 : -5, 소수 부분 : 0.6201

063

(1) 5.13의 정수 부분은 5이고 한 자리의 수이므로 $\log 5.13$의 정수 부분은 0이다.

(2) 0.00513은 소수점 아래 셋째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나므로 $\log 0.00513$의 정수 부분은 -3이다.

(3) 369000은 여섯 자리의 정수이므로 $\log 369000$의 정수 부분은 5이다.

(4) 0.0369는 소수점 아래 둘째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나므로 $\log 0.0369$의 정수 부분은 -2이다.

다른 풀이

(1) $10^0<5.13<10^1 \Longleftrightarrow 0<\log 5.13<1$
따라서 $\log 5.13$의 정수 부분은 0이다.

(2) $0.001<0.00513<0.01 \Longleftrightarrow 10^{-3}<0.00513<10^{-2}$
$\Longleftrightarrow -3<\log 0.00513<-2$
따라서 $\log 0.00513$의 정수 부분은 -3이다.

(3) $10^5<369000<10^6 \Longleftrightarrow 5<\log 369000<6$
따라서 $\log 369000$의 정수 부분은 5이다.

(4) $0.01<0.0369<0.1 \Longleftrightarrow 10^{-2}<0.0369<10^{-1}$
$\Longleftrightarrow -2<\log 0.0369<-1$
따라서 $\log 0.0369$의 정수 부분은 -2이다.

답 (1) 0 (2) -3 (3) 5 (4) -2

064

(1) $\log 73400=\log(7.34\times10^4)$
$=\log 7.34+\log 10^4=4+0.8657$
이므로 정수 부분은 4, 소수 부분은 0.8657이다.

(2) $\log 0.0734=\log(7.34\times10^{-2})$
$=\log 7.34+\log 10^{-2}=-2+0.8657$
이므로 정수 부분은 -2, 소수 부분은 0.8657이다.

답 (1) 정수 부분 : 4, 소수 부분 : 0.8657
(2) 정수 부분 : -2, 소수 부분 : 0.8657

065

(1) $\log x=2.3010$에서 $\log 2$와 소수 부분이 같으므로 x는 2와 숫자 배열이 같고, $\log x$의 정수 부분이 2이므로 x는 세 자리의 정수이다.
$\therefore x=200$

(2) $\log x=-0.3010=-1+0.6990$에서 $\log 5$와 소수 부분이 같으므로 x는 5와 숫자 배열이 같고, $\log x$의 정수 부분이 -1이므로 x는 소수점 아래 첫째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.
$\therefore x=0.5$

(3) $\log x=-1.6990=-2+0.3010$에서 $\log 2$와 소수 부분이 같으므로 x는 2와 숫자 배열이 같고, $\log x$의 정수 부분이 -2이므로 x는 소수점 아래 둘째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.
$\therefore x=0.02$

답 (1) 200 (2) 0.5 (3) 0.02

066

(1) $\log x=2.4116$에서 $\log 2.58$과 소수 부분이 같으므로 x는 2.58과 숫자 배열이 같고, $\log x$의 정수 부분이 2이므로 x는 세 자리의 정수이다.
$\therefore x=258$

(2) $\log x=-0.5884=-1+0.4116$에서 $\log 2.58$과 소수 부분이 같으므로 x는 2.58과 숫자 배열이 같고, $\log x$의 정수 부분이 -1이므로 x는 소수점 아래 첫째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.
$\therefore x=0.258$

답 (1) 258 (2) 0.258

유형 콕콕 본문 p.19~23

067 ②	**068** ③	**069** 9	**070** ③		
071 (1) -7 (2) $\frac{7}{2}$ (3) 1			**072** ①	**073** ④	**074** ③
075 12	**076** -1	**077** ⑤	**078** (1) 27 (2) 4		**079** ③
080 ④	**081** ④	**082** $\frac{a(b+2)}{a+3}$		**083** ①	**084** ④
085 36	**086** ④	**087** 1	**088** 16	**089** ④	**090** ②
091 ③	**092** ④	**093** ②	**094** 90000	**095** ③	
096 0.0753		**097** 2			

067

밑의 조건에서 $x-2>0$, $x-2\neq1$이므로

$x>2$, $x\neq3$

$\therefore 2<x<3$ 또는 $x>3$ …… ㉠

진수의 조건에서 $-x^2+5x+6>0$이므로

$x^2-5x-6<0$, $(x+1)(x-6)<0$

$\therefore -1<x<6$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$2<x<3$ 또는 $3<x<6$

따라서 구하는 정수 x는 4, 5의 2개이다.

답 ②

068

$\log_{\sqrt{2}} a=6$에서 $a=(\sqrt{2})^6=2^3=8$

$\log_{\frac{1}{3}} 27=b$에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^b=27$, $3^{-b}=3^3$ $\quad\therefore b=-3$

$\log_c 25=2$에서 $c^2=25$, $c=\pm5$ $\quad\therefore c=5$ ($\because c>0$)

$\therefore a+b+c=8+(-3)+5=10$

답 ③

069

밑의 조건에서 $a-1>0$, $a-1\neq1$이므로

$a>1$, $a\neq2$

$\therefore 1<a<2$ 또는 $a>2$ …… ㉠

㉮

진수의 조건에서 모든 실수 x에 대하여 $x^2+ax+3a>0$이어야 하므로

이차방정식 $x^2+ax+3a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4\times3a<0$, $a(a-12)<0$

$\therefore 0<a<12$ …… ㉡

㉯

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$1<a<2$ 또는 $2<a<12$

㉰

따라서 구하는 정수 a는 3, 4, 5, …, 11의 9개이다.

㉱

단계	채점 요소	비율
㉮	로그의 밑의 조건을 이용하여 a의 값의 범위 구하기	40%
㉯	로그의 진수의 조건을 이용하여 a의 값의 범위 구하기	40%
㉰	㉮, ㉯에서 a의 공통 범위 구하기	10%
㉱	정수 a의 개수 구하기	10%

답 9

070

$$\frac{1}{2}\log_2 3-\log_2 6+\log_2\sqrt{12}=\log_2 3^{\frac{1}{2}}-\log_2 6+\log_2 2\sqrt{3}$$

$$=\log_2\frac{\sqrt{3}\times2\sqrt{3}}{6}$$

$$=\log_2 1=0$$

답 ③

071

(1) $3\log_5 3-2\log_5 75-\log_5 375$

$=3\log_5 3-2\log_5(5^2\times3)-\log_5(5^3\times3)$

$=3\log_5 3-2(2\log_5 5+\log_5 3)-(3\log_5 5+\log_5 3)$

$=3\log_5 3-2\times2-2\log_5 3-3-\log_5 3$

$=-4-3=-7$

(2) $\frac{3}{2}\log_2 6-\log_2\sqrt{54}+\log_2\sqrt{32}$

$=\frac{3}{2}\log_2 6-\log_2 54^{\frac{1}{2}}+\log_2 32^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{3}{2}\log_2(2\times3)-\frac{1}{2}\log_2(2\times3^3)+\frac{1}{2}\log_2 2^5$

$=\frac{3}{2}(\log_2 2+\log_2 3)-\frac{1}{2}(\log_2 2+3\log_2 3)+\frac{5}{2}\log_2 2$

$=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\log_2 3-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\log_2 3+\frac{5}{2}=\frac{7}{2}$

(3) $(\log_6 2)^2+2\log_6 2\times\log_6 3+(\log_6 3)^2$

$=(\log_6 2+\log_6 3)^2=(\log_6 6)^2=1$

답 (1) -7 (2) $\frac{7}{2}$ (3) 1

072

$\log_3\left(1-\frac{2}{3}\right)+\log_3\left(1-\frac{1}{4}\right)+\log_3\left(1-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\log_3\left(1-\frac{1}{27}\right)$

$=\log_3\left(\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\cdots\times\frac{26}{27}\right)$

$=\log_3\frac{1}{27}=\log_3 3^{-3}$

$=-3$

답 ①

073

$$\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_3 x}+\frac{1}{\log_4 x}=\log_x 2+\log_x 3+\log_x 4$$

$$=\log_x(2\times3\times4)$$

$$=\log_x 24$$

또한 $\frac{1}{\log_a x}=\log_x a$이므로

$\log_x 24=\log_x a$

$\therefore a=24$

답 ④

074

$$\frac{\log_3 4\sqrt{2}+\log_3 2\sqrt{3}-\log_3\sqrt{6}}{\log_3 2}=\frac{\log_3\frac{4\sqrt{2}\times2\sqrt{3}}{\sqrt{6}}}{\log_3 2}$$

$$=\frac{\log_3 8}{\log_3 2}$$

$$=\log_2 8=\log_2 2^3=3$$

답 ③

075

$\log_2 x=\frac{1}{\log_{3\sqrt{3}} 3}$에서 $\log_2 x=\log_3 3\sqrt{3}=\log_3 3^{\frac{3}{2}}$

$\therefore \log_2 x=\frac{3}{2}$ ······ ㉠

가

$\log_2 \sqrt[3]{y}=\frac{1}{\log_{64} 2}$에서 $\log_2 y^{\frac{1}{3}}=\log_2 64=\log_2 2^6$

$\frac{1}{3}\log_2 y=6$ $\therefore \log_2 y=18$ ······ ㉡

나

㉠, ㉡에서

$\log_x y=\frac{\log_2 y}{\log_2 x}=\frac{18}{\frac{3}{2}}=12$

다

단계	채점 요소	비율
가	$\log_2 x$의 값 구하기	30%
나	$\log_2 y$의 값 구하기	30%
다	$\log_x y$의 값 구하기	40%

답 12

076

$\log_6(\log_3 2)+\log_6(\log_4 3)+\log_6(\log_5 4)+\cdots+\log_6(\log_{64} 63)$

$=\log_6(\log_3 2\times\log_4 3\times\log_5 4\times\cdots\times\log_{64} 63)$

$=\log_6\left(\log_3 2\times\frac{\log_3 3}{\log_3 4}\times\frac{\log_3 4}{\log_3 5}\times\cdots\times\frac{\log_3 63}{\log_3 64}\right)$

$=\log_6\left(\frac{\log_3 2}{\log_3 64}\right)=\log_6(\log_{64} 2)$

$=\log_6(\log_{2^6} 2)=\log_6\frac{1}{6}$

$=\log_6 6^{-1}=-1$ 답 -1

077

$(\log_3\sqrt{5}-\log_{\frac{1}{9}} 125)\times\log_5 3=(\log_3 5^{\frac{1}{2}}-\log_{3^{-2}} 5^3)\times\log_5 3$

$=\left(\frac{1}{2}\log_3 5+\frac{3}{2}\log_3 5\right)\times\log_5 3$

$=2\log_3 5\times\log_5 3$

$=2\times1=2$ 답 ⑤

078

(1) $5^{\log_5 2}+9^{\log_3 5}=2+5^{\log_3 9}=2+5^{\log_3 3^2}$

$=2+5^2=27$

(2) $9^{2\log_3 5+3\log_3 2-2\log_3 10}=9^{\log_3 5^2+\log_3 2^3-\log_3 10^2}=9^{\log_3\frac{25\times8}{100}}$

$=9^{\log_3 2}=2^{\log_3 9}$

$=2^{\log_3 3^2}=2^2=4$

답 (1) 27 (2) 4

079

$\log_3 8+\log_3 2=\log_3(8\times2)=\log_3 2^4=4\log_3 2$이므로

$(3^{\log_3 8+\log_3 2})^2+(2^{\log_3 2+\log_3 8})^{\log_2 3}=(3^{4\log_3 2})^2+(2^{4\log_3 2})^{\log_2 3}$

$=(2^{4\log_3 3})^2+2^{4\log_3 2\times\log_2 3}$

$=(2^4)^2+2^4=2^8+2^4=272$ 답 ③

080

$\log_{\sqrt{12}}\sqrt[6]{54}=\frac{\log_7\sqrt[6]{54}}{\log_7\sqrt{12}}$에서

$\log_7\sqrt[6]{54}=\log_7 54^{\frac{1}{6}}=\frac{1}{6}\log_7 54$

$=\frac{1}{6}\log_7(2\times3^3)=\frac{1}{6}(\log_7 2+3\log_7 3)$

$=\frac{1}{6}(a+3b)$

$\log_7\sqrt{12}=\log_7 12^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_7 12$

$=\frac{1}{2}\log_7(2^2\times3)=\frac{1}{2}(2\log_7 2+\log_7 3)$

$=\frac{1}{2}(2a+b)$

$\therefore \log_{\sqrt{12}}\sqrt[6]{54}=\frac{\frac{1}{6}(a+3b)}{\frac{1}{2}(2a+b)}=\frac{a+3b}{3(2a+b)}$ 답 ④

081

$10^a=3$, $10^b=5$에서 로그의 정의에 의하여

$\log_{10} 3=a$, $\log_{10} 5=b$

이때, $\log_{10} 2=\log_{10}\frac{10}{5}=\log_{10} 10-\log_{10} 5=1-b$이므로

$\log_5\sqrt{6}=\log_5 6^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_5 6$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\log_{10} 6}{\log_{10} 5}=\frac{\log_{10}(2\times3)}{2\log_{10} 5}$

$=\frac{\log_{10} 2+\log_{10} 3}{2\log_{10} 5}$

$=\frac{1-b+a}{2b}=\frac{1+a-b}{2b}$ 답 ④

082

$\log_2 27=\log_2 3^3=3\log_2 3=a$, $\log_2 3=\frac{a}{3}$

$\therefore \log_3 2=\frac{3}{a}$

따라서 $\log_3 2=\frac{3}{a}$, $\log_3 5=b$이므로

$\log_6 45=\frac{\log_3 45}{\log_3 6}=\frac{\log_3(3^2\times5)}{\log_3(2\times3)}$

$=\frac{2+\log_3 5}{\log_3 2+1}$

$=\frac{2+b}{\frac{3}{a}+1}=\frac{a(b+2)}{a+3}$ 답 $\frac{a(b+2)}{a+3}$

083

$2^x=3^y=\sqrt{6^z}=k$ $(k\neq1)$라 하면

$2^x=k$에서 $x=\log_2 k$ $\therefore \frac{1}{x}=\log_k 2$

$3^y=k$에서 $y=\log_3 k$ $\therefore \frac{1}{y}=\log_k 3$

$\sqrt{6^z}=6^{\frac{z}{2}}=k$에서 $\frac{z}{2}=\log_6 k$ $\therefore \frac{2}{z}=\log_k 6$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{z}=\log_k 2+\log_k 3-\log_k 6$

$=\log_k \frac{2\times3}{6}=\log_k 1=0$

다른 풀이

$2^x=3^y=\sqrt{6^z}=k\ (k\neq1)$라 하면

$2^x=k$에서 $2=k^{\frac{1}{x}}$ $\quad\therefore k^{\frac{1}{x}}=2$ ...... ㉠

$3^y=k$에서 $3=k^{\frac{1}{y}}$ $\quad\therefore k^{\frac{1}{y}}=3$ ...... ㉡

$\sqrt{6^z}=6^{\frac{z}{2}}=k$에서 $6=k^{\frac{2}{z}}$ $\quad\therefore k^{\frac{2}{z}}=6$ ...... ㉢

㉠$\times$㉡$\div$㉢을 하면

$k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}\div k^{\frac{2}{z}}=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{z}}=1$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{z}=0\ (\because k\neq1)$ 답 ①

084

$16^x=144$에서 $x=\log_{16}144=\log_{2^4}12^2=\frac{1}{2}\log_2 12$

$\therefore \frac{1}{x}=2\log_{12}2$

$27^y=144$에서 $y=\log_{27}144=\log_{3^3}12^2=\frac{2}{3}\log_3 12$

$\therefore \frac{1}{y}=\frac{3}{2}\log_{12}3$

$\therefore \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=6\log_{12}2+3\log_{12}3$

$=\log_{12}2^6+\log_{12}3^3$

$=\log_{12}(2^6\times3^3)=\log_{12}(2^2\times3)^3$

$=\log_{12}12^3=3$

다른 풀이 1

$16^x=27^y=144$의 각 변에 밑이 12인 로그를 취하면

$\log_{12}16^x=\log_{12}27^y=\log_{12}144$

$x\log_{12}2^4=y\log_{12}3^3=\log_{12}12^2$

$4x\log_{12}2=2,\ 3y\log_{12}3=2$

$\therefore \frac{1}{x}=2\log_{12}2,\ \frac{2}{y}=3\log_{12}3$

$\therefore \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=6\log_{12}2+3\log_{12}3$

$=\log_{12}2^6+\log_{12}3^3$

$=\log_{12}(2^6\times3^3)=\log_{12}(2^2\times3)^3$

$=\log_{12}12^3=3$

다른 풀이 2

$16^x=144$에서 $16=144^{\frac{1}{x}},\ 2^4=12^{\frac{2}{x}}$

$(2^4)^{\frac{3}{2}}=(12^{\frac{2}{x}})^{\frac{3}{2}}$

$\therefore 12^{\frac{3}{x}}=2^6$ ...... ㉠

$27^y=144$에서 $27=144^{\frac{1}{y}}$

$\therefore 12^{\frac{2}{y}}=3^3$ ...... ㉡

㉠$\times$㉡을 하면

$12^{\frac{3}{x}}\times12^{\frac{2}{y}}=2^6\times3^3,\ 12^{\frac{3}{x}+\frac{2}{y}}=(2^2\times3)^3=12^3$

$\therefore \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=3$ 답 ④

085

$a^4=b^5$의 양변에 밑이 a인 로그를 취하면

$\log_a a^4=\log_a b^5,\ 4=5\log_a b$

$\therefore \log_a b=\frac{4}{5}$

$\therefore 20\log_a ab=20(1+\log_a b)=20\left(1+\frac{4}{5}\right)=36$ 답 36

086

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 a+\log_2 b=8,\ \log_2 a\times\log_2 b=8$

$\therefore \log_a b+\log_b a=\frac{\log_2 b}{\log_2 a}+\frac{\log_2 a}{\log_2 b}$

$=\frac{(\log_2 a)^2+(\log_2 b)^2}{\log_2 a\times\log_2 b}$

$=\frac{(\log_2 a+\log_2 b)^2-2\log_2 a\times\log_2 b}{\log_2 a\times\log_2 b}$

$=\frac{8^2-2\times8}{8}=6$ 답 ④

087

방정식 $(\log_3 x)^2+a\log_3 x-b=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

$\alpha\beta=9$

이때, $\log_3 x=X$로 놓으면 $X^2+aX-b=0$의 두 근이 $\log_3\alpha,\ \log_3\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3\alpha+\log_3\beta=-a$

$\therefore a=-(\log_3\alpha+\log_3\beta)=-\log_3\alpha\beta$

$=-\log_3 9=-\log_3 3^2=-2$

가

이차방정식 $x^2+ax+b=0$, 즉 $x^2-2x+b=0$의 두 근의 곱이 3이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $b=3$

나

$\therefore a+b=-2+3=1$

다

단계	채점 요소	비율
가	a의 값 구하기	50%
나	b의 값 구하기	30%
다	$a+b$의 값 구하기	20%

답 1

088

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_{10}\alpha+\log_{10}\beta=6,\ \log_{10}\alpha\times\log_{10}\beta=4$

$\therefore \log_\alpha\alpha\beta^2+\log_\beta\alpha^2\beta$

$=\frac{\log_{10}\alpha\beta^2}{\log_{10}\alpha}+\frac{\log_{10}\alpha^2\beta}{\log_{10}\beta}$

$=\frac{\log_{10}\alpha+2\log_{10}\beta}{\log_{10}\alpha}+\frac{2\log_{10}\alpha+\log_{10}\beta}{\log_{10}\beta}$

$=\frac{2\log_{10}\beta}{\log_{10}\alpha}+\frac{2\log_{10}\alpha}{\log_{10}\beta}+2$

$=2\times\frac{(\log_{10}\alpha)^2+(\log_{10}\beta)^2}{\log_{10}\alpha\times\log_{10}\beta}+2$

$=2\times\frac{(\log_{10}\alpha+\log_{10}\beta)^2-2\log_{10}\alpha\times\log_{10}\beta}{\log_{10}\alpha\times\log_{10}\beta}+2$

$=2\times\frac{6^2-2\times4}{4}+2=16$

다른 풀이

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_{10}\alpha+\log_{10}\beta=6$, $\log_{10}\alpha\times\log_{10}\beta=4$

$\therefore \log_{\alpha}\alpha\beta^2+\log_{\beta}\alpha^2\beta$

$=(\log_{\alpha}\alpha+\log_{\alpha}\beta^2)+(\log_{\beta}\alpha^2+\log_{\beta}\beta)$

$=(1+2\log_{\alpha}\beta)+(2\log_{\beta}\alpha+1)$

$=2(\log_{\alpha}\beta+\log_{\beta}\alpha)+2$

$=2\left(\frac{\log_{10}\beta}{\log_{10}\alpha}+\frac{\log_{10}\alpha}{\log_{10}\beta}\right)+2$

$=2\times\frac{(\log_{10}\alpha)^2+(\log_{10}\beta)^2}{\log_{10}\alpha\times\log_{10}\beta}+2$

$=2\times\frac{(\log_{10}\alpha+\log_{10}\beta)^2-2\log_{10}\alpha\times\log_{10}\beta}{\log_{10}\alpha\times\log_{10}\beta}+2$

$=2\times\frac{6^2-2\times4}{4}+2=16$

답 16

089

$\log_3 9<\log_3 10<\log_3 27$이므로

$2<\log_3 10<3$

따라서 $\log_3 10$의 정수 부분은 2이므로 $a=2$

소수 부분은 $b=\log_3 10-2=\log_3 10-\log_3 3^2=\log_3\frac{10}{9}$

$\therefore 2^a+3^b=2^2+3^{\log_3\frac{10}{9}}=4+\frac{10}{9}=\frac{46}{9}$

답 ④

090

$\log_2 8<\log_2 10<\log_2 16$이므로

$3<\log_2 10<4$

따라서 $\log_2 10$의 정수 부분은 3이므로 $a=3$

소수 부분은 $b=\log_2 10-3=\log_2 10-\log_2 8=\log_2\frac{10}{8}=\log_2\frac{5}{4}$

$\therefore \frac{2^b-2^{-b}}{2^a-2^{-a}}=\frac{2^{\log_2\frac{5}{4}}-2^{-\log_2\frac{5}{4}}}{2^3-2^{-3}}=\frac{2^{\log_2\frac{5}{4}}-2^{\log_2\frac{4}{5}}}{2^3-2^{-3}}$

$=\frac{\frac{5}{4}-\frac{4}{5}}{8-\frac{1}{8}}=\frac{\frac{9}{20}}{\frac{63}{8}}=\frac{2}{35}$

답 ②

091

ㄱ. $\log 321=\log(3.21\times10^2)$

$=\log 3.21+\log 10^2=2+0.5065$

이므로 정수 부분은 2이다. (참)

ㄴ. $\log 0.0321=\log(3.21\times10^{-2})$

$=\log 3.21+\log 10^{-2}=-2+0.5065$

이므로 소수 부분은 0.5065이다. (거짓)

ㄷ. $\log 12.84=\log(2^2\times3.21)$

$=2\log 2+\log 3.21$

$=2\times0.3010+0.5065$

$=1.1085=1+0.1085$

이므로 소수 부분은 0.1085이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

092

5^{20}에 상용로그를 취하면

$\log 5^{20}=20\log 5=20\log\frac{10}{2}$

$=20(\log 10-\log 2)$

$=20(1-0.3010)$

$=20\times0.6990=13.98$

$\log 5^{20}$의 정수 부분이 13이므로 5^{20}은 14자리의 정수이다.

$\therefore m=14$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$에 상용로그를 취하면

$\log\left(\frac{1}{3}\right)^{10}=\log 3^{-10}=-10\log 3$

$=-10\times0.4771=-4.771$

$=-4-0.771$

$=-4-1+(1-0.771)$

$=-5+0.229$

$\log\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$의 정수 부분이 -5이므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$은 소수점 아래 다섯째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

$\therefore n=5$

$\therefore m+n=14+5=19$

답 ④

093

A^{100}이 234자리의 정수이므로 $\log A^{100}$의 정수 부분은 233이다.

즉, $233\le\log A^{100}<234$이므로

$233\le100\log A<234$

$2.33\le\log A<2.34$, $46.6\le20\log A<46.8$

$\therefore 46.6\le\log A^{20}<46.8$

따라서 $\log A^{20}$의 정수 부분이 46이므로 A^{20}은 47자리의 정수이다.

답 ②

094

$\frac{1}{N}$은 소수점 아래 다섯째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나므로 $\log\frac{1}{N}$의 정수 부분은 -5이다.

즉, $-5\le\log\frac{1}{N}<-4$이므로

$-5\le-\log N<-4$

$4<\log N\le5$, $\log 10^4<\log N\le\log 10^5$

$\therefore 10^4<N\le10^5$

가

따라서 구하는 자연수 N의 개수는

$10^5-10^4=10^4(10-1)=90000$

나

단계	채점 요소	비율
가	N의 값의 범위 구하기	70%
나	자연수 N의 개수 구하기	30%

답 90000

095

$\log 0.02=\log(2\times10^{-2})=-2+\log 2$이므로

$f(0.02)=\log 2$

한편, 0.02, 20, 2000은 숫자의 배열이 같고 소수점의 위치만 다르므로 상용로그의 소수 부분이 같다.

즉, $f(0.02)=f(20)=f(2000)=\log 2$

$\therefore f(0.02)+f(20)+f(2000)=\log 2+\log 2+\log 2$

$=3\log 2$

답 ③

096

$\log A=-1.1232$

$=-1-0.1232$

$=(-1-1)+(1-0.1232)$

$=-2+0.8768$

즉, $\log A$와 $\log 7.53$의 소수 부분이 같으므로 A는 7.53과 숫자 배열이 같고, $\log A$의 정수 부분이 -2이므로 A는 소수점 아래 둘째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

$\therefore A=0.0753$

답 0.0753

097

$x=\log 369+\log 3690-k\log 36.9$에서

369, 3690은 각각 세 자리의 정수, 네 자리의 정수, 36.9는 정수 부분이 두 자리인 소수이므로 $\log 369$, $\log 3690$, $\log 36.9$의 정수 부분은 각각 2, 3, 1이다.

한편, 369, 3690, 36.9는 숫자의 배열이 같고 소수점의 위치만 다르므로 상용로그의 소수 부분이 $\log 3.69$로 같다.

이때, $a=\log 3.69$로 놓으면

$x=\log 369+\log 3690-k\log 36.9$

$=(2+a)+(3+a)-k(1+a)$

$=(5-k)+(2-k)a$ (단, $0<a<1$)

따라서 x가 정수가 되려면 $2-k=0$

$\therefore k=2$

답 2

실력 콕콕 본문 p.24~25

098 ①	**099** ①	**100** ③	**101** 16	**102** ④	**103** 16
104 50	**105** ③	**106** ③	**107** $\frac{4}{3}$	**108** ④	**109** ③
110 21	**111** ②	**112** 13	**113** 39		

098

로그가 정의되려면 (밑)>0, (밑)$\neq 1$, (진수)>0이어야 한다.

ㄱ. (밑)$=a^2-a+2=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>1$

(진수)$=a^2+1\geq 1$

즉, 실수 a의 값에 관계없이 밑과 진수의 조건을 만족시키므로 실수 a의 값에 관계없이 $\log_{a^2-a+2}(a^2+1)$이 정의된다.

ㄴ. [반례] $a=0$이면 (밑)$=2|a|+1=1$이므로 로그가 정의되지 않는다.

ㄷ. [반례] $a=1$이면 (진수)$=a^2-2a+1=0$이므로 로그가 정의되지 않는다.

따라서 실수 a의 값에 관계없이 로그가 정의되는 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

099

ㄱ. $2^{\log_2 1+\log_2 2+\log_2 3+\cdots+\log_2 10}=2^{\log_2(1\times 2\times 3\times\cdots\times 10)}$

$=2^{\log_2 10!}$

$=(10!)^{\log_2 2}$

$=10!$ (참)

ㄴ. $\log_2(2^1\times 2^2\times 2^3\times\cdots\times 2^{10})^2=\log_2(2^{1+2+\cdots+10})^2$

$=\log_2 2^{55\times 2}$

$=\log_2 2^{110}$

$=110$ (거짓)

ㄷ. $\log_2 2^1\times\log_2 2^2\times\log_2 2^3\times\cdots\times\log_2 2^{10}$

$=\log_2 2\times 2\log_2 2\times 3\log_2 2\times\cdots\times 10\log_2 2$

$=1\times 2\times 3\times\cdots\times 10$

$=10!$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

보충 설명

ㄴ. $1+2+3+\cdots+10=55$는 직접 계산할 수도 있지만 p.99 유형 99의 자연수의 거듭제곱의 합을 이용하면

$1+2+3+\cdots+10=\frac{10(1+10)}{2}=55$로 보다 쉽게 계산할 수 있다.

답 ①

100

$\log_{\sqrt{3}} a=\log_{3^{\frac{1}{2}}} a=2\log_3 a$

$\log_9 ab=\log_{3^2} ab=\frac{1}{2}\log_3 ab$

즉, $2\log_3 a=\frac{1}{2}\log_3 ab$이므로

$4\log_3 a=\log_3 ab$, $\log_3 a^4=\log_3 ab$, $a^4=ab$

$\therefore a(a^3-b)=0$

$\therefore b=a^3$ ($\because a>1$)

$\therefore \log_a b=\log_a a^3=3$

답 ③

101

$\frac{\log_a b}{2a}=\frac{3}{4}$에서 $\log_a b=\frac{3a}{2}$

$\frac{18\log_b a}{b}=\frac{3}{4}$에서 $\log_b a=\frac{b}{24}$

$\log_a b\times\log_b a=1$이므로 $1=\frac{3a}{2}\times\frac{b}{24}$, $1=\frac{ab}{16}$

$\therefore ab=16$

답 16

102

$3^{\log_n 4}$에서 로그의 밑의 조건에서 $n>0$, $n\neq 1$이다.

$3^{\log_n 4}$이 정수가 되려면 $\log_n 4$가 자연수이어야 한다.

(i) $\log_n 4=1$일 때, $n=4$이므로

$3^{\log_n 4}=3^1=3$

(ii) $\log_n 4=2$일 때, $n^2=4$에서 $n=2$이므로

$3^{\log_n 4}=3^2=9$

한편, $\log_n 4=3$일 때, $n^3=4$를 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

또한 $3^{\log_n 4}=4^{\log_n 3}=2^{2\log_n 3}$에서 $3^{\log_n 4}$이 정수가 되려면 $2\log_n 3$이 자연수이어야 한다.

(iii) $2\log_n 3=1$, 즉 $\log_n 3=\frac{1}{2}$일 때, $n^{\frac{1}{2}}=3$에서 $n=9$이므로

$2^{2\log_n 3}=2^1=2$

(iv) $2\log_n 3=2$, 즉 $\log_n 3=1$일 때, $n=3$이므로

$2^{2\log_n 3}=2^2=4$

한편, $2\log_n 3=3$일 때, $n^{\frac{3}{2}}=3$을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에서 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$4+2+9+3=18$ 답 ④

103

$\log A$의 정수 부분과 소수 부분을 각각 n, α (n은 정수, $0\le\alpha<1$)로 놓으면

$\log A=n+\alpha$

이때, 이차방정식 $2x^2-33x+k=0$의 두 근이 n, α이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$n+\alpha=\frac{33}{2}=16+\frac{1}{2}$ …… ㉠

$n\alpha=\frac{k}{2}$ …… ㉡

㉠에서 n은 정수이고 $0\le\alpha<1$이므로

$n=16$, $\alpha=\frac{1}{2}$

이것을 ㉡에 대입하면 $\frac{k}{2}=8$

$\therefore k=16$ 답 16

104

$10000=2^4\times5^4$이므로 10000의 양의 약수의 개수는

$(4+1)(4+1)=25$ $\therefore m=25$

이때, $a_1=1$, $a_2=2$, $\cdots$, $a_{13}=100$, $\cdots$, $a_{24}=5000$, $a_{25}=10000$이므로

$a_1a_{25}=10000$, $a_2a_{24}=10000$, $\cdots$, $a_{12}a_{14}=10000$

$\therefore \log a_1+\log a_2+\log a_3+\cdots+\log a_{25}$

$=\log a_1a_{25}+\log a_2a_{24}+\cdots+\log a_{12}a_{14}+\log a_{13}$

$=12\log 10000+\log 100$

$=12\times4+2=50$ 답 50

105

10^α을 3으로 나누었을 때의 몫을 Q라 하면 나머지가 2이므로

$10^\alpha=3Q+2$ (단, Q는 정수이다.)

$0<\alpha<1$에서 $1<10^\alpha<10$이므로

$10^\alpha=2$ 또는 $10^\alpha=5$ 또는 $10^\alpha=8$

$\therefore \alpha=\log 2$ 또는 $\alpha=\log 5$ 또는 $\alpha=\log 8$

따라서 구하는 모든 실수 α의 값의 합은

$\log 2+\log 5+\log 8=\log(2\times5)+\log 2^3=\log 10+3\log 2$

$=1+3\log 2$ 답 ③

106

$\log x$의 정수 부분이 5이므로 $5\le\log x<6$

$\log y$의 정수 부분이 1이므로 $1\le\log y<2$

$\therefore 3<\log x-\log y<5$ …… ㉠

이때, $\left(\log\frac{x}{y}\right)\left(\log\frac{y}{x}\right)=-\left(\log\frac{x}{y}\right)^2=-(\log x-\log y)^2$

㉠의 각 변을 제곱하면 $3^2<(\log x-\log y)^2<5^2$

$\therefore -25<-(\log x-\log y)^2<-9$

따라서 구하는 정수는 -24, -23, $\cdots$, -10의 15개이다. 답 ③

107

밑의 조건에서 $x-1>0$, $x-1\ne1$이므로

$x>1$, $x\ne2$

$\therefore 1<x<2$ 또는 $x>2$ …… ㉠

진수의 조건에서 $-x^2+4x>0$이므로

$x^2-4x<0$, $x(x-4)<0$

$\therefore 0<x<4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$1<x<2$ 또는 $2<x<4$

즉, 자연수 x의 값은 3이다.

$\log_2 2<\log_2 3<\log_2 4$이므로

$1<\log_2 3<2$

따라서 $\log_2 x$, 즉 $\log_2 3$의 정수 부분은 1이므로

$a=1$, $b=\log_2 3-1$

$\therefore a-b=1-(\log_2 3-1)=2-\log_2 3=\log_2\frac{4}{3}$

$\therefore 2^{a-b}=2^{\log_2\frac{4}{3}}=\frac{4}{3}$ 답 $\frac{4}{3}$

108

$\log x$의 소수 부분과 $\log x^2$의 소수 부분의 합이 1이므로

$\log x+\log x^2=\log x+2\log x=3\log x=(\text{정수})$ …… ㉠

이때, $10<x<100$에서 $1<\log x<2$

$\therefore 3<3\log x<6$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$3\log x=4$ 또는 $3\log x=5$

$\log x=\frac{4}{3}$ 또는 $\log x=\frac{5}{3}$

$\therefore x=10^{\frac{4}{3}}$ 또는 $x=10^{\frac{5}{3}}$

따라서 모든 실수 x의 값의 곱은

$10^{\frac{4}{3}}\times10^{\frac{5}{3}}=10^{\frac{4}{3}+\frac{5}{3}}=10^3$

다른 풀이

$10<x<100$에서 $1<\log x<2$

$\log x$의 소수 부분을 α라 하면 $\log x=1+\alpha$ $(0\le\alpha<1)$

$\therefore \log x^2=2\log x=2(1+\alpha)=2+2\alpha$

(i) $0\le\alpha<\frac{1}{2}$일 때

$0\le2\alpha<1$에서 $\log x^2$의 소수 부분은 2α이므로

$\alpha+2\alpha=1$, $3\alpha=1$ $\therefore \alpha=\frac{1}{3}$

따라서 $\log x=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$이므로 $x=10^{\frac{4}{3}}$

(ii) $\frac{1}{2}\le\alpha<1$일 때

$1\le2\alpha<2$에서 $\log x^2$의 소수 부분은 $2\alpha-1$이므로

$\alpha+2\alpha-1=1$, $3\alpha=2$ $\therefore \alpha=\frac{2}{3}$

따라서 $\log x=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$이므로 $x=10^{\frac{5}{3}}$

(i), (ii)에서 모든 실수 x의 값의 곱은

$10^{\frac{4}{3}}\times10^{\frac{5}{3}}=10^{\frac{4}{3}+\frac{5}{3}}=10^3$ 답 ④

109

$1 \le n \le 9$일 때, $\log n$의 정수 부분은 0이므로 소수 부분 $f(n)$의 값은

$\log 1$, $\log 2$, $\log 3$, $\cdots$, $\log 9$ …… ㉠

의 9개이고, 이들은 서로 다른 값이다.

$10 \le n \le 99$일 때, $\log n$의 정수 부분은 1이므로 소수 부분 $f(n)$의 값은

$\log \frac{10}{10}$, $\log \frac{11}{10}$, $\log \frac{12}{10}$, $\cdots$, $\log \frac{99}{10}$ …… ㉡

의 90개이고, 이들은 서로 다른 값이며, 이들 중

$\log \frac{10}{10}$, $\log \frac{20}{10}$, $\log \frac{30}{10}$, $\cdots$, $\log \frac{90}{10}$

의 9개는 ㉠의 값과 중복된다.

$100 \le n \le 150$일 때, $\log n$의 정수 부분은 2이므로 소수 부분 $f(n)$의 값은

$\log \frac{100}{100}$, $\log \frac{101}{100}$, $\log \frac{102}{100}$, $\cdots$, $\log \frac{150}{100}$

의 51개이고, 이들은 서로 다른 값이며, 이들 중

$\log \frac{100}{100}$, $\log \frac{110}{100}$, $\log \frac{120}{100}$, $\cdots$, $\log \frac{150}{100}$

의 6개는 ㉡의 값과 중복된다.

따라서 집합 A의 원소의 개수는

$9+(90-9)+(51-6)=135$

다른 풀이

집합 A의 원소의 개수는 $1 \le n \le 150$인 자연수 중에서 숫자의 배열이 다른 것의 개수와 같다.

(i) $1 \le n \le 9$일 때, 숫자의 배열이 모두 다르다.

(ii) $10 \le n \le 99$일 때,

10, 20, 30, $\cdots$, 90은 각각 1, 2, 3, $\cdots$, 9와 숫자의 배열이 같다. …… ㉠

(iii) $100 \le n \le 150$일 때,

100, 110, 120, 130, 140, 150은 각각 10, 11, 12, 13, 14, 15와 숫자의 배열이 같다. …… ㉡

㉠, ㉡에서

$1 \le n \le 150$일 때, 숫자의 배열이 같은 것의 개수는 $9+6=15$

(i)~(iii)에서 집합 A의 원소의 개수는

$150-15=135$

답 ③

110

$\log 2^{50}=50\log 2=50 \times 0.3010=15.05$

$\log 2^{50}$의 정수 부분이 15이므로 2^{50}은 16자리의 정수이다.

$\therefore a=16$

2의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 2, 4, 8, 6이 반복되고

$50=4 \times 12+2$이므로 2^{50}의 일의 자리의 숫자는 4이다.

$\therefore b=4$

한편, $\log 1=0$, $\log 2=0.3010$이므로

$\log 1 < 0.05 < \log 2$

$15+\log 1 < 15.05 < 15+\log 2$

이때, $\log 2^{50}=15.05$이므로

$\log(1 \times 10^{15}) < \log 2^{50} < \log(2 \times 10^{15})$

$\therefore 1 \times 10^{15} < 2^{50} < 2 \times 10^{15}$

따라서 2^{50}의 최고 자리의 숫자는 1이므로 $c=1$

$\therefore a+b+c=16+4+1=21$

답 21

111

전파감쇄비가 -7이므로 $-7=10\log \frac{B}{A}$

$\therefore \log \frac{B}{A}=-\frac{7}{10}$

$\frac{B}{A}=10^{-\frac{7}{10}}=10^{\frac{3}{10}} \times 10^{-1}$

$=2 \times \frac{1}{10}=\frac{1}{5}$ ($\because 10^{\frac{3}{10}}=2$)

따라서 $B=\frac{1}{5}A$이므로 B는 A의 $\frac{1}{5}$배이다.

답 ②

112

$$\begin{cases} \log_2 ab+\log_2 bc=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ \log_2 bc+\log_2 ca=8 & \cdots\cdots ㉡ \\ \log_2 ca+\log_2 ab=7 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠+㉡+㉢을 하면

$2(\log_2 ab+\log_2 bc+\log_2 ca)=20$

$\therefore \log_2 ab+\log_2 bc+\log_2 ca=10$ …… ㉣

가

㉣−㉠을 하면 $\log_2 ca=5$ $\therefore ca=2^5=32$

㉣−㉡을 하면 $\log_2 ab=2$ $\therefore ab=2^2=4$

㉣−㉢을 하면 $\log_2 bc=3$ $\therefore bc=2^3=8$

따라서 $(abc)^2=32^2$이고 a, b, c는 모두 양수이므로

$abc=32$

나

$\therefore a=4$, $b=1$, $c=8$

$\therefore a+b+c=4+1+8=13$

다

단계	채점 요소	비율
가	$\log_2 ab+\log_2 bc+\log_2 ca$의 값 구하기	40%
나	abc의 값 구하기	40%
다	$a+b+c$의 값 구하기	20%

답 13

113

3^n이 10자리의 정수가 되려면 $\log 3^n$의 정수 부분이 9이어야 한다.

가

즉, $9 \le \log 3^n < 10$이므로

$9 \le n\log 3 < 10$

$\therefore \frac{9}{\log 3} \le n < \frac{10}{\log 3}$

이때, $\log 3=0.48$이므로

$18.75 \le n < 20.83\times\times\times$

나

따라서 구하는 모든 정수 n의 값의 합은

$19+20=39$

다

단계	채점 요소	비율
가	$\log 3^n$의 정수 부분 구하기	30%
나	n의 값의 범위 구하기	50%
다	모든 정수 n의 값의 합 구하기	20%

답 39

03 지수함수

개념 콕콕

본문 p.27~28

114

ㄱ. 이차함수이다.

ㄴ, ㄷ. 지수함수이다.

ㄹ. 유리함수이다.

따라서 지수함수인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

115

(1) $f(-2)=3^{-2}=\frac{1}{9}$

(2) $f(0)=3^0=1$

(3) $f\left(\frac{4}{3}\right)=3^{\frac{4}{3}}=3\sqrt[3]{3}$

(4) $f(-1)f(4)=3^{-1}\times3^4=3^3=27$

답 (1) $\frac{1}{9}$ (2) 1 (3) $3\sqrt[3]{3}$ (4) 27

116

(1) $f(-1)=\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}=(4^{-1})^{-1}=4$

(2) $f(0)=\left(\frac{1}{4}\right)^0=1$

(3) $f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{8}$

(4) $f(1)f(2)=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$

답 (1) 4 (2) 1 (3) $\frac{1}{8}$ (4) $\frac{1}{64}$

117

(1) $f(0)=a^0=1$이므로 a의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 1)$을 지난다. (◯)

(2) $f(x)=a^x$은 일대일함수이므로 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$이다.
즉, $f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$이다. (◯)

(3) 그래프의 점근선은 직선 $y=0$, 즉 x축이다. (×)

(4) $0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 a^x의 값은 감소한다.
즉, $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이다. (×)

(5) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 a^x의 값도 증가한다.
즉, $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$이다. (◯)

(6) 정의역은 실수 전체의 집합이다. (×)

(7) 치역은 양의 실수 전체의 집합이다. (◯)

답 (1) ◯ (2) ◯ (3) × (4) × (5) ◯ (6) × (7) ◯

118

(1) $y-2=2^{x-(-1)}$이므로 $y=2\times2^x+2$

(2) $-y=2^x$이므로 $y=-2^x$

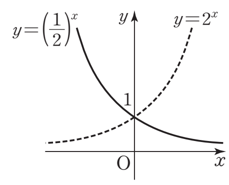
(3) $y=2^{-x}$

(4) $-y=2^{-x}$이므로 $y=-2^{-x}$

답 (1) $y=2\times2^x+2$ (2) $y=-2^x$ (3) $y=2^{-x}$ (4) $y=-2^{-x}$

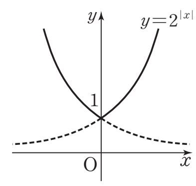
119

(1) 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



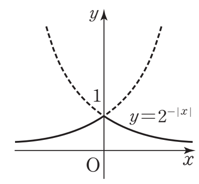
(2) $y=2^{|x|}=\begin{cases}2^x & (x\geq0)\\ 2^{-x} & (x<0)\end{cases}$이므로

함수 $y=2^{|x|}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(3) $y=2^{-|x|}=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^x & (x\geq0)\\ 2^x & (x<0)\end{cases}$이므로

함수 $y=2^{-|x|}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



보충 설명

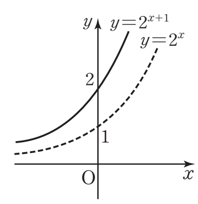
(2) 함수 $y=2^{|x|}$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 그린 후 $x\geq0$인 부분은 그대로 두고, $x<0$인 부분은 $x\geq0$인 부분을 직선 $x=0$ (y축)에 대하여 대칭이동하여 그리면 된다.

(3) 함수 $y=2^{-|x|}$의 그래프는 $y=2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 그린 후 $x\geq0$인 부분은 그대로 두고, $x<0$인 부분은 $x\geq0$인 부분을 직선 $x=0$ (y축)에 대하여 대칭이동하여 그리면 된다.

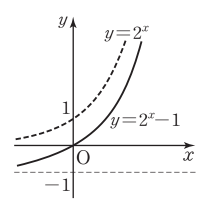
답 풀이 참조

120

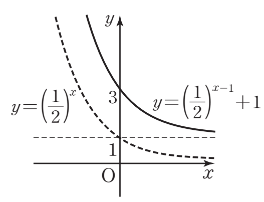
(1) $y=2^{x+1}$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 점근선의 방정식은 $y=0$이다.



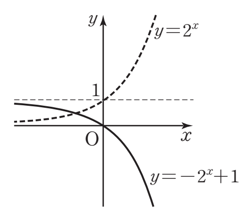
(2) $y=2^x-1$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 점근선의 방정식은 $y=-1$이다.



(3) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+1$의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 점근선의 방정식은 $y=1$이다.



(4) $y=-2^x+1$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 점근선의 방정식은 $y=1$이다.



답 풀이 참조

121

(1) $\sqrt{3^3}=3^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt[3]{3^2}=3^{\frac{2}{3}}$이고, $\frac{3}{2}>\frac{2}{3}$이다.

이때, 함수 $y=3^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$3^{\frac{3}{2}}>3^{\frac{2}{3}}$ $\quad\therefore \sqrt{3^3}>\sqrt[3]{3^2}$

(2) $-2<3$이고, 함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}>\left(\frac{1}{5}\right)^3$

(3) $\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^2}=2^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2^{\frac{3}{2}}$이고, $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{3}{2}$이다.

이때, 함수 $y=2^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$2^{\frac{1}{2}}<2^{\frac{2}{3}}<2^{\frac{3}{2}}$ $\quad\therefore \sqrt{2}<\sqrt[3]{4}<\sqrt{8}$

(4) $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$이고, $-2<1<\frac{3}{2}$이다.

이때, 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}<\frac{1}{3}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ $\quad\therefore \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3<\frac{1}{3}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

답 (1) $\sqrt{3^3}>\sqrt[3]{3^2}$ (2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}>\left(\frac{1}{5}\right)^3$
(3) $\sqrt{2}<\sqrt[3]{4}<\sqrt{8}$ (4) $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3<\frac{1}{3}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

122

(1) 함수 $y=3^x$에서

$x=-2$일 때, $y=3^{-2}=\frac{1}{9}$

$x=2$일 때, $y=3^2=9$

따라서 최댓값은 9, 최솟값은 $\frac{1}{9}$이다.

(2) 함수 $y=2^{-x}$에서

$x=-1$일 때, $y=2^1=2$

$x=3$일 때, $y=2^{-3}=\frac{1}{8}$

따라서 최댓값은 2, 최솟값은 $\frac{1}{8}$이다.

(3) 함수 $y=2^{x-1}+3$에서

$x=1$일 때, $y=2^{1-1}+3=4$

$x=4$일 때, $y=2^{4-1}+3=11$

따라서 최댓값은 11, 최솟값은 4이다.

(4) 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}+2$에서

$x=-2$일 때, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2-1}+2=29$

$x=-1$일 때, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1-1}+2=11$

따라서 최댓값은 29, 최솟값은 11이다.

답 (1) 최댓값 : 9, 최솟값 : $\frac{1}{9}$ (2) 최댓값 : 2, 최솟값 : $\frac{1}{8}$
(3) 최댓값 : 11, 최솟값 : 4 (4) 최댓값 : 29, 최솟값 : 11

123

(1) $4^x=64$에서 $2^{2x}=2^6$이므로

$2x=6$ $\quad\therefore x=3$

(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}=\sqrt{3}$에서 $3^{x-1}=3^{\frac{1}{2}}$이므로

$x-1=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore x=\frac{3}{2}$

(3) $10^x=0.1^{x-4}$에서 $10^x=10^{-x+4}$이므로

$x=-x+4$, $2x=4$ $\quad\therefore x=2$

(4) $4^{2x+1}=5^{2x+1}$에서 $2x+1=0$

$2x=-1$ $\quad\therefore x=-\frac{1}{2}$

답 (1) $x=3$ (2) $x=\frac{3}{2}$ (3) $x=2$ (4) $x=-\frac{1}{2}$

124

$4^{2x}-2\times4^x-8=0$에서

$(4^x)^2-2\times4^x-8=0$

$4^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$\boxed{t^2-2t-8=0}$, $(t+2)(t-4)=0$

$\therefore t=\boxed{4}$ $(\because t>0)$

즉, $4^x=\boxed{4}$이므로 $x=\boxed{1}$

답 (가) $t^2-2t-8=0$ (나) 4 (다) 1

125

(1) $3^{2x}+3^x=2$에서

$(3^x)^2+3^x-2=0$

$3^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2+t-2=0$, $(t+2)(t-1)=0$

$\therefore t=1$ $(\because t>0)$

즉, $3^x=1$이므로 $x=0$

(2) $2^{2x}-6\times2^x+8=0$에서

$(2^x)^2-6\times2^x+8=0$

$2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-6t+8=0$, $(t-2)(t-4)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=4$

즉, $2^x=2$ 또는 $2^x=4$이므로

$x=1$ 또는 $x=2$

(3) $2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}+\left(\frac{1}{2}\right)^x-1=0$에서

$2\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2+\left(\frac{1}{2}\right)^x-1=0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$2t^2+t-1=0$, $(t+1)(2t-1)=0$

$\therefore t=\frac{1}{2}$ $(\because t>0)$

즉, $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{2}$이므로 $x=1$

답 (1) $x=0$ (2) $x=1$ 또는 $x=2$ (3) $x=1$

126

(1) $4^{x-1}>16$에서 $4^{x-1}>4^2$

밑이 1보다 크므로 $x-1>2$

$\therefore x>3$

(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} \leq \sqrt{3}$에서 $3^{-2x+1} \leq 3^{\frac{1}{2}}$

밑이 1보다 크므로 $-2x+1 \leq \frac{1}{2}$

$-2x \leq -\frac{1}{2}$ $\quad \therefore x \geq \frac{1}{4}$

(3) $\left(\frac{1}{10}\right)^{x-2} \geq 0.1^{3x}$에서 $\left(\frac{1}{10}\right)^{x-2} \geq \left(\frac{1}{10}\right)^{3x}$

밑이 1보다 작으므로 $x-2 \leq 3x$

$-2x \leq 2$ $\quad \therefore x \geq -1$

(4) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x} < \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-3}$에서 $\left(\frac{3}{2}\right)^{x} < \left(\frac{3}{2}\right)^{-2x+3}$

밑이 1보다 크므로 $x < -2x+3$

$3x < 3$ $\quad \therefore x < 1$

답 (1) $x>3$ (2) $x \geq \frac{1}{4}$ (3) $x \geq -1$ (4) $x<1$

127

$9^x - 12 \times 3^x + 27 \leq 0$에서

$(3^x)^2 - 12 \times 3^x + 27 \leq 0$

$3^x = t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 부등식은

$\boxed{t^2 - 12t + 27 \leq 0}$

$(t-3)(t-9) \leq 0$

$\therefore \boxed{3} \leq t \leq \boxed{9}$

즉, $\boxed{3} \leq 3^x \leq \boxed{9}$이므로 $3 \leq 3^x \leq 3^2$

밑이 1보다 크므로

$\boxed{1} \leq x \leq \boxed{2}$

답 (가) $t^2-12t+27 \leq 0$ (나) 3 (다) 9 (라) 1 (마) 2

128

(1) $4^{2x} - 20 \times 4^x + 64 < 0$에서

$(4^x)^2 - 20 \times 4^x + 64 < 0$

$4^x = t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 부등식은

$t^2 - 20t + 64 < 0$

$(t-4)(t-16) < 0$

$\therefore 4 < t < 16$

즉, $4 < 4^x < 4^2$이고 밑이 1보다 크므로

$1 < x < 2$

(2) $8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{x} - 1 \geq 0$에서

$8 \times \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\right\}^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{x} - 1 \geq 0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 부등식은

$8t^2 + 2t - 1 \geq 0$

$(2t+1)(4t-1) \geq 0$

$\therefore t \geq \frac{1}{4}\ (\because t>0)$

즉, $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{2}$이고 밑이 1보다 작으므로

$x \leq 2$

답 (1) $1<x<2$ (2) $x \leq 2$

유형 콕콕 본문 p.29~33

129 ④	**130** ③	**131** ㄴ	**132** ⑤	**133** ①	
134 ㄱ, ㄴ, ㄷ		**135** 27	**136** 3	**137** 14	**138** 52
139 ④	**140** $\{y \mid 0<y\leq 1\}$		**141** ④	**142** 4	
143 $A<B<C$		**144** -2	**145** 49	**146** 4	**147** ①
148 2	**149** ④	**150** ①	**151** ①	**152** 12	**153** ①
154 25	**155** ④	**156** ⑤	**157** ①		
158 $0<x<1$ 또는 $x>3$			**159** ②	**160** ③	**161** 6

129

④ $y=2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$에서 밑이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

130

임의의 실수 p, q에 대하여 $p<q$일 때, $f(p)<f(q)$를 만족시킨다는 것은 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가한다는 것을 의미하므로 $f(x)=a^x$에서 $a>1$인 함수를 찾으면 된다.

① $f(x)=3^{-x}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$에서 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 실수 전체의 집합에서 감소하는 함수이다.

② $f(x)=(0.1)^x=\left(\frac{1}{10}\right)^{x}$에서 $0<\frac{1}{10}<1$이므로 실수 전체의 집합에서 감소하는 함수이다.

③ $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x}=(5^{-1})^{-x}=5^x$에서 $5>1$이므로 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수이다.

④ $f(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x}$에서 $0<\frac{1}{\sqrt{2}}<1$이므로 실수 전체의 집합에서 감소하는 함수이다.

⑤ $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$에서 $0<\frac{2}{3}<1$이므로 실수 전체의 집합에서 감소하는 함수이다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 것은 ③이다.

답 ③

131

$f(2)=a^2=9$에서 $a=3\ (\because a>0)$

$\therefore f(x)=3^x$

ㄱ. $f(-1)=3^{-1}=\frac{1}{3}$ (거짓)

ㄴ. $f(x)=3^x$에서 $3>1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. (참)

ㄷ. 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ㄴ

132

함수 $y=\frac{1}{3}\times 3^x+1=3^{x-1}+1$에서

① $x=1$일 때, $y=3^{1-1}+1=2$이므로 점 $(1, 2)$를 지난다.

② $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

③ $y=3^x$의 그래프의 점근선은 x축 $(y=0)$이므로 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 점근선의 방정식은 $y=1$이다.
④ 그래프는 제1, 2사분면을 지난다.
⑤ 그래프의 점근선의 방정식이 $y=1$이므로 치역은 $\{y|y>1\}$이다.
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

133

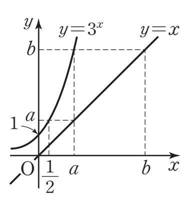
$y=a^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=a^{-x}$
또한 $y=a^{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y-2=a^{-\{x-(-1)\}}$ $\quad\therefore y=a^{-x-1}+2$
이 그래프가 점 $(-3,\ 6)$을 지나므로
$6=a^{3-1}+2,\ a^2=4$
$\therefore a=2\ (\because a>0)$ 답 ①

134

ㄱ. $y=-\left(\frac{1}{a}\right)^x=-(a^{-1})^x=-a^{-x}$이므로 $y=a^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프이다.
ㄴ. $y=\left(\frac{1}{a}\right)^{x+2}=(a^{-1})^{x+2}=a^{-(x+2)}$이므로 $y=a^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프이다.
ㄷ. $y=\sqrt{2}a^x+3=a^{\log_a\sqrt{2}}\times a^x+3=a^{x+\log_a\sqrt{2}}+3$이므로 $y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\log_a\sqrt{2}$만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프이다.
ㄹ. $y=a^{3x+2}=a^{3\left(x+\frac{2}{3}\right)}$이므로 $y=a^x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.
따라서 함수 $y=a^x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

135

$y=3^x$의 그래프가 두 점 $\left(\frac{1}{2},\ a\right)$, $(a,\ b)$를 지나므로
$a=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3},\ b=3^a=3^{\sqrt{3}}$
$\therefore b^a=(3^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}=3^3=27$



답 27

136

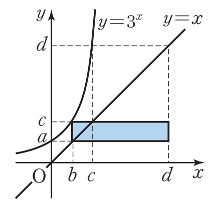
$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프가 두 점 $(a,\ p)$, $(b,\ q)$를 지나므로
$p=\left(\frac{1}{3}\right)^a,\ q=\left(\frac{1}{3}\right)^b$
$pq=\frac{1}{27}=\left(\frac{1}{3}\right)^3$에서
$\left(\frac{1}{3}\right)^a\times\left(\frac{1}{3}\right)^b=\left(\frac{1}{3}\right)^{a+b}=\left(\frac{1}{3}\right)^3$ $\quad\therefore a+b=3$ 답 3

137

점 P_k의 x좌표를 a, 점 Q_k의 x좌표를 b라 하면
$2^a=k$ ⋯⋯ ㉠
$2^{b-2}=k$ ⋯⋯ ㉡
㉡÷㉠을 하면 $2^{b-2-a}=1$
$b-2-a=0$ $\quad\therefore b-a=2$
따라서 $A_k=\frac{1}{2}\times(b-a)\times k=\frac{1}{2}\times2\times k=k$이므로
$A_4+A_{10}=4+10=14$ 답 14

138

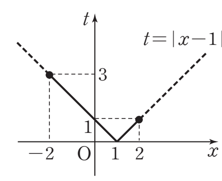
$y=3^x$의 그래프가 점 $(0,\ a)$를 지나므로
$a=3^0=1$
직선 $y=x$가 점 $(b,\ a)$를 지나므로
$a=b$ $\quad\therefore b=1$
또한 $c=3^b=3^1=3,\ d=3^c=3^3=27$이므로
색칠한 도형의 넓이는



$(d-b)\times(c-a)=(27-1)\times(3-1)=52$ 답 52

139

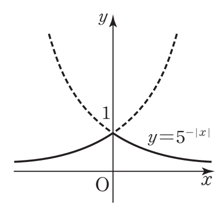
$t=|x-1|\ (t\ge0)$로 놓으면 $y=3^{|x-1|}-1=3^t-1$
함수 $y=3^t-1$에서 $3>1$이므로 t가 최대일 때 최댓값을 가지고, t가 최소일 때 최솟값을 가진다.
이때, $t=|x-1|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $-2\le x\le2$에서
$x=1$일 때 최솟값 $t=0$,
$x=-2$일 때 최댓값 $t=3$



따라서 함수 $y=3^t-1$은
$t=3$일 때 최댓값 $3^3-1=26$, $t=0$일 때 최솟값 $3^0-1=0$
을 가지므로 최댓값과 최솟값의 합은
$26+0=26$ 답 ④

140

$y=5^{-|x|}=\begin{cases}\left(\frac{1}{5}\right)^x\ (x\ge0)\\ 5^x\ (x<0)\end{cases}$
따라서 함수 $y=5^{-|x|}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 함수의 치역은
$\{y|0<y\le1\}$



답 $\{y|0<y\le1\}$

141

함수 $y=2^{x-a}-b$의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=-b$이므로 함수 $y=|2^{x-a}-b|$의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=b$이다.
$\therefore b=3$
이때, 함수 $y=|2^{x-a}-b|$의 그래프가 점 $(\log_2 12,\ 3)$을 지나므로
$3=|2^{\log_2 12-a}-3|$에서 $6=2^{\log_2 12-a}$
즉, $2^{\log_2 6}=2^{\log_2 12-a}$이므로 $\log_2 6=\log_2 12-a$
$\therefore a=\log_2 12-\log_2 6=\log_2 2=1$
한편, $x=k$일 때 $y=0$이므로
$0=|2^{k-1}-3|$에서 $2^{k-1}=3$
$k-1=\log_2 3$
$\therefore k=\log_2 3+1=\log_2 6$ 답 ④

142

$\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{4}}=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}^{\frac{1}{4}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}=2^{-\frac{3}{2}}$
$\sqrt{\frac{1}{32}}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^5}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}=2^{-\frac{5}{2}}$

$4^{\frac{5}{2}}=(2^2)^{\frac{5}{2}}=2^5$

$\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=2^{-3}$

$0.5^{-\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}$

함수 $y=2^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고,

$-3<-\frac{5}{2}<-\frac{3}{2}<\frac{1}{3}<5$

이므로 가장 큰 수는 2^5, 즉 $4^{\frac{5}{2}}$이고, 가장 작은 수는 2^{-3}, 즉 $\frac{1}{8}$이다.

따라서 가장 큰 수와 가장 작은 수의 곱은

$4^{\frac{5}{2}}\times\frac{1}{8}=2^5\times2^{-3}=2^2=4$ 답 4

143

$A=\sqrt[n+3]{a^{n+2}}=a^{\frac{n+2}{n+3}}$

$B=\sqrt[n+2]{a^{n+1}}=a^{\frac{n+1}{n+2}}$

$C=\sqrt[n+1]{a^n}=a^{\frac{n}{n+1}}$

함수 $y=a^x$은 $0<a<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

이때, $\frac{n}{n+1}<\frac{n+1}{n+2}<\frac{n+2}{n+3}$이므로

$a^{\frac{n+2}{n+3}}<a^{\frac{n+1}{n+2}}<a^{\frac{n}{n+1}}$ $\quad\therefore A<B<C$ 답 $A<B<C$

144

$y=4^x-2^{x+2}+1$에서 $y=(2^x)^2-4\times2^x+1$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$y=t^2-4t+1=(t-2)^2-3$

이때, $-1\le x\le2$이므로 $\frac{1}{2}\le t\le4$

따라서 $t=2$, 즉 $x=1$일 때 최솟값 -3을 가지므로

$a=1,\ b=-3$

$\therefore a+b=1+(-3)=-2$ 답 -2

145

$y=3^{-2x}-4\times3^{-x}+5$에서 $y=(3^{-x})^2-4\times3^{-x}+5$

$3^{-x}=t\ (t>0)$로 놓으면

$y=t^2-4t+5=(t-2)^2+1$

가

이때, $-2\le x\le3$이므로 $\frac{1}{27}\le t\le9$

나

따라서 $t=2$일 때 최솟값 1, $t=9$일 때 최댓값 50을 가지므로

$M=50,\ m=1$

다

$\therefore M-m=50-1=49$

라

단계	채점 요소	비율
가	주어진 함수를 $3^{-x}=t\ (t>0)$로 치환하여 나타내기	30%
나	t의 값의 범위 구하기	30%
다	$M,\ m$의 값 구하기	30%
라	$M-m$의 값 구하기	10%

답 49

146

$f(x)=x^2-2x-1$로 놓으면 $y=a^{x^2-2x-1}=a^{f(x)}$

함수 $y=a^{f(x)}$에서 $0<a<1$이므로 $f(x)$가 최대일 때 최솟값을 가지고, $f(x)$가 최소일 때 최댓값을 가진다.

이때, $f(x)=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$이므로

$1\le x\le3$에서 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 -2를 가지고, $x=3$일 때 최댓값 2를 가진다.

따라서 함수 $y=a^{f(x)}$의 최댓값은 a^{-2}이고, 최솟값은 a^2이다.

함수 $y=a^{x^2-2x-1}$의 최댓값이 b, 최솟값이 $\frac{1}{4}$이므로

$a^{-2}=b$ …… ㉠

$a^2=\frac{1}{4}$ …… ㉡

㉡에서 $a=\frac{1}{2}$ ($\because 0<a<1$)

$a=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=b$ $\quad\therefore b=4$ 답 4

147

$y=3^x+\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}=3^x+3^{-x+2}$

$3^x>0,\ 3^{-x+2}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$y=3^x+3^{-x+2}$

$\ge2\sqrt{3^x\times3^{-x+2}}$

$=2\sqrt{3^2}=2\times3=6$

이때, 등호는 $3^x=3^{-x+2}$일 때 성립하므로

$x=-x+2$ $\quad\therefore x=1$

즉, 주어진 함수는 $x=1$일 때 최솟값 6을 가진다.

따라서 $a=1,\ b=6$이므로 $\frac{b}{a}=\frac{6}{1}=6$ 답 ①

148

$3^x+3^{-x}=t$로 놓으면 $3^x>0,\ 3^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=3^x+3^{-x}\ge2\sqrt{3^x\times3^{-x}}=2$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립한다.)

이때, $9^x+9^{-x}=(3^x+3^{-x})^2-2=t^2-2$이므로 주어진 함수는

$y=2t-(t^2-2)=-t^2+2t+2$

$=-(t-1)^2+3$ (단, $t\ge2$)

$t\ge2$이므로 주어진 함수는 $t=2$일 때 최댓값 2를 가진다. 답 2

149

$4^x>0,\ 2^{y+3}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4^x+2^{y+3}\ge2\sqrt{4^x\times2^{y+3}}$

$=2\sqrt{2^{2x+y+3}}$

$=2\sqrt{2^4}$ ($\because 2x+y-1=0$)

$=8$ (단, 등호는 $4^x=2^{y+3}$일 때 성립한다.)

따라서 구하는 최솟값은 8이다. 답 ④

150

$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2}\times8^x=\sqrt{2}$에서 $2^{-2x^2}\times2^{3x}=2^{\frac{1}{2}},\ 2^{-2x^2+3x}=2^{\frac{1}{2}}$

$-2x^2+3x=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore 4x^2-6x+1=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 근의 곱은 $\frac{1}{4}$이다.

답 ①

151

$\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2}=\left(\frac{4}{3}\right)^{3x-4}$에서 $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2}=\left(\frac{3}{4}\right)^{-(3x-4)}$

$x^2=-3x+4$ $\quad\therefore x^2+3x-4=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 근의 합은 -3이다.

답 ①

152

(i) $x-5=0$, 즉 $x=5$일 때

주어진 방정식은 $3^0=5^0=1$이므로 등식이 성립한다.

(ii) $x-5\neq 0$일 때

$x-2=5$이므로 $x=7$

(i), (ii)에서 모든 근의 합은 $5+7=12$

답 12

153

$9^x-4\times 3^{x+1}+27=0$에서 $(3^x)^2-12\times 3^x+27=0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-12t+27=0$, $(t-3)(t-9)=0$

$\therefore t=3$ 또는 $t=9$

즉, $3^x=3$ 또는 $3^x=9$이므로 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=2$이므로

$\alpha\beta=1\times 2=2$

답 ①

154

$5^{2x}-4\times 5^x+k=0$에서 $(5^x)^2-4\times 5^x+k=0$

$5^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-4t+k=0$ …… ㉠

가

주어진 방정식의 두 근이 α, β이므로 방정식 ㉠의 두 근은 5^α, 5^β이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$5^\alpha\times 5^\beta=k$, $5^{\alpha+\beta}=k$

나

이때, $\alpha+\beta=2$이므로

$5^2=k$ $\quad\therefore k=25$

다

단계	채점 요소	비율
가	주어진 방정식을 $5^x=t$로 치환하여 나타내기	30%
나	이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $5^{\alpha+\beta}$ 구하기	40%
다	$\alpha+\beta=2$를 이용하여 k의 값 구하기	30%

답 25

155

$2^{2x+1}-a\times 2^x+4=0$에서 $2\times(2^x)^2-a\times 2^x+4=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$2t^2-at+4=0$ …… ㉠

주어진 방정식의 두 근이 -1, b이므로 방정식 ㉠의 두 근은 $2^{-1}=\frac{1}{2}$, 2^b이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{1}{2}+2^b=\frac{a}{2}$, $2^b=\frac{a-1}{2}$ $\quad\therefore 2^{b+1}=a-1$

$\frac{1}{2}\times 2^b=2$, $2^{b-1}=2$ $\quad\therefore b=2$

즉, $2^{2+1}=a-1$이므로 $a=9$

$\therefore a+b=9+2=11$

답 ④

156

$3^{2x-5}>(\sqrt{3})^{-x}$에서 $3^{2x-5}>3^{-\frac{x}{2}}$

밑이 1보다 크므로 $2x-5>-\frac{x}{2}$

$\frac{5}{2}x>5$ $\quad\therefore x>2$

답 ⑤

157

$x^{x^2-3}<x^{2x}$에서 $x>1$이므로

$x^2-3<2x$

$x^2-2x-3<0$, $(x+1)(x-3)<0$ $\quad\therefore -1<x<3$

$\therefore 1<x<3\ (\because x>1)$

답 ①

158

$x^{4x-1}>x^{2x+5}$에서 $x=1$일 때 $1^3=1^7$이므로 부등식이 성립하지 않는다.

가

(i) $0<x<1$일 때

$4x-1<2x+5$, $2x<6$ $\quad\therefore x<3$

그런데 $0<x<1$이므로 $0<x<1$

나

(ii) $x>1$일 때

$4x-1>2x+5$, $2x>6$ $\quad\therefore x>3$

그런데 $x>1$이므로 $x>3$

다

(i), (ii)에서 구하는 x의 값의 범위는

$0<x<1$ 또는 $x>3$

라

단계	채점 요소	비율
가	$x=1$일 때 부등식이 성립하지 않음을 보이기	20%
나	$0<x<1$일 때 x의 값의 범위 구하기	35%
다	$x>1$일 때 x의 값의 범위 구하기	35%
라	x의 값의 범위 구하기	10%

답 $0<x<1$ 또는 $x>3$

159

$3^{2x+2}-28\times 3^x+3<0$에서 $9\times(3^x)^2-28\times 3^x+3<0$

$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 부등식은

$9t^2-28t+3<0$, $(9t-1)(t-3)<0$ $\quad\therefore \frac{1}{9}<t<3$

즉, $3^{-2}<3^x<3$이고 밑이 1보다 크므로

$-2<x<1$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 -1, 0이므로 구하는 합은

$-1+0=-1$

답 ②

160

$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}-\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}<\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}-1$에서

$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\right\}^{2}-\frac{1}{9}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{x}<9\times\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-1$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x}=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 부등식은

$t^2-\frac{1}{9}t<9t-1,\ t^2-\frac{82}{9}t+1<0$

$9t^2-82t+9<0,\ (9t-1)(t-9)<0 \qquad \therefore \frac{1}{9}<t<9$

즉, $\left(\frac{1}{3}\right)^{2}<\left(\frac{1}{3}\right)^{x}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$이고 밑이 1보다 작으므로

$-2<x<2$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 -1, 0, 1의 3개이다.

답 ③

161

$a^{2x}-5\times a^{x}+b<0$에서 $a^{x}=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-5t+b<0$ …… ㉠

주어진 부등식의 해가 $0<x<2$이고 $a>1$이므로

$a^0<a^x<a^2$, 즉 $1<t<a^2$

부등식 ㉠의 해가 $1<t<a^2$이므로

$(t-1)(t-a^2)<0,\ t^2-(a^2+1)t+a^2<0$

따라서 $5=a^2+1$, $b=a^2$이므로

$a^2=4=2^2,\ a=2\ (\because a>1)$

$b=2^2=4$

$\therefore a+b=2+4=6$

답 6

실력 콕콕

본문 p.34~35

162 ①	163 121	164 ②	165 ③	166 ④	167 ③
168 ④	169 81	170 ④	171 ⑤	172 ①	173 ④
174 127	175 112	176 18	177 17		

162

$y=a\times 2^x$에 $x=0$, $y=4$를 대입하면

$4=a\times 2^0=a\times 1=a \qquad \therefore a=4$

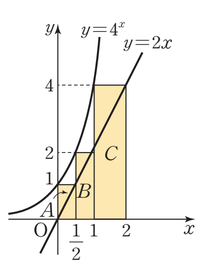
$y=4\times 2^x$에 $x=b$, $y=16$을 대입하면

$16=4\times 2^b,\ 2^b=4 \qquad \therefore b=2$

$\therefore a+b=4+2=6$

답 ①

163



함수 $y=4^x$의 그래프와 y축이 만나는 점은 (0, 1), 이고 점 (0, 1)을 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $y=2x$와 만나는 점은 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$이다.

즉, 직사각형 A는 가로의 길이가 $\frac{1}{2}$, 세로의 길이가 1이다.

점 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 함수 $y=4^x$의 그래프와 만나는 점은 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$이고, 점 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$를 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $y=2x$와 만나는 점은 (1, 2)이다.

즉, 직사각형 B는 가로의 길이가 $\frac{1}{2}$, 세로의 길이가 2이다.

점 (1, 2)를 지나고 y축에 평행한 직선이 함수 $y=4^x$의 그래프와 만나는 점은 (1, 4)이고, 점 (1, 4)를 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $y=2x$와 만나는 점은 (2, 4)이다.

즉, 직사각형 C는 가로의 길이가 1, 세로의 길이가 4이다.

$\therefore$ (A의 넓이)$=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$

(B의 넓이)$=\frac{1}{2}\times 2=1$

(C의 넓이)$=1\times 4=4$

따라서 세 직사각형 A, B, C의 넓이의 합 S는

$S=\frac{1}{2}+1+4=\frac{11}{2}$

$\therefore 4S^2=121$

답 121

164

함수 $y=2^{2x+a}+b$의 점근선의 방정식이 $y=2$이므로 $b=2$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=2^{2x+a}+2$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시킨 것이므로

$y=2^{-2x+a}+2$

이때, 함수 $y=2^{-2x+a}+2$의 그래프가 점 $(-1, 10)$을 지나므로

$10=2^{2+a}+2$에서 $2^{2+a}=8 \qquad \therefore a=1$

$\therefore a+b=1+2=3$

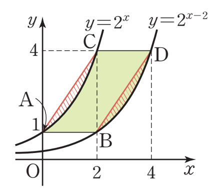
답 ②

165

점 B의 y좌표가 1이고 점 B는 함수 $y=2^{x-2}$의 그래프 위의 점이므로

$1=2^{x-2}$에서 $x-2=0 \qquad \therefore x=2$

즉, 점 B의 좌표는 (2, 1)이고, 점 C의 좌표는 (2, 4)이다.



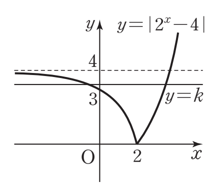
한편, 함수 $y=2^{x-2}$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림에서 빗금친 두 부분의 넓이가 같다.

따라서 색칠한 부분의 넓이는 평행사변형 ABDC의 넓이와 같으므로

$2\times(4-1)=2\times 3=6$

답 ③

166



$y=|2^x-4|=\begin{cases} 2^x-4 & (x\geq 2) \\ -2^x+4 & (x<2) \end{cases}$

이므로 함수 $y=|2^x-4|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y=|2^x-4|$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k의 값의 범위는 $0<k<4$이므로 구하는 정수 k는 1, 2, 3의 3개이다.

보충 설명

함수 $y=|2^x-4|$의 그래프는 함수 $y=2^x-4$의 그래프를 그린 후 $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동하여 그린다.

답 ④

167

세 수 $A=x^x$, $B=x^{2x}$, $C=x^{x^2}$에서 밑이 x로 같으므로 지수만을 함수로 나타내면 각각

$y=x$, $y=2x$, $y=x^2$

이며, 세 함수의 대소 관계는 $0<x<1$, $1<x<2$에서 다음과 같다.

(i) $0<x<1$일 때

$x^2<x<2x$이므로 $x^{2x}<x^x<x^{x^2}$

$\therefore B<A<C$

(ii) $1<x<2$일 때

$x<x^2<2x$이므로 $x^x<x^{x^2}<x^{2x}$

$\therefore A<C<B$

ㄱ. $0<x<1$일 때, $B<A$이다. (거짓)

ㄴ. $1<x<2$일 때, $C<B$이다. (거짓)

ㄷ. (i), (ii)에서 $A<C$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ③

168

ㄱ. $\left(\frac{1}{3}\right)^a=\left(\frac{1}{4}\right)^b=k\ (k>0)$로 놓으면

(i) $k>1$일 때, $a<b<0$이므로 $4^a<3^b$

(ii) $0<k<1$일 때, $0<b<a$이므로 $4^a>3^b$ (거짓)

ㄴ. $\left(\frac{1}{3}\right)^a=\left(\frac{1}{4}\right)^b=k\ (k>0)$로 놓으면

$\left(\frac{1}{3}\right)^{a+1}=\frac{k}{3}$, $\left(\frac{1}{4}\right)^{b+1}=\frac{k}{4}$

$\therefore \left(\frac{1}{3}\right)^{a+1}>\left(\frac{1}{4}\right)^{b+1}$ (참)

ㄷ. $\left(\frac{1}{3}\right)^a=\left(\frac{1}{4}\right)^b$일 때, $a<b<0$ 또는 $0<b<a$ ($\because$ ㄱ)

즉, $ab>0$이므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^{ab}>\left(\frac{1}{4}\right)^{ab}$ (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

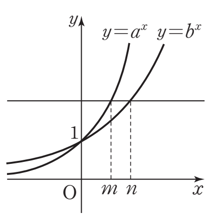
보충 설명

지수에서 밑이 다른 경우의 지수함수의 그래프를 이용한 대소 비교는 다음과 같다.

(i) $a>b>1$일 때

$a^m=b^n>1 \Longleftrightarrow 0<m<n$

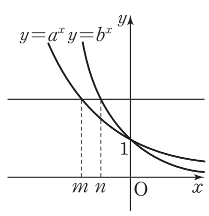
$a^m=b^n<1 \Longleftrightarrow n<m<0$



(ii) $0<b<a<1$일 때

$a^m=b^n>1 \Longleftrightarrow m<n<0$

$a^m=b^n<1 \Longleftrightarrow 0<n<m$



답 ④

169

$y=a^{2x}-2\times a^{x-1}+5$에서 $y=(a^x)^2-\frac{2}{a}\times a^x+5$

$a^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$y=t^2-\frac{2}{a}t+5=\left(t-\frac{1}{a}\right)^2+5-\frac{1}{a^2}$ …… ㉠

이때, $0<a<1$이고 $0\le x\le 2$이므로 $a^2\le t\le 1$

또한 $0<a<1$에서 $1<\frac{1}{a}$이므로 $a^2\le t\le 1<\frac{1}{a}$

즉, $t=1$일 때 최솟값 2를 가지므로

$1-\frac{2}{a}+5=2$, $\frac{2}{a}=4$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

$a=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$y=(t-2)^2+1$

이때, $\frac{1}{4}\le t\le 1$이므로 함수의 최댓값은

$t=\frac{1}{4}$일 때, $\left(\frac{1}{4}-2\right)^2+1=\frac{65}{16}$

따라서 $p=16$, $q=65$이므로

$p+q=16+65=81$ 답 81

170

$f(x)=x^2-6x+3=(x-3)^2-6$

즉, $1\le x\le 4$에서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최솟값 -6을 가지고, $x=1$일 때 최댓값 -2를 가진다.

$\therefore -6\le f(x)\le -2$

(i) $0<a<1$인 경우

$g(x)=a^x$은 x의 값이 증가하면 $g(x)$의 값은 감소하므로

$(g\circ f)(x)=a^{f(x)}$은 $f(x)=-6$일 때 최댓값 27을 가진다.

즉, $a^{-6}=27$, $a^{-6}=3^3$

$\therefore a=(3^3)^{-\frac{1}{6}}=3^{-\frac{1}{2}}$

한편, $(g\circ f)(x)=a^{f(x)}$은 $f(x)=-2$일 때 최솟값을 가지므로 최솟값은

$a^{-2}=\left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}=3$

(ii) $a>1$인 경우

$g(x)=a^x$은 x의 값이 증가하면 $g(x)$의 값도 증가하므로

$(g\circ f)(x)=a^{f(x)}$은 $f(x)=-2$일 때 최댓값 27을 가진다.

즉, $a^{-2}=27$, $a^{-2}=3^3$

$\therefore a=(3^3)^{-\frac{1}{2}}=3^{-\frac{3}{2}}$

그런데 $3^{-\frac{3}{2}}<3^0=1$이므로 $a>1$을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $(g\circ f)(x)$의 최솟값은 3이다. 답 ④

171

$81^x-9^{x+2}+49=0$에서 $(9^x)^2-81\times 9^x+49=0$

$9^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-81t+49=0$

이 방정식의 두 근은 9^α, 9^β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$9^\alpha\times 9^\beta=49$, $3^{2(\alpha+\beta)}=7^2$

$\therefore 3^{\alpha+\beta}=7$ ($\because 3^{\alpha+\beta}>0$) 답 ⑤

172

$4^x-2^{x+3}+a=0$에서 $(2^x)^2-8\times 2^x+a=0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-8t+a=0$ …… ㉠

이때, 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 하므로

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-4)^2-a>0 \quad \therefore a<16$

(ii) (두 근의 합)$=8>0$

(iii) (두 근의 곱)$=a>0$

(i)~(iii)에서 실수 a의 값의 범위는 $0<a<16$

따라서 정수 a는 1, 2, 3, …, 15의 15개이다.

답 ①

173

$4^{f(x)}-2^{1+f(x)}<8$에서 $2^{2f(x)}-2\times2^{f(x)}-8<0$

$2^{f(x)}=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 부등식은

$t^2-2t-8<0,\ (t+2)(t-4)<0 \quad \therefore -2<t<4$

$t>0$이므로 $0<t<4$

즉, $0<2^{f(x)}<2^2$이고 밑이 1보다 크므로

$f(x)<2$

즉, $x^2-x-4<2$에서

$x^2-x-6<0,\ (x+2)(x-3)<0$

$\therefore -2<x<3$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1, 2의 4개이다.

답 ④

174

$2^{2x+1}-(2n+1)2^x+n\le0$에서 $2\times(2^x)^2-(2n+1)2^x+n\le0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 부등식은

$2t^2-(2n+1)t+n\le0,\ (2t-1)(t-n)\le0 \quad \therefore \frac{1}{2}\le t\le n$

즉, $2^{-1}\le2^x<2^{\log_2 n}$이고 밑이 1보다 크므로

$-1\le x\le\log_2 n$

부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 8이므로 정수 x는 -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6이다.

즉, $6\le\log_2 n<7$이므로 $\log_2 2^6\le\log_2 n<\log_2 2^7$

$\therefore 64\le n<128$

따라서 자연수 n의 최댓값은 127이다.

답 127

175

$2^{2x}+3\times2^{x+1}-a<0$에서 $(2^x)^2+6\times2^x-a<0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$A=\{x\,|\,x<3\}$에서 $0<t<8$

$B=\{x\,|\,2^{2x}+3\times2^{x+1}-a<0\}$에서 $t^2+6t-a<0\ (t>0)$

이때, $f(t)=t^2+6t-a\ (t>0)$라 하면 함수 $f(t)$에 대하여 $f(t)<0$을 만족시키는 t의 값의 범위가 $0<t<8$이어야 한다.

즉, $f(8)=64+48-a=0$

$\therefore a=112$

다른 풀이

$2^{2x}+3\times2^{x+1}-a<0$에서

$(2^x)^2+6\times2^x-a<0$ …… ㉠

이 부등식의 해가 $x<3$이어야 하므로

$2^x<2^3 \quad \therefore 2^x-8<0$ …… ㉡

이때, ㉠, ㉡에서

$(2^x)^2+6\times2^x-a=(2^x-8)(2^x+14)<0$

$\therefore a=112$

답 112

176

두 함수 $y=2^x-3$, $y=2^{-x+2}-24$의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표를 각각 $A(\alpha,0)$, $B(\beta,0)$이라 하면

$2^\alpha-3=0$에서 $2^\alpha=3$

$2^{-\beta+2}-24=0$에서 $4\times2^{-\beta}=24$

$2^{-\beta}=6 \quad \therefore 2^\beta=\frac{1}{6}$

가

이때, 선분 AB의 길이가 l이므로

$l=\alpha-\beta\ (\because \alpha>\beta)$

$\therefore 2^l=2^{\alpha-\beta}=\frac{2^\alpha}{2^\beta}=\frac{3}{\frac{1}{6}}=18$

나

단계	채점 요소	비율
가	$A(\alpha,0)$, $B(\beta,0)$으로 놓고 2^α, 2^β의 값 구하기	50%
나	2^l의 값 구하기	50%

답 18

177

$4^x-2^{x+3}+a>0$에서 $(2^x)^2-8\times2^x+a>0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 부등식은

$t^2-8t+a>0$

가

$\therefore (t-4)^2+a-16>0$ …… ㉠

나

위의 부등식이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 성립하려면 ㉠에서 $t=4$일 때 최솟값 $a-16$을 가지므로

$a-16>0 \quad \therefore a>16$

따라서 정수 a의 최솟값은 17이다.

다

단계	채점 요소	비율
가	주어진 부등식을 $2^x=t\ (t>0)$로 치환하여 나타내기	20%
나	t에 대한 이차부등식을 변형하기	30%
다	정수 a의 최솟값 구하기	50%

답 17

04 로그함수

개념 콕콕

본문 p.37~38

178

(1) $3-x>0$에서 $x<3$

따라서 정의역은 $\{x \mid x<3\}$

(2) $2x>0$에서 $x>0$

따라서 정의역은 $\{x \mid x>0\}$

답 (1) $\{x \mid x<3\}$ (2) $\{x \mid x>0\}$

179

(1) 주어진 함수는 $\{x \mid x$는 실수$\}$에서 $\{y \mid y>0\}$으로의 일대일대응이다.

$y=10^x$에서 $x=\log y$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $y=\log x\ (x>0)$

(2) 주어진 함수는 $\{x \mid x$는 실수$\}$에서 $\{y \mid y>0\}$으로의 일대일대응이다.

$y=2^{x-1}$에서 $x-1=\log_2 y$ $\quad\therefore x=\log_2 y+1$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $y=\log_2 x+1\ (x>0)$

(3) 주어진 함수는 $\{x \mid x>1\}$에서 $\{y \mid y$는 실수$\}$로의 일대일대응이다.

$y=\log(x-1)$에서 $x-1=10^y$ $\quad\therefore x=10^y+1$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $y=10^x+1$

(4) 주어진 함수는 $\{x \mid x>0\}$에서 $\{y \mid y$는 실수$\}$로의 일대일대응이다.

$y=\log_{\frac{1}{2}} x+2$에서 $y-2=\log_{\frac{1}{2}} x$ $\quad\therefore x=\left(\frac{1}{2}\right)^{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$

답 (1) $y=\log x\ (x>0)$ (2) $y=\log_2 x+1\ (x>0)$ (3) $y=10^x+1$ (4) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$

180

(1) $f(1)=\log_3 1=0$

(2) $f(3)=\log_3 3=1$

(3) $f\left(\frac{1}{3}\right)=\log_3 \frac{1}{3}=-1$

(4) $f(\sqrt{3})=\log_3 \sqrt{3}=\log_3 3^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

답 (1) 0 (2) 1 (3) -1 (4) $\frac{1}{2}$

181

ㄱ. 정의역은 양의 실수 전체의 집합이다. (거짓)

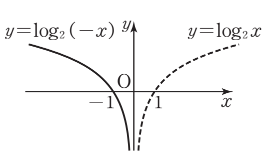
ㄹ. x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

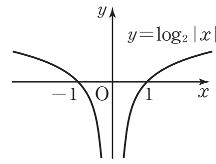
182

(1) $y=\log_2(-x)$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

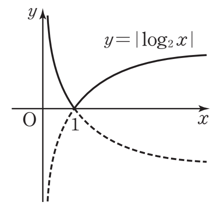


(2) $y=\log_2|x|=\begin{cases}\log_2 x & (x>0)\\ \log_2(-x) & (x<0)\end{cases}$이므로

함수 $y=\log_2|x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(3) $y=|\log_2 x|=\begin{cases}\log_2 x & (x\geq 1)\\ -\log_2 x & (0<x<1)\end{cases}$이므로 함수 $y=|\log_2 x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



보충 설명

(2) 함수 $y=\log_2|x|$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 그린 후 $x>0$인 부분은 그대로 두고, $x<0$인 부분은 $x>0$인 부분을 직선 $x=0$ (y축)에 대하여 대칭이동하여 그리면 된다.

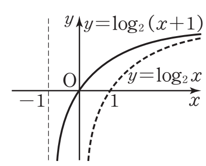
(3) 함수 $y=|\log_2 x|$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 그린 후 $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분은 직선 $y=0$ (x축)에 대하여 대칭이동하여 그리면 된다.

답 풀이 참조

183

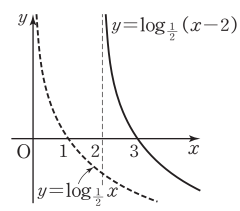
(1) $y=\log_2(x+1)$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 점근선의 방정식은 $x=-1$이다.



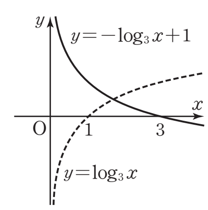
(2) $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-2)$의 그래프는 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 점근선의 방정식은 $x=2$이다.



(3) $y=-\log_3 x+1$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

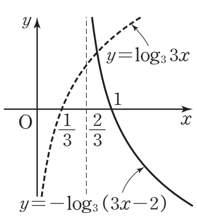
따라서 점근선의 방정식은 $x=0$이다.



(4) $y=-\log_3(3x-2)=-\log_3 3\left(x-\frac{2}{3}\right)$에서

$y=-\log_3(3x-2)$의 그래프는 $y=\log_3 3x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $\frac{2}{3}$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 점근선의 방정식은 $x=\frac{2}{3}$이다.



답 풀이 참조

184

(1) $2\log_2 3=\log_2 3^2=\log_2 9$

함수 $y=\log_2 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로

$\log_2 7 < \log_2 9$　　$\therefore \log_2 7 < 2\log_2 3$

(2) $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 9 = \log_{\frac{1}{3}} 9^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{3}} 3$

함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$\log_{\frac{1}{3}} 4 < \log_{\frac{1}{3}} 3$　　$\therefore \log_{\frac{1}{3}} 4 < \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 9$

답 (1) $\log_2 7 < 2\log_2 3$　(2) $\log_{\frac{1}{3}} 4 < \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 9$

185

(1) 함수 $y=\log_2 x$에서

$x=1$일 때, $y=\log_2 1=0$

$x=32$일 때, $y=\log_2 32=5$

따라서 최댓값은 5, 최솟값은 0이다.

(2) 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} (x+1)$에서

$x=-\frac{1}{2}$일 때, $y=\log_{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2}+1\right)=1$

$x=3$일 때, $y=\log_{\frac{1}{2}} (3+1)=-2$

따라서 최댓값은 1, 최솟값은 -2이다.

(3) 함수 $y=-\log_3 (x-1)+2$에서

$x=4$일 때, $y=-\log_3 (4-1)+2=1$

$x=28$일 때, $y=-\log_3 (28-1)+2=-1$

따라서 최댓값은 1, 최솟값은 -1이다.

답 (1) 최댓값 : 5, 최솟값 : 0　(2) 최댓값 : 1, 최솟값 : -2
(3) 최댓값 : 1 최솟값 : -1

186

(1) 진수의 조건에서

$3x-1>0$　　$\therefore x>\frac{1}{3}$　　…… ㉠

$\log_2 (3x-1)=3$에서 $3x-1=2^3$

$3x=9$　　$\therefore x=3$

$x=3$은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

(2) 진수의 조건에서

$x-1>0$　　$\therefore x>1$　　…… ㉠

$\log_{\frac{1}{3}} (x-1)=2$에서 $x-1=\left(\frac{1}{3}\right)^2$　　$\therefore x=\frac{10}{9}$

$x=\frac{10}{9}$은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

(3) 밑의 조건에서

$4x>0,\ 4x\neq 1$　　$\therefore x>0,\ x\neq\frac{1}{4}$　　…… ㉠

$\log_{4x} 4=2$에서 $(4x)^2=4$

$4x=-2$ 또는 $4x=2$　　$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

이때, ㉠에 의하여 $x=\frac{1}{2}$

(4) 밑의 조건에서

$x+1>0,\ x+1\neq 1$　　$\therefore x>-1,\ x\neq 0$　　…… ㉠

$\log_{x+1} 16=2$에서 $(x+1)^2=16$

$x+1=-4$ 또는 $x+1=4$　　$\therefore x=-5$ 또는 $x=3$

이때, ㉠에 의하여 $x=3$

답 (1) $x=3$　(2) $x=\frac{10}{9}$　(3) $x=\frac{1}{2}$　(4) $x=3$

187

(1) 진수의 조건에서

$2x-1>0,\ x+3>0$　　$\therefore x>\frac{1}{2}$　　…… ㉠

$\log_2 (2x-1)=\log_2 (x+3)$에서

$2x-1=x+3$　　$\therefore x=4$

$x=4$는 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

(2) 진수의 조건에서

$x>0,\ x-3>0$　　$\therefore x>3$　　…… ㉠

$\log_4 x+\log_4 (x-3)=1$에서

$\log_4 x(x-3)=1,\ x(x-3)=4,\ x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$　　$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

이때, ㉠에 의하여 $x=4$

(3) 진수의 조건에서

$x-1>0,\ x+2>0$　　$\therefore x>1$　　…… ㉠

$\log (x-1)=1-\log (x+2)$에서

$\log (x-1)+\log (x+2)=1$

$\log (x-1)(x+2)=1$

$(x-1)(x+2)=10,\ x^2+x-12=0$

$(x+4)(x-3)=0$　　$\therefore x=-4$ 또는 $x=3$

이때, ㉠에 의하여 $x=3$

(4) 진수의 조건에서

$x+1>0,\ x+3>0$　　$\therefore x>-1$　　…… ㉠

$2\log_{\frac{1}{3}} (x+1)=\log_{\frac{1}{3}} (x+3)$에서

$\log_{\frac{1}{3}} (x+1)^2=\log_{\frac{1}{3}} (x+3)$

즉, $(x+1)^2=x+3$이므로 $x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$　　$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

이때, ㉠에 의하여 $x=1$

답 (1) $x=4$　(2) $x=4$　(3) $x=3$　(4) $x=1$

188

(1) 진수의 조건에서

$x>0,\ 2x-1>0$　　$\therefore x>\frac{1}{2}$　　…… ㉠

$\log_2 x=\log_4 (2x-1)$에서

$\log_2 x=\frac{1}{2}\log_2 (2x-1)$

$2\log_2 x=\log_2 (2x-1)$

$\log_2 x^2=\log_2 (2x-1)$

즉, $x^2=2x-1$이므로 $x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$　　$\therefore x=1$

$x=1$은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

(2) 진수의 조건에서

$2x-5>0,\ x-2>0$　　$\therefore x>\frac{5}{2}$　　…… ㉠

$\log_9 (2x-5)=\log_3 (x-2)$에서

$\frac{1}{2}\log_3 (2x-5)=\log_3 (x-2)$

$\log_3 (2x-5)=2\log_3 (x-2)$

$\log_3 (2x-5)=\log_3 (x-2)^2$

즉, $2x-5=(x-2)^2$이므로 $x^2-6x+9=0$

$(x-3)^2=0$　　$\therefore x=3$

$x=3$은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

답 (1) $x=1$　(2) $x=3$

189

(1) 진수의 조건에서 $x>0$ ...... ㉠

$\log_2 x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-2t-8=0$, $(t+2)(t-4)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=4$

즉, $\log_2 x=-2$ 또는 $\log_2 x=4$이므로

$x=2^{-2}=\frac{1}{4}$ 또는 $x=2^4=16$

$x=\frac{1}{4}$, $x=16$은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

(2) 진수의 조건에서 $x>0$ ...... ㉠

$\log x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$(t+1)(t-5)=-8$, $t^2-4t+3=0$

$(t-1)(t-3)=0$ $\quad\therefore t=1$ 또는 $t=3$

즉, $\log x=1$ 또는 $\log x=3$이므로

$x=10$ 또는 $x=10^3=1000$

$x=10$, $x=1000$은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

답 (1) $x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=16$ (2) $x=10$ 또는 $x=1000$

190

(1) 진수의 조건에서

$x+3>0$ $\quad\therefore x>-3$ ...... ㉠

$\log_2(x+3)<2$에서 $\log_2(x+3)<\log_2 2^2$

밑이 1보다 크므로

$x+3<4$ $\quad\therefore x<1$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-3<x<1$

(2) 진수의 조건에서 $x>0$ ...... ㉠

$2\log_2 x<4$에서 $\log_2 x^2<\log_2 2^4$

밑이 1보다 크므로

$x^2<16$ $\quad\therefore -4<x<4$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x<4$

(3) $x^2+5x+8=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$이므로 진수는 항상 양수이다.

$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+5x+8)>-3$에서

$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+5x+8)>\log_{\frac{1}{2}} 8$

밑이 1보다 작으므로

$x^2+5x+8<8$, $x^2+5x<0$

$x(x+5)<0$ $\quad\therefore -5<x<0$

(4) 진수의 조건에서

$x-1>0$ $\quad\therefore x>1$ ...... ㉠

$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)>2$에서

$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)>\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^2$

밑이 1보다 작으므로

$x-1<\frac{1}{9}$ $\quad\therefore x<\frac{10}{9}$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$1<x<\frac{10}{9}$

답 (1) $-3<x<1$ (2) $0<x<4$
(3) $-5<x<0$ (4) $1<x<\frac{10}{9}$

191

(1) 진수의 조건에서

$2x>0$, $x+1>0$ $\quad\therefore x>0$ ...... ㉠

$\log_2 2x<\log_2(x+1)$에서 밑이 1보다 크므로

$2x<x+1$ $\quad\therefore x<1$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x<1$

(2) 진수의 조건에서

$2x-1>0$, $3x+1>0$ $\quad\therefore x>\frac{1}{2}$ ...... ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)>\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)$에서 밑이 1보다 작으므로

$2x-1<3x+1$ $\quad\therefore x>-2$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$x>\frac{1}{2}$

(3) 진수의 조건에서

$x>0$, $2-x>0$ $\quad\therefore 0<x<2$ ...... ㉠

$\log_{\frac{1}{3}} x\le\log_{\frac{1}{3}}(2-x)$에서 밑이 1보다 작으므로

$x\ge 2-x$, $2x\ge 2$ $\quad\therefore x\ge 1$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$1\le x<2$

(4) 진수의 조건에서

$x>0$, $4x+5>0$ $\quad\therefore x>0$ ...... ㉠

$2\log_3 x\ge\log_3(4x+5)$에서 $\log_3 x^2\ge\log_3(4x+5)$

밑이 1보다 크므로

$x^2\ge 4x+5$, $x^2-4x-5\ge 0$

$(x+1)(x-5)\ge 0$ $\quad\therefore x\le -1$ 또는 $x\ge 5$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$x\ge 5$

답 (1) $0<x<1$ (2) $x>\frac{1}{2}$ (3) $1\le x<2$ (4) $x\ge 5$

192

(1) 진수의 조건에서

$x>0$, $x+2>0$ $\quad\therefore x>0$ ...... ㉠

$\log_2 x+\log_2(x+2)<3$에서 $\log_2 x(x+2)<\log_2 2^3$

밑이 1보다 크므로

$x(x+2)<8$, $x^2+2x-8<0$

$(x+4)(x-2)<0$ $\quad\therefore -4<x<2$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x<2$

(2) 진수의 조건에서

$x-1>0$, $x-16>0$ $\quad\therefore x>16$ ...... ㉠

$\log(x-1)+\log(x-16)\ge 2$에서

$\log(x-1)(x-16)\ge\log 10^2$

밑이 1보다 크므로

$(x-1)(x-16)\ge 100$, $x^2-17x-84\ge 0$

$(x+4)(x-21)\ge 0$ $\quad\therefore x\le -4$ 또는 $x\ge 21$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$x\ge 21$

답 (1) $0<x<2$ (2) $x\ge 21$

193

(1) 진수의 조건에서 $x>0$ ...... ㉠

$\log_2 x=t$로 놓으면 주어진 부등식은

$t^2-5t>6$, $t^2-5t-6>0$

$(t+1)(t-6)>0$ $\quad\therefore t<-1$ 또는 $t>6$

즉, $\log_2 x<-1$ 또는 $\log_2 x>6$이므로

$\log_2 x<\log_2 \frac{1}{2}$ 또는 $\log_2 x>\log_2 2^6$

밑이 1보다 크므로 $x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>64$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>64$

(2) 진수의 조건에서 $x>0$ ...... ㉠

$(\log_5 x)^2-\log_5 x^3\le 0$에서

$(\log_5 x)^2-3\log_5 x\le 0$

$\log_5 x=t$로 놓으면 주어진 부등식은

$t^2-3t\le 0$, $t(t-3)\le 0$

$\therefore 0\le t\le 3$

즉, $0\le \log_5 x\le 3$이므로

$\log_5 1\le \log_5 x\le \log_5 5^3$

밑이 1보다 크므로 $1\le x\le 125$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$1\le x\le 125$

답 (1) $0<x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>64$ (2) $1\le x\le 125$

유형 콕콕 본문 p.39~45

194 ③	195 ㄱ, ㄴ, ㄷ		196 ㄷ	197 ⑤	
198 ㄱ, ㄴ, ㄹ		199 1	200 ⑤	201 ④	202 67
203 ②	204 ③	205 0	206 2	207 ④	
208 $-\frac{1}{2}$	209 ⑤	210 2	211 2	212 ②	213 ④
214 $C<A<B$		215 ⑤	216 ③	217 2	218 ④
219 1	220 ⑤	221 ②	222 ④	223 12	
224 $x=4$ 또는 $x=8$		225 2	226 3		
227 $x=\frac{1}{100}$ 또는 $x=10$			228 ③	229 ④	230 3
231 10	232 6	233 ③	234 7	235 ②	
236 15 %	237 ③				

194

③ $y=\log_a \frac{1}{x}=-\log_a x$이고 $a>1$이므로 $x>0$에서 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

답 ③

195

ㄱ. 일대일함수이므로 $x_1\ne x_2$이면 $f(x_1)\ne f(x_2)$이다. (참)

ㄴ. 밑이 1보다 크므로 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$이다. (참)

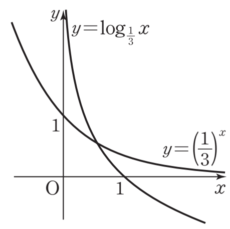
ㄷ. $y=\log_{\frac{1}{5}} x=-\log_5 x$이므로 $y=\log_5 x$의 그래프는 $y=\log_{\frac{1}{5}} x$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

196

ㄱ. 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프는 점 $\left(3, \frac{1}{27}\right)$을 지나고, 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$의 그래프는 점 $(3, -1)$을 지나므로 두 그래프의 교점의 좌표는 $(3, 3)$이 아니다. (거짓)



ㄴ. 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프와 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 모두 제3사분면을 지나지 않는다. (거짓)

ㄷ. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$과 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$는 서로 역함수 관계이므로 두 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ㄷ

197

$y=\log_3(3x-6)=\log_3 3(x-2)=\log_3(x-2)+1$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m=2$, $n=1$이므로

$m+n=2+1=3$

답 ⑤

198

ㄱ. $y=\log(x-10)$의 그래프는 $y=\log x$의 그래프를 x축의 방향으로 10만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=\log 10x=\log x+1$의 그래프는 $y=\log x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=2\log x=\log x^2$이므로 $y=\log x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.

ㄹ. $y=\log(-x)$의 그래프는 $y=\log x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 함수 $y=\log x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

199

함수 $y=\log_3 9x$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면

$y=\log_3 9x-2=\log_3 9x-\log_3 3^2=\log_3 \frac{9x}{9}=\log_3 x$

$\therefore y=\log_3 x$

가

이 함수의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면

$-y=\log_3 x$, $y=-\log_3 x$ $\quad\therefore y=\log_3 \frac{1}{x}$

나

$\therefore a=1$

다

단계	채점 요소	비율
가	주어진 함수의 그래프를 평행이동한 식 나타내기	40%
나	가에서 구한 함수의 그래프를 대칭이동한 식 나타내기	40%
다	a의 값 구하기	20%

답 1

200

$\log_2 a=1$이므로 $a=2$

$\log_2 b=2$이므로 $b=4$

따라서 $a-b=2-4=-2$이므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^{a-b}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$

답 ⑤

201

$\overline{\mathrm{OA}}=\log_2 a$, $\overline{\mathrm{OB}}=\log_2 b$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{OB}}-\overline{\mathrm{OA}}=\log_2 b-\log_2 a=\log_2 \frac{b}{a}$

따라서 $\log_2 \frac{b}{a}=4$이므로 $\frac{b}{a}=2^4=16$

답 ④

202

$2^a=8$이므로 $2^a=2^3$ $\therefore a=3$

또한 $\log_4 b=a$, 즉 $\log_4 b=3$에서

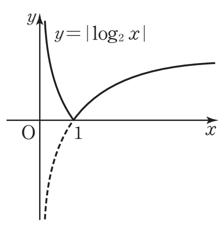
$b=4^3=64$

$\therefore a+b=3+64=67$

답 67

203

$y=|\log_2 x|=\begin{cases}\log_2 x & (x\ge 1)\\ -\log_2 x & (0<x<1)\end{cases}$

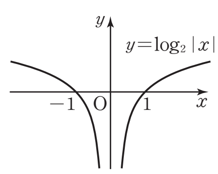


이므로 함수 $y=|\log_2 x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

ㄱ. $y=|\log_2 x|$의 그래프는 x축에 대하여 대칭이 아니다. (거짓)

ㄴ. 양수 a에 대하여 직선 $y=a$와 서로 다른 두 점에서 만난다. (참)

ㄷ. $y=\log_2 |x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $y=\log_2 |x|$의 그래프는 $y=|\log_2 x|$의 그래프와 y축에 대하여 대칭이 아니다. (거짓)



따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

204

① 함수 $y=\log_5 |x-3|$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면

$-y=\log_5 |x-3|$, $y=-\log_5 |x-3|$

$\therefore y=\log_{\frac{1}{5}} |x-3|$

② 함수 $y=\log_5 |x-3|$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면

$y=\log_5 |-x-3|$

$\therefore y=\log_5 |x+3|$

③ 함수 $y=\log_5 |x-3|$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동하면

$-y=\log_5 |-x-3|$, $y=-\log_5 |x+3|$

$\therefore y=\log_{\frac{1}{5}} |x+3|$

④ 함수 $y=\log_5 |x-3|$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$x=\log_5 |y-3|$, $|y-3|=5^x$, $y-3=\pm 5^x$

$\therefore y=\pm 5^x+3$

⑤ 함수 $y=\log_5 |x-3|$의 그래프를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동하면

$-x=\log_5 |-y-3|$, $-x=\log_5 |y+3|$

$|y+3|=5^{-x}$, $y+3=\pm\left(\frac{1}{5}\right)^x$

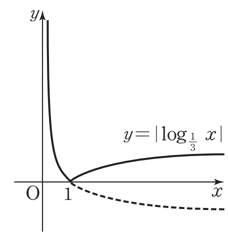
$\therefore y=\pm\left(\frac{1}{5}\right)^x-3$

따라서 옳은 것은 ③이다.

답 ③

205

$y=|\log_{\frac{1}{3}} x|=\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}} x & (0<x<1)\\ -\log_{\frac{1}{3}} x & (x\ge 1)\end{cases}$



이므로 함수 $y=|\log_{\frac{1}{3}} x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

함수 $y=|\log_{\frac{1}{3}} x|$의 정의역은 $\{x\,|\,x>0\}$, 그래프의 점근선의 방정식은 $x=0$이므로

$a=0$, $b=0$

$\therefore a+b=0$

답 0

206

$y=\log_3 (x-2)+1$에서

$y-1=\log_3 (x-2)$, $x-2=3^{y-1}$

$\therefore x=3^{y-1}+2$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=3^{x-1}+2$

따라서 $a=1$, $b=-1$, $c=2$이므로

$a+b+c=1+(-1)+2=2$

답 2

207

$y=\log_4 x$로 놓으면 $x=4^y$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=4^x$

따라서 $g(x)=4^x$이므로 $g(\alpha)=\frac{1}{3}$, $g(\beta)=\frac{1}{2}$에서

$4^\alpha=\frac{1}{3}$, $4^\beta=\frac{1}{2}$

$\therefore g(\alpha-\beta)=4^{\alpha-\beta}=\frac{4^\alpha}{4^\beta}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$

답 ④

208

$y=\frac{1}{3}\log_2 x-4$로 놓으면

$y+4=\frac{1}{3}\log_2 x$, $3(y+4)=\log_2 x$

$\therefore x=2^{3(y+4)}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=2^{3(x+4)}$

$\therefore g(x)=2^{3(x+4)}$ …… ㉠

한편, 함수 $f(x)=\frac{1}{3}\log_2 x-4$에서 x 대신 $2x+1$을 대입하면

$f(2x+1)=\frac{1}{3}\log_2 (2x+1)-4$

이때, $y=\frac{1}{3}\log_2 (2x+1)-4$로 놓으면

$y+4=\frac{1}{3}\log_2(2x+1)$, $3(y+4)=\log_2(2x+1)$, $2x+1=2^{3(y+4)}$

$\therefore x=\frac{1}{2}\{2^{3(y+4)}-1\}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{2}\{2^{3(x+4)}-1\}$

㉠에 의하여 $y=\frac{1}{2}\{g(x)-1\}$

즉, 함수 $f(2x+1)$의 역함수는

$\frac{1}{2}\{g(x)-1\}$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-1$이므로

$a+b=\frac{1}{2}+(-1)=-\frac{1}{2}$

다른 풀이

$y=f(2x+1)$로 놓고, x와 y를 서로 바꾸면 $x=f(2y+1)$

$\therefore f^{-1}(x)=2y+1$

이때, $f^{-1}(x)=g(x)$이므로

$2y+1=g(x)$, $y=\frac{1}{2}\{g(x)-1\}$

즉, 함수 $f(2x+1)$의 역함수는

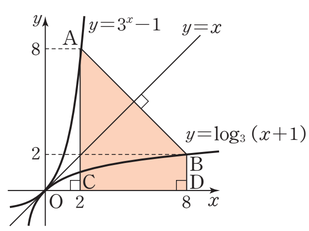
$\frac{1}{2}\{g(x)-1\}$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-1$이므로

$a+b=\frac{1}{2}+(-1)=-\frac{1}{2}$

답 $-\frac{1}{2}$

209



두 함수 $y=3^x-1$, $y=\log_3(x+1)$은 서로 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

이때, 직선 AB의 기울기와 직선 $y=x$의 기울기의 곱은 -1이다. 즉, 직선 AB와 직선 $y=x$는 수직으로 만나므로 점 B는 점 A$(2, 8)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

$\therefore$ B$(8, 2)$

사각형 ACDB에서

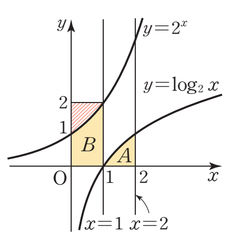
$\overline{AC}=8$, $\overline{BD}=2$, $\overline{CD}=8-2=6$

따라서 구하는 사각형 ACDB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(8+2)\times6=30$

답 ⑤

210



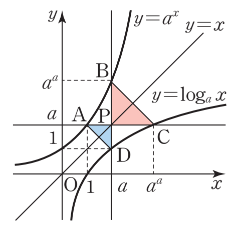
두 함수 $y=2^x$과 $y=\log_2 x$는 서로 역함수이므로 오른쪽 그림에서 빗금친 부분의 넓이는 A와 같다.

따라서 색칠한 부분의 넓이의 합은 가로, 세로의 길이가 각각 1, 2인 직사각형의 넓이와 같으므로

$A+B=1\times2=2$

답 2

211



$a^x=a$에서 $x=1$이므로 A$(1, a)$

$y=a^x$에서 $x=a$를 대입하면 $y=a^a$이므로

B(a, a^a)

$\log_a x=a$에서 $x=a^a$이므로 C(a^a, a)

$y=\log_a x$에 $x=a$를 대입하면 $y=1$이므로

D$(a, 1)$

삼각형 ADP의 넓이가 $\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times(a-1)\times(a-1)=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore (a-1)^2=1$

$a-1=1$ ($\because a>1$) $\quad\therefore a=2$

즉, A$(1, 2)$, B$(2, 4)$, C$(4, 2)$, D$(2, 1)$이므로 삼각형 BPC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(4-2)\times(4-2)=2$

답 2

212

$A=3=\log_2 2^3=\log_2 8$

$B=\log_4 36=\log_{2^2} 6^2=\log_2 6$

$C=\frac{1}{2}\log_2 65=\log_2 65^{\frac{1}{2}}=\log_2\sqrt{65}$

이때, 함수 $y=\log_2 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고,

$6<8<\sqrt{65}$이므로 $\log_2 6<\log_2 8<\log_2\sqrt{65}$

$\therefore B<A<C$

답 ②

213

$A=-\log_9\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}\log_3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\log_3\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=\log_3 2$

$B=\log_3\sqrt{3}$

$C=\frac{1}{2}\log_3 6=\log_3 6^{\frac{1}{2}}=\log_3\sqrt{6}$

이때, 함수 $y=\log_3 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고,

$\sqrt{3}<2<\sqrt{6}$이므로 $\log_3\sqrt{3}<\log_3 2<\log_3\sqrt{6}$

$\therefore B<A<C$

답 ④

214

$1<x<a$의 각 변에 밑이 a $(a>1)$인 로그를 취하면

$\log_a 1<\log_a x<\log_a a$

$\therefore 0<\log_a x<1$

(i) $0<\log_a x<1$의 각 변에 $\log_a x$를 곱하면 $\log_a x>0$이므로

$0<(\log_a x)^2<\log_a x$ $\quad\therefore C<A$

(ii) $B=\log_x a=\frac{1}{\log_a x}$이고, $0<\log_a x<1$에서 $\frac{1}{\log_a x}>1$

즉, $\log_a x<1<\frac{1}{\log_a x}$이므로 $A<B$

(i), (ii)에서 $C<A<B$

다른 풀이

$1<x<a$의 각 변에 밑이 a $(a>1)$인 로그를 취하면

$\log_a 1<\log_a x<\log_a a$

$\therefore 0<\log_a x<1$

(i) $A-C=\log_a x-(\log_a x)^2=\log_a x(1-\log_a x)$

$0<\log_a x<1$이므로 $1-\log_a x>0$

즉, $A-C>0$이므로

$A>C$

(ii) $B=\log_x a=\dfrac{1}{\log_a x}$이고, $0<\log_a x<1$에서 $\dfrac{1}{\log_a x}>1$

즉, $\log_a x<1<\dfrac{1}{\log_a x}$이므로 $A<B$

(i), (ii)에서 $C<A<B$ 답 $C<A<B$

215

$f(x)=-x^2+4x+4$라 하면 $f(x)=-(x-2)^2+8$

$0\le x\le 4$에서 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값 8, $x=0$ (또는 $x=4$)일 때 최솟값 4를 가진다.

$y=\log_2 f(x)$에서 밑이 1보다 크므로 $f(x)$가 최소일 때 y는 최솟값을 가지고, $f(x)$가 최대일 때 y는 최댓값을 가진다.

$f(x)=4$일 때, $y=\log_2 4=\log_2 2^2=2$

$f(x)=8$일 때, $y=\log_2 8=\log_2 2^3=3$

따라서 y의 최댓값은 3, 최솟값은 2이므로 구하는 값은

$3+2=5$ 답 ⑤

216

$f(x)=x^2-2x+a$라 하면 $f(x)=(x-1)^2+a-1$

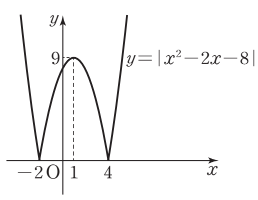
$y=\log_{\frac{1}{2}} f(x)$에서 밑이 1보다 작으므로 $f(x)$가 최소일 때 y는 최댓값 1을 가진다.

이때, $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 $a-1$을 가지므로

$\log_{\frac{1}{2}}(a-1)=1$에서 $a-1=\dfrac{1}{2}$

$\therefore a=\dfrac{3}{2}$ 답 ③

217



$f(x)=|x^2-2x-8|$이라 하면

$f(x)=|x^2-2x-8|$

$\quad=|(x+2)(x-4)|$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$y=\log_3 f(x)$에서 밑이 1보다 크므로 $f(x)$가 최대일 때 y는 최댓값을 가진다.

즉, $-1\le x\le 5$에서 $f(x)=|(x-1)^2-9|$는 $x=1$일 때 최댓값 9를 가지므로 구하는 함수의 최댓값은

$\log_3 9=\log_3 3^2=2$ 답 2

218

$\log_2 x=t$로 놓으면 $1\le x\le 8$에서

$\log_2 1\le \log_2 x\le \log_2 8 \qquad \therefore 0\le t\le 3$

이때, 주어진 함수는 $y=t^2-2t+2=(t-1)^2+1$

따라서 y는 $t=3$일 때 최댓값 5, $t=1$일 때 최솟값 1을 가지므로

$M=5,\ m=1$

$\therefore M+m=5+1=6$ 답 ④

219

$y=(\log_3 x)^2+a\log_9 x^2+b$에서

$y=(\log_3 x)^2+a\log_3 x+b$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $y=t^2+at+b$ …… ㉠

함수 ㉠이 $x=3$, 즉 $t=1$일 때 최솟값 2를 가지므로

$y=(t-1)^2+2=t^2-2t+3$ …… ㉡

㉠, ㉡이 일치해야 하므로 $a=-2,\ b=3$

$\therefore a+b=-2+3=1$ 답 1

220

$y=3^{2\log x}-(x^{\log 3}+3^{\log x})+5$에서

$y=(3^{\log x})^2-2\times 3^{\log x}+5 \ (\because x^{\log 3}=3^{\log x})$

$3^{\log x}=t\ (t>0)$로 놓으면

$y=t^2-2t+5=(t-1)^2+4$

따라서 y는 $t=1$일 때 최솟값 4를 가지므로 $b=4$

한편, $3^{\log x}=1$에서 $\log x=0$, 즉 $x=1$이다.

$\therefore a=1$

$\therefore a+b=1+4=5$ 답 ⑤

221

진수의 조건에서

$x+1>0,\ 2x-1>0 \qquad \therefore x>\dfrac{1}{2}$ …… ㉠

$\log_3(x+1)=3\log_3 2+\log_3(2x-1)$에서

$\log_3(x+1)=\log_3 8(2x-1)$

즉, $x+1=8(2x-1)$이므로

$x+1=16x-8,\ 15x=9 \qquad \therefore x=\dfrac{3}{5}$

$x=\dfrac{3}{5}$은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다. 답 ②

222

밑과 진수의 조건에서

$x^2+2>0,\ x^2+2\ne 1,\ x+4>0,\ x+4\ne 1,\ x+1>0$

$\therefore x>-1$ …… ㉠

(i) $x^2+2=x+4$일 때

$x^2-x-2=0,\ (x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

이때, ㉠에 의하여 $x=2$

(ii) $x+1=1$일 때, $x=0$

$x=0$은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

(i), (ii)에서 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 모든 근의 합은

$0+2=2$ 답 ④

223

진수의 조건에서

$x-3>0,\ y+1>0 \qquad \therefore x>3,\ y>-1$ …… ㉠

$x+y-8=0$에서 $y=-x+8$

이 식을 $\log_2(x-3)=\log_2(y+1)$에 대입하면

$\log_2(x-3)=\log_2(-x+9)$

즉, $x-3=-x+9$이므로 $x=6$

$\therefore y=-6+8=2$

$x=6,\ y=2$는 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

따라서 $a=6,\ b=2$이므로

$ab=6\times 2=12$ 답 12

224

진수의 조건에서

$x>0,\ x^5>0 \qquad \therefore x>0$ …… ㉠

$(\log_2 x)^2+6=\log_2 x^5$에서

$(\log_2 x)^2+6=5\log_2 x$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2+6=5t,\ t^2-5t+6=0$

$(t-2)(t-3)=0 \qquad \therefore t=2$ 또는 $t=3$

즉, $\log_2 x=2$ 또는 $\log_2 x=3$이므로

$x=2^2=4$ 또는 $x=2^3=8$

$x=4,\ x=8$은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

답 $x=4$ 또는 $x=8$

225

방정식 $(\log_2 x)^2-k\log_2 x-8=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

$\alpha\beta=4$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2-kt-8=0$

이 이차방정식의 두 근이 $\log_2 \alpha,\ \log_2 \beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 \alpha+\log_2 \beta=k,\ \log_2 \alpha\beta=k$

$\therefore k=\log_2 4=\log_2 2^2=2$

답 2

226

진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$x^{\log_3 x}=9x$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x}=\log_3 9x$

$\log_3 x\times\log_3 x=\log_3 9+\log_3 x$

$(\log_3 x)^2-\log_3 x-2=0$

$\log_3 x=t$로 놓으면 $t^2-t-2=0$

$(t+1)(t-2)=0 \qquad \therefore t=-1$ 또는 $t=2$

즉, $\log_3 x=-1$ 또는 $\log_3 x=2$이므로

$x=3^{-1}=\frac{1}{3}$ 또는 $x=3^2=9$

$x=\frac{1}{3},\ x=9$는 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 모든 근의 곱은

$\frac{1}{3}\times 9=3$

답 3

227

진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

가

$10x^{1-\log x}=\frac{x^2}{10}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 10x^{1-\log x}=\log\frac{x^2}{10}$

$\log 10+(1-\log x)\log x=2\log x-\log 10$

$1+\log x-(\log x)^2=2\log x-1$

$\therefore (\log x)^2+\log x-2=0$

나

이때, $\log x=t$로 놓으면

$t^2+t-2=0,\ (t+2)(t-1)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=1$

다

즉, $\log x=-2$ 또는 $\log x=1$이므로

$x=10^{-2}=\frac{1}{100}$ 또는 $x=10$

$x=\frac{1}{100},\ x=10$은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다.

라

단계	채점 요소	비율
가	진수의 조건 나타내기	10%
나	방정식의 양변에 상용로그를 취하여 방정식 정리하기	40%
다	$\log x=t$로 치환하여 t에 대한 이차방정식의 해 구하기	30%
라	x의 값 구하기	20%

답 $x=\frac{1}{100}$ 또는 $x=10$

228

진수의 조건에서

$x-2>0,\ x+1>0 \qquad \therefore x>2$ …… ㉠

$\log_2(x-2)+\log_2(x+1)<2$에서

$\log_2(x-2)(x+1)<\log_2 4$

밑이 1보다 크므로

$(x-2)(x+1)<4,\ x^2-x-6<0$

$(x+2)(x-3)<0 \qquad \therefore -2<x<3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2<x<3$

따라서 $\alpha=2,\ \beta=3$이므로

$\alpha+\beta=2+3=5$

답 ③

229

진수의 조건에서 $x+2>0,\ 8-x>0$

$\therefore -2<x<8$ …… ㉠

$\log_2(x+2)+\log_2(8-x)>a$에서

$\log_2(x+2)(8-x)>\log_2 2^a$

이때, 밑이 1보다 크므로 $(x+2)(8-x)>2^a$

$x^2-6x+2^a-16<0$ …… ㉡

한편, 주어진 부등식의 해가 $0<x<6$이고 $0<x<6$이 ㉠에 포함되므로 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$x^2-6x<0$ …… ㉢

㉡, ㉢이 일치해야 하므로

$2^a-16=0,\ 2^a=16=2^4$

$\therefore a=4$

답 ④

230

진수의 조건에서

$x+2>0,\ 6x+12>0 \qquad \therefore x>-2$ …… ㉠

$2^{x+4}>8=2^3$에서 밑이 1보다 크므로

$x+4>3 \qquad \therefore x>-1$ …… ㉡

$2\log(x+2)<\log(6x+12)$에서

$\log(x+2)^2<\log(6x+12)$

밑이 1보다 크므로

$(x+2)^2<6x+12,\ x^2-2x-8<0$

$(x+2)(x-4)<0 \qquad \therefore -2<x<4$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통 범위를 구하면

$-1<x<4$

따라서 $\alpha=-1,\ \beta=4$이므로

$\alpha+\beta=-1+4=3$

답 3

231

진수의 조건에서 $x>0$, $x^4>0$ $\quad\therefore x>0$ …… ㉠

$(\log_2 x)^2+3\le\log_2 x^4$에서 $(\log_2 x)^2+3\le 4\log_2 x$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2+3\le 4t$, $t^2-4t+3\le 0$

$(t-1)(t-3)\le 0$ $\quad\therefore 1\le t\le 3$

즉, $1\le\log_2 x\le 3$이므로 $\log_2 2\le\log_2 x\le\log_2 2^3$

밑이 1보다 크므로

$2\le x\le 2^3$ $\quad\therefore 2\le x\le 8$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$2\le x\le 8$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=8$이므로

$\alpha+\beta=2+8=10$

답 10

232

$(\log_2 x)^2+a\log_2 x+b>0$에서

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2+at+b>0$ …… ㉠

이때, $0<x<\frac{1}{4}$ 또는 $x>8$에서

$\log_2 x<-2$ 또는 $\log_2 x>3$

$\therefore t<-2$ 또는 $t>3$

해가 $t<-2$ 또는 $t>3$이고 t^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(t+2)(t-3)>0$ $\quad\therefore t^2-t-6>0$ …… ㉡

㉠, ㉡이 일치해야 하므로 $a=-1$, $b=-6$

$\therefore ab=(-1)\times(-6)=6$

답 6

233

진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$x^{\log_2 x}<16x^3$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 x}<\log_2 16x^3$

$\log_2 x\times\log_2 x<\log_2 16+\log_2 x^3$

$\therefore (\log_2 x)^2-3\log_2 x-4<0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-3t-4<0$, $(t+1)(t-4)<0$

$\therefore -1<t<4$

즉, $-1<\log_2 x<4$이므로

$\log_2 2^{-1}<\log_2 x<\log_2 2^4$

밑이 1보다 크므로

$\frac{1}{2}<x<16$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$\frac{1}{2}<x<16$

답 ③

234

진수의 조건에서 $x-1>0$ $\quad\therefore x>1$ …… ㉠

$(x-1)^{\log_4(x-1)}+1<x$, 즉 $(x-1)^{\log_4(x-1)}<x-1$에서

양변에 밑이 4인 로그를 취하면

$\log_4(x-1)^{\log_4(x-1)}<\log_4(x-1)$

$\log_4(x-1)\times\log_4(x-1)<\log_4(x-1)$

$\log_4(x-1)=t$로 놓으면 $t^2<t$

$t^2-t<0$, $t(t-1)<0$

$\therefore 0<t<1$

즉, $0<\log_4(x-1)<1$이므로

$\log_4 1<\log_4(x-1)<\log_4 4$

밑이 1보다 크므로 $1<x-1<4$

$\therefore 2<x<5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2<x<5$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 3, 4이므로 구하는 합은

$3+4=7$

답 7

235

$M_1=-2.81\log 50-1.43$

$M_2=-2.81\log 5-1.43$

$$\begin{aligned}\therefore M_2-M_1&=-2.81\log 5-1.43-(-2.81\log 50-1.43)\\&=-2.81\log 5-1.43+2.81(1+\log 5)+1.43\\&=2.81\end{aligned}$$

답 ②

236

농산물 A의 원산지 가격을 a, 인상되는 가격의 일정한 비율을 r라 하면

$a(1+r)^3=1.52a$, $(1+r)^3=1.52$

양변에 상용로그를 취하면

$\log(1+r)^3=\log 1.52$, $3\log(1+r)=0.1818$

$\therefore \log(1+r)=0.0606$

$\log 1.15=0.0606$이므로

$1+r=1.15$

$\therefore r=0.15$

따라서 유통과정을 한 번만 거친 농산물 A의 소비자 가격은 원산지 가격보다 약 15 % 인상된 것이다.

답 15 %

237

n년 후의 노트북의 가격은

$1000000\times(1-0.15)^n=0.85^n\times 1000000$(원)

n년 후에 노트북의 가격이 10만 원 이하가 된다고 하면

$0.85^n\times 1000000\le 100000$ $\quad\therefore 0.85^n\le\frac{1}{10}$

양변에 상용로그를 취하면 $n\log 0.85\le -1$

$n(\log 8.5-1)\le -1$, $n(0.9294-1)\le -1$

$-0.0706n\le -1$ $\quad\therefore n\ge 14.1\times\times\times$

따라서 15년 후에 노트북의 가격이 처음으로 10만 원 이하가 된다.

답 ③

실력 콕콕 본문 p.46~47

238 ④	239 ②	240 63	241 ②	242 ③	243 ①
244 ④	245 ③	246 ②	247 ①	248 ④	249 ⑤
250 504	251 1	252 12	253 $\frac{1}{81}$		

238

함수 $y=\log_a(x+b)$의 그래프에서 x의 값이 증가할 때, y의 값은 감소하므로 $0<a<1$

한편, 점 $(1,\ 0)$을 지나는 함수 $y=\log_a x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동한 함수 $y=\log_a(x+b)$의 그래프는 $x<0$인 부분에서 x축과 만나므로

$1-b<0\qquad \therefore b>1$

함수 $y=\log_b(x+a)$의 그래프는 함수 $y=\log_b x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a\ (-1<-a<0)$만큼 평행이동한 것이다.

또한 $b>1$이므로 함수 $y=\log_b(x+a)$는 x의 값이 증가할 때, y의 값이 증가하는 함수이다.

이때, $x=-a+1$일 때 $y=0$이고, $0<a<1$에서 $-1<-a<0$, 즉 $0<-a+1<1$이므로 함수 $y=\log_b(x+a)$의 그래프는 x축과 $0<x<1$에서 만난다.

따라서 함수 $y=\log_b(x+a)$의 그래프는 ④이다.

답 ④

239

점 A의 x좌표를 a라 하면 두 점 A, C의 좌표는 각각

$\mathrm{A}(a,\ \log_2 a),\ \mathrm{C}(a,\ \log_{\frac{1}{2}} a)$

점 B의 y좌표가 $\log_2 a$이므로 점 B의 x좌표는

$\log_{\frac{1}{2}} x=\log_2 a$에서 $x=\dfrac{1}{a}$

즉, 점 B의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{a},\ \log_2 a\right)$이다.

이때, $\overline{\mathrm{AC}}=4$에서

$\overline{\mathrm{AC}}=\log_2 a-\log_{\frac{1}{2}} a=2\log_2 a=4$

$\therefore a=4$

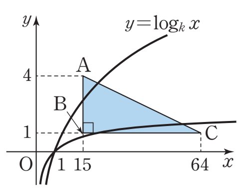
따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=a-\dfrac{1}{a}=4-\dfrac{1}{4}=\dfrac{15}{4}$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{15}{4}\times 4=\dfrac{15}{2}$

답 ②

240

함수 $y=\log_k x$의 그래프가 삼각형 ABC와 만나려면 오른쪽 그림과 같이 $k>1$이어야 하고, 함수 $y=\log_k x$의 그래프가 선분 AC와 만나야 한다.



(i) 함수 $y=\log_k x$의 그래프가 점 A(15, 4)를 지날 때

$\log_k 15=4$이므로 $k^4=15$

$\therefore k=\sqrt[4]{15}$

(ii) 함수 $y=\log_k x$의 그래프가 점 C(64, 1)을 지날 때

$\log_k 64=1$이므로 $k=64$

(i), (ii)에서 자연수 k의 값의 범위는 $2\le k\le 64\ (\because 1<\sqrt[4]{15}<2)$

따라서 자연수 k의 개수는

$64-2+1=63$

답 63

241

$g(2)=k$라 하면 $f(k)=2$이므로

$\log_6(k^5+4)=2,\ k^5+4=6^2$

$k^5=32\qquad \therefore k=2$

즉, $g(2)=2$이므로

$(g\circ g\circ g)(2)=g(g(g(2)))$

$=g(g(2))$

$=g(2)=2$

답 ②

242

역함수 관계인 두 함수의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위의 점이다.

즉, 두 교점의 x좌표가 1, 3이므로 교점의 좌표는 $(1,\ 1),\ (3,\ 3)$이다.

$f(1)=1$에서 $\log_a 1+m=1$이므로 $m=1$

$f(3)=3$에서 $\log_a 3+m=3$이므로 $\log_a 3+1=3$

$\log_a 3=2,\ a^2=3$

$\therefore a=\sqrt{3}\ (\because a>0)$

$\therefore a+m=\sqrt{3}+1$

답 ③

243

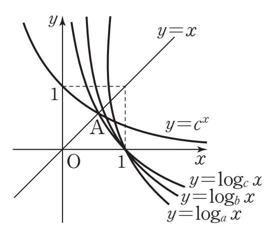
(i) $x=2$일 때, $\log_a 2<\log_b 2<0$이므로

$\dfrac{1}{\log_2 a}<\dfrac{1}{\log_2 b}<0$

즉, $\log_2 b<\log_2 a\qquad \therefore b<a$

(ii) 함수 $y=c^x$의 역함수 $y=\log_c x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=c^x$의 그래프와 직선 $y=x$ 위의 점 A에서 만난다.

(i)과 마찬가지 방법으로 $c<b$이다.



(i), (ii)에서 $c<b<a$

답 ①

244

$a<b<1$의 각 변에 밑이 $a\ (0<a<1)$인 로그를 취하면

$\log_a a>\log_a b>\log_a 1\qquad \therefore 0<\log_a b<1$ …… ㉠

이때, $\log_a \dfrac{b}{a}=\log_a b-\log_a a=\log_a b-1<0$이므로

$\log_a \dfrac{b}{a}<0$ …… ㉡

또한 $a<b<1$의 각 변에 밑이 $b\ (0<b<1)$인 로그를 취하면

$\log_b a>\log_b b>\log_b 1\qquad \therefore \log_b a>1$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여 $\log_a \dfrac{b}{a}<\log_a b<\log_b a$

$\therefore C<A<B$

답 ④

245

$f(x)=\log_2 x^{-1}=-\log_2 x=\log_{\frac{1}{2}} x$이므로

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x+a)$

이때, $(f\circ g)(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x+a)$에서 밑이 1보다 작으므로

$g(x)=x^2-2x+a$가 최소일 때 $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x+a)$는 최대이다.

$g(x)=x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1$

이므로 $g(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 $a-1$을 가진다.

따라서 $(f\circ g)(x)$의 최댓값은 $\log_{\frac{1}{2}}(a-1)=-3$이므로

$a-1=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}=8$

$\therefore a=9$

즉, $g(x)=x^2-2x+9=(x-1)^2+8$이므로

$g(3)=2^2+8=12$ 답 ③

246

$(\log_2 9x)(\log_2 x)=2$에서

$(2\log_2 3+\log_2 x)(\log_2 x)=2$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t(2\log_2 3+t)=2,\ t^2+2t\log_2 3-2=0$ …… ㉠

이차방정식 ㉠의 두 근은 $\log_2 \alpha$, $\log_2 \beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 \alpha+\log_2 \beta=-2\log_2 3,\ \log_2 \alpha\beta=\log_2 \frac{1}{9}$

$\therefore\ \alpha\beta=\frac{1}{9}$ 답 ②

247

밑과 진수의 조건에서 $x>0,\ x\neq 1$ …… ㉠

$2\log_3 x+3\log_x 3-7=0$에서

$2\log_3 x+\frac{3}{\log_3 x}-7=0$

$\log_3 x=t\ (t\neq 0)$로 놓으면

$2t+\frac{3}{t}-7=0,\ 2t^2-7t+3=0$

$(2t-1)(t-3)=0 \qquad \therefore\ t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=3$

즉, $\log_3 x=\frac{1}{2}$ 또는 $\log_3 x=3$이므로

$x=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$ 또는 $x=3^3=27$

$x=\sqrt{3}$, $x=27$은 ㉠을 만족시키므로 구하는 해이다. 답 ①

248

진수의 조건에서 $x>0,\ y>0$

연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=25 & \cdots\cdots ㉠ \\ \log_2 x+\log_2 y=(\log_2 xy)^2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$에서

㉠은 중심의 좌표가 $(0,\ 0)$이고 반지름의 길이가 5인 원이다.

㉡을 정리하면

$\log_2 xy=(\log_2 xy)^2,\ \log_2 xy(1-\log_2 xy)=0$

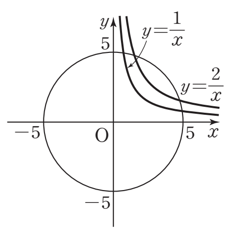
$\therefore\ \log_2 xy=0$ 또는 $\log_2 xy=1$

$\log_2 xy=0$에서 $xy=1$

$\log_2 xy=1$에서 $xy=2$

$\therefore\ y=\frac{1}{x}$ 또는 $y=\frac{2}{x}$ …… ㉢

따라서 ㉠, ㉢을 좌표평면에 나타내면 오른쪽 그림과 같이 서로 다른 4개의 점에서 만나므로 주어진 연립방정식의 해의 개수는 4이다.



답 ④

249

진수의 조건에서

$x^2>0,\ |x|>0 \qquad \therefore\ x\neq 0$ …… ㉠

$|x|^2=x^2$이므로

$\log_2 x^2-\log_2 |x|\le 3$에서

$\log_2 |x|^2-\log_2 |x|\le 3$

$2\log_2 |x|-\log_2 |x|\le 3$

$\log_2 |x|\le 3,\ |x|\le 2^3$

$\therefore\ -8\le x\le 8$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-8\le x<0$ 또는 $0<x\le 8$

따라서 구하는 정수 x는 $\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \cdots,\ \pm8$의 16개이다.

다른 풀이

(i) $x>0$일 때, $\log_2 x^2-\log_2 x\le 3$

$\log_2 x\le 3 \qquad \therefore\ 0<x\le 8$

(ii) $x<0$일 때, $\log_2 x^2-\log_2 (-x)\le 3$

$\log_2 (-x)\le 3 \qquad \therefore\ -8\le x<0$

(i), (ii)에서 $-8\le x\le 8\ (x\neq 0)$이므로 구하는 정수 x는 $\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \cdots,\ \pm8$의 16개이다. 답 ⑤

250

$3^{2x}+a\times 3^x+b<0$의 해가 $1<x<2$이므로 $3^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$3<t<9$이다. 즉, 이차방정식 $t^2+at+b=0$의 두 근이 3, 9이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$3+9=-a,\ 3\times 9=b$

$\therefore\ a=-12,\ b=27$

이때, 부등식 $(\log_2 x)^2+a\log_2 x+b<0$에서

$(\log_2 x)^2-12\log_2 x+27<0$

$\log_2 x=s$로 놓으면

$s^2-12s+27<0,\ (s-3)(s-9)<0 \qquad \therefore\ 3<s<9$

즉, $3<\log_2 x<9$이므로

$\log_2 2^3<\log_2 x<\log_2 2^9$

$\therefore\ 8<x<512$

따라서 $\alpha=8,\ \beta=512$이므로

$\beta-\alpha=512-8=504$ 답 504

251

진수의 조건에서

$x-1>0,\ \frac{1}{2}x+k>0$이므로

$x>1$이고 $x>-2k$

자연수 k에 대하여 $-2k<1$이므로

$x>1$ …… ㉠

$\log_5 (x-1)\le\log_5\left(\frac{1}{2}x+k\right)$에서

밑이 1보다 크므로

$x-1\le\frac{1}{2}x+k \qquad \therefore\ x\le 2(k+1)$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$1<x\le 2(k+1)$

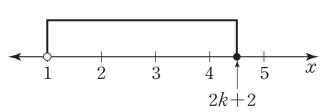
이때, 정수 x의 개수가 3이므로

$2(k+1)-1=2k+1=3$

$\therefore\ k=1$

보충 설명

정수 x의 개수는 수직선을 이용하여 구할 수도 있다.



$1<x\le 2(k+1)$을 만족시키는 정수 x의 개수가 3이므로

$4\le 2k+2<5,\ 2\le 2k<3$

$\therefore 1 \le k < \frac{3}{2}$

따라서 구하는 자연수 k는 1이다. 답 1

252

$\log x = t$로 놓으면

$(\log x)^2 - 4\log x + 1 = 0$에서 $t^2 - 4t + 1 = 0$ …… ㉠

$(\log x)^2 - a\log x + b = 0$에서 $t^2 - at + b = 0$ …… ㉡

가

이차방정식 ㉠의 두 근은 $\log \alpha$, $\log \beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log \alpha + \log \beta = 4$, $\log \alpha \times \log \beta = 1$

나

또한 이차방정식 ㉡의 두 근은 $\log \alpha^2$, $\log \beta^2$, 즉 $2\log \alpha$, $2\log \beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a = 2\log \alpha + 2\log \beta = 2(\log \alpha + \log \beta) = 2 \times 4 = 8$

$b = 2\log \alpha \times 2\log \beta = 4\log \alpha \times \log \beta = 4 \times 1 = 4$

$\therefore a + b = 8 + 4 = 12$

다

단계	채점 요소	비율
가	주어진 두 방정식을 $\log x = t$로 치환하여 나타내기	30%
나	$\log \alpha + \log \beta$와 $\log \alpha \times \log \beta$의 값 구하기	30%
다	$a+b$의 값 구하기	40%

답 12

253

주어진 부등식의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x} \ge \log_3 kx^4$

$(\log_3 x)^2 - 4\log_3 x - \log_3 k \ge 0$

가

$\log_3 x = t$로 놓으면

$t^2 - 4t - \log_3 k \ge 0$ …… ㉠

부등식 ㉠이 모든 실수 t에 대하여 항상 성립하므로

이차방정식 $t^2 - 4t - \log_3 k = 0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = (-2)^2 + \log_3 k \le 0$

$4 + \log_3 k \le 0$, $\log_3 k \le -4$

$\therefore 0 < k \le \frac{1}{81}$

나

따라서 양수 k의 최댓값은 $\frac{1}{81}$이다.

다

단계	채점 요소	비율
가	부등식의 양변에 밑이 3인 로그를 취하여 부등식 정리하기	40%
나	k의 값의 범위 구하기	40%
다	양수 k의 최댓값 구하기	20%

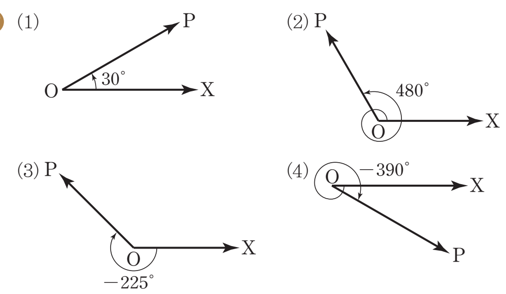
답 $\frac{1}{81}$

05 삼각함수

개념 콕콕 본문 p.51~52

254

답



255

답 (1) $360° \times n + 150°$ (n은 정수)

(2) $360° \times n + 220°$ (n은 정수)

256

(1) $510° = 360° \times 1 + 150°$이므로

$360° \times n + 150°$ (n은 정수)

(2) $1110° = 360° \times 3 + 30°$이므로

$360° \times n + 30°$ (n은 정수)

(3) $-850° = 360° \times (-3) + 230°$이므로

$360° \times n + 230°$ (n은 정수)

(4) $-1320° = 360° \times (-4) + 120°$이므로

$360° \times n + 120°$ (n은 정수)

답 (1) $360° \times n + 150°$ (n은 정수)

(2) $360° \times n + 30°$ (n은 정수)

(3) $360° \times n + 230°$ (n은 정수)

(4) $360° \times n + 120°$ (n은 정수)

257

(1) $500° = 360° \times 1 + 140°$

따라서 $500°$는 제2사분면의 각이다.

(2) $-440° = 360° \times (-2) + 280°$

따라서 $-440°$는 제4사분면의 각이다.

(3) $1300° = 360° \times 3 + 220°$

따라서 $1300°$는 제3사분면의 각이다.

(4) $-690° = 360° \times (-2) + 30°$

따라서 $-690°$는 제1사분면의 각이다.

답 (1) 제2사분면 (2) 제4사분면 (3) 제3사분면 (4) 제1사분면

258

(1) $135° = 135 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3}{4}\pi$

(2) $-150° = -150 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{5}{6}\pi$

(3) $-240° = -240 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{4}{3}\pi$

(4) $270° = 270 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3}{2}\pi$

답 (1) $\frac{3}{4}\pi$ (2) $-\frac{5}{6}\pi$ (3) $-\frac{4}{3}\pi$ (4) $\frac{3}{2}\pi$

259

(1) $\frac{5}{4}\pi = \frac{5}{4}\pi \times \frac{180°}{\pi} = 225°$

(2) $-\frac{2}{3}\pi = -\frac{2}{3}\pi \times \frac{180°}{\pi} = -120°$

(3) $-\frac{3}{5}\pi = -\frac{3}{5}\pi \times \frac{180°}{\pi} = -108°$

(4) $\frac{5}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi \times \frac{180°}{\pi} = 150°$

답 (1) $225°$ (2) $-120°$ (3) $-108°$ (4) $150°$

260

답 (1) $2n\pi + \frac{\pi}{3}$ (n은 정수)

(2) $2n\pi + \frac{3}{4}\pi$ (n은 정수)

261

(1) $l = 6 \times \frac{2}{3}\pi = 4\pi$

$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 4\pi = 12\pi$

(2) $36° = 36 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{5}$이므로

$l = 10 \times \frac{\pi}{5} = 2\pi$

$S = \frac{1}{2} \times 10 \times 2\pi = 10\pi$

답 (1) $l = 4\pi$, $S = 12\pi$ (2) $l = 2\pi$, $S = 10\pi$

262

부채꼴의 반지름의 길이가 3, 호의 길이가 $\frac{3}{4}\pi$이므로

$\frac{3}{4}\pi = 3\theta \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{4}$

$\therefore S = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3}{4}\pi = \frac{9}{8}\pi$

답 $\theta = \frac{\pi}{4}$, $S = \frac{9}{8}\pi$

263

$12 = \frac{1}{2} \times r \times 8$이므로 $r = 3$

따라서 $8 = 3\theta$이므로 $\theta = \frac{8}{3}$

답 $r = 3$, $\theta = \frac{8}{3}$

264

$\overline{OP} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$이므로

(1) $\sin\theta = \frac{4}{5}$

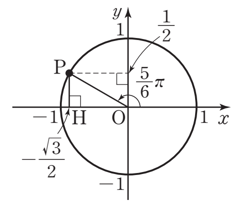
(2) $\cos\theta = -\frac{3}{5}$

(3) $\tan\theta = -\frac{4}{3}$

답 (1) $\frac{4}{5}$ (2) $-\frac{3}{5}$ (3) $-\frac{4}{3}$

265

(1) 오른쪽 그림과 같이 각 $\frac{5}{6}\pi$를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\angle POH = \frac{\pi}{6}$이므로

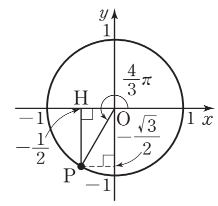
$P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$\therefore \sin\theta = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$

$\cos\theta = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

(2) 오른쪽 그림과 같이 각 $\frac{4}{3}\pi$를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\angle POH = \frac{\pi}{3}$이므로

$P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\therefore \sin\theta = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\theta = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}$

$\tan\theta = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

답 (1) $\sin\theta = \frac{1}{2}$, $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

(2) $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, $\tan\theta = \sqrt{3}$

266

(1) $\theta = 400° = 360° \times 1 + 40°$에서 θ는 제1사분면의 각이므로

$\sin\theta > 0$, $\cos\theta > 0$, $\tan\theta > 0$

(2) $\theta = \frac{14}{5}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{4}{5}\pi$에서 θ는 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta > 0$, $\cos\theta < 0$, $\tan\theta < 0$

(3) $\theta = -480° = 360° \times (-2) + 240°$에서 θ는 제3사분면의 각이므로

$\sin\theta < 0$, $\cos\theta < 0$, $\tan\theta > 0$

(4) $\theta = -\frac{7}{3}\pi = 2\pi \times (-2) + \frac{5}{3}\pi$에서 θ는 제4사분면의 각이므로

$\sin\theta < 0$, $\cos\theta > 0$, $\tan\theta < 0$

답 (1) $\sin\theta > 0$, $\cos\theta > 0$, $\tan\theta > 0$

(2) $\sin\theta > 0$, $\cos\theta < 0$, $\tan\theta < 0$

(3) $\sin\theta < 0$, $\cos\theta < 0$, $\tan\theta > 0$

(4) $\sin\theta < 0$, $\cos\theta > 0$, $\tan\theta < 0$

267

(1) $\sin\theta<0$인 것은 제3사분면과 제4사분면이고, $\cos\theta>0$인 것은 제1사분면과 제4사분면이므로 θ는 제4사분면의 각이다.

(2) $\sin\theta>0$인 것은 제1사분면과 제2사분면이고, $\tan\theta<0$인 것은 제2사분면과 제4사분면이므로 θ는 제2사분면의 각이다.

답 (1) 제4사분면 (2) 제2사분면

268

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta+\left(-\frac{3}{5}\right)^2=1 \qquad \therefore \sin^2\theta=\frac{16}{25}$

이때, θ가 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$

$\therefore \sin\theta=-\frac{4}{5},\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$

답 $\sin\theta=-\frac{4}{5},\ \tan\theta=\frac{4}{3}$

269

$1+\tan^2\theta=1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$이고

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서 $1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$이므로

$(1+\tan^2\theta)(1-\sin^2\theta)=\frac{1}{\cos^2\theta}\times\cos^2\theta=1$

답 1

270

$$\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$$
$$=\frac{\cos\theta(1+\sin\theta)+\cos\theta(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$$
$$=\frac{\cos\theta+\cos\theta\sin\theta+\cos\theta-\cos\theta\sin\theta}{1-\sin^2\theta}$$
$$=\frac{2\cos\theta}{\cos^2\theta}$$
$$=\frac{2}{\cos\theta}$$

답 $\frac{2}{\cos\theta}$

271

(1) $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$

(2) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=(\sin\theta-\cos\theta)^2+4\sin\theta\cos\theta$

$=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+4\times\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$

이때, θ가 제1사분면의 각이므로 $\sin\theta>0,\ \cos\theta>0$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{15}}{3}$

답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{\sqrt{15}}{3}$

272

(1) $\sin 750^\circ=\sin(360^\circ\times2+30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$

(2) $\cos\frac{25}{6}\pi=\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan\frac{9}{4}\pi=\tan\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) 1

273

(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos 315^\circ=\cos(360^\circ-45^\circ)=\cos(-45^\circ)=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\tan\frac{23}{6}\pi=\tan\left(4\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

답 (1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

274

(1) $\sin\frac{5}{6}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

(2) $\cos\frac{5}{4}\pi=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\tan 240^\circ=\tan(180^\circ+60^\circ)=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\sqrt{3}$

유형 콕콕

본문 p.53~57

275 ④	**276** ㄱ, ㄷ, ㄹ		**277** 제2사분면 또는 제4사분면		
278 제1사분면 또는 제3사분면			**279** ③	**280** ④	
281 144°	**282** ⑤	**283** ㄱ, ㄴ, ㄹ		**284** 48	**285** 144
286 ⑤	**287** ④	**288** -2	**289** ①	**290** ①	
291 $\frac{5}{2}\pi$	**292** ④	**293** ④	**294** ㄱ, ㄴ	**295** ②	**296** ①
297 $\frac{1-2\sqrt{2}}{3}$		**298** ③	**299** $\frac{\sqrt{2}}{2}$	**300** ①	
301 $\frac{\sqrt{5}}{2}$	**302** ④	**303** ⑤	**304** ②	**305** ④	**306** ④
307 $\frac{89}{2}$					

275

① $420^\circ=360^\circ\times1+60^\circ$

② $780^\circ=360^\circ\times2+60^\circ$

③ $-300^\circ=360^\circ\times(-1)+60^\circ$

④ $-420^\circ=360^\circ\times(-2)+300^\circ$

⑤ $-660^\circ=360^\circ\times(-2)+60^\circ$

따라서 동경 OP가 나타내는 각이 될 수 없는 것은 ④이다.

답 ④

276

ㄱ. $-960° = 360° \times (-3) + 120°$

ㄴ. $1680° = 360° \times 4 + 240°$

ㄷ. $840° = 360° \times 2 + 120°$

ㄹ. $-1680° = 360° \times (-5) + 120°$

따라서 $120°$를 나타내는 동경과 일치하는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

277

2θ가 제3사분면의 각이므로 정수 n에 대하여

$360° \times n + 180° < 2\theta < 360° \times n + 270°$

$\therefore 180° \times n + 90° < \theta < 180° \times n + 135°$

(i) $n = 2k$ (k는 정수)일 때,

$180° \times 2k + 90° < \theta < 180° \times 2k + 135°$

$\therefore 360° \times k + 90° < \theta < 360° \times k + 135°$

따라서 θ는 제2사분면의 각이다.

(ii) $n = 2k+1$(k는 정수)일 때,

$180° \times (2k+1) + 90° < \theta < 180° \times (2k+1) + 135°$

$\therefore 360° \times k + 270° < \theta < 360° \times k + 315°$

따라서 θ는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

답 제2사분면 또는 제4사분면

278

θ가 제2사분면의 각이므로 정수 n에 대하여

$360° \times n + 90° < \theta < 360° \times n + 180°$

$\therefore 180° \times n + 45° < \frac{\theta}{2} < 180° \times n + 90°$

(i) $n = 2k$ (k는 정수)일 때,

$180° \times 2k + 45° < \frac{\theta}{2} < 180° \times 2k + 90°$

$\therefore 360° \times k + 45° < \frac{\theta}{2} < 360° \times k + 90°$

따라서 $\frac{\theta}{2}$는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n = 2k+1$ (k는 정수)일 때,

$180° \times (2k+1) + 45° < \frac{\theta}{2} < 180° \times (2k+1) + 90°$

$\therefore 360° \times k + 225° < \frac{\theta}{2} < 360° \times k + 270°$

따라서 $\frac{\theta}{2}$는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 $\frac{\theta}{2}$는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

다른 풀이

θ가 제2사분면의 각이므로 정수 n에 대하여

$\theta = 360° \times n + \alpha°$ $(90° < \alpha° < 180°)$

$\therefore \frac{\theta}{2} = 180° \times n + \frac{\alpha°}{2}$ $\left(45° < \frac{\alpha°}{2} < 90°\right)$

(i) $n = 2k$ (k는 정수)일 때,

$\frac{\theta}{2} = 180° \times 2k + \frac{\alpha°}{2} = 360° \times k + \frac{\alpha°}{2}$

따라서 $\frac{\theta}{2}$는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n = 2k+1$ (k는 정수)일 때,

$\frac{\theta}{2} = 180° \times (2k+1) + \frac{\alpha°}{2} = 360° \times k + \left(180° + \frac{\alpha°}{2}\right)$

$\left(\because 225° < 180° + \frac{\alpha°}{2} < 270°\right)$

따라서 $\frac{\theta}{2}$는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 $\frac{\theta}{2}$는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

답 제1사분면 또는 제3사분면

279

각 θ를 나타내는 동경과 각 7θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$7\theta - \theta = 360° \times n$ (n은 정수)

$6\theta = 360° \times n$

$\therefore \theta = 60° \times n$ …… ㉠

$90° < \theta < 180°$에서 $90° < 60° \times n < 180°$이므로

$\frac{3}{2} < n < 3$

n은 정수이므로 $n = 2$

$n = 2$를 ㉠에 대입하면 $\theta = 120°$

답 ③

280

각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$\theta + 5\theta = 360° \times n$ (n은 정수)

$6\theta = 360° \times n$

$\therefore \theta = 60° \times n$ …… ㉠

$0° < \theta < 90°$에서 $0° < 60° \times n < 90°$이므로

$0 < n < \frac{3}{2}$

n은 정수이므로 $n = 1$

$n = 1$을 ㉠에 대입하면 $\theta = 60°$

답 ④

281

각 θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이므로

$\theta + 4\theta = 360° \times n + 180°$ (n은 정수)

$5\theta = 360° \times n + 180°$

$\therefore \theta = 72° \times n + 36°$ …… ㉠

가

$0° < \theta < 180°$에서 $0° < 72° \times n + 36° < 180°$이므로

$-\frac{1}{2} < n < 2$

n은 정수이므로 $n = 0, 1$

이 값들을 ㉠에 대입하면 $\theta = 36°, 108°$

나

따라서 구하는 모든 각 θ의 크기의 합은

$36° + 108° = 144°$

다

단계	채점 요소	비율
가	θ를 정수 n에 대한 식으로 나타내기	40%
나	각 θ의 크기 구하기	40%
다	모든 각 θ의 크기의 합 구하기	20%

답 $144°$

282

① $210^\circ=210\times\frac{\pi}{180}=\frac{7}{6}\pi$

② $120^\circ=120\times\frac{\pi}{180}=\frac{2}{3}\pi$

③ $\frac{4}{5}\pi=\frac{4}{5}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=144^\circ$

④ $\frac{7}{12}\pi=\frac{7}{12}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=105^\circ$

⑤ $\frac{7}{4}\pi=\frac{7}{4}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=315^\circ$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

283

ㄱ. $24^\circ=24\times\frac{\pi}{180}=\frac{2}{15}\pi$ (참)

ㄴ. $\frac{4}{9}\pi=\frac{4}{9}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=80^\circ$ (참)

ㄷ. $\frac{2}{3}$라디안$=\frac{2}{3}\times\frac{180^\circ}{\pi}=\frac{120^\circ}{\pi}$ (거짓)

ㄹ. 2라디안$=2\times\frac{180^\circ}{\pi}=\frac{360^\circ}{\pi}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

284

부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 호의 길이가 $\frac{2}{3}r$이므로 부채꼴의 둘레의 길이는

$2r+\frac{2}{3}r=32$, $\frac{8}{3}r=32$ $\quad\therefore r=12$

따라서 구하는 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\times12^2\times\frac{2}{3}=48$ 답 48

285

부채꼴의 호의 길이가 6π이므로

$6\pi=a\times\frac{\pi}{6}$ $\quad\therefore a=36$

따라서 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}\times36\times6\pi=108\pi$ $\quad\therefore b=108$

$\therefore a+b=36+108=144$ 답 144

286

$\overline{OP}=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$이므로

$\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\tan\theta=-\frac{1}{3}$

$\therefore \sqrt{10}(\sin\theta+\cos\theta)-3\tan\theta$

$=\sqrt{10}\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{3}{\sqrt{10}}\right)-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)$

$=2+1=3$ 답 ⑤

287

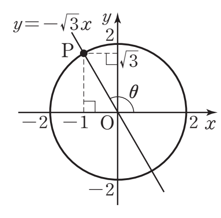
점 $P(-12, a)$에서 $\tan\theta=-\frac{a}{12}$이므로 $-\frac{a}{12}=-\frac{3}{4}$ $\quad\therefore a=9$

또한 $r=\overline{OP}=\sqrt{(-12)^2+9^2}=15$

$\therefore a+r=9+15=24$ 답 ④

288

오른쪽 그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원을 그리고, 이 원이 직선 $y=-\sqrt{3}x$와 만나는 점 중에서 제2사분면 위의 점을 P라 하면



$P(-1, \sqrt{3})$

$\overline{OP}=2$이므로

$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{1}{2}$, $\tan\theta=-\sqrt{3}$ ㉮

$\therefore 2\sin\theta+4\cos\theta+\tan\theta=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+4\times\left(-\frac{1}{2}\right)+(-\sqrt{3})=-2$ ㉯

단계	채점 요소	비율
㉮	$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값 구하기	80%
㉯	$2\sin\theta+4\cos\theta+\tan\theta$의 값 구하기	20%

답 -2

289

(i) $\sin\theta\cos\theta>0$에서 $\sin\theta$와 $\cos\theta$의 부호가 서로 같으므로 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(ii) $\sin\theta\tan\theta>0$에서 $\sin\theta$와 $\tan\theta$의 부호가 서로 같으므로 θ는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ는 제1사분면의 각이다. 답 ①

290

θ가 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

따라서 $1+\sin\theta>0$, $1-\cos\theta>0$이므로

$\sqrt{\sin^2\theta}-\sqrt{(1+\sin\theta)^2}+\sqrt{(1-\cos\theta)^2}$

$=|\sin\theta|-|1+\sin\theta|+|1-\cos\theta|$

$=\sin\theta-(1+\sin\theta)+1-\cos\theta$

$=-\cos\theta$ 답 ①

291

$\sqrt{\sin\theta}\sqrt{\cos\theta}=-\sqrt{\sin\theta\cos\theta}$이고 $\sin\theta\cos\theta\neq0$이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$

즉, θ는 제3사분면의 각이므로 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$ ㉮

$\therefore a=\pi$, $b=\frac{3}{2}\pi$ ㉯

$\therefore a+b=\pi+\frac{3}{2}\pi=\frac{5}{2}\pi$ ㉰

단계	채점 요소	비율
㉮	θ의 크기의 범위 구하기	80%
㉯	a, b의 값 구하기	10%
㉰	$a+b$의 값 구하기	10%

답 $\frac{5}{2}\pi$

292

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+(1+\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta+1+2\cos\theta+\cos^2\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$$
$$=\frac{2+2\cos\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$$
$$=\frac{2(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$$
$$=\frac{2}{\sin\theta}$$

답 ④

293

$0<\sin\theta<\cos\theta$이므로

$\sin\theta+\cos\theta>0$, $\sin\theta-\cos\theta<0$

$\therefore \sqrt{1+2\sin\theta\cos\theta}-\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}$

$=\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}-\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta}$

$=\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}-\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}$

$=|\sin\theta+\cos\theta|-|\sin\theta-\cos\theta|$

$=(\sin\theta+\cos\theta)+(\sin\theta-\cos\theta)$

$=2\sin\theta$

답 ④

294

ㄱ. $\cos^4\theta-\sin^4\theta$

$=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

$=\cos^2\theta-\sin^2\theta$ (참)

ㄴ. $\dfrac{1+2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta-\cos^2\theta}+\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta-\cos^2\theta}+\frac{1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2}{(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)}+\frac{\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}+\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$$

$=0$ (참)

ㄷ. $\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}+\dfrac{\tan\theta-1}{\tan\theta+1}$

$$=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}+\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+1}$$

$$=\frac{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}+\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}+\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$$

$=0$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

295

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$이므로

$\sin^2\theta=1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2=\frac{144}{169}$

이때, θ가 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta=-\frac{12}{13}$

$$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}}=\frac{12}{5}$$

$$\therefore \frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\tan\theta}=-\frac{13}{12}+\frac{5}{12}=-\frac{2}{3}$$

답 ②

296

$4\tan\theta=\cos\theta$에서

$4\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\cos\theta$ $\quad\therefore 4\sin\theta=\cos^2\theta$

이때, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$이므로

$4\sin\theta=1-\sin^2\theta$

$\sin^2\theta+4\sin\theta-1=0$

$\therefore \sin\theta=-2\pm\sqrt{5}$

그런데 θ가 제1사분면의 각이므로

$\sin\theta=-2+\sqrt{5}$

답 ①

297

$\frac{1}{3+\tan\theta}=3-2\sqrt{2}$에서

$$3+\tan\theta=\frac{1}{3-2\sqrt{2}}=\frac{3+2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}=3+2\sqrt{2}$$

$\therefore \tan\theta=2\sqrt{2}$

이때, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$의 양변을 $\cos^2\theta$로 나누면

$\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$

$\frac{1}{\cos^2\theta}=(2\sqrt{2})^2+1=9$

$\therefore \cos^2\theta=\frac{1}{9}$

그런데 θ가 제3사분면의 각이므로 $\cos\theta=-\frac{1}{3}$

가

또한 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$에서

$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=2\sqrt{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

나

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1-2\sqrt{2}}{3}$

다

단계	채점 요소	비율
가	$\cos\theta$의 값 구하기	50%
나	$\sin\theta$의 값 구하기	30%
다	$\sin\theta-\cos\theta$의 값 구하기	20%

답 $\frac{1-2\sqrt{2}}{3}$

298

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{4}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{16}{9}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{16}{9}$ $\quad \therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{7}{18}$

$\therefore \sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\frac{4}{3}\left(1-\frac{7}{18}\right)=\frac{22}{27}$

답 ③

299

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because \sin\theta>\cos\theta$)

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

300

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{3}{4}$ ...... ㉠

$\sin\theta\cos\theta=\frac{a}{4}$ ...... ㉡

㉠의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{9}{16}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{9}{16}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{7}{32}$ ...... ㉢

㉡, ㉢에서 $\frac{a}{4}=-\frac{7}{32}$이므로

$a=-\frac{7}{8}$

답 ①

301

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ...... ㉠

㉠의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{3}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{4}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{8}$

㉮

$\therefore (\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\times\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{5}{4}$

㉯

이때, $\sin\theta>\cos\theta$이므로 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{2}$

㉰

단계	채점 요소	비율
㉮	$\sin\theta\cos\theta$의 값 구하기	50%
㉯	$(\sin\theta-\cos\theta)^2$의 값 구하기	30%
㉰	$\sin\theta-\cos\theta$의 값 구하기	20%

답 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

302

$\sin(\pi-\theta)\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)-\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)\cos(\pi-\theta)$

$=\sin\theta\times\sin\theta-(-\cos\theta)\times(-\cos\theta)$

$=\sin^2\theta-\cos^2\theta$

$=(1-\cos^2\theta)-\cos^2\theta$

$=1-2\cos^2\theta$

답 ④

303

$\sin 150^\circ=\sin(180^\circ-30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$

$\sin 120^\circ=\sin(180^\circ-60^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 135^\circ=\sin(180^\circ-45^\circ)=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 120^\circ=\cos(180^\circ-60^\circ)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$

$\cos 135^\circ=\cos(180^\circ-45^\circ)=-\cos 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 150^\circ=\cos(180^\circ-30^\circ)=-\cos 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \frac{\sin 150^\circ}{\sin 120^\circ-\sin 135^\circ}+\frac{\cos 120^\circ}{\cos 135^\circ+\cos 150^\circ}$

$=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

$=\sqrt{3}+\sqrt{2}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})=2\sqrt{3}$

답 ⑤

304

θ가 제3사분면의 각이고 $\tan\theta=\frac{3}{4}$일 때,

$\sin\theta=-\frac{3}{5}$, $\cos\theta=-\frac{4}{5}$이므로

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\tan\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)$

$=\cos\theta-\sin\theta-\frac{1}{\tan\theta}$

$=-\frac{4}{5}-\left(-\frac{3}{5}\right)-\frac{4}{3}$

$=-\frac{23}{15}$

답 ②

305

$\frac{\pi}{4}+\theta=A$로 놓으면 $\theta=A-\frac{\pi}{4}$이므로

$\frac{\pi}{4}-\theta=\frac{\pi}{4}-\left(A-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}-A$

$\therefore \cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\cos^2 A+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-A\right)$

$=\cos^2 A+\sin^2 A$

$=1$

답 ④

306

$\sin 10^\circ=\sin(90^\circ-80^\circ)=\cos 80^\circ$

$\sin 20^\circ=\sin(90^\circ-70^\circ)=\cos 70^\circ$

$\sin 30^\circ=\sin(90^\circ-60^\circ)=\cos 60^\circ$

$\sin 40^\circ=\sin(90^\circ-50^\circ)=\cos 50^\circ$

$\therefore \sin^2 10^\circ+\sin^2 20^\circ+\sin^2 30^\circ+\cdots+\sin^2 80^\circ$

$=(\sin^2 10^\circ+\sin^2 80^\circ)+(\sin^2 20^\circ+\sin^2 70^\circ)+(\sin^2 30^\circ+\sin^2 60^\circ)+(\sin^2 40^\circ+\sin^2 50^\circ)$

$=(\cos^2 80^\circ+\sin^2 80^\circ)+(\cos^2 70^\circ+\sin^2 70^\circ)+(\cos^2 60^\circ+\sin^2 60^\circ)+(\cos^2 50^\circ+\sin^2 50^\circ)$

$=1+1+1+1=4$

답 ④

307

$\cos^2\theta+\cos^2(90^\circ-\theta)=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$이므로

$\cos^2 1^\circ+\cos^2 2^\circ+\cos^2 3^\circ+\cdots+\cos^2 88^\circ+\cos^2 89^\circ$

$=(\cos^2 1^\circ+\cos^2 89^\circ)+(\cos^2 2^\circ+\cos^2 88^\circ)+(\cos^2 3^\circ+\cos^2 87^\circ)+\cdots+(\cos^2 44^\circ+\cos^2 46^\circ)+\cos^2 45^\circ$

$=(\cos^2 1^\circ+\sin^2 1^\circ)+(\cos^2 2^\circ+\sin^2 2^\circ)+(\cos^2 3^\circ+\sin^2 3^\circ)+\cdots+(\cos^2 44^\circ+\sin^2 44^\circ)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$=1\times 44+\frac{1}{2}=\frac{89}{2}$

답 $\frac{89}{2}$

실력 콕콕 본문 p.58~59

308 ②	309 ③	310 ⑤	311 ④	312 ①	313 ⑤
314 ①	315 ⑤	316 $-\frac{8}{3}$	317 ②		
318 $15x^2+32x+15=0$			319 ④	320 ⑤	321 ④
322 2	323 $\sqrt{15}$				

308

$-200^\circ=360^\circ\times(-1)+160^\circ$이므로 동경 OP가 나타내는 일반각 θ는

$\theta=360^\circ\times n+160^\circ$ (n은 정수)와 같이 나타낼 수 있다.

$-450^\circ<\theta<720^\circ$에서 $-450^\circ<360^\circ\times n+160^\circ<720^\circ$이므로

$-\frac{61}{36}<n<\frac{14}{9}$

n은 정수이므로 $n=-1, 0, 1$

따라서 구하는 각 θ의 개수는 3이다.

답 ②

309

$40^\circ=40\times\frac{\pi}{180}=\frac{2}{9}\pi$이므로 주어진 부채꼴의 중심각의 크기는

$2\pi-\frac{2}{9}\pi=\frac{16}{9}\pi$

따라서 구하는 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 6^2\times\frac{16}{9}\pi=32\pi$

답 ③

310

반지름의 길이가 3이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times 3^2\times\theta=\frac{9}{2}\theta$

반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$이고 넓이가 $\frac{1}{2}S$인 부채꼴의 중심각의 크기를 θ'이라 하면

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}\right)^2\times\theta'=\frac{1}{2}S$, $\frac{9}{8}\theta'=\frac{1}{2}S$

$\therefore \theta'=\frac{4}{9}S=\frac{4}{9}\times\frac{9}{2}\theta=2\theta$

답 ⑤

311

각 θ를 나타내는 동경과 각 7θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$\theta+7\theta=2n\pi$ (n은 정수)

$8\theta=2n\pi \qquad \therefore \theta=\frac{n}{4}\pi$ …… ㉠

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\pi<\frac{n}{4}\pi<\frac{3}{2}\pi$이므로

$4<n<6$

n은 정수이므로 $n=5$

$n=5$를 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{5}{4}\pi$

$\therefore \sin(\theta-\pi)=\sin\left(\frac{5}{4}\pi-\pi\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

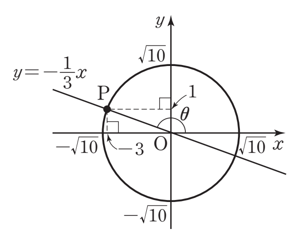
보충 설명

$\sin(\theta-\pi)=\sin\{-(\pi-\theta)\}=-\sin(\pi-\theta)=-\sin\theta$

답 ④

312

오른쪽 그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$인 원을 그리고, 이 원이 직선 $x+3y=0$, 즉 $y=-\frac{1}{3}x$와 만나는 점 중에서 제2사분면 위의 점을 P라 하면



P$(-3, 1)$

$\overline{OP}=\sqrt{10}$이므로

$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\theta=-\frac{3}{\sqrt{10}}$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}+\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

$=-\frac{2}{\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{10}}{5}$

답 ①

313

각 θ가 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$이다.

ㄱ. $\sqrt{\sin\theta}\sqrt{\cos\theta}=\sqrt{\sin\theta\cos\theta}$ (거짓)

ㄴ. $\frac{\sqrt{\sin\theta}}{\sqrt{\cos\theta}}=-\sqrt{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$ (참)

ㄷ. $\frac{\sqrt{\cos\theta}}{\sqrt{\sin\theta}}=\sqrt{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

314

θ가 제4사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$

따라서 $\sin\theta-\frac{1}{2}<0$, $\cos\theta+\frac{1}{2}>0$, $\sin\theta-\cos\theta<0$이므로

$\left|\sin\theta-\frac{1}{2}\right|-\sqrt{\left(\cos\theta+\frac{1}{2}\right)^2}+|\sin\theta-\cos\theta|$

$=-\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)-\left(\cos\theta+\frac{1}{2}\right)-(\sin\theta-\cos\theta)$

$=-2\sin\theta$

답 ①

315

(i) $\sin\theta\tan\theta>0$에서 $\sin\theta$와 $\tan\theta$의 부호가 서로 같으므로 θ는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\cos\theta\tan\theta<0$에서 $\cos\theta$와 $\tan\theta$의 부호가 서로 다르므로 θ는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ는 제4사분면의 각이므로 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

따라서 $a=\frac{3}{2}\pi$, $b=2\pi$이므로

$a+b=\frac{3}{2}\pi+2\pi=\frac{7}{2}\pi$

답 ⑤

316

$\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=2-\sqrt{3}$에서

$1-\tan\theta=(2-\sqrt{3})(1+\tan\theta)$

$(3-\sqrt{3})\tan\theta=\sqrt{3}-1$

$\therefore \tan\theta=\frac{\sqrt{3}-1}{3-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ...... ㉠

$\therefore \frac{1}{\tan\theta}=\sqrt{3}$ ...... ㉡

이때, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$의 양변을 $\cos^2\theta$로 나누면

$\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$이므로

$\frac{1}{\cos^2\theta}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1=\frac{4}{3}$ ($\because$ ㉠)

또한 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$의 양변을 $\sin^2\theta$로 나누면

$1+\frac{1}{\tan^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}$이므로

$\frac{1}{\sin^2\theta}=1+(\sqrt{3})^2=4$ ($\because$ ㉡)

$\therefore \frac{1}{\cos^2\theta}-\frac{1}{\sin^2\theta}=\frac{4}{3}-4=-\frac{8}{3}$

답 $-\frac{8}{3}$

317

$\overline{OP}=\sqrt{(-8)^2+6^2}=10$이므로

$\sin\theta=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$, $\cos\theta=-\frac{8}{10}=-\frac{4}{5}$

이때,

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{3}{5}+\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{1}{5}$

$\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{5}\times\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{12}{25}$

이므로 $\sin\theta$, $\cos\theta$를 두 근으로 하는 이차방정식은

$x^2-\left(-\frac{1}{5}\right)x-\frac{12}{25}=0$

$\therefore 25x^2+5x-12=0$

따라서 $a=25$, $b=-12$이므로

$a+b=25+(-12)=13$

답 ②

318

$4x^2-x+a=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{4}$ ...... ㉠

㉠의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{16}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{16}$ $\quad\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{15}{32}$

$\tan\theta$와 $\frac{1}{\tan\theta}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 15인 이차방정식은

$15\left\{x^2-\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)x+\left(\tan\theta\times\frac{1}{\tan\theta}\right)\right\}=0$

이때, $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-\frac{32}{15}$

따라서 구하는 이차방정식은

$15\left\{x^2-\left(-\frac{32}{15}\right)x+1\right\}=0$

$\therefore 15x^2+32x+15=0$

답 $15x^2+32x+15=0$

319

$\frac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\cos(\pi+\theta)}+\frac{\cos(\pi-\theta)\tan^2(\pi-\theta)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

$=\frac{-\cos\theta}{\cos^2\theta(-\cos\theta)}+\frac{-\cos\theta\tan^2\theta}{\cos\theta}$

$=\frac{1}{\cos^2\theta}-\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$=\frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=1$

답 ④

320

$\cos\frac{C}{2}=\frac{1}{3}>0$이므로 $\frac{C}{2}$는 예각이다.

$\therefore \sin\frac{C}{2}=\sqrt{1-\cos^2\frac{C}{2}}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$A+B+C=\pi$에서 $A+B=\pi-C$이므로

$\sin\frac{A+B+\pi}{2}+\cos\frac{A+B-\pi}{2}$

$=\sin\frac{\pi-C+\pi}{2}+\cos\frac{\pi-C-\pi}{2}$

$=\sin\left(\pi-\frac{C}{2}\right)+\cos\left(-\frac{C}{2}\right)$

$=\sin\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2}$

$=\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{3}=\frac{1+2\sqrt{2}}{3}$

답 ⑤

321

$10\theta=2\pi$에서 $5\theta=\pi$이므로

① $\sin(-5\theta)=-\sin5\theta=-\sin\pi=0$

$\sin\theta\neq0$이므로 $\sin\theta+\sin(-5\theta)\neq0$

② $\cos4\theta=\cos(5\theta-\theta)=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

$\therefore \cos2\theta+\cos4\theta=\cos2\theta-\cos\theta\neq0$

③ $\sin 7\theta=\sin(5\theta+2\theta)=\sin(\pi+2\theta)=-\sin 2\theta$

$\therefore \sin 2\theta+\sin 7\theta=0$

④ $\cos 4\theta=\cos(5\theta-\theta)=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$,

$\cos 6\theta=\cos(5\theta+\theta)=\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

$\therefore \cos 4\theta=\cos 6\theta$

⑤ $\sin 9\theta=\sin(10\theta-\theta)=\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta$

$\therefore \sin\theta+\sin 9\theta=0$

따라서 옳은 것은 ④이다.

답 ④

322

부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 둘레의 길이가 16이므로 호의 길이는 $16-2r$이다.

가

부채꼴의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}r(16-2r)=-r^2+8r=-(r-4)^2+16\ (0<r<8)$

이므로 $r=4$일 때 부채꼴의 넓이의 최댓값은 16이다.

나

부채꼴의 넓이가 최대일 때의 중심각의 크기를 θ라 하면

$\frac{1}{2}\times 4^2\times\theta=16$

$\therefore \theta=2$

다

단계	채점 요소	비율
가	반지름의 길이를 r로 놓고 호의 길이 구하기	20%
나	부채꼴의 넓이의 최댓값 구하기	40%
다	부채꼴의 넓이가 최대일 때 중심각의 크기 구하기	40%

답 2

323

$\overline{OP}=2$이므로 $\sin\theta=\frac{1}{4}$에서

$\frac{b}{2}=\frac{1}{4}\qquad \therefore b=\frac{1}{2}$

가

한편, 점 $P(a, b)$는 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=4$ ······ ㉠

$b=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $a^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=4$, $a^2=\frac{15}{4}$

$\therefore a=-\frac{\sqrt{15}}{2}\ (\because a<0)$

나

따라서 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 $P\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{1}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$-\frac{\sqrt{15}}{2}x+\frac{1}{2}y=4$, 즉 $y=\sqrt{15}x+8$

이므로 구하는 접선의 기울기는 $\sqrt{15}$이다.

다

단계	채점 요소	비율
가	$\sin\theta$의 값을 이용하여 b의 값 구하기	20%
나	점 P가 원 위의 점임을 이용하여 a의 값 구하기	40%
다	점 P에서의 접선의 기울기 구하기	40%

답 $\sqrt{15}$

06 삼각함수의 그래프

개념 콕콕 본문 p.61~62

324

함수 $y=\sin x$에서

(1) 정의역은 $\boxed{\text{실수 전체의 집합}}$이다.

(2) 치역은 $\boxed{\{y\mid -1\le y\le 1\}}$이다.

(3) 주기는 $\boxed{2\pi}$이다.

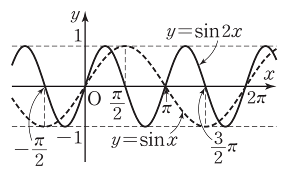
(4) 그래프는 $\boxed{\text{원점}}$에 대하여 대칭이다.

답 (1) 실수 전체의 집합 (2) $\{y\mid -1\le y\le 1\}$ (3) 2π (4) 원점

325

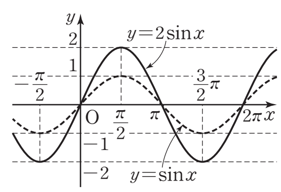
(1) $y=\sin 2x$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 치역은 $\{y\mid -1\le y\le 1\}$, 주기는 π이다.

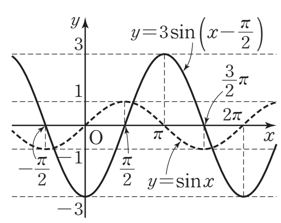


(2) $y=2\sin x$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 치역은 $\{y\mid -2\le y\le 2\}$, 주기는 2π이다.

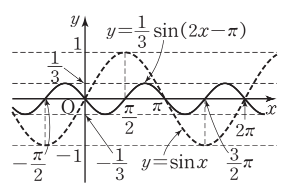


(3) $y=3\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 3배한 후, x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y\mid -3\le y\le 3\}$, 주기는 2π이다.

(4) $y=\frac{1}{3}\sin(2x-\pi)=\frac{1}{3}\sin 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배, y축의 방향으로 $\frac{1}{3}$배한 후, x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 치역은 $\left\{y\,\middle|\,-\frac{1}{3}\le y\le\frac{1}{3}\right\}$, 주기는 π이다.

답 풀이 참조

326

함수 $y=\cos x$에서

(1) 정의역은 $\boxed{\text{실수 전체의 집합}}$이다.

(2) 치역은 $\boxed{\{y\mid -1\le y\le 1\}}$이다.

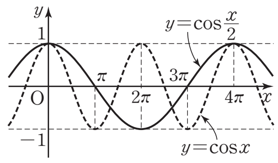
(3) 주기는 $\boxed{2\pi}$이다.

(4) 그래프는 $\boxed{y축}$에 대하여 대칭이다.

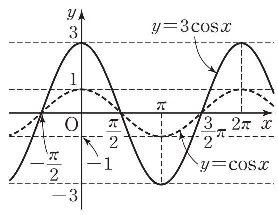
답 (1) 실수 전체의 집합 (2) $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$ (3) 2π (4) y축

327

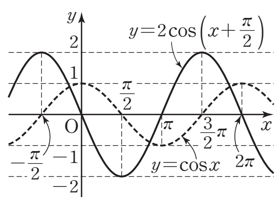
(1) $y=\cos\frac{x}{2}$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 2배한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 치역은 $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$, 주기는 4π이다.



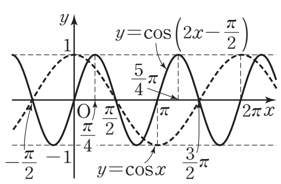
(2) $y=3\cos x$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 3배한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 치역은 $\{y \mid -3 \le y \le 3\}$, 주기는 2π이다.



(3) $y=2\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배한 후, x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 치역은 $\{y \mid -2 \le y \le 2\}$, 주기는 2π이다.



(4) $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배한 후, x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 치역은 $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$, 주기는 π이다.



답 풀이 참조

328

함수 $y=\tan x$에서

(1) 정의역은 $\boxed{x=n\pi+\frac{\pi}{2}\ (n은\ 정수)}$를 제외한 실수 전체의 집합이다.

(2) 치역은 $\boxed{실수\ 전체의\ 집합}$이다.

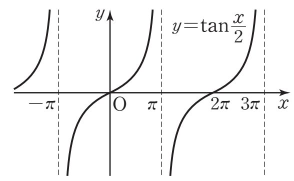
(3) 주기는 $\boxed{\pi}$이다.

(4) 그래프는 $\boxed{원점}$에 대하여 대칭이다.

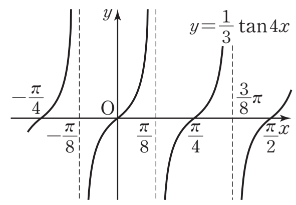
답 (1) $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수) (2) 실수 전체의 집합 (3) π (4) 원점

329

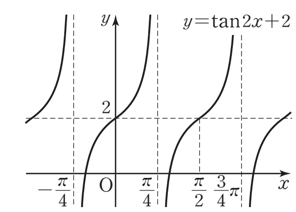
(1) $y=\tan\frac{x}{2}$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 2배한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 치역은 실수 전체의 집합이고, 주기는 2π이다.



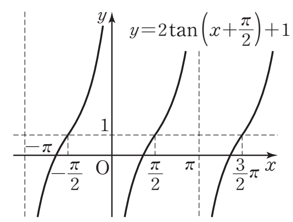
(2) $y=\frac{1}{3}\tan 4x$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{4}$배, y축의 방향으로 $\frac{1}{3}$배한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 치역은 실수 전체의 집합이고, 주기는 $\frac{\pi}{4}$이다.



(3) $y=\tan 2x+2$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$배한 후, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 치역은 실수 전체의 집합이고, 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.



(4) $y=2\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 y축의 방향으로 2배한 후, x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 치역은 실수 전체의 집합이고, 주기는 π이다.



답 풀이 참조

330

(1) $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$에서
최댓값은 1, 최솟값은 -1, 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$

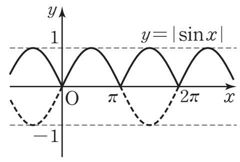
(2) $y=2\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)+1$에서
최댓값은 $2+1=3$, 최솟값은 $-2+1=-1$, 주기는 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

(3) $y=\tan 3x-1$에서
최댓값, 최솟값은 없고, 주기는 $\frac{\pi}{3}$

답 (1) 최댓값 : 1, 최솟값 : -1, 주기 : π
(2) 최댓값 : 3, 최솟값 : -1, 주기 : $\frac{\pi}{2}$
(3) 최댓값, 최솟값 : 없다, 주기 : $\frac{\pi}{3}$

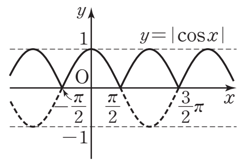
331

(1) $y=|\sin x|$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



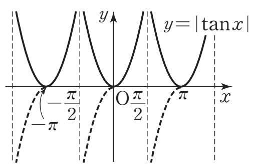
따라서 $y=|\sin x|$의 주기는 π이다.

(2) $y=|\cos x|$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $y=|\cos x|$의 주기는 π이다.

(3) $y=|\tan x|$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

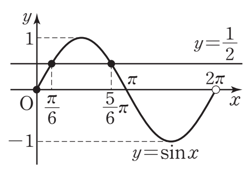


따라서 $y=|\tan x|$의 주기는 π이다.

답 (1) π (2) π (3) π

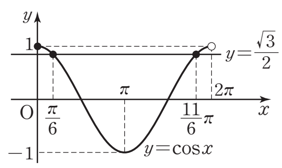
332

(1) 오른쪽 그림과 같이 $0\leq x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$이므로



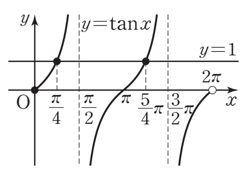
$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

(2) 오른쪽 그림과 같이 $0\leq x<2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{11}{6}\pi$이므로



$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

(3) 오른쪽 그림과 같이 $0\leq x<2\pi$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 x좌표가 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{4}\pi$이므로



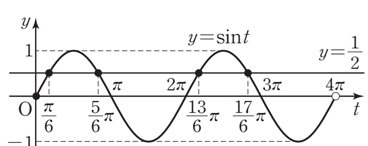
$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

답 (1) $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ (2) $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

(3) $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

333

(1) $2x=t$로 놓으면 $0\leq t<4\pi$

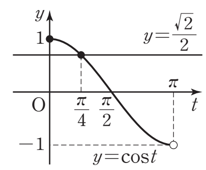


위의 그림과 같이 $0\leq t<4\pi$에서 함수 $y=\sin t$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 t좌표가 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{13}{6}\pi$, $\frac{17}{6}\pi$이므로

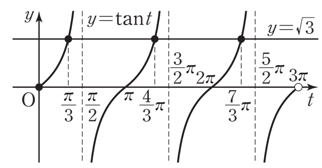
$x=\frac{\pi}{12}$ 또는 $x=\frac{5}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{13}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{17}{12}\pi$

(2) $\frac{x}{2}=t$로 놓으면 $0\leq t<\pi$

오른쪽 그림과 같이 $0\leq t<\pi$에서 함수 $y=\cos t$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 t좌표가 $\frac{\pi}{4}$이므로 $x=\frac{\pi}{2}$



(3) $\frac{3}{2}x=t$로 놓으면 $0\leq t<3\pi$



위의 그림과 같이 $0\leq t<3\pi$에서 함수 $y=\tan t$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$의 교점의 t좌표가 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4}{3}\pi$, $\frac{7}{3}\pi$이므로

$x=\frac{2}{9}\pi$ 또는 $x=\frac{8}{9}\pi$ 또는 $x=\frac{14}{9}\pi$

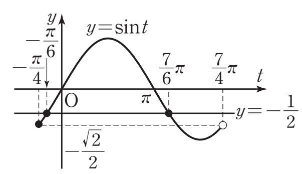
답 (1) $x=\frac{\pi}{12}$ 또는 $x=\frac{5}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{13}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{17}{12}\pi$

(2) $x=\frac{\pi}{2}$ (3) $x=\frac{2}{9}\pi$ 또는 $x=\frac{8}{9}\pi$ 또는 $x=\frac{14}{9}\pi$

334

(1) $x-\frac{\pi}{4}=t$로 놓으면 $-\frac{\pi}{4}\leq t<\frac{7}{4}\pi$

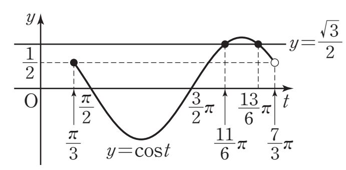
오른쪽 그림과 같이 $-\frac{\pi}{4}\leq t<\frac{7}{4}\pi$에서 함수 $y=\sin t$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$의 교점의 t좌표가 $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{7}{6}\pi$이므로



$x=\frac{\pi}{12}$ 또는 $x=\frac{17}{12}\pi$

(2) $x+\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $\frac{\pi}{3}\leq t<\frac{7}{3}\pi$

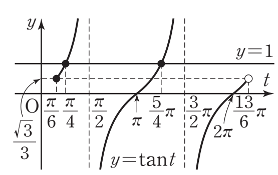
오른쪽 그림과 같이 $\frac{\pi}{3}\leq t<\frac{7}{3}\pi$에서 함수 $y=\cos t$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 t좌표가 $\frac{11}{6}\pi$, $\frac{13}{6}\pi$이므로



$x=\frac{3}{2}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

(3) $x+\frac{\pi}{6}=t$로 놓으면 $\frac{\pi}{6}\leq t<\frac{13}{6}\pi$

오른쪽 그림과 같이 $\frac{\pi}{6}\leq t<\frac{13}{6}\pi$에서 함수 $y=\tan t$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 t좌표가 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{4}\pi$이므로



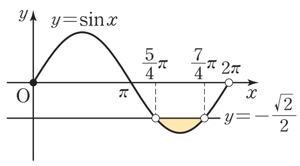
$x=\frac{\pi}{12}$ 또는 $x=\frac{13}{12}\pi$

답 (1) $x=\frac{\pi}{12}$ 또는 $x=\frac{17}{12}\pi$ (2) $x=\frac{3}{2}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

(3) $x=\frac{\pi}{12}$ 또는 $x=\frac{13}{12}\pi$

335

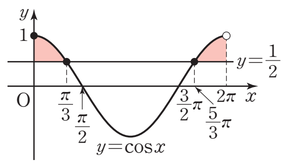
(1) 주어진 부등식의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로



$\frac{5}{4}\pi<x<\frac{7}{4}\pi$

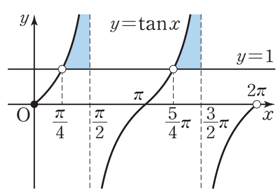
(2) $2\cos x\ge 1$에서 $\cos x\ge\frac{1}{2}$

따라서 주어진 부등식의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$과 만나는 부분 또는 직선보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로



$0\le x\le\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{3}\pi\le x<2\pi$

(3) 주어진 부등식의 해는 함수 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=1$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로



$\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi<x<\frac{3}{2}\pi$

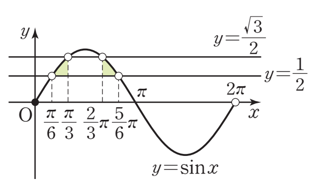
답 (1) $\frac{5}{4}\pi<x<\frac{7}{4}\pi$

(2) $0\le x\le\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{3}\pi\le x<2\pi$

(3) $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi<x<\frac{3}{2}\pi$

336

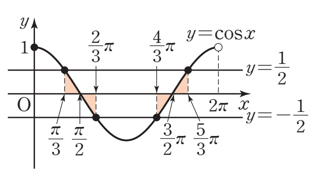
(1)



위의 그림에서 주어진 부등식의 해는

$\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{2}{3}\pi<x<\frac{5}{6}\pi$

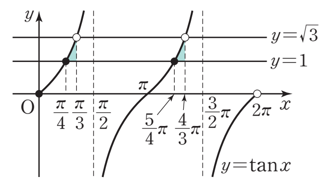
(2)



위의 그림에서 주어진 부등식의 해는

$\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi\le x\le\frac{5}{3}\pi$

(3)



위의 그림에서 주어진 부등식의 해는

$\frac{\pi}{4}\le x<\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi\le x<\frac{4}{3}\pi$

답 (1) $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{2}{3}\pi<x<\frac{5}{6}\pi$

(2) $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi\le x\le\frac{5}{3}\pi$

(3) $\frac{\pi}{4}\le x<\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi\le x<\frac{4}{3}\pi$

유형 콕콕

본문 p.63~67

337 ⑤ **338** ㄱ, ㄴ **339** ③ **340** ⑤ **341** 3

342 ㄱ, ㄴ **343** ④ **344** ⑤

345 (가) $\frac{\pi}{2}$ (나) $\frac{\pi}{6}$ (다) -1 (라) $x=\frac{n}{2}\pi+\frac{5}{12}\pi$ (n은 정수) **346** ⑤

347 ② **348** 6 **349** ② **350** ⑤ **351** 1 **352** ④

353 ② **354** ⑤ **355** ① **356** ② **357** $\frac{3}{2}\pi$ **358** ②

359 ③ **360** $\frac{3}{4}\pi$ **361** ③ **362** ② **363** 4 **364** ③

365 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\pi\le x\le\frac{5}{3}\pi$ **366** ③

337

①, ② 최댓값은 1, 최솟값은 -1이다.

③ 주기는 $\frac{2\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$이다.

④ $\sin(-3x)=-\sin 3x$이므로 $y=\sin 3x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

⑤ $y=\sin 3x$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{3}$배한 것이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

338

ㄱ. 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$이다. (참)

ㄴ. 최댓값은 3이다. (참)

ㄷ. $f(-x)=3\cos\left(-\frac{x}{2}\right)=3\cos\frac{x}{2}=f(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

339

조건 ㈎에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x-2)=f(x)$이므로

$f(x)$는 주기가 2인 함수이다.

$\therefore f(5)=f(3)=f(1)=\sin\pi=0$ ($\because$ 조건 ㈏)

답 ③

340

① 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이다.

② $f\left(\frac{3}{8}\pi\right)=3\sin\left(2\times\frac{3}{8}\pi+\frac{\pi}{4}\right)+1=3\sin\pi+1=3\times0+1=1$

③ 최댓값은 $3+1=4$, 최솟값은 $-3+1=-2$이다.

④ $f(x)=3\sin2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)+1$이므로 함수 $y=3\sin2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{8}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

⑤ 함수 $y=3\sin2x$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $\left(-\frac{\pi}{8}, 1\right)$에 대하여 대칭이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

341

$y=-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)+1$에서

최댓값은 $\left|-\frac{1}{2}\right|+1=\frac{3}{2}$이므로 $M=\frac{3}{2}$

최솟값은 $-\left|-\frac{1}{2}\right|+1=\frac{1}{2}$이므로 $m=\frac{1}{2}$

주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$이므로 $p=4$

$\therefore Mmp=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times4=3$

답 3

342

ㄱ. 함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x+\pi)=f(x)$가 성립한다. (참)

ㄴ. 최댓값은 $3-1=2$, 최솟값은 $-3-1=-4$이다. (참)

ㄷ. $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동하면

$$y=3\cos2\left\{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\right\}-1=3\cos(2x-2\pi)-1=3\cos2x-1$$

(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

343

① 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

② 점근선의 방정식은 $2x=n\pi+\frac{\pi}{2}$에서

$x=\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4}$ (n은 정수)

③ $\tan(-2x)=-\tan2x$이므로 $y=\tan2x$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

④ 점근선의 방정식이 $x=\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4}$ (n은 정수)이므로 정의역은 $x\neq\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4}$인 실수 전체의 집합이다.

⑤ 치역은 실수 전체의 집합이다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

344

주기는 $\frac{\pi}{\pi}=1$이므로 $p=1$

점근선의 방정식은 $\pi x+\frac{\pi}{4}=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)에서

$x=n+\frac{1}{4}$이므로 $q=\frac{1}{4}$

$\therefore p+q=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

답 ⑤

345

$y=3\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-1=3\tan2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-1$

• 주기는 $\boxed{\frac{\pi}{2}}$이다.

• 그래프는 $y=3\tan2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\boxed{\frac{\pi}{6}}$만큼, y축의 방향으로 $\boxed{-1}$만큼 평행이동한 것이다.

• 그래프의 점근선의 방정식은 $2x-\frac{\pi}{3}=n\pi+\frac{\pi}{2}$에서 $\boxed{x=\frac{n}{2}\pi+\frac{5}{12}\pi\ (n\text{은 정수})}$이다.

답 ㈎ $\frac{\pi}{2}$ ㈏ $\frac{\pi}{6}$ ㈐ -1 ㈑ $x=\frac{n}{2}\pi+\frac{5}{12}\pi$ (n은 정수)

346

주어진 함수의 최댓값이 2, 최솟값이 -2이고 $a>0$이므로

$a=2$

주기가 π이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi \qquad \therefore b=2$

주어진 그래프는 $y=2\cos2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것이므로

$y=2\cos2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right) \qquad \therefore c=\frac{\pi}{2}$

$\therefore abc=2\times2\times\frac{\pi}{2}=2\pi$

답 ⑤

347

$f(x)=a\tan bx$의 주기가 $\frac{\pi}{2}$이고 $b>0$이므로

$\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{2} \qquad \therefore b=2$

또한 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=4$이므로 $a\tan\frac{\pi}{4}=4$, $a\times1=4 \qquad \therefore a=4$

$\therefore a+b=4+2=6$

답 ②

348

조건 (다)에서 $f(x)$의 주기가 π이고 $b>0$이므로

$\dfrac{2\pi}{b}=\pi$ $\quad\therefore b=2$

조건 (가)에서 $f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{5}{2}$이므로 $a\sin\dfrac{\pi}{6}+c=\dfrac{5}{2}$

$\dfrac{a}{2}+c=\dfrac{5}{2}$ $\quad\therefore a+2c=5$ …… ㉠

조건 (나)에서 $f(x)$의 최솟값이 -2이고 $a>0$이므로

$-a+c=-2$ …… ㉡

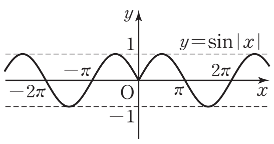
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $c=1$

$\therefore a+b+c=3+2+1=6$

답 6

349

함수 $y=\sin|x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



① 주기는 존재하지 않는다.

② 최댓값은 1이다.

③ 최솟값은 -1이다.

④ $x=\dfrac{3}{2}\pi$를 대입하면 $y=\sin\left|\dfrac{3}{2}\pi\right|=-1$이므로 그래프는 점 $\left(\dfrac{3}{2}\pi,\ -1\right)$을 지난다.

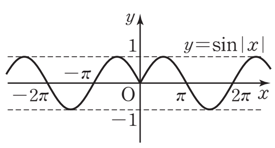
⑤ 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

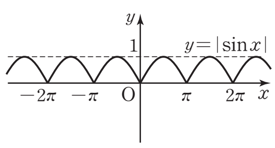
따라서 옳은 것은 ②이다.

답 ②

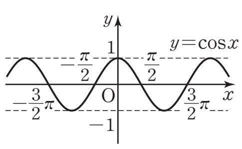
350

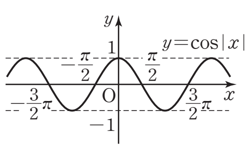
ㄱ. $y=\sin|x|$, $y=|\sin x|$의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.



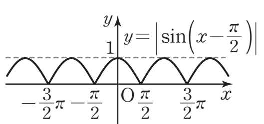


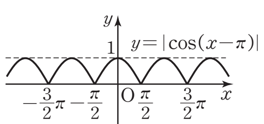
ㄴ. $y=\cos x$, $y=\cos|x|$의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.





ㄷ. $y=\left|\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\right|$, $y=|\cos(x-\pi)|$의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.





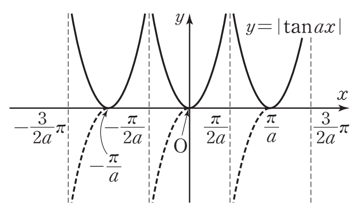
따라서 두 함수의 그래프가 일치하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

351

함수 $y=3\sin 2x$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$이다.

한편, 양수 a에 대하여 함수 $y=|\tan ax|$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 주기는 $\dfrac{\pi}{a}$이다.



즉, $\dfrac{\pi}{a}=\pi$이므로 $a=1$

답 1

352

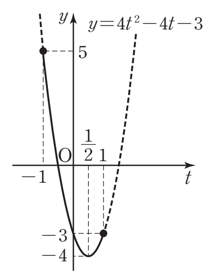
$y=1-4\cos^2x-4\sin x$

$\quad=1-4(1-\sin^2x)-4\sin x$

$\quad=4\sin^2x-4\sin x-3$

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=4t^2-4t-3=4\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2-4$



따라서 오른쪽 그림에서

$t=-1$일 때, 최댓값은 5

$t=\dfrac{1}{2}$일 때, 최솟값은 -4

이므로 $M=5$, $m=-4$

$\therefore M+m=5+(-4)=1$

답 ④

353

$y=\sin^2x-6\cos x+k$

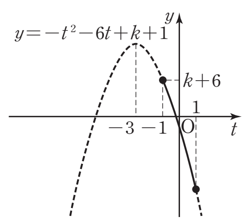
$\quad=(1-\cos^2x)-6\cos x+k$

$\quad=-\cos^2x-6\cos x+k+1$

$\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=-t^2-6t+k+1$

$\quad=-(t+3)^2+k+10$



따라서 오른쪽 그림에서 $t=-1$일 때 최댓값이 $k+6$이므로

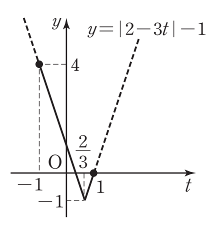
$k+6=4$ $\quad\therefore k=-2$

답 ②

354

$y=|2-3\sin x|-1$에서 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=|2-3t|-1$



따라서 오른쪽 그림에서

$t=-1$일 때, 최댓값은 4

$t=\dfrac{2}{3}$일 때, 최솟값은 -1

이므로 $M=4$, $m=-1$

$\therefore M+m=4+(-1)=3$

다른 풀이

$-1\le\sin x\le 1$이므로

$-1\le 2-3\sin x\le 5$, $0\le|2-3\sin x|\le 5$

$\therefore -1\le|2-3\sin x|-1\le 4$

따라서 $M=4$, $m=-1$이므로

$M+m=4+(-1)=3$

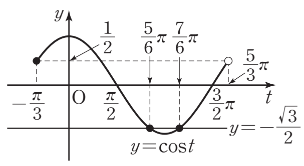
답 ⑤

355

$2x-\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $0\le x<\pi$에서 $-\frac{\pi}{3}\le t<\frac{5}{3}\pi$이고,

주어진 방정식은

$\cos t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$



$\therefore\ t=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $t=\frac{7}{6}\pi$

즉, $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{7}{6}\pi$

$\therefore\ x=\frac{7}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$

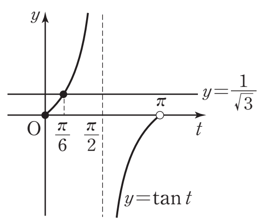
따라서 모든 근의 합은 $\frac{7}{12}\pi+\frac{3}{4}\pi=\frac{4}{3}\pi$

답 ①

356

$\frac{1}{2}x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $0\le t<\pi$

이고, 주어진 방정식은 $\tan t=\frac{1}{\sqrt{3}}$



$\therefore\ t=\frac{\pi}{6}$, 즉 $\frac{1}{2}x=\frac{\pi}{6}$

$\therefore\ x=\frac{\pi}{3}$

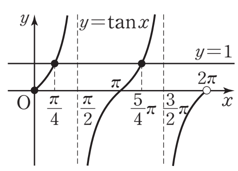
답 ②

357

$\sin x=\cos x$에서 $\frac{\sin x}{\cos x}=1$

$\therefore\ \tan x=1$

$\therefore\ x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$

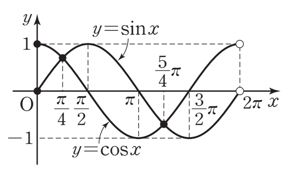


따라서 모든 근의 합은

$\frac{\pi}{4}+\frac{5}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi$

다른 풀이

$0\le x<2\pi$에서 두 함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 두 그래프의 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{4}\pi$이다.



따라서 모든 근의 합은 $\frac{\pi}{4}+\frac{5}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi$

답 $\frac{3}{2}\pi$

358

$2\cos^2 x-\sin x-1=0$에서

$2(1-\sin^2 x)-\sin x-1=0$

$2\sin^2 x+\sin x-1=0$

$\sin x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-1\le t\le 1$이고, 주어진 방정식은

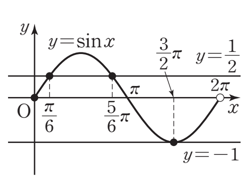
$2t^2+t-1=0$, $(t+1)(2t-1)=0$

$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=\frac{1}{2}$

(i) $t=-1$, 즉 $\sin x=-1$일 때,

$0\le x<2\pi$이므로

$x=\frac{3}{2}\pi$



(ii) $t=\frac{1}{2}$, 즉 $\sin x=\frac{1}{2}$일 때,

$0\le x<2\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

(i), (ii)에서 구하는 모든 근의 합은

$\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi=\frac{5}{2}\pi$

답 ②

359

$\tan x+\frac{\sqrt{3}}{\tan x}=1+\sqrt{3}$의 양변에 $\tan x$를 곱하여 정리하면

$\tan^2 x-(1+\sqrt{3})\tan x+\sqrt{3}=0$

$\tan x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-(1+\sqrt{3})t+\sqrt{3}=0$

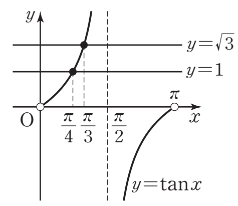
$(t-1)(t-\sqrt{3})=0$

$\therefore\ t=1$ 또는 $t=\sqrt{3}$

(i) $t=1$, 즉 $\tan x=1$일 때,

$0<x<\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{4}$



(ii) $t=\sqrt{3}$, 즉 $\tan x=\sqrt{3}$일 때,

$0<x<\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{3}$

(i), (ii)에서 구하는 모든 근의 합은

$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{7}{12}\pi$

답 ③

360

$\cos^2 x-1=\sin x\cos x$에서 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$이므로

$\cos^2 x-(\sin^2 x+\cos^2 x)=\sin x\cos x$

$\sin^2 x+\sin x\cos x=0$

$\sin x(\sin x+\cos x)=0$

$\therefore\ \sin x=0$ 또는 $\sin x=-\cos x$

가

(i) $\sin x=0$일 때, $0\le x<\pi$이므로

$x=0$

(ii) $\sin x=-\cos x$, 즉 $\tan x=-1$일 때, $0\le x<\pi$이므로

$x=\frac{3}{4}\pi$

나

(i), (ii)에서 구하는 모든 근의 합은

$0+\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{4}\pi$

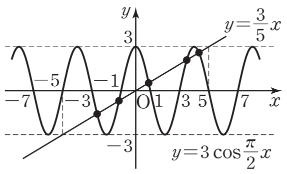
다

단계	채점 요소	비율
가	주어진 식을 간단히 정리하기	40%
나	각각의 경우를 만족시키는 근 구하기	40%
다	모든 근의 합 구하기	20%

답 $\frac{3}{4}\pi$

361

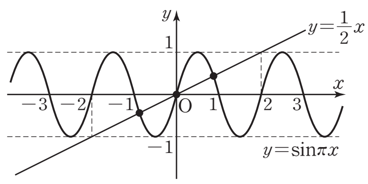
방정식 $3\cos\frac{\pi}{2}x=\frac{3}{5}x$의 실근의 개수는 함수 $y=3\cos\frac{\pi}{2}x$의 그래프와 직선 $y=\frac{3}{5}x$의 교점의 개수와 같다.



위의 그림과 같이 함수 $y=3\cos\frac{\pi}{2}x$의 그래프와 직선 $y=\frac{3}{5}x$의 교점의 개수는 5이므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 5이다. 답 ③

362

방정식 $\sin\pi x=\frac{1}{2}x$의 실근의 개수는 함수 $y=\sin\pi x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x$의 교점의 개수와 같다.

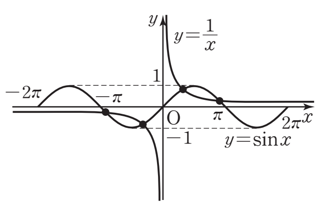


위의 그림과 같이 함수 $y=\sin\pi x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x$의 교점의 개수는 3이므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 3이다. 답 ②

363

$x=0$일 때, (좌변)$=0$, (우변)$=1$이므로 $x=0$은 근이 아니다.

$x\neq0$일 때, $x\sin x=1$에서 $\sin x=\frac{1}{x}$이므로 실근의 개수는 두 함수 $y=\sin x$, $y=\frac{1}{x}$의 그래프의 교점의 개수와 같다.



위의 그림과 같이 $-2\pi\le x\le2\pi$에서 두 함수 $y=\sin x$, $y=\frac{1}{x}$의 그래프의 교점의 개수는 4이므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 4이다. 답 4

364

$x-\frac{\pi}{6}=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-\frac{\pi}{6}\le t<\frac{11}{6}\pi$이고,

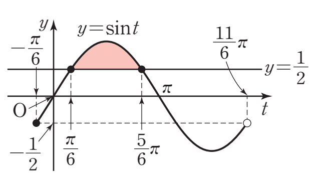
주어진 부등식은 $\sin t\ge\frac{1}{2}$ …… ㉠

오른쪽 그림에서 부등식 ㉠의 해는

$\frac{\pi}{6}\le t\le\frac{5}{6}\pi$이므로

$\frac{\pi}{6}\le x-\frac{\pi}{6}\le\frac{5}{6}\pi$

$\therefore \frac{\pi}{3}\le x\le\pi$



답 ③

365

$x-\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $0\le x\le2\pi$에서 $-\frac{\pi}{3}\le t\le\frac{5}{3}\pi$이고,

주어진 부등식은

$2\cos^2 t-\cos t-1\ge0$

$(2\cos t+1)(\cos t-1)\ge0$

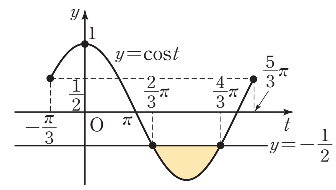
$\therefore \cos t\le-\frac{1}{2}$ 또는 $\cos t\ge1$ …… ㉠

오른쪽 그림에서 부등식 ㉠의 해는

$t=0$ 또는 $\frac{2}{3}\pi\le t\le\frac{4}{3}\pi$이므로

$x-\frac{\pi}{3}=0$ 또는 $\frac{2}{3}\pi\le x-\frac{\pi}{3}\le\frac{4}{3}\pi$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\pi\le x\le\frac{5}{3}\pi$



답 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\pi\le x\le\frac{5}{3}\pi$

366

모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2+4(\sin\theta+1)x+1>0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+4(\sin\theta+1)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2\sin\theta+2)^2-1<0$

$(2\sin\theta+2+1)(2\sin\theta+2-1)<0$

$(2\sin\theta+3)(2\sin\theta+1)<0$

$0\le\theta<2\pi$에서 $2\sin\theta+3>0$이므로

$2\sin\theta+1<0$

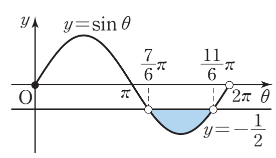
$\therefore \sin\theta<-\frac{1}{2}$ …… ㉠

오른쪽 그림에서 부등식 ㉠의 해는

$\frac{7}{6}\pi<\theta<\frac{11}{6}\pi$

이므로 $\alpha=\frac{7}{6}\pi$, $\beta=\frac{11}{6}\pi$

$\therefore \alpha+\beta=\frac{7}{6}\pi+\frac{11}{6}\pi=3\pi$



답 ③

실력 콕콕 본문 p.68~69

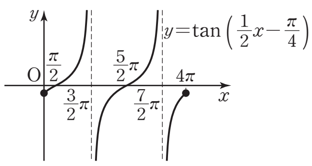
367 ④	368 ④	369 ①	370 ②	371 ②	372 ③
373 $\frac{3}{2}$	374 7	375 ⑤	376 ④	377 ③	378 ②
379 ③	380 ④	381 4			

382 $0\le\theta<\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi<\theta<2\pi$

367

$y=\tan\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 $y=\tan\frac{1}{2}x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $0\le x\le 4\pi$에서 함수 $y=\tan\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$의 그래프와 만나지 않는 직선 $x=k$, 즉 점근선의 방정식은



$x=\frac{3}{2}\pi$, $x=\frac{7}{2}\pi$

이므로 구하는 모든 실수 k의 값의 합은

$\frac{3}{2}\pi+\frac{7}{2}\pi=5\pi$

답 ④

368

$y=a\sin(bx-1)$에서 최댓값이 4이고 $a>0$이므로

$a=4$

또한 주기가 $\frac{\pi}{3}$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\frac{\pi}{3}$ $\quad\therefore b=6$

$\therefore a+b=4+6=10$

답 ④

369

주어진 함수의 최댓값이 3, 최솟값이 -1이고 $a>0$이므로

$a+c=3$, $-a+c=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $c=1$

또한 주기가 8π이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=8\pi$ $\quad\therefore b=\frac{1}{4}$

$\therefore ac+b=2\times1+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$

답 ①

370

함수 $y=\tan(ax-b)$의 주기가 $\frac{\pi}{8}$이고 $a>0$이므로

$\frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{8}$ $\quad\therefore a=8$

따라서 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=\tan 8x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{16}$만큼 평행이동한 것이므로

$y=\tan 8\left(x-\frac{\pi}{16}\right)=\tan\left(8x-\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore b=\frac{\pi}{2}$ ($\because 0<b<\pi$)

$\therefore ab=8\times\frac{\pi}{2}=4\pi$

답 ②

371

$f(x)=2\cos(\pi-ax)+b=-2\cos ax+b$

주기가 π이고 $a>0$이므로

$\frac{2\pi}{a}=\pi$ $\quad\therefore a=2$

또한 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=4$이므로 $-2\cos\pi+b=4$

$2+b=4$ $\quad\therefore b=2$

$\therefore ab=2\times2=4$

답 ②

372

ㄱ. $f(x)$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\frac{2}{3}\pi}=3$이다. (참)

ㄴ. ㄱ에서 주기가 3이므로 $b=3$, $c=2+3=5$

$\therefore b+c=3+5=8$ (참)

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$f(0)=2\cos(-a)+1=0$, $\cos a=-\frac{1}{2}$

$\therefore a=\frac{2}{3}\pi$ ($\because 0<a<\pi$)

$\therefore f(x)=2\cos\left(\frac{2}{3}\pi x-\frac{2}{3}\pi\right)+1=2\cos\frac{2}{3}\pi(x-1)+1$

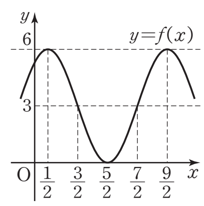
즉, $y=f(x)$의 그래프는 $y=2\cos\frac{2}{3}\pi x+1$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

373

함수 $y=3\cos\frac{\pi}{2}x$의 주기가 $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$이므로



오른쪽 그림과 같이 함수 $f(x)$는

$x=\frac{1}{2}$일 때, 최댓값 6

$x=\frac{5}{2}$일 때, 최솟값 0

을 갖는다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=3\cos\frac{\pi}{2}x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로

$p=\frac{1}{2}$, $q=3$

$\therefore pq=\frac{1}{2}\times3=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

374

함수 $f(x)=a|\cos bx|+c$의 주기가 $\frac{\pi}{3}$이고 $b>0$이므로

$\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{3}$ $\quad\therefore b=3$

한편, $0\le|\cos bx|\le1$이므로

$c\le a|\cos bx|+c\le a+c$

함수 $f(x)$의 최댓값이 6이므로

$a+c=6$ …… ㉠

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$이므로

$a\left|\cos 3\times\frac{\pi}{6}\right|+c=1$ $\quad\therefore c=1$

㉠에 $c=1$을 대입하면 $a+1=6$ $\quad\therefore a=5$

$\therefore a+b-c=5+3-1=7$

답 7

375

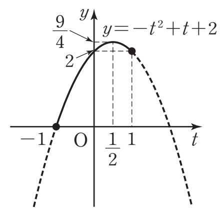
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$, $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$이므로

$$y=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+2\sin^2\theta-\cos(\pi-\theta)$$
$$=\cos^2\theta+2\sin^2\theta+\cos\theta$$
$$=\cos^2\theta+2(1-\cos^2\theta)+\cos\theta$$
$$=-\cos^2\theta+\cos\theta+2$$

$\cos\theta=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$$y=-t^2+t+2=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

따라서 오른쪽 그림에서



$t=\frac{1}{2}$일 때, 최댓값은 $\frac{9}{4}$

$t=-1$일 때, 최솟값은 0

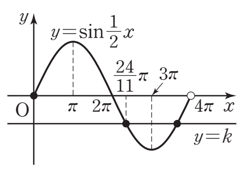
이므로 $M=\frac{9}{4}$, $m=0$

$\therefore M+m=\frac{9}{4}+0=\frac{9}{4}$

답 ⑤

376

방정식 $\sin\frac{1}{2}x=k$의 근은 함수 $y=\sin\frac{1}{2}x$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표이다.



오른쪽 그림에서 $\frac{24}{11}\pi$가 $\sin\frac{1}{2}x=k$의 한 근이므로 그래프의 대칭성을 이용하면 다른 한 근은

$$4\pi-\frac{2}{11}\pi=\frac{42}{11}\pi$$

$\therefore n=42$

답 ④

377

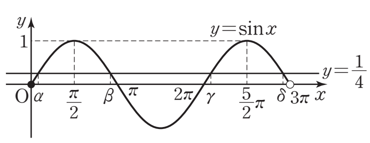
$4\sin^2x-9\sin x+2=0$에서

$(4\sin x-1)(\sin x-2)=0$

이때, $0\le x<3\pi$에서 $\sin x-2<0$이므로

$4\sin x-1=0$ $\quad\therefore \sin x=\frac{1}{4}$

따라서 α, β, γ, δ는 $0\le x<3\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4}$의 교점의 x좌표를 작은 것부터 차례대로 나타낸 것이다.



위의 그림에서

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2},\ \frac{\gamma+\delta}{2}=\frac{5}{2}\pi$$

이므로 $\alpha+\beta=\pi$, $\gamma+\delta=5\pi$

$\therefore \alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi+5\pi=6\pi$

답 ③

378

이차방정식 $x^2-2\sqrt{2}x\sin\theta+3\cos\theta=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-\sqrt{2}\sin\theta)^2-3\cos\theta=0$$

$2\sin^2\theta-3\cos\theta=0$

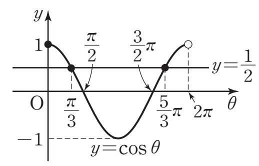
$2(1-\cos^2\theta)-3\cos\theta=0$

$2\cos^2\theta+3\cos\theta-2=0$

$(2\cos\theta-1)(\cos\theta+2)=0$

$0\le\theta<2\pi$에서 $\cos\theta+2>0$이므로

$2\cos\theta-1=0$ $\quad\therefore \cos\theta=\frac{1}{2}$



$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\theta=\frac{5}{3}\pi$

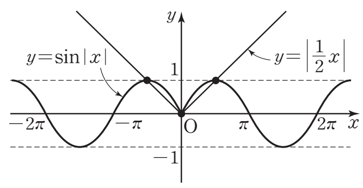
따라서 구하는 모든 θ의 크기의 합은

$$\frac{\pi}{3}+\frac{5}{3}\pi=2\pi$$

답 ②

379

방정식 $\sin|x|=\left|\frac{1}{2}x\right|$의 실근의 개수는 함수 $y=\sin|x|$의 그래프와 직선 $y=\left|\frac{1}{2}x\right|$의 교점의 개수와 같다.



위의 그림과 같이 함수 $y=\sin|x|$의 그래프와 직선 $y=\left|\frac{1}{2}x\right|$의 교점의 개수는 3이므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 3이다.

답 ③

380

이차방정식 $x^2-2x\cos\theta-2\cos\theta=0$의 판별식을 D라 하면

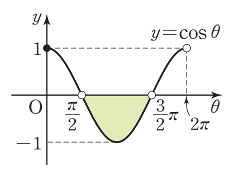
$$\frac{D}{4}=\cos^2\theta+2\cos\theta<0$$

$\cos\theta(\cos\theta+2)<0$

$0\le\theta<2\pi$에서 $\cos\theta+2>0$이므로

$\cos\theta<0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

오른쪽 그림에서 부등식 ㉠의 해는



$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi$

이므로 $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\beta=\frac{3}{2}\pi$

$\therefore \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi=2\pi$

답 ④

381

$$y=-a\cos^2x+a\sin x+b$$
$$=-a(1-\sin^2x)+a\sin x+b$$
$$=a\sin^2x+a\sin x-a+b$$

가

$\sin x = t$로 놓으면 $-1 \le t \le 1$이고

$y = at^2 + at - a + b = a\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}a + b$

나

오른쪽 그림에서

$t=1$일 때, 최댓값은 $a+b$

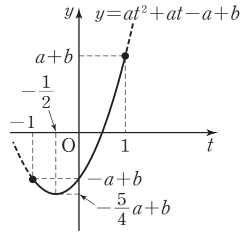
$t=-\frac{1}{2}$일 때, 최솟값은 $-\frac{5}{4}a+b$

이므로

$a+b=5$, $-\frac{5}{4}a+b=-4$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=1$

$\therefore ab = 4 \times 1 = 4$



다

단계	채점 요소	비율
가	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$임을 이용하여 한 종류의 삼각함수로 통일하기	30%
나	$\sin x = t$로 치환하기	20%
다	ab의 값 구하기	50%

답 4

382

모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2-2(2\cos\theta-1)x+4>0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-2(2\cos\theta-1)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2\cos\theta-1)^2-4<0$

$4\cos^2\theta-4\cos\theta-3<0$

$(2\cos\theta+1)(2\cos\theta-3)<0$

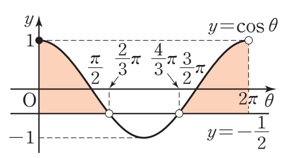
$0 \le \theta < 2\pi$에서 $2\cos\theta-3<0$이므로

$2\cos\theta+1>0 \quad \therefore \cos\theta > -\frac{1}{2}$

가

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 θ의 크기의 범위는

$0 \le \theta < \frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi < \theta < 2\pi$



나

단계	채점 요소	비율
가	판별식을 이용하여 $\cos\theta$의 값의 범위 구하기	60%
나	θ의 크기의 범위 구하기	40%

답 $0 \le \theta < \frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi < \theta < 2\pi$

07 사인법칙과 코사인법칙

개념 콕콕 본문 p.71

383

(1) 사인법칙에 의하여 $\frac{6}{\sin 30^\circ}=\frac{c}{\sin 45^\circ}$이므로

$6\sin 45^\circ = c\sin 30^\circ$

$c = 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = 6\sqrt{2}$

(2) 사인법칙에 의하여 $\frac{b}{\sin 45^\circ}=\frac{2}{\sin 60^\circ}$이므로

$b\sin 60^\circ = 2\sin 45^\circ$

$b = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

(3) $A+B+C=180^\circ$이므로

$A = 180^\circ - (120^\circ + 30^\circ) = 30^\circ$

사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin 30^\circ}=\frac{12}{\sin 120^\circ}$이므로

$a\sin 120^\circ = 12\sin 30^\circ$

$a = 12 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$

답 (1) $6\sqrt{2}$ (2) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ (3) $4\sqrt{3}$

384

(1) 사인법칙에 의하여 $\frac{2}{\sin A}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin 135^\circ}$이므로

$2\sin 135^\circ = 2\sqrt{2}\sin A$

$\therefore \sin A = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

$0^\circ < A < 180^\circ$이므로 $A=30^\circ$ 또는 $A=150^\circ$

그런데 $A+C<180^\circ$이므로

$A=30^\circ$

(2) 사인법칙에 의하여 $\frac{3\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}=\frac{9}{\sin B}$이므로

$3\sqrt{3}\sin B = 9\sin 30^\circ$

$\therefore \sin B = 9 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ < B < 180^\circ$이므로 $B=60^\circ$ 또는 $B=120^\circ$

(3) 사인법칙에 의하여 $\frac{4}{\sin 30^\circ}=\frac{4\sqrt{2}}{\sin C}$이므로

$4\sin C = 4\sqrt{2}\sin 30^\circ$

$\therefore \sin C = 4\sqrt{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$0^\circ < C < 180^\circ$이므로 $C=45^\circ$ 또는 $C=135^\circ$

답 (1) 30° (2) 60° 또는 120° (3) 45° 또는 135°

385

(1) 사인법칙에 의하여 $\frac{12}{\sin 60^\circ}=2R$

$\therefore R = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \times \frac{1}{2} = 4\sqrt{3}$

(2) $A+B+C=180^\circ$이므로

$A=180^\circ-(60^\circ+90^\circ)=30^\circ$

사인법칙에 의하여 $\dfrac{3}{\sin 30^\circ}=2R$

$\therefore R=\dfrac{3}{\frac{1}{2}}\times\dfrac{1}{2}=3$

답 (1) $4\sqrt{3}$ (2) 3

386

(1) 코사인법칙에 의하여

$a^2=6^2+(2\sqrt{2})^2-2\times6\times2\sqrt{2}\times\cos 45^\circ$

$=36+8-2\times6\times2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=20$

$a>0$이므로 $a=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

(2) 코사인법칙에 의하여

$b^2=4^2+(5\sqrt{3})^2-2\times4\times5\sqrt{3}\times\cos 30^\circ$

$=16+75-2\times4\times5\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=31$

$b>0$이므로 $b=\sqrt{31}$

(3) 코사인법칙에 의하여

$c^2=10^2+6^2-2\times10\times6\times\cos 60^\circ$

$=100+36-2\times10\times6\times\dfrac{1}{2}=76$

$c>0$이므로 $c=\sqrt{76}=2\sqrt{19}$

답 (1) $2\sqrt{5}$ (2) $\sqrt{31}$ (3) $2\sqrt{19}$

387

(1) 코사인법칙의 변형에 의하여

$\cos A=\dfrac{4^2+5^2-3^2}{2\times4\times5}=\dfrac{32}{40}=\dfrac{4}{5}$

(2) 코사인법칙의 변형에 의하여

$\cos B=\dfrac{(3\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2-(\sqrt{21})^2}{2\times3\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{9}{18}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ<B<180^\circ$이므로

$B=60^\circ$

답 (1) $\dfrac{4}{5}$ (2) 60°

388

(1) $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times8\times6\times\sin 45^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times8\times6\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=12\sqrt{2}$

(2) $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times4\times3\sqrt{2}\times\sin 120^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times4\times3\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{6}$

답 (1) $12\sqrt{2}$ (2) $3\sqrt{6}$

389

(1) 코사인법칙의 변형에 의하여

$\cos A=\dfrac{3^2+(\sqrt{5})^2-2^2}{2\times3\times\sqrt{5}}=\dfrac{10}{6\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

(2) $\sin^2 A+\cos^2 A=1$에서

$\sin^2 A=1-\cos^2 A=1-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2=1-\dfrac{5}{9}=\dfrac{4}{9}$

$\therefore \sin A=\dfrac{2}{3}$ ($\because 0^\circ<A<180^\circ$)

(3) $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times3\times\sqrt{5}\times\dfrac{2}{3}=\sqrt{5}$

답 (1) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ (2) $\dfrac{2}{3}$ (3) $\sqrt{5}$

390

세 변의 길이의 합이 $a+b+c=18$이고, 내접원의 반지름의 길이가 $r=2$이므로

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)=\dfrac{1}{2}\times2\times18=18$

답 18

391

헤론의 공식을 적용하면

$s=\dfrac{5+6+7}{2}=\dfrac{\boxed{18}}{2}=\boxed{9}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\sqrt{s(s-5)(s-\boxed{6})(s-7)}=\sqrt{9\times(9-5)\times(9-6)\times(9-7)}$

$=\sqrt{9\times4\times3\times2}=\boxed{6\sqrt{6}}$

답 (가) 18 (나) 9 (다) 6 (라) $6\sqrt{6}$

유형 콕콕 본문 p.72~75

392 ②	**393** ①	**394** $\sqrt{10}$	**395** ④	**396** ③	**397** ①
398 ③	**399** $64\pi\,\text{cm}^3$		**400** $\dfrac{27\sqrt{2}}{2}$ m		**401** ③
402 ⑤	**403** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	**404** ③	**405** ④	**406** ①	**407** ⑤
408 $2\sqrt{110}$	**409** ⑤	**410** ③	**411** 25	**412** 6	**413** ④
414 ②	**415** 120°				

392

사인법칙에 의하여 $\dfrac{2}{\sin 30^\circ}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin C}$이므로

$2\sin C=2\sqrt{3}\sin 30^\circ$

$\therefore \sin C=2\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ<C<180^\circ$이므로 $C=60^\circ$ 또는 $C=120^\circ$

(i) $C=60^\circ$일 때, $A=90^\circ$이므로

$\overline{BC}^2=(2\sqrt{3})^2+2^2=12+4=16$

$\therefore \overline{BC}=4$

(ii) $C=120^\circ$일 때, $A=30^\circ$이므로 삼각형 ABC는 이등변삼각형이다.

$\therefore \overline{BC}=2$

(i), (ii)에서 $\overline{BC}=4$ ($\because \overline{BC}>3$)

답 ②

393

$\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos C=\frac{\sqrt{3}}{3}$에서

$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$

$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AC}}{\sin B}=\frac{\overline{AB}}{\sin C}$

$\therefore \overline{AC}=\frac{\overline{AB}\times\sin B}{\sin C}=\frac{8\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}=2\sqrt{6}$

답 ①

394

$\overline{BD}=\overline{CD}=2$이므로 직각삼각형 ABD에서

$\overline{AD}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

가

삼각형 ADC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 $C=45^\circ$이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{2\sqrt{5}}{\sin 45^\circ}=2R$

$\therefore R=\frac{2\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\frac{1}{2}=\sqrt{10}$

나

단계	채점 요소	비율
가	$\overline{AD}$의 길이 구하기	20%
나	삼각형 ADC의 외접원의 반지름의 길이 구하기	80%

답 $\sqrt{10}$

395

$A+B+C=180^\circ$이므로

$C=180^\circ-(75^\circ+60^\circ)=45^\circ$

외접원 O의 반지름의 길이가 4이므로 사인법칙의 변형에 의하여

$\overline{AB}=2\times4\times\sin 45^\circ=2\times4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}$

$\overline{AC}=2\times4\times\sin 60^\circ=2\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$

$\therefore \overline{AB}+\overline{AC}=4\sqrt{2}+4\sqrt{3}=4(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

답 ④

396

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙의 변형에 의하여

$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}$

$=\frac{a+b+c}{2R}=\frac{15}{2\times5}=\frac{3}{2}$

답 ③

397

$\frac{a+b}{5}=\frac{b+c}{7}=\frac{c+a}{6}=k\ (k>0)$라 하면

$a+b=5k,\ b+c=7k,\ c+a=6k$

위의 세 식을 연립하여 풀면

$a=2k,\ b=3k,\ c=4k$

$\therefore \sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=2k:3k:4k$

$=2:3:4$

답 ①

398

삼각형 ABC에서 $A+B+C=180^\circ$이므로

$A=180^\circ-(105^\circ+45^\circ)=30^\circ$

운동장의 반지름의 길이를 R m라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{60}{\sin 30^\circ}=2R$

$\therefore R=\frac{60}{\frac{1}{2}}\times\frac{1}{2}=60\,(\text{m})$

따라서 구하는 운동장의 지름의 길이는

$2\times60=120\,(\text{m})$

답 ③

399

삼각형 ABC에서 $A+B+C=180^\circ$이므로

$A=180^\circ-(65^\circ+85^\circ)=30^\circ$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R cm라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{4}{\sin 30^\circ}=2R$

$\therefore R=\frac{4}{\frac{1}{2}}\times\frac{1}{2}=4\,(\text{cm})$

따라서 구하는 약통의 부피는

$\pi\times4^2\times4=64\pi\,(\text{cm}^3)$

답 $64\pi\,\text{cm}^3$

400

삼각형 ABC에서 $\angle ACB=75^\circ-30^\circ=45^\circ$이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AC}}{\sin 30^\circ}=\frac{30}{\sin 45^\circ}$

$\therefore \overline{AC}=\frac{30}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\frac{1}{2}=15\sqrt{2}\,(\text{m})$

가

삼각형 ACD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{CD}}{\sin 75^\circ}=\frac{15\sqrt{2}}{\sin 90^\circ}$

$\therefore \overline{CD}=\frac{15\sqrt{2}}{1}\times\frac{9}{10}=\frac{27\sqrt{2}}{2}\,(\text{m})$

따라서 구하는 나무의 높이는 $\frac{27\sqrt{2}}{2}$ m이다.

나

단계	채점 요소	비율
가	$\overline{AC}$의 길이 구하기	40%
나	$\overline{CD}$의 길이를 구하여 나무의 높이 구하기	60%

답 $\frac{27\sqrt{2}}{2}$ m

401

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=3^2+4^2-2\times3\times4\times\cos 60^\circ$

$=9+16-2\times3\times4\times\frac{1}{2}=13$

$\overline{BC}>0$이므로 $\overline{BC}=\sqrt{13}$
삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면
$\dfrac{\sqrt{13}}{\sin 60^\circ}=2R$
$\therefore R=\dfrac{\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{39}}{3}$

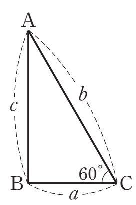
답 ③

402

사각형 ABCD가 원에 내접하므로 $B+D=180^\circ$
즉, $D=180^\circ-B$이므로
$\cos D=\cos(180^\circ-B)=-\cos B=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$
따라서 삼각형 DAC에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{AC}^2=(2\sqrt{2})^2+3^2-2\times2\sqrt{2}\times3\times\cos D$
$\quad=8+9-2\times2\sqrt{2}\times3\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$
$\quad=8+9+8=25$
$\overline{AC}>0$이므로 $\overline{AC}=5$

답 ⑤

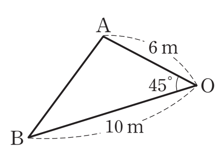
403



$\overline{AC}=2\overline{BC}$이므로 $b=2a$
삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos 60^\circ$
$\quad=a^2+(2a)^2-2\times a\times 2a\times\dfrac{1}{2}$
$\quad=3a^2$
$a>0$, $c>0$이므로 $c=\sqrt{3}a$
삼각형 ABC에서 코사인법칙의 변형에 의하여
$\cos A=\dfrac{(2a)^2+(\sqrt{3}a)^2-a^2}{2\times2a\times\sqrt{3}a}$
$\quad=\dfrac{4a^2+3a^2-a^2}{4\sqrt{3}a^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

답 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

404



오른쪽 그림과 같이 중계용 카메라의 위치를 O라 하면
$\overline{OA}=6\,\text{m}$, $\overline{OB}=10\,\text{m}$, $\angle AOB=45^\circ$
삼각형 OAB에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{AB}^2=6^2+10^2-2\times6\times10\times\cos 45^\circ$
$\quad=36+100-2\times6\times10\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$\quad=136-60\sqrt{2}=4(34-15\sqrt{2})$

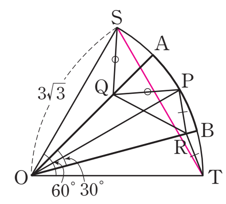
답 ③

405

시계에서 긴 바늘과 짧은 바늘 사이의 각의 크기 중 작은 각의 크기는
$360^\circ\times\dfrac{2}{12}=60^\circ$
두 바늘 끝 사이의 거리를 x m라 하면 코사인법칙에 의하여
$x^2=3^2+2^2-2\times3\times2\times\cos 60^\circ$
$\quad=9+4-2\times3\times2\times\dfrac{1}{2}=7$
$x>0$이므로 $x=\sqrt{7}\,(\text{m})$
따라서 두 바늘 끝 사이의 거리는 $\sqrt{7}$ m이다.

답 ④

406



오른쪽 그림과 같이
$\angle AOP=\angle AOS$, $\angle BOP=\angle BOT$
가 되도록 부채꼴 AOS, BOT를 붙여 생각해 보면
$\triangle QOP\equiv\triangle QOS$, $\triangle ROP\equiv\triangle ROT$이므로
$\overline{PQ}=\overline{SQ}$, $\overline{PR}=\overline{TR}$
즉, 삼각형 PQR의 둘레의 길이는
$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}=\overline{SQ}+\overline{QR}+\overline{RT}$
이고, 그 최솟값은 S, Q, R, T가 한 직선 위에 있을 때이므로
$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}\ge\overline{ST}$
이때, $\angle AOB=30^\circ$이므로 $\angle SOT=60^\circ$
삼각형 SOT에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{ST}^2=(3\sqrt{3})^2+(3\sqrt{3})^2-2\times3\sqrt{3}\times3\sqrt{3}\times\cos 60^\circ$
$\quad=27+27-2\times27\times\dfrac{1}{2}=27$
$\overline{ST}>0$이므로 $\overline{ST}=3\sqrt{3}$
따라서 삼각형 PQR의 둘레의 길이의 최솟값은 $3\sqrt{3}$이다.

답 ①

407

삼각형 ABC의 넓이가 $12\sqrt{3}$이므로
$\dfrac{1}{2}\times6\times8\times\sin C=12\sqrt{3}$
$\therefore \sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
이때, $90^\circ<C<180^\circ$이므로 $C=120^\circ$
따라서 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{AB}^2=6^2+8^2-2\times6\times8\times\cos 120^\circ$
$\quad=36+64-2\times6\times8\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=148$
$\overline{AB}>0$이므로 $\overline{AB}=2\sqrt{37}$

답 ⑤

408

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{BD}^2=5^2+3^2-2\times5\times3\times\cos 120^\circ$
$\quad=25+9-2\times5\times3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=49$
$\overline{BD}>0$이므로 $\overline{BD}=7$

㉮

삼각형 ABD에서 헤론의 공식에 의하여
$s=\dfrac{9+7+6}{2}=11$
따라서 삼각형 ABD의 넓이는
$\sqrt{11(11-9)(11-7)(11-6)}=2\sqrt{110}$

㉯

단계	채점 요소	비율
㉮	$\overline{BD}$의 길이 구하기	50%
㉯	삼각형 ABD의 넓이 구하기	50%

답 $2\sqrt{110}$

409

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=5:3:4$이므로
$a=5k$, $b=3k$, $c=4k\,(k>0)$로 놓으면 코사인법칙의 변형에 의하여

$\cos A=\dfrac{(3k)^2+(4k)^2-(5k)^2}{2\times3k\times4k}=0$

$0<A\leq90^\circ$이므로 $A=90^\circ$

한편, 사인법칙의 변형에 의하여

$a=2R\sin A=2\times3\times\sin90^\circ=6$

$6=5k$에서 $k=\dfrac{6}{5}$

$\therefore\ b=3k=\dfrac{18}{5},\ c=4k=\dfrac{24}{5}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{18}{5}\times\dfrac{24}{5}\times\sin90^\circ=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{18}{5}\times\dfrac{24}{5}\times1=\dfrac{216}{25}$ 답 ⑤

410

삼각형 ABC의 넓이를 S, 외접원의 반지름의 길이를 R, 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$S=\dfrac{abc}{4R}=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$

이므로

$\dfrac{a+b+c}{abc}=\dfrac{1}{2rR}$

$\therefore\ \dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}=\dfrac{a+b+c}{abc}=\dfrac{1}{2rR}=\dfrac{1}{2\times4\times8}=\dfrac{1}{64}$ 답 ③

411

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R, 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면 사인법칙의 변형에 의하여

$\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{a}{2R}+\dfrac{b}{2R}+\dfrac{c}{2R}$

$=\dfrac{a+b+c}{2R}=\dfrac{a+b+c}{2\times6}=\dfrac{5}{3}$

$\therefore\ a+b+c=20$

따라서 삼각형 ABC의 넓이 S는

$S=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{2}\times20=25$ 답 25

412

직각삼각형 ABC의 빗변의 길이는 외접원의 지름의 길이와 같으므로

$\overline{AB}=2\times\dfrac{5}{2}=5$

$\overline{BC}=a,\ \overline{CA}=b$라 하면 피타고라스 정리에 의하여

$a^2+b^2=5^2=25$ …… ㉠

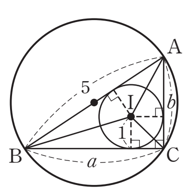
(가)

한편, 내접원의 반지름의 길이가 1이므로

$\triangle ABC=\triangle IBC+\triangle ICA+\triangle IAB$에서

$\dfrac{1}{2}ab=\dfrac{1}{2}\times1\times(a+b+5)$

$\therefore\ a+b=ab-5$ …… ㉡



㉡의 양변을 제곱하면

$a^2+2ab+b^2=(ab)^2-10ab+25$ …… ㉢

㉢에 ㉠을 대입하면

$25+2ab=(ab)^2-10ab+25$

$(ab)^2-12ab=0,\ ab(ab-12)=0$

$ab=12\ (\because\ ab\neq0)$

(나)

따라서 직각삼각형 ABC의 넓이 S는

$S=\dfrac{1}{2}ab=\dfrac{1}{2}\times12=6$

(다)

단계	채점 요소	비율
가	$\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=a^2+b^2$의 값 구하기	30%
나	$\overline{BC}\times\overline{CA}=ab$의 값 구하기	50%
다	직각삼각형 ABC의 넓이 구하기	20%

답 6

413

$\overline{AB}=a,\ \overline{BC}=b$라 하면 평행사변형 ABCD의 넓이는

$ab\sin60^\circ=6\sqrt{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}ab=6\sqrt{3}$

$\therefore\ ab=12$ …… ㉠

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{3})^2=a^2+b^2-2ab\cos60^\circ$

$12=a^2+b^2-2\times12\times\dfrac{1}{2}\ (\because\ ㉠)$

$\therefore\ a^2+b^2=24$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$(\overline{AB}+\overline{BC})^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=24+2\times12=48$

$a+b>0$이므로 $a+b=4\sqrt{3}$ 답 ④

414

$0^\circ<\theta<180^\circ$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times6\times15\times\sin\theta=\dfrac{1}{2}\times6\times15\times\dfrac{3}{5}=27$ 답 ②

415

평행사변형 ABCD의 넓이가 $15\sqrt{3}$이므로

$5\times6\times\sin C=15\sqrt{3}$ $\quad\therefore\ \sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$90^\circ<C<180^\circ$이므로 $C=120^\circ$ 답 120°

실력 콕콕 본문 p.76~77

416 ⑤	**417** ④	**418** $\dfrac{4}{3}$	**419** ②	**420** ①	**421** ④
422 ⑤	**423** $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$	**424** ③	**425** $4\sqrt{3}$	**426** ③	**427** ③
428 ④	**429** 2π	**430** $6\sqrt{3}$	**431** 20		

416

사인법칙에 의하여

$\dfrac{3}{\sin A}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}$

$3\sin 120^\circ=3\sqrt{3}\sin A$

$\therefore \sin A=3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{3\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore A=30^\circ$ 또는 $A=150^\circ$

그런데 $C=120^\circ$이므로 $A=30^\circ$

따라서 $B=180^\circ-(30^\circ+120^\circ)=30^\circ$이므로

$\cos B=\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 답 ⑤

417

$4\cos A\cos(B+C)+1=0$에서

$\cos(B+C)=\cos(180^\circ-A)=-\cos A$이므로

$4\cos A\times(-\cos A)+1=0$, $4\cos^2 A=1$

$\therefore \cos^2 A=\dfrac{1}{4}$

이때, $\sin^2 A=1-\cos^2 A=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$이므로

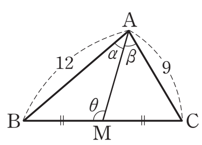
$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $(\because 0^\circ<A<180^\circ)$

따라서 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=2R=4$

$\therefore \overline{BC}=4\sin A=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$ 답 ④

418



$\angle BMA=\theta$라 하면 $\angle AMC=180^\circ-\theta$

삼각형 ABM에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BM}}{\sin\alpha}=\dfrac{12}{\sin\theta}$

$\therefore \overline{BM}=\dfrac{12}{\sin\theta}\times\sin\alpha$

삼각형 AMC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{CM}}{\sin\beta}=\dfrac{9}{\sin(180^\circ-\theta)}=\dfrac{9}{\sin\theta}$

$\therefore \overline{CM}=\dfrac{9}{\sin\theta}\times\sin\beta$

$\overline{BM}=\overline{CM}$이므로

$\dfrac{12}{\sin\theta}\times\sin\alpha=\dfrac{9}{\sin\theta}\times\sin\beta$

$\therefore \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\dfrac{4}{3}$ 답 $\dfrac{4}{3}$

419

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙의 변형에 의하여

$$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}$$
$$=\frac{a+b+c}{2R}=\frac{5}{2\times3}=\frac{5}{6}$$ 답 ②

420

x에 대한 이차방정식

$x^2\sin B-2x(\sin A+\sin B)+2(\sin A+\sin B)=0$

의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(\sin A+\sin B)^2-2\sin B(\sin A+\sin B)=0$

$\therefore \sin^2 A-\sin^2 B=0$

이때, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙의 변형에 의하여

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$이므로

$\left(\dfrac{a}{2R}\right)^2-\left(\dfrac{b}{2R}\right)^2=0$, $\dfrac{a^2}{4R^2}-\dfrac{b^2}{4R^2}=0$, $a^2-b^2=0$

$(a+b)(a-b)=0$

$\therefore a=b$ $(\because a>0,\ b>0)$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다. 답 ①

421

정사각형의 한 변의 길이가 4이므로

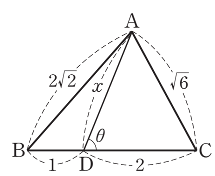
$\overline{BE}=\overline{FD}=1$, $\overline{EC}=\overline{CF}=3$

$\therefore \overline{AE}=\overline{AF}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$, $\overline{EF}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

삼각형 AEF에서 코사인법칙의 변형에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{(\sqrt{17})^2+(\sqrt{17})^2-(3\sqrt{2})^2}{2\times\sqrt{17}\times\sqrt{17}}=\dfrac{8}{17}$ 답 ④

422



$\angle ADC=\theta$라 하면 $\angle ADB=180^\circ-\theta$

$\overline{AD}=x$라 하면 삼각형 ADC에서

코사인법칙의 변형에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{2^2+x^2-(\sqrt{6})^2}{2\times2\times x}=\dfrac{x^2-2}{4x}$ …… ㉠

삼각형 ABD에서 코사인법칙의 변형에 의하여

$\cos(180^\circ-\theta)=\dfrac{1^2+x^2-(2\sqrt{2})^2}{2\times1\times x}=\dfrac{x^2-7}{2x}$ …… ㉡

$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$이므로

㉠, ㉡에서 $\dfrac{x^2-2}{4x}=-\dfrac{x^2-7}{2x}$

$x\neq0$이므로 $x^2-2=-2(x^2-7)$, $3x^2=16$

$\therefore x=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ $(\because x>0)$ 답 ⑤

423

$\overline{CM}=\overline{DM}=1$이므로

$\overline{BM}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

$\overline{BD}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

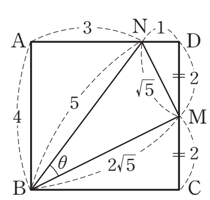
삼각형 BMD에서 코사인법칙의 변형에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{5})^2-1^2}{2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

$0^\circ<\theta<90^\circ$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ 답 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

424



$\overline{MC}=\overline{MD}=2$, $\overline{AN}=3$, $\overline{ND}=1$이므로

$\overline{MN}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

$\overline{BM}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

$\overline{BN}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$\angle MBN=\theta$라 하면 삼각형 BMN에서

코사인법칙의 변형에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{5^2+(2\sqrt{5})^2-(\sqrt{5})^2}{2\times5\times2\sqrt{5}}=\dfrac{40}{20\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$0^\circ<\theta<90^\circ$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

삼각형 BMN의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

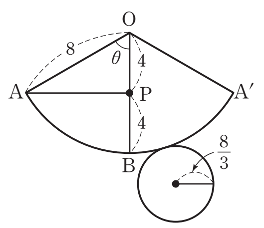
$\dfrac{\sqrt{5}}{\sin\theta}=2R$

$\therefore R=\dfrac{\sqrt{5}}{2\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}}=\dfrac{5}{2}$

답 ③

425

주어진 원뿔의 전개도를 그리면 오른쪽 그림과 같고, 전개도에서 구하는 최단거리는 선분 AP의 길이이다.



호 AA′의 길이는 원뿔의 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로

$\overset{\frown}{AA'}=2\pi\times\dfrac{8}{3}=\dfrac{16}{3}\pi$

이때, 두 점 A, B는 밑면인 원의 지름의 양 끝 점이므로

$\overset{\frown}{AB}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{16}{3}\pi=\dfrac{8}{3}\pi$

부채꼴 AOB에서 중심각의 크기를 θ라 하면

$8\theta=\dfrac{8}{3}\pi \qquad \therefore \theta=\dfrac{\pi}{3}$

따라서 삼각형 OAP에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AP}^2=8^2+4^2-2\times8\times4\times\cos\dfrac{\pi}{3}$

$\quad=64+16-2\times8\times4\times\dfrac{1}{2}=48$

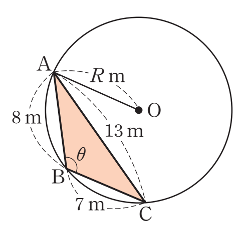
$\overline{AP}>0$이므로 $\overline{AP}=4\sqrt{3}$

따라서 구하는 최단거리는 $4\sqrt{3}$이다.

답 $4\sqrt{3}$

426

세 지점을 연결하여 만든 삼각형이 오른쪽 그림과 같을 때 삼각형 ABC에서



$\angle ABC=\theta$라 하면 코사인법칙의 변형에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{7^2+8^2-13^2}{2\times7\times8}=-\dfrac{1}{2}$

$0^\circ<\theta<180^\circ$이므로 $\theta=120^\circ$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R m라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{13}{\sin120^\circ}=2R$

$\therefore R=\dfrac{13}{2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{13}{\sqrt{3}}\,(\mathrm{m})$

따라서 구하는 원형 경기장의 넓이는

$\pi\left(\dfrac{13}{\sqrt{3}}\right)^2=\dfrac{169}{3}\pi\,(\mathrm{m}^2)$

답 ③

427

$\overline{BD}=x$라 하면 $\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle BCD$이므로

$\dfrac{1}{2}\times8\times6\times\sin120^\circ=\dfrac{1}{2}\times8\times x\times\sin60^\circ+\dfrac{1}{2}\times6\times x\times\sin60^\circ$

$\dfrac{1}{2}\times8\times6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\times8\times x\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\times6\times x\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$48=8x+6x,\ 14x=48$

$\therefore x=\dfrac{24}{7}$

답 ③

428

삼각형 ABC가 이등변삼각형이므로

$B=C=30^\circ$

사인법칙에 의하여 $\dfrac{b}{\sin30^\circ}=2\times4$

$b=8\sin30^\circ=8\times\dfrac{1}{2}=4$

$\therefore b=c=4$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times4\times4\times\sin120^\circ$

$\quad=\dfrac{1}{2}\times4\times4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$

답 ④

429

헤론의 공식에 의하여

$s=\dfrac{4+6+6}{2}=8$

따라서 삼각형의 넓이 S는

$S=\sqrt{8\times(8-4)(8-6)(8-6)}$

$\quad=\sqrt{8\times4\times2\times2}=8\sqrt{2}$

삼각형의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$8\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}r(4+6+6),\ 8\sqrt{2}=8r$

$\therefore r=\sqrt{2}$

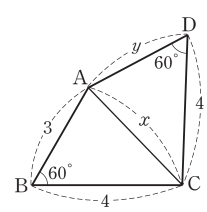
따라서 구하는 내접원의 넓이는

$\pi(\sqrt{2})^2=2\pi$

답 2π

430

$\overline{AC}=x$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여



$x^2=4^2+3^2-2\times4\times3\times\cos60^\circ$

$\quad=16+9-2\times4\times3\times\dfrac{1}{2}=13$

$x>0$이므로 $x=\sqrt{13}$

가

$\overline{AD}=y$라 하면 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{13})^2=4^2+y^2-2\times4\times y\times\cos60^\circ$

$13=16+y^2-2\times4\times y\times\dfrac{1}{2}$

$y^2-4y+3=0$, $(y-1)(y-3)=0$

$\therefore y=1$ 또는 $y=3$

그런데 $y\geq3$이므로 $y=3$

나

따라서 사각형 ABCD의 넓이를 S라 하면

$S=\triangle ABC+\triangle ACD=2\triangle ABC$

$=2\times\frac{1}{2}\times3\times4\times\sin60^\circ$

$=2\times\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=6\sqrt{3}$

다

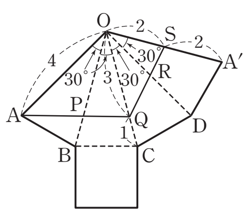
단계	채점 요소	비율
가	$\overline{AC}$의 길이 구하기	30%
나	$\overline{AD}$의 길이 구하기	40%
다	□ABCD의 넓이 구하기	30%

답 $6\sqrt{3}$

431

주어진 정사각뿔의 전개도는 오른쪽 그림과 같다. 전개도에서 $\overline{AQ}$, $\overline{QS}$를 이어 보면 $\overline{OQ}=3$, $\overline{OS}=2$, $\angle AOQ=\angle QOS=60^\circ$

한편, A → P → Q → R → S로 가는 최단거리는 $\overline{AQ}+\overline{QS}$이다.



가

삼각형 AOQ에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AQ}^2=4^2+3^2-2\times4\times3\times\cos60^\circ$

$=16+9-2\times4\times3\times\frac{1}{2}=13$

$\overline{AQ}>0$이므로 $\overline{AQ}=\sqrt{13}$

나

삼각형 QOS에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{QS}^2=3^2+2^2-2\times3\times2\times\cos60^\circ$

$=9+4-2\times3\times2\times\frac{1}{2}=7$

$\overline{QS}>0$이므로 $\overline{QS}=\sqrt{7}$

다

따라서 구하는 최단거리는 $\overline{AQ}+\overline{QS}=\sqrt{13}+\sqrt{7}$

$\therefore a+b=13+7=20$

라

단계	채점 요소	비율
가	점 A에서 점 S로 가는 최단거리 $\overline{AQ}+\overline{QS}$ 찾기	20%
나	$\overline{AQ}$의 길이 구하기	35%
다	$\overline{QS}$의 길이 구하기	35%
라	$a+b$의 값 구하기	10%

답 20

III. 수열

08 등차수열

개념 콕콕 본문 p.81

432

(1) 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=4n-3$이므로 $n=1, 2, 3, 4, 5$를 차례대로 대입하면

$a_1=4\times1-3=1$

$a_2=4\times2-3=5$

$a_3=4\times3-3=9$

$a_4=4\times4-3=13$

$a_5=4\times5-3=17$

$\therefore 1, 5, 9, 13, 17$

(2) 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=\frac{n-1}{3n}$이므로 $n=1, 2, 3, 4, 5$를 차례대로 대입하면

$a_1=\frac{1-1}{3\times1}=0$

$a_2=\frac{2-1}{3\times2}=\frac{1}{6}$

$a_3=\frac{3-1}{3\times3}=\frac{2}{9}$

$a_4=\frac{4-1}{3\times4}=\frac{1}{4}$

$a_5=\frac{5-1}{3\times5}=\frac{4}{15}$

$\therefore 0, \frac{1}{6}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}, \frac{4}{15}$

답 (1) 1, 5, 9, 13, 17 (2) $0, \frac{1}{6}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}, \frac{4}{15}$

433

(1) 수열 $1, -2, 3, -4, \cdots$은 짝수 번째 항에서 음의 정수가 나오므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=(-1)^{n+1}\times n$이다.

(2) 수열 $\frac{1}{11}, \frac{2}{12}, \frac{3}{13}, \frac{4}{14}, \cdots$에서 각 항은 분자와 분모의 차가 10이므로 제n항의 분자를 n이라 하면 분모는 $n+10$이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=\frac{n}{n+10}$이다.

답 (1) $a_n=(-1)^{n+1}\times n$ (2) $a_n=\frac{n}{n+10}$

434

(1) $0-(-2)=2$에서 공차가 2이므로 주어진 수열은

$-2, 0, \boxed{2}, 4, \boxed{6}, \cdots$

(2) $43-62=-19$에서 공차가 -19이므로 주어진 수열은

$100, \boxed{81}, 62, 43, \boxed{24}, 5, \cdots$

답 (1) 2, 6 (2) 81, 24

435

(1) $a_n=1+(n-1)\times5=5n-4$

(2) 첫째항이 101, 공차가 -2이므로

$a_n=101+(n-1)\times(-2)=-2n+103$

답 (1) $a_n=5n-4$ (2) $a_n=-2n+103$

436

(1) 첫째항이 19, 공차가 9이므로

$a_n=19+(n-1)\times 9=9n+10$

$\therefore a_{10}=9\times 10+10=100$

(2) 첫째항이 $\frac{1}{12}$, 공차가 $\frac{1}{12}$이므로

$a_n=\frac{1}{12}+(n-1)\times\frac{1}{12}=\frac{n}{12}$

$\therefore a_{10}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$

(3) 첫째항이 $9\pi-1$, 공차가 $1-\pi$이므로

$a_n=9\pi-1+(n-1)\times(1-\pi)$

$=(10-n)\pi+(n-2)$

$\therefore a_{10}=(10-10)\pi+(10-2)=8$

답 (1) 100 (2) $\frac{5}{6}$ (3) 8

437

(1) 공차를 d라 하면

$a_5=1+(5-1)d=9$

$4d=8 \qquad \therefore d=2$

(2) 공차를 d라 하면

$a_{11}=-3+(11-1)d=-13$

$10d=-10 \qquad \therefore d=-1$

답 (1) 2 (2) -1

438

a가 8과 -4의 등차중항이므로

$a=\frac{8+(-4)}{2}=2$

답 2

439

(1) $\frac{10(3+25)}{2}=140$

(2) $\frac{10\{2\times 100+(10-1)\times(-5)\}}{2}=775$

(3) 첫째항이 5, 공차가 1인 등차수열의 첫째항부터 제11항까지의 합은

$\frac{11\{2\times 5+(11-1)\times 1\}}{2}=110$

답 (1) 140 (2) 775 (3) 110

440

(1) 첫째항이 -3, 공차가 6인 등차수열의 제n항을 69라 하면

$69=-3+(n-1)\times 6$

$6n=78 \qquad \therefore n=13$

따라서 첫째항부터 제13항까지의 합은

$\frac{13(-3+69)}{2}=429$

(2) 첫째항이 36, 공차가 -7인 등차수열의 제n항을 -13이라 하면

$-13=36+(n-1)\times(-7)$

$7n=56 \qquad \therefore n=8$

따라서 첫째항부터 제8항까지의 합은

$\frac{8\{36+(-13)\}}{2}=92$

답 (1) 429 (2) 92

441

(1) $S_n=-2n^2+2n$에서

(i) $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=-2n^2+2n-\{-2(n-1)^2+2(n-1)\}$

$=-2n^2+2n-(-2n^2+4n-2+2n-2)$

$=-2n^2+2n+2n^2-6n+4$

$=-4n+4$ …… ㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=-2\times 1^2+2\times 1=0$

이때, $a_1=0$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=-4n+4$

(2) $S_n=n^2-n-1$에서

(i) $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2-n-1-\{(n-1)^2-(n-1)-1\}$

$=n^2-n-1-(n^2-2n+1-n+1-1)$

$=n^2-n-1-n^2+3n-1$

$=2n-2$ …… ㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=1^2-1-1=-1$

이때, $a_1=-1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 다르므로

$a_1=-1$, $a_n=2n-2$ (단, $n\geq 2$)

답 (1) $a_n=-4n+4$

(2) $a_1=-1$, $a_n=2n-2$ $(n\geq 2)$

442

$S_n=n^2$에서

(i) $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2-(n-1)^2=n^2-(n^2-2n+1)$

$=2n-1$ …… ㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=1^2=1$

이때, $a_1=1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n-1$

$\therefore a_{20}=2\times 20-1=39$

다른 풀이

$a_{20}=S_{20}-S_{19}=20^2-19^2$

$=(20-19)\times(20+19)=39$

답 39

유형 콕콕 본문 p.82~85

443 ②	444 ③	445 -15	446 ①	447 ⑤	
448 제9항		449 ④	450 ②	451 1	452 ②
453 ④	454 96	455 ③	456 ⑤	457 30	
458 345	459 14	460 40	461 16	462 32	463 7
464 500	465 ⑤	466 ③	467 -2	468 15	

443

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_7=a+6d=13$ …… ㉠

$a_{13}=a+12d=25$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $d=2$

따라서 $a_n=1+(n-1)\times2=2n-1$이므로

$a_{10}=2\times10-1=19$

다른 풀이

$a=1$, $d=2$이고 $a_{10}=a+9d$이므로

$a_{10}=1+9\times2=19$

답 ②

444

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_7=4a_2$에서 $a+6d=4(a+d)$

$\therefore 3a-2d=0$ …… ㉠

$a_3+a_5+a_7=42$에서

$(a+2d)+(a+4d)+(a+6d)=42$

$\therefore 3a+12d=42$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $d=3$

따라서 $a_n=2+(n-1)\times3=3n-1$이므로

$a_{11}=3\times11-1=32$

다른 풀이

$a=2$, $d=3$이고 $a_{11}=a+10d$이므로

$a_{11}=2+10\times3=32$

답 ③

445

제3항과 제7항은 절댓값이 같고 부호가 반대이므로

$a_3=-a_7$

이때, 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a+2d=-(a+6d)$

$2a+8d=0 \qquad \therefore a+4d=0$ …… ㉠

한편, $a_4=a+3d=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=12$, $d=-3$

$\therefore a_{10}=a+9d=12+9\times(-3)=-15$

답 -15

446

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 첫째항이 57이므로

$a_6=57+(6-1)d=57+5d=37$에서

$5d=-20 \qquad \therefore d=-4$

$\therefore a_n=57+(n-1)\times(-4)=-4n+61$

$-4n+61<0$에서 $4n>61$

$\therefore n>\frac{61}{4}=15.25$

따라서 처음으로 음수가 나오는 항은 제16항이다.

답 ①

447

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_6=a+5d=-5$ …… ㉠

$a_{21}=a+20d=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-8$, $d=\frac{3}{5}$

$\therefore a_n=-8+(n-1)\times\frac{3}{5}=\frac{3}{5}n-\frac{43}{5}$

$\frac{3}{5}n-\frac{43}{5}>0$에서 $\frac{3}{5}n>\frac{43}{5}$

$\therefore n>\frac{43}{3}=14.33\cdots$

따라서 처음으로 양수가 나오는 항은 제15항이다.

답 ⑤

448

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=4$ …… ㉠

$a_5:a_{10}=2:5$에서 $2a_{10}=5a_5$이므로

$2(a+9d)=5(a+4d)$

$2a+18d=5a+20d \qquad \therefore 3a+2d=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $d=3$

가

$\therefore a_n=-2+(n-1)\times3=3n-5$

나

이때, 22를 제n항이라 하면 $3n-5=22$

$3n=27 \qquad \therefore n=9$

따라서 22는 등차수열 $\{a_n\}$의 제9항이다.

다

단계	채점 요소	비율
가	등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차 구하기	50%
나	일반항 a_n 구하기	20%
다	22가 제몇 항인지 구하기	30%

답 제9항

449

수열 5, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, 29는 첫째항이 5, 제7항이 29인 등차수열을 이루므로 공차를 d라 하면

$5+6d=29$

$6d=24 \qquad \therefore d=4$

따라서 수열 5, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, 29는 첫째항이 5, 공차가 4인 등차수열이고, a_3은 제4항이므로

$a_3=5+3\times4=17$

다른 풀이

수열 5, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, 29가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 이 수열의 공차를 d라 하면 세 수 5, a_3, 29는 이 순서대로 공차가 $3d$인 등차수열을 이룬다.

따라서 a_3은 5와 29의 등차중항이므로

$a_3=\frac{5+29}{2}=17$

답 ④

450

등차수열 -12, x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_{99}, 70에서 두 수 -12와 70 사이에 99개의 수가 있으므로 70은 제101항이다.

주어진 등차수열의 공차를 d라 하면 첫째항이 -12이므로

$70=-12+100d$

$100d=82 \qquad \therefore d=\frac{41}{50}$

답 ②

451

주어진 등차수열의 공차를 d라 하면

수열 $3, a_1, a_2, \cdots, a_m, 13$에서 첫째항은 3, 제$(m+2)$항은 13이므로

$3+(m+1)d=13 \qquad \therefore d=\frac{10}{m+1}$ …… ㉠

가

또한 수열 $13, b_1, b_2, \cdots, b_n, 33$에서 첫째항을 13으로 보면 제$(n+2)$항은 33이므로

$13+(n+1)d=33 \qquad \therefore d=\frac{20}{n+1}$ …… ㉡

나

㉠, ㉡에서 $\frac{10}{m+1}=\frac{20}{n+1}$이므로

$10(n+1)=20(m+1)$, $n+1=2(m+1)$

$\therefore n-2m=1$

다

단계	채점 요소	비율
가	공차를 m에 대한 식으로 나타내기	35%
나	공차를 n에 대한 식으로 나타내기	35%
다	$n-2m$의 값 구하기	30%

답 1

452

세 수 $2a-15$, a^2-3a, $6a-5$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(a^2-3a)=(2a-15)+(6a-5)$

$2a^2-6a=8a-20$, $a^2-7a+10=0$

$(a-2)(a-5)=0 \qquad \therefore a=2$ 또는 $a=5$

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은

$2+5=7$

답 ②

453

a_1, a_3, a_5는 이 순서대로 등차수열을 이루므로 a_3은 a_1과 a_5의 등차중항이다. 또한 a_2, a_4, a_6은 이 순서대로 등차수열을 이루므로 a_4는 a_2와 a_6의 등차중항이다.

즉, $a_1+a_5=2a_3$, $a_2+a_6=2a_4$이므로

$a_1+a_3+a_5=2a_3+a_3=3a_3=30 \qquad \therefore a_3=10$

$a_2+a_4+a_6=2a_4+a_4=3a_4=51 \qquad \therefore a_4=17$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 공차는

$a_4-a_3=17-10=7$

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$\begin{aligned} a_2+a_4+a_6&=(a_1+d)+(a_3+d)+(a_5+d) \\ &=(a_1+a_3+a_5)+3d \end{aligned}$$

$30+3d=51$, $3d=21$

$\therefore d=7$

답 ④

454

직각삼각형의 세 변의 길이가 작은 것부터 순서대로 $a, b, 4$ $(a>0, b>0, a+b>4)$이므로 피타고라스 정리에 의하여

$a^2+b^2=4^2$ …… ㉠

가

또한 세 수 $a, b, 4$는 이 순서대로 등차수열을 이루므로 b는 a와 4의 등차중항이다.

즉, $2b=a+4 \qquad \therefore a=2b-4$ …… ㉡

나

㉡을 ㉠에 대입하면

$(2b-4)^2+b^2=4^2$, $4b^2-16b+16+b^2=16$

$5b^2-16b=0$, $b(5b-16)=0$

$\therefore b=\frac{16}{5}$ $(\because b>0)$

$b=\frac{16}{5}$을 ㉡에 대입하면

$a=2\times\frac{16}{5}-4=\frac{12}{5}$

다

따라서 직각삼각형의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\times\frac{12}{5}\times\frac{16}{5}=\frac{96}{25}$

$\therefore 25S=25\times\frac{96}{25}=96$

라

단계	채점 요소	비율
가	피타고라스 정리를 이용하여 a, b에 대한 식 나타내기	30%
나	등차중항을 이용하여 a, b에 대한 식 나타내기	30%
다	가, 나에서 구한 식을 이용하여 a, b의 값 구하기	20%
라	$25S$의 값 구하기	20%

답 96

455

삼차방정식 $x^3-6x^2+4x+k=0$의 세 실근이 등차수열을 이루므로 세 실근을 $a-d, a, a+d$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a-d)+a+(a+d)=6$ …… ㉠

$a(a-d)+a(a+d)+(a-d)(a+d)=4$ …… ㉡

$a(a-d)(a+d)=-k$ …… ㉢

㉠에서 $3a=6 \qquad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉡에 대입하면

$2(2-d)+2(2+d)+(2-d)(2+d)=4$

$4-2d+4+2d+4-d^2=4$, $d^2=8$

$\therefore d=\pm 2\sqrt{2}$

따라서 $a=2$, $d=-2\sqrt{2}$ 또는 $a=2$, $d=2\sqrt{2}$를 ㉢에 대입하면

$2\times(2+2\sqrt{2})\times(2-2\sqrt{2})=-k$

$\therefore k=8$

다른 풀이

삼차방정식 $x^3-6x^2+4x+k=0$의 세 실근이 등차수열을 이루므로 세 실근을 $a-d, a, a+d$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a-d)+a+(a+d)=6$

$3a=6 \qquad \therefore a=2$

따라서 주어진 삼차방정식의 한 근이 $x=2$이므로 주어진 삼차방정식 $x^3-6x^2+4x+k=0$에 $x=2$를 대입하면

$8-6\times2^2+4\times2+k=0$

$-8+k=0 \qquad \therefore k=8$

답 ③

456

등차수열을 이루는 네 수를 $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$라 하면

$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=16$ …… ㉠

$(a-3d)(a+3d)=-128$ …… ㉡

㉠에서 $4a=16 \qquad \therefore a=4$

$a=4$를 ㉡에 대입하면

$(4-3d)(4+3d)=-128$

$16-9d^2=-128$, $9d^2=144$

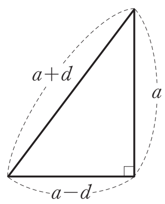
$d^2=16 \qquad \therefore d=\pm4$

따라서 네 수는 -8, 0, 8, 16이므로 가장 큰 수는 16이다.

답 ⑤

457

오른쪽 그림과 같이 직각삼각형의 세 변의 길이를 각각 $a-d$, a, $a+d$ $\left(0<d<\dfrac{a}{2}\right)$라 하면



피타고라스 정리에 의하여

$(a+d)^2=(a-d)^2+a^2$

$a^2-4ad=0$, $a(a-4d)=0$

$\therefore a=4d$ ($\because a>0$) …… ㉠

한편, 직각삼각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times(a-d)\times a=216$

$\therefore a^2-ad=432$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$16d^2-4d^2=432$, $12d^2=432$

$d^2=36 \qquad \therefore d=6$ ($\because d>0$)

따라서 직각삼각형의 빗변의 길이는

$a+d=4d+d=5d=5\times6=30$

답 30

458

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_4=a+3d=11$ …… ㉠

$a_{12}=a+11d=35$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $d=3$

따라서 첫째항부터 제15항까지의 합 S_{15}는

$S_{15}=\dfrac{15\{2\times2+(15-1)\times3\}}{2}=345$

답 345

459

조건 (가), (나)에서 $a_1+a_2=13$, $a_{n-1}+a_n=67$이므로

$a_1+a_2+a_{n-1}+a_n=13+67=80$에서

$a_1+(a_1+d)+(a_n-d)+a_n=80$

$2(a_1+a_n)=80$

$\therefore a_1+a_n=40$

한편, 조건 (다)에서 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=280$이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=280$

$\dfrac{40}{2}n=280$, $20n=280$

$\therefore n=14$

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

조건 (가)에서

$a_1+a_2=a+(a+d)=2a+d=13$ …… ㉠

조건 (나)에서

$a_{n-1}+a_n=a+(n-2)d+a+(n-1)d$

$=2a+(2n-3)d=67$ …… ㉡

조건 (다)에서

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}=280$ …… ㉢

㉡$-$㉠을 하면 $(2n-4)d=54$

$(n-2)d=27 \qquad \therefore (n-1)d=d+27$ …… ㉣

㉣을 ㉢에 대입하면

$\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}=\dfrac{n(2a+d+27)}{2}=\dfrac{n(13+27)}{2}$ ($\because$ ㉠)

$=\dfrac{40}{2}n=280$

$20n=280 \qquad \therefore n=14$

답 14

460

등차수열 3, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n, 33은 첫째항이 3, 끝항이 33, 항의 개수가 $n+2$이므로 첫째항부터 제 $(n+2)$항까지의 합은

$\dfrac{(n+2)(3+33)}{2}=216$

$18(n+2)=216$

$n+2=12 \qquad \therefore n=10$

즉, $n=10$이므로 33은 주어진 등차수열의 제12항이다.

따라서 $3+11d=33$이므로

$11d=30 \qquad \therefore d=\dfrac{30}{11}$

$\therefore n+11d=10+11\times\dfrac{30}{11}=40$

답 40

461

등차수열 -5, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n, 25는 첫째항이 -5, 끝항이 25, 항의 개수는 $n+2$이므로 첫째항부터 제$(n+2)$항까지의 합은

$\dfrac{(n+2)(-5+25)}{2}=160$

$10(n+2)=160$

$n+2=16 \qquad \therefore n=14$

가

즉, $n=14$이므로 25는 주어진 등차수열의 제16항이다.

따라서 $-5+15d=25$이므로

$15d=30 \qquad \therefore d=2$

나

$\therefore n+d=14+2=16$

다

단계	채점 요소	비율
가	n의 값 구하기	50%
나	d의 값 구하기	40%
다	$n+d$의 값 구하기	10%

답 16

462

첫째항이 14, 공차가 -4인 등차수열의 일반항 a_n은

$a_n=14+(n-1)\times(-4)=-4n+18$

$-4n+18<0$에서 $4n>18$

$\therefore n>\frac{18}{4}=4.5$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 제5항부터 음수이므로 첫째항부터 제4항까지의 합이 최대이다.

따라서 S_n의 최댓값은

$S_4=\frac{4\{2\times14+(4-1)\times(-4)\}}{2}=\frac{4\times16}{2}=32$

다른 풀이

첫째항이 14, 공차가 -4인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{n\{2\times14+(n-1)\times(-4)\}}{2}\\&=\frac{n(-4n+32)}{2}\\&=-2n^2+16n\\&=-2(n^2-8n)\\&=-2(n-4)^2+32\end{aligned}$$

따라서 $n=4$일 때, 즉 제4항까지의 합이 최대이고 최댓값은 32이다.

답 32

463

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 첫째항부터 제4항까지의 합 S_4는

$S_4=\frac{4\{2\times26+(4-1)d\}}{2}=104+6d$

또한 첫째항부터 제10항까지의 합 S_{10}은

$S_{10}=\frac{10\{2\times26+(10-1)d\}}{2}=260+45d$

이때, $S_4=S_{10}$이므로

$104+6d=260+45d$

$39d=-156 \qquad \therefore d=-4$

$\therefore a_n=26+(n-1)\times(-4)=-4n+30$

$-4n+30<0$에서 $4n>30$

$\therefore n>\frac{30}{4}=7.5$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 제8항부터 음수이므로 첫째항부터 제7항까지의 합 S_7이 최대이다.

$\therefore n=7$

다른 풀이

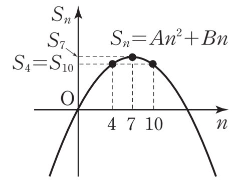
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 첫째항부터 제n항까지의 합은

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}\\&=\frac{n\{dn+(2a-d)\}}{2}\\&=\frac{d}{2}n^2+\frac{2a-d}{2}n\end{aligned}$$

이므로 S_n은 n에 대한 이차식이다.

이때, $a=26>0$이므로 $d>0$이면 $a_n>0$이므로 S_n은 계속 증가하게 되어 $S_4=S_{10}$이 될 수 없다.

즉, $d<0$이므로 $S_n=An^2+Bn\ (A<0)$으로 놓으면 $S_4=S_{10}$이므로 이차함수 $S_n=An^2+Bn$의 그래프는 축 $n=\frac{4+10}{2}=7$을 기준으로 좌우대칭이다.



따라서 S_n은 $n=7$에서 최댓값을 갖는다.

답 7

464

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하고, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_{10}=\frac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=5(2a+9d)=100$

$\therefore 2a+9d=20$ …… ㉠

제11항부터 제20항까지의 합이 300이므로

$S_{20}-S_{10}=\frac{20\{2a+(20-1)d\}}{2}-100=300$

$10(2a+19d)=400$

$\therefore 2a+19d=40$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $d=2$

따라서 제21항부터 제30항까지의 합은

$$\begin{aligned}S_{30}-S_{20}&=\frac{30\{2\times1+(30-1)\times2\}}{2}-400\\&=900-400=500\end{aligned}$$

답 500

465

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_5=\frac{5\{2a+(5-1)d\}}{2}=5a+10d=80$

$\therefore a+2d=16$ …… ㉠

$S_{10}=\frac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=5(2a+9d)=235$

$\therefore 2a+9d=47$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=10$, $d=3$

$$\begin{aligned}\therefore S_{15}&=\frac{15\{2\times10+(15-1)\times3\}}{2}\\&=\frac{15(20+42)}{2}=465\end{aligned}$$

답 ⑤

466

$S_n=3n^2-n+1$에서

(i) $n\ge2$일 때

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=3n^2-n+1-\{3(n-1)^2-(n-1)+1\}\\&=3n^2-n+1-(3n^2-7n+5)\\&=6n-4\end{aligned}$$ …… ㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=3\times1^2-1+1=3$

이때, $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 다르므로 (i), (ii)에서

$a_1=3$, $a_n=6n-4$ (단, $n\ge2$)

$\therefore a_5=6\times5-4=26$

$\therefore a_1+a_5=3+26=29$

다른 풀이

$a_1=S_1=3\times1^2-1+1=3$이고,

$a_5=S_5-S_4$
$=(3\times5^2-5+1)-(3\times4^2-4+1)$
$=71-45=26$
$\therefore a_1+a_5=3+26=29$ 답 ③

467

$S_n=n^2-an+b$에서
(i) $n\geq2$일 때
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=n^2-an+b-\{(n-1)^2-a(n-1)+b\}$
$=n^2-an+b-\{n^2-(2+a)n+1+a+b\}$
$=2n-a-1$
(ii) $n=1$일 때
$a_1=S_1=1-a+b=4$
$\therefore -a+b=3$ …… ㉠
한편, $a_{15}=30$이므로
$a_{15}=2\times15-a-1=30$
$29-a=30$ $\therefore a=-1$
가

$a=-1$을 ㉠에 대입하면
$1+b=3$ $\therefore b=2$
나

$\therefore ab=-1\times2=-2$
다

단계	채점 요소	비율
가	a의 값 구하기	70%
나	b의 값 구하기	20%
다	ab의 값 구하기	10%

답 -2

468

$S_n=n^2+3n$에서
(i) $n\geq2$일 때
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=n^2+3n-\{(n-1)^2+3(n-1)\}$
$=n^2+3n-(n^2+n-2)$
$=2n+2$ …… ㉠
(ii) $n=1$일 때
$a_1=S_1=1^2+3\times1=4$
이때, $a_1=4$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로 (i), (ii)에서
$a_n=2n+2$
따라서 $a_{2n-1}=2(2n-1)+2=4n$이므로 첫째항이 4, 끝항이 $4n$, 항의 개수가 n인 등차수열의 합을 구하면
$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}=\frac{n(4+4n)}{2}=480$
$2n^2+2n=480$, $n^2+n-240=0$
$(n+16)(n-15)=0$
$\therefore n=15$ ($\because n\geq1$) 답 15

실력 콕콕

본문 p.86~87

469 ②	470 183	471 24	472 ③	473 ④	474 21
475 ④	476 13	477 ②	478 ③	479 15	480 22
481 2	482 ③	483 284	484 43		

469

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면 공차가 6이므로
$a_n=a+(n-1)\times6$
이때, $|a_2-3|=|a+6-3|=|a+3|$,
$|a_3-3|=|a+12-3|=|a+9|$
$|a_2-3|=|a_3-3|$에서
$|a+3|=|a+9|$, $a+3=\pm(a+9)$
따라서 $a=-6$이므로
$a_5=-6+(5-1)\times6=-6+24=18$ 답 ②

470

$\{a_n\}$: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, $\cdots$
$\{b_n\}$: 6, 9, 12, 15, 18, 21, $\cdots$
$\{c_n\}$: 9, 15, 21, $\cdots$
즉, 수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 9, 공차가 6인 등차수열이므로
$c_n=9+(n-1)\times6=6n+3$
$\therefore c_{30}=6\times30+3=183$

다른 풀이
수열 $\{a_n\}$의 n번째 항과 수열 $\{b_n\}$의 m번째 항이 공통인 항이라 하면
$2n+1=3m+3$, $2n-2=3m$, $2(n-1)=3m$
n, m이 자연수이므로 m은 2의 배수이다.
$\therefore m=2k$ (단, k는 자연수)
따라서 c_{30}은 $m=60$일 때이므로
$c_{30}=b_{60}=3\times60+3=183$ 답 183

471

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_3+a_5=(a+2d)+(a+4d)=36$
$2a+6d=36$
$\therefore a+3d=18$ …… ㉠
$a_2a_4=(a+d)(a+3d)=180$
$18(a+d)=180$ ($\because$ ㉠)
$\therefore a+d=10$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6$, $d=4$
$\therefore a_n=6+(n-1)\times4=4n+2$
이때, $a_n<100$에서 $4n+2<100$
$4n<98$ $\therefore n<\frac{98}{4}=24.5$
따라서 자연수 n의 최댓값은 24이다. 답 24

472

첫째항이 $-\frac{2}{3}$, 공차가 $\frac{2}{9}$인 등차수열을 $\{a_n\}$이라 하면
$a_n=-\frac{2}{3}+(n-1)\times\frac{2}{9}=\frac{2}{9}(n-4)$
이때, a_n이 자연수가 되려면 $n-4$의 값이 9의 배수이어야 한다.
즉, $n-4=9$, 18, 27, $\cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$에서 처음으로 자연수가 나오는 항은 제13항이다.

답 ③

473

다섯 개의 수 $1, p, q, r, s$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 공차를 d라 하면

$s=p+3d$

$s-p=9$에서 $3d=9$

$\therefore d=3$

$\therefore r=1+3d=1+3\times3=10$

답 ④

474

다섯 개의 수 $1, a, b, c, 13$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로 공차를 d라 하면

$a=b-d, c=b+d$

b는 1과 13의 등차중항이므로

$2b=1+13=14 \qquad \therefore b=7$

$\therefore a+b+c=(b-d)+b+(b+d)=3b=3\times7=21$

다른 풀이

b는 a와 c, 1과 13의 등차중항이므로

$2b=a+c=1+13=14 \qquad \therefore b=7$

$\therefore a+b+c=(a+c)+b=14+7=21$

답 21

475

등차수열$\{a_n\}$의 첫째항이 5이므로 공차를 d라 하면

$a_6=5+5d=-5$

$5d=-10 \qquad \therefore d=-2$

$\therefore a_n=5+(n-1)\times(-2)=-2n+7$

이때, $a_n+a_{n+1}=(-2n+7)+\{-2(n+1)+7\}$

$=-4n+12$

$\therefore |a_1+a_2|+|a_2+a_3|+|a_3+a_4|+\cdots+|a_{10}+a_{11}|$

$=|8|+|4|+|0|+|-4|+\cdots+|-28|$

$=(8+4+0)+(4+8+\cdots+28)$

$=12+\dfrac{7(4+28)}{2}$

$=12+112=124$

답 ④

476

조건 (가)에서 $a_1+a_2+a_3+a_4=26$

조건 (나)에서 $a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=134$

$\therefore a_1+a_2+a_3+a_4+a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=26+134=160$

이때, 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로

$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=a_4+a_{n-3}$

$4(a_1+a_n)=160 \qquad \therefore a_1+a_n=40$

또한 조건 (다)에서 $\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=260$

$\dfrac{40}{2}n=260,\ 20n=260$

$\therefore n=13$

답 13

477

등차수열 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{21}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

S는 첫째항이 a, 공차가 $2d$, 항의 개수가 11인 등차수열의 합이므로

$S=a_1+a_3+\cdots+a_{21}$

$=\dfrac{11\{2a+(11-1)\times2d\}}{2}$

$=\dfrac{11(2a+20d)}{2}$

T는 첫째항이 $a+d$, 공차가 $2d$, 항의 개수가 10인 등차수열의 합이므로

$T=a_2+a_4+\cdots+a_{20}$

$=\dfrac{10\{2(a+d)+(10-1)\times2d\}}{2}$

$=\dfrac{10(2a+20d)}{2}$

$\therefore S:T=\dfrac{11(2a+20d)}{2}:\dfrac{10(2a+20d)}{2}=11:10$

보충 설명

조건을 만족시키는 가장 간단한 등차수열 $1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots, 20, 21$을 이용하여 직접 S, T의 값을 구하여 비교할 수도 있다.

답 ②

478

첫째항이 m, 공차가 1인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\dfrac{n\{2m+(n-1)\times1\}}{2}=50$

$\therefore n(2m+n-1)=100=2^2\times5^2$

이때, n, $2m+n-1$, m의 값을 차례대로 구하면 다음과 같다.

n	$2m+n-1$	m
1	100	50
2	50	$\frac{49}{2}$
4	25	11
5	20	8
10	10	$\frac{1}{2}$
⋮	⋮	⋮
100	1	-49

주어진 조건에서 m은 $m\le10$인 자연수이므로

$m=8,\ n=5$

$\therefore m+n=8+5=13$

보충 설명

미지수의 개수보다 주어진 식의 개수가 적은 부정방정식 문제로, 일반적으로 정수 조건의 부정방정식은 (다항식)×(다항식)=(정수)의 꼴로 변형하여 두 다항식이 정수의 약수가 됨을 이용하여 푼다.

즉, 세 정수 x, y, p에 대하여 $xy=p$이면 x, y는 p의 약수이다.

답 ③

479

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_8=\dfrac{8\{2a+(8-1)d\}}{2}=4(2a+7d)=12$

$\therefore 2a+7d=3$ …… ㉠

$S_{15}=\dfrac{15\{2a+(15-1)d\}}{2}=\dfrac{15(2a+14d)}{2}=-30$

$\therefore a+7d=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5,\ d=-1$

$\therefore a_n=5+(n-1)\times(-1)=-n+6$

$-n+6<0$에서 $n>6$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 제7항부터 음수이므로 첫째항부터 제6항까지의 합이 최대이다.

따라서 S_n의 최댓값은

$S_6=\dfrac{6\{2\times5+(6-1)\times(-1)\}}{2}=15$

보충 설명

수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제5항까지는 양수이고, 제6항은 0, 제7항부터 음수이므로 첫째항부터 제5항까지의 합 S_5와 첫째항부터 제6항까지의 합 S_6은 같다.

따라서 S_n의 최댓값은 S_5 또는 S_6이다.

답 15

480

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=40$, $a_8=a+7d=30$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=44$, $d=-2$

즉, $a_n=44+(n-1)\times(-2)=-2n+46$이므로

$a_{2n}=-2\times2n+46=-4n+46$

이때, $a_2+a_4+\cdots+a_{2n}$은 첫째항이 a_2, 공차가 $2d$, 항의 개수가 n인 등차수열의 합이므로

$$\begin{aligned}|a_2+a_4+\cdots+a_{2n}|&=\left|\frac{n\{2a_2+(n-1)\times2d\}}{2}\right|\\&=\left|\frac{n\{2\times42+(n-1)\times(-4)\}}{2}\right|\\&=|-2n^2+44n|\end{aligned}$$

따라서 $|a_2+a_4+\cdots+a_{2n}|$의 값이 최소가 되려면 $-2n^2+44n=0$이어야 하므로

$2n(n-22)=0 \qquad \therefore n=22\ (\because n\geq1)$

답 22

481

$S_n=2n^2+3kn$이므로

$$\begin{aligned}a_5&=S_5-S_4\\&=(2\times5^2+3k\times5)-(2\times4^2+3k\times4)\\&=2(5^2-4^2)+3k(5-4)\\&=3k+18\end{aligned}$$

$T_n=k^2n^2-12n$이므로

$$\begin{aligned}b_5&=T_5-T_4\\&=(k^2\times5^2-12\times5)-(k^2\times4^2-12\times4)\\&=k^2(5^2-4^2)-12(5-4)\\&=9k^2-12\end{aligned}$$

이때, $a_5=b_5$이므로 $3k+18=9k^2-12$

$9k^2-3k-30=0$, $3k^2-k-10=0$

$(k-2)(3k+5)=0 \qquad \therefore k=2\ (\because k>0)$

답 2

482

ㄱ. $a_n=n$이면 등차수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 1이므로 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$S_n=\dfrac{n\{2\times1+(n-1)\times1\}}{2}=\dfrac{n(n+1)}{2}$

$S_nT_n=n^2(n^2-1)$에서

$\dfrac{n(n+1)}{2}\times T_n=n^2(n^2-1)$

$$\begin{aligned}\therefore T_n&=n^2(n^2-1)\times\frac{2}{n(n+1)}\\&=n^2(n+1)(n-1)\times\frac{2}{n(n+1)}\\&=2n(n-1)\end{aligned}$$

(i) $n\geq2$일 때

$$\begin{aligned}b_n&=T_n-T_{n-1}\\&=2n(n-1)-2(n-1)(n-2)\\&=2(n-1)(n-n+2)\\&=4n-4 \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

(ii) $n=1$일 때

$b_1=T_1=2\times1\times(1-1)=0$

이때, $b_1=0$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$b_n=4n-4$ (참)

ㄴ. $S_n=\dfrac{n\{2a_1+(n-1)d_1\}}{2}$, $T_n=\dfrac{n\{2b_1+(n-1)d_2\}}{2}$

$S_nT_n=n^2(n^2-1)$에서

$\dfrac{n\{2a_1+(n-1)d_1\}}{2}\times\dfrac{n\{2b_1+(n-1)d_2\}}{2}=n^2(n^2-1)$

$n\{2a_1+(n-1)d_1\}\times n\{2b_1+(n-1)d_2\}=4n^2(n^2-1)$

$(d_1n+2a_1-d_1)(d_2n+2b_1-d_2)=4(n^2-1)$

양변의 n^2의 계수를 비교하면

$d_1d_2=4$ (참)

ㄷ. $S_nT_n=n^2(n^2-1)$에서 $S_1T_1=0$이므로

$a_1\neq0$이면 $b_1=0$

즉, 등차수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 0, 공차가 d_2이므로 첫째항부터 제n항까지의 합 T_n은

$T_n=\dfrac{n\{2\times0+(n-1)d_2\}}{2}=\dfrac{n(n-1)d_2}{2}$

$S_nT_n=n^2(n^2-1)$에서

$S_n\times\dfrac{n(n-1)d_2}{2}=n^2(n^2-1)$

$$\begin{aligned}\therefore S_n&=n^2(n^2-1)\times\frac{2}{n(n-1)d_2}\\&=n^2(n+1)(n-1)\times\frac{2}{n(n-1)d_2}\\&=\frac{2n(n+1)}{d_2}\end{aligned}$$

(i) $n\geq2$일 때

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=\frac{2n(n+1)}{d_2}-\frac{2(n-1)n}{d_2}\\&=\frac{2n^2+2n-2n^2+2n}{d_2}=\frac{4n}{d_2} \qquad \cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=\dfrac{2\times1\times2}{d_2}=\dfrac{4}{d_2}$

이때, $a_1=\dfrac{4}{d_2}$는 ㉡에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=\dfrac{4n}{d_2}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

보충 설명

ㄷ. [반례] $a_n=2n$, $b_n=2n-2$일 때

$$\begin{aligned}S_nT_n&=\frac{n\{2\times2+(n-1)\times2\}}{2}\times\frac{n\{2\times0+(n-1)\times2\}}{2}\\&=n^2(n+1)(n-1)=n^2(n^2-1)\end{aligned}$$

즉, $a_1=2\neq0$이지만 $a_n\neq n$이다. 답 ③

483

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 6이므로 공차를 d라 하면

$a_{10}=6+9d=-12$

$9d=-18$ $\therefore d=-2$

가

$\therefore a_n=6+(n-1)\times(-2)=-2n+8$

나

따라서 $1\le n\le4$일 때 $a_n\ge0$, $n\ge5$일 때 $a_n<0$이므로

다

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{20}|$

$=a_1+a_2+a_3+a_4-(a_5+a_6+\cdots+a_{20})$

$=(6+4+2+0)-(-2-4-6-\cdots-32)$

$=(6+4+2+0)+(2+4+6+\cdots+32)$

$=12+\dfrac{16(2+32)}{2}$

$=12+272=284$

라

단계	채점 요소	비율
가	공차 구하기	10%
나	일반항 a_n 구하기	10%
다	$a_n\ge0$일 때와 $a_n<0$일 때를 구분하기	20%
라	$\|a_1\|+\|a_2\|+\|a_3\|+\cdots+\|a_{20}\|$의 값 구하기	60%

답 284

484

첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 다항식 $2x^2+x+1$을 $x-n$으로 나눈 나머지이므로 나머지정리에 의하여

$S_n=2n^2+n+1$

가

(i) $n\ge2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2n^2+n+1-\{2(n-1)^2+(n-1)+1\}$

$=2n^2+n+1-(2n^2-3n+2)$

$=4n-1$ …… ㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=2\times1^2+1+1=4$

이때, $a_1=4$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 다르므로

$a_1=4$, $a_n=4n-1$ (단, $n\ge2$)

나

$\therefore a_1+a_{10}=4+39=43$

다

단계	채점 요소	비율
가	나머지정리를 이용하여 S_n 구하기	30%
나	일반항 a_n 구하기	60%
다	a_1+a_{10}의 값 구하기	10%

답 43

09 등비수열

개념 콕콕 본문 p.89

485

(1) $\dfrac{16}{8}=2$에서 공비가 2이므로 주어진 수열은

$\boxed{1}$, 2, $\boxed{4}$, 8, 16, $\cdots$

(2) $\dfrac{-6}{3}=-2$에서 공비가 -2이므로 주어진 수열은

$\boxed{-\dfrac{3}{2}}$, 3, -6, $\boxed{12}$, -24, $\cdots$

(3) $\dfrac{1}{16}\div\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{1}{4}$에서 공비가 $-\dfrac{1}{4}$이므로 주어진 수열은

16, $\boxed{-4}$, $\boxed{1}$, $-\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{16}$, $\cdots$

답 (1) 1, 4 (2) $-\dfrac{3}{2}$, 12 (3) -4, 1

486

(1) 첫째항이 7, 공비가 2이므로

$a_n=7\times2^{n-1}$

(2) 첫째항이 8, 공비가 $\dfrac{3}{2}$이므로

$a_n=8\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$

(3) 첫째항이 -1, 공비가 $-\sqrt{2}$이므로

$a_n=-1\times(-\sqrt{2})^{n-1}=-(-\sqrt{2})^{n-1}$

답 (1) $a_n=7\times2^{n-1}$ (2) $a_n=8\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$

(3) $a_n=-(-\sqrt{2})^{n-1}$

487

(1) 첫째항이 $0.25=\dfrac{1}{4}$, 공비가 2이므로

$a_n=\dfrac{1}{4}\times2^{n-1}$

$\therefore a_{10}=\dfrac{1}{4}\times2^9=128$

(2) 첫째항이 81, 공비가 $\dfrac{1}{3}$이므로

$a_n=81\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore a_{10}=81\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^9=\dfrac{1}{243}$

(3) 첫째항이 -1536, 공비가 $-\dfrac{1}{2}$이므로

$a_n=-1536\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore a_{10}=-1536\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^9=3$

답 (1) 128 (2) $\dfrac{1}{243}$ (3) 3

488

(1) 공비를 r라 하면 $a_1=8$이므로

$a_4=8\times r^3=1$, $r^3=\frac{1}{8}$

$\therefore r=\frac{1}{2}$ ($\because r$는 실수)

(2) 공비를 r라 하면 $a_1=5$이므로

$a_5=5\times r^4=80$, $r^4=16$

$\therefore r=\pm2$ ($\because r$는 실수)

(3) 공비를 r라 하면 $a_2=54$이므로

$a_5=a_2\times r^3=54\times r^3=-2$

$r^3=-\frac{1}{27}$ $\quad\therefore r=-\frac{1}{3}$ ($\because r$는 실수)

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) -2 또는 2 (3) $-\frac{1}{3}$

489

a가 $\frac{7}{2}$과 14의 등비중항이므로 $a^2=\frac{7}{2}\times14=49$

$\therefore a=\pm7$

답 -7 또는 7

490

-4가 $\frac{x}{2}$와 $\frac{4}{3}y$의 등비중항이므로 $(-4)^2=\frac{x}{2}\times\frac{4}{3}y$

$\frac{2}{3}xy=16$ $\quad\therefore xy=24$

답 24

491

(1) $\dfrac{1\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{1-\frac{1}{32}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{31}{16}$

(2) $\dfrac{4\{1-(-3)^6\}}{1-(-3)}=\dfrac{4(1-729)}{4}=-728$

답 (1) $\frac{31}{16}$ (2) -728

492

(1) 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 2인 등비수열의 제n항을 16이라 하면

$\frac{1}{2}\times2^{n-1}=16$, $2^{n-1}=32=2^5$

이때, $n-1=5$이므로 $n=6$

$\therefore \frac{1}{2}+1+2+\cdots+16=\dfrac{\frac{1}{2}(2^6-1)}{2-1}=\dfrac{63}{2}$

(2) 첫째항이 0.1, 공비가 0.1인 등비수열의 제n항을 0.1^{10}이라 하면

$0.1\times0.1^{n-1}=0.1^{10}$, $0.1^{n-1}=0.1^9$

이때, $n-1=9$이므로 $n=10$

$\therefore 0.1+0.01+0.001+\cdots+0.1^{10}$

$=\dfrac{0.1(1-0.1^{10})}{1-0.1}=\dfrac{1}{9}(1-0.1^{10})$

(3) 첫째항이 1, 공비가 -3인 등비수열의 제$(n+1)$항까지의 합이므로

$\dfrac{1\{1-(-3)^{n+1}\}}{1-(-3)}=\dfrac{1}{4}\{1-(-3)^{n+1}\}$

답 (1) $\frac{63}{2}$ (2) $\frac{1}{9}(1-0.1^{10})$ (3) $\frac{1}{4}\{1-(-3)^{n+1}\}$

493

(1) $S_n=2\times3^n-2$에서

(i) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2\times3^n-2)-(2\times3^{n-1}-2)$

$=2\times3^n-2\times3^{n-1}$

$=2\times3\times3^{n-1}-2\times3^{n-1}$

$=3^{n-1}(6-2)=4\times3^{n-1}$ …… ㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=2\times3^1-2=4$

이때, $a_1=4$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=4\times3^{n-1}$

(2) $S_n=2^{n+3}-8$에서

(i) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2^{n+3}-8)-(2^{n+2}-8)$

$=2^{n+3}-2^{n+2}$

$=2\times2^{n+2}-2^{n+2}$

$=2^{n+2}(2-1)=2^{n+2}$ …… ㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=2^{1+3}-8=8$

이때, $a_1=8$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2^{n+2}$

답 (1) $a_n=4\times3^{n-1}$ (2) $a_n=2^{n+2}$

유형 콕콕

본문 p.90~93

494 2	**495** 1	**496** 제7항	**497** 제10항	**498** 1000	**499** ③
500 ⑤	**501** ⑤	**502** ③	**503** 66	**504** ②	**505** ⑤
506 4	**507** ④	**508** ③	**509** 9	**510** ②	**511** ⑤
512 1024	**513** 167	**514** 19	**515** ②		
516 (가) $30(1+0.1)$ (나) $1+0.1$ (다) 528				**517** ③	

494

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=ar=64$ …… ㉠

$a_3+a_4=ar^2+ar^3=ar^2(1+r)=48$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$64r(1+r)=48$

$4r^2+4r-3=0$, $(2r+3)(2r-1)=0$

$\therefore r=\frac{1}{2}$ ($\because r>0$)

$r=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{2}a=64$ $\quad\therefore a=128$

따라서 $a_n=128\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$a_7=128\times\left(\frac{1}{2}\right)^6=2$

답 2

495

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1+a_2+a_3=a+ar+ar^2=112$이므로

$a(1+r+r^2)=112$ …… ㉠

$a_4+a_5+a_6=ar^3+ar^4+ar^5=14$이므로

$ar^3(1+r+r^2)=14$ …… ㉡

㉮

㉡÷㉠을 하면 $r^3=\frac{1}{8}$

$\therefore r=\frac{1}{2}$ ($\because r$는 실수) …… ㉢

㉯

㉢을 ㉠에 대입하면

$a\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=112$, $\frac{7}{4}a=112$

$\therefore a=64$

㉰

따라서 $a_n=64\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$a_7=64\times\left(\frac{1}{2}\right)^6=1$

㉱

단계	채점 요소	비율
㉮	첫째항을 a, 공비를 r라 하고 주어진 식을 a와 r에 대한 식으로 나타내기	40%
㉯	r의 값 구하기	20%
㉰	a의 값 구하기	20%
㉱	a_7의 값 구하기	20%

답 1

496

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 4, 공비가 3이므로

$a_n=4\times 3^{n-1}$

이때, 제n항에서 처음으로 1000보다 커진다고 하면

$4\times 3^{n-1}>1000$에서 $3^{n-1}>250$

한편, $3^5=243$, $3^6=729$이므로

$n-1\ge 6$ $\quad\therefore n\ge 7$

따라서 구하는 항은 제7항이다.

답 제7항

497

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3=ar^2=96$ …… ㉠

$a_6=ar^5=12$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=\frac{1}{8}$

$\therefore r=\frac{1}{2}$ ($\because r$는 실수) …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{4}a=96$, $a=384$

$\therefore a_n=384\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

이때, 제n항에서 처음으로 1보다 작아진다고 하면

$384\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<1$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<\frac{1}{384}$

한편, $\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{1}{256}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^9=\frac{1}{512}$이므로

$n-1\ge 9$ $\quad\therefore n\ge 10$

따라서 구하는 항은 제10항이다.

답 제10항

498

수열 2, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_9, 50이 이 순서대로 첫째항이 2, 제11항이 50인 등비수열을 이루므로 공비를 r $(r>0)$라 하면

$50=2r^{10}$, $r^{10}=25$

$\therefore r^5=5$ $(\because r>0)$

한편, $a_1=2r$, $a_5=2r^5$, $a_9=2r^9$이므로

$a_1a_5a_9=2r\times 2r^5\times 2r^9=2^3r^{1+5+9}=8r^{15}$

$=8(r^5)^3=8\times 5^3=8\times 125=1000$

답 1000

499

등비수열 3, x_1, x_2, x_3, 768의 공비를 r라 하면 첫째항이 3, 제5항이 768이므로

$3r^4=768$에서 $r^4=256$

$\therefore r=\pm 4$ ($\because r$는 실수)

따라서 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=3\times 4^{n-1}$ 또는 $a_n=3\times(-4)^{n-1}$

구하는 x_2는 제3항이므로

(i) $a_n=3\times 4^{n-1}$일 때

$x_2=a_3=3\times 4^2=48$

(ii) $a_n=3\times(-4)^{n-1}$일 때

$x_2=a_3=3\times(-4)^2=48$

(i), (ii)에서 x_2의 값은 48이다.

답 ③

500

등비수열 6, a, b, c, 96의 공비를 r라 하면 첫째항이 6, 제5항이 96이므로

$6r^4=96$, $r^4=16$

$\therefore r=2$ $(\because r>0)$

따라서 $a=12$, $b=24$, $c=48$이므로

$a+b+c=12+24+48=84$

답 ⑤

501

세 수 a, $a+3b$, $a+5b$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(a+3b)^2=a(a+5b)$

$a^2+6ab+9b^2=a^2+5ab$

$ab+9b^2=0$, $b(a+9b)=0$

$\therefore a=-9b$ $(\because b\neq 0)$ …… ㉠

한편, 세 수 a, $a+3b$, $a+5b$의 합이 57이므로

$a+(a+3b)+(a+5b)=57$

$3a+8b=57$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=27$, $b=-3$

$\therefore a+b=27+(-3)=24$

답 ⑤

502

세 수 $a-2$, $a-1$, $a+1$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(a-1)^2=(a-2)(a+1)$에서

$a^2-2a+1=a^2-a-2$ $\quad\therefore a=3$

답 ③

503

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 세 항 a_2, a_4, a_8이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a_4{}^2=a_2a_8$ …… ㉠

한편, 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=a+d$, $a_4=a+3d$, $a_8=a+7d$이므로 ㉠에 대입하면

$(a+3d)^2=(a+d)(a+7d)$

$a^2+6ad+9d^2=a^2+8ad+7d^2$

$2d^2-2ad=0$, $2d(a-d)=0$

이때, $d=6$이므로 $a=6$

$\therefore a_{11}=a+10d=6+10\times6=66$ 답 66

504

등비수열을 이루는 세 실수를 a, ar, ar^2으로 놓으면

세 수의 합이 21이므로

$a+ar+ar^2=21$

$\therefore a(1+r+r^2)=21$ …… ㉠

또한 세 수의 곱이 216이므로

$a\times ar\times ar^2=216$, $(ar)^3=216$

$\therefore ar=6$ …… ㉡

㉠÷㉡을 하면

$\frac{a(1+r+r^2)}{ar}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$

$2+2r+2r^2=7r$, $2r^2-5r+2=0$

$(2r-1)(r-2)=0$ $\quad\therefore r=\frac{1}{2}$ 또는 $r=2$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

(i) $r=\frac{1}{2}$일 때

$\frac{1}{2}a=6$에서 $a=12$이므로 세 실수는 12, 6, 3이다.

(ii) $r=2$일 때

$2a=6$에서 $a=3$이므로 세 실수는 3, 6, 12이다.

(i), (ii)에서 세 실수는 3, 6, 12이고, 이 중 가장 작은 수는 3이다.

다른 풀이

등비수열을 이루는 세 실수를 a, ar, ar^2으로 놓으면

$a+ar+ar^2=21$ $\quad\therefore a(1+r+r^2)=21$ …… ㉠

$a\times ar\times ar^2=216$, $(ar)^3=216$

$ar=6$ $\quad\therefore a=\frac{6}{r}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\frac{6}{r}(1+r+r^2)=21$

양변에 r를 곱하여 정리하면

$2r^2-5r+2=0$, $(2r-1)(r-2)=0$

$\therefore r=\frac{1}{2}$ 또는 $r=2$ 답 ②

505

삼차방정식 $x^3-7x^2-21x+k=0$의 세 실근이 등비수열을 이루므로 세 실근을 a, ar, ar^2으로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+ar+ar^2=7$

$a\times ar+ar\times ar^2+ar^2\times a=-21$

$a\times ar\times ar^2=-k$

이므로

$a(1+r+r^2)=7$ …… ㉠

$a^2r(1+r+r^2)=-21$ …… ㉡

$(ar)^3=-k$ …… ㉢

㉡÷㉠을 하면 $ar=-3$

$ar=-3$을 ㉢에 대입하면

$(-3)^3=-k$

$\therefore k=27$ 답 ⑤

506

두 곡선 $y=x^3+kx-8$, $y=-3x^2+10x$의 교점의 x좌표는 삼차방정식 $x^3+kx-8=-3x^2+10x$의 세 근이므로 $x^3+3x^2+(k-10)x-8=0$의 세 근이 α, β, γ이다.

이때, α, β, γ가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $\alpha=a$, $\beta=ar$, $\gamma=ar^2$으로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+ar+ar^2=-3$

$a\times ar+ar\times ar^2+ar^2\times a=k-10$

$a\times ar\times ar^2=8$

에서

$a(1+r+r^2)=-3$ …… ㉠

$a^2r(1+r+r^2)=k-10$ …… ㉡

$(ar)^3=8$ $\quad\therefore ar=2$

$ar=2$를 ㉡에 대입하면

$2a(1+r+r^2)=k-10$

따라서 ㉠에서 $2\times(-3)=k-10$

$-6=k-10$ $\quad\therefore k=4$ 답 4

507

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_4+a_6=ar^3+ar^5=30$

$\therefore ar^3(1+r^2)=30$ …… ㉠

$a_6+a_8=ar^5+ar^7=120$

$\therefore ar^5(1+r^2)=120$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $\frac{ar^5(1+r^2)}{ar^3(1+r^2)}=\frac{120}{30}$

$r^2=4$ $\quad\therefore r=2$ ($\because r>0$)

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$40a=30$ $\quad\therefore a=\frac{3}{4}$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제8항까지의 합은

$\frac{\frac{3}{4}(2^8-1)}{2-1}=\frac{765}{4}$ 답 ④

508

첫째항이 5, 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\frac{5(2^n-1)}{2-1}=5(2^n-1)$

이때, 첫째항부터 제n항까지의 합이 처음으로 1000보다 커야 하므로

$5(2^n-1)>1000$에서 $2^n-1>200$

$\therefore 2^n>201$

한편, $2^7=128$, $2^8=256$이므로 $n\geq8$

따라서 첫째항부터 제8항까지의 합이 처음으로 1000보다 커지므로 구하는 자연수 n의 값은 8이다. 답 ③

509

첫째항이 2, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=4-\frac{1}{2^{n-2}}$$

가

이때, $|S_n-4|<0.01$에서 $\left|\left(4-\frac{1}{2^{n-2}}\right)-4\right|<0.01$

$\frac{1}{2^{n-2}}<\frac{1}{100}$, $2^{n-2}>100$

한편, $2^6=64$, $2^7=128$이므로

$n-2\geq 7$ $\quad\therefore n\geq 9$

나

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 9이다.

다

단계	채점 요소	비율
가	첫째항이 2, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n 나타내기	30%
나	n에 대한 부등식 나타내기	50%
다	자연수 n의 최솟값 구하기	20%

답 9

510

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면 첫째항부터 제20항까지의 합이 3이므로

$\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}=3$ …… ㉠

제11항부터 제30항까지의 합이 15이고, $a_{11}=ar^{10}$이므로

$\frac{ar^{10}(r^{20}-1)}{r-1}=15$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^{10}=5$

따라서 $a_{31}=ar^{30}$이므로 제31항부터 제40항까지의 합은

$$\begin{aligned}\frac{ar^{30}(r^{10}-1)}{r-1}&=(r^{10})^3\times\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}\\&=(r^{10})^3\times\frac{1}{r^{10}+1}\times\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}\\&=5^3\times\frac{1}{5+1}\times 3\ (\because ㉠)\\&=\frac{125}{2}\end{aligned}$$

답 ②

511

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{12}=\frac{a_1(r^{12}-1)}{r-1}=6$ …… ㉠

수열 a_1, a_3, a_5, $\cdots$, a_{11}의 공비는 r^2이므로

$$\begin{aligned}a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{11}&=\frac{a_1\{(r^2)^6-1\}}{r^2-1}\\&=\frac{a_1(r^{12}-1)}{r^2-1}\\&=\frac{a_1(r^{12}-1)}{(r+1)(r-1)}=4\end{aligned}$$ …… ㉡

㉠÷㉡을 하면 $r+1=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore r=\frac{1}{2}$

답 ⑤

512

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_5=\frac{a(1-r^5)}{1-r}=-22$ …… ㉠

$S_{10}=\frac{a(1-r^{10})}{1-r}=\frac{a(1-r^5)(1+r^5)}{1-r}=682$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-22(1+r^5)=682$, $1+r^5=-31$

$\therefore r^5=-32$

이때, r는 실수이므로 $r=-2$

$r=-2$를 ㉠에 대입하면

$\frac{a\{1-(-2)^5\}}{1-(-2)}=-22$

$a(1+32)=-66$, $33a=-66$ $\quad\therefore a=-2$

따라서 $a_n=-2\times(-2)^{n-1}=(-2)^n$이므로

$a_{10}=(-2)^{10}=1024$

답 1024

513

$S_n=3^n+2$에서

(i) $n\geq 2$일 때

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(3^n+2)-(3^{n-1}+2)\\&=3\times 3^{n-1}-3^{n-1}\\&=3^{n-1}(3-1)=2\times 3^{n-1}\end{aligned}$$ …… ㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=3^1+2=5$

이때, $a_1=5$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 다르므로

$a_1=5$, $a_n=2\times 3^{n-1}$ (단, $n\geq 2$)

$\therefore a_1+a_5=5+2\times 3^4=5+162=167$

답 167

514

$\log(S_n+100)=n+2$에서

$S_n+100=10^{n+2}$, 즉 $S_n=10^{n+2}-100$

(i) $n\geq 2$일 때

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(10^{n+2}-100)-(10^{n+1}-100)\\&=10\times 10^{n+1}-10^{n+1}\\&=10^{n+1}(10-1)=9\times 10^{n+1}\end{aligned}$$

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=10^3-100=900$ …… ㉠

이때, $a_1=900$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=9\times 10^{n+1}$

가

따라서 $p=9$, $q=10$이므로

나

$p+q=9+10=19$

다

단계	채점 요소	비율
가	일반항 a_n 구하기	80%
나	p, q의 값 구하기	10%
다	$p+q$의 값 구하기	10%

답 19

515

$S_n=k\times 4^n-2$에서

(i) $n\ge 2$일 때

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(k\times 4^n-2)-(k\times 4^{n-1}-2)\\&=k\times 4\times 4^{n-1}-k\times 4^{n-1}\\&=4^{n-1}(4k-k)\\&=3k\times 4^{n-1}\quad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=k\times 4^1-2=4k-2$ $\cdots\cdots$ ㉡

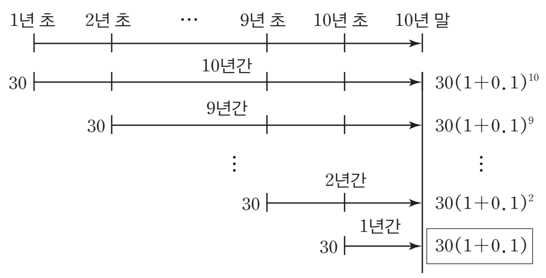
이때, 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 ㉡이 같아야 하므로

$3k=4k-2\qquad \therefore k=2$

답 ②

516

매년 초에 적립하는 30만 원의 원리합계를 그림으로 나타내면 다음과 같다. (단위 : 만 원)



10년 말의 원리합계를 S라 하면

$S=\boxed{30(1+0.1)}+30(1+0.1)^2+\cdots+30(1+0.1)^9+30(1+0.1)^{10}$

즉, 첫째항이 $30(1+0.1)$, 공비가 1.1인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

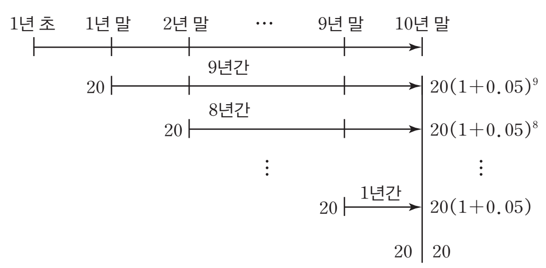
$$\begin{aligned}S&=\frac{\boxed{30(1+0.1)}\{(\boxed{1+0.1})^{10}-1\}}{(\boxed{1+0.1})-1}\\&=\frac{30\times 1.1\times(1.1^{10}-1)}{1.1-1}\\&=\frac{33(2.6-1)}{0.1}\\&=\boxed{528}\ (\text{만 원})\end{aligned}$$

따라서 10년 말의 원리합계는 $\boxed{528}$만 원이다.

답 (가) $30(1+0.1)$ (나) $1+0.1$ (다) 528

517

매년 말에 적립하는 20만 원의 원리합계를 그림으로 나타내면 다음과 같다. (단위 : 만 원)



10년 말의 원리합계를 S라 하면

$$\begin{aligned}S&=20+20(1+0.05)+\cdots+20(1+0.05)^8+20(1+0.05)^9\\&=20+20\times 1.05+\cdots+20\times 1.05^8+20\times 1.05^9\end{aligned}$$

즉, 첫째항이 20, 공비가 1.05인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$$\begin{aligned}S&=\frac{20(1.05^{10}-1)}{1.05-1}=\frac{20(1.63-1)}{0.05}\\&=252\ (\text{만 원})\end{aligned}$$

따라서 10년 말의 원리합계는 252만 원이다.

답 ③

실력 콕콕

본문 p. 94~95

518 ④	519 ⑤	520 ⑤	521 35	522 ③	523 18
524 ①	525 50	526 ④	527 9	528 ②	529 54
530 ③	531 ④	532 9	533 65		

518

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$$\begin{aligned}a_2+a_4+a_6&=a_1r+a_3r+a_5r\\&=r(a_1+a_3+a_5)=126\end{aligned}$$

$a_1+a_3+a_5=63$이므로

$63r=126\qquad \therefore r=2$

또한 $a_1+a_3+a_5=a_1+a_1r^2+a_1r^4$

$\qquad\qquad=a_1+4a_1+16a_1=63$

$21a_1=63\qquad \therefore a_1=3$

$\therefore a_9=a_1r^8=3\times 2^8=768$

답 ④

519

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 1이고 공비가 2이므로

$a_n=1\times 2^{n-1}=2^{n-1}$

$$\begin{aligned}b_n&=(a_{n+1})^2-(a_n)^2\\&=(2^n)^2-(2^{n-1})^2\\&=(2^2)^n-(2^2)^{n-1}\\&=4^n-4^{n-1}=4^{n-1}(4-1)\\&=3\times 4^{n-1}\end{aligned}$$

$\therefore \dfrac{b_6}{b_3}=\dfrac{3\times 4^5}{3\times 4^2}=4^3=64$

다른 풀이

$b_n=(2^n)^2-(2^{n-1})^2=2^{2n}-2^{2n-2}$이므로

$\dfrac{b_6}{b_3}=\dfrac{2^{12}-2^{10}}{2^6-2^4}=\dfrac{2^6(2^6-2^4)}{2^6-2^4}=2^6=64$

답 ⑤

520

$$\begin{aligned}\frac{a_{10}}{a_1}+\frac{a_{11}}{a_2}+\frac{a_{12}}{a_3}+\frac{a_{13}}{a_4}&=\frac{ar^9}{a}+\frac{ar^{10}}{ar}+\frac{ar^{11}}{ar^2}+\frac{ar^{12}}{ar^3}\\&=r^9+r^9+r^9+r^9\\&=4r^9=36\end{aligned}$$

$\therefore r^9=9$

$\therefore \dfrac{a_{30}}{a_3}=\dfrac{ar^{29}}{ar^2}=r^{27}=(r^9)^3=9^3=729$

답 ⑤

521

등비수열 $\{a_n\}$의 공비가 r이고 $a_2=1$이므로 이 수열은

$\frac{1}{r}$, 1, r, r^2, $\cdots$

즉, $\omega=a_1a_2a_3\times\cdots\times a_{10}$

$=\frac{1}{r}\times 1\times r\times r^2\times\cdots\times r^8$

$=r^{-1+0+1+\cdots+8}=r^{35}$

$\therefore \log_r \omega=\log_r r^{35}=35$ 답 35

522

네 실수 a, x, y, b가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 등차수열의 공차를 d라 하면

$x=a+d$, $y=a+2d$, $b=a+3d$

$\therefore a+b=a+(a+3d)=(a+d)+(a+2d)$

$=x+y=5$ …… ㉠

또한 네 실수 a, p, q, b가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 등비수열의 공비를 r라 하면

$p=ar$, $q=ar^2$, $b=ar^3$

$\therefore ab=a\times ar^3=ar\times ar^2=pq=4$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=5^2-4\times 4=9$

$\therefore a-b=3$ ($\because a>b$) 답 ③

523

수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로

$a_1+a_8=a_2+a_7=a_3+a_6=a_4+a_5=8$

수열 $\{b_n\}$은 등비수열이므로

$b_2b_7=b_3b_6=b_4b_5=12$

이때 $a_4=b_4$, $a_5=b_5$이므로 $b_4b_5=a_4a_5$

$\therefore a_4+a_5=8$, $a_4a_5=12$

a_4, a_5가 이차방정식의 두 근이라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 a_4, a_5는 이차방정식 $x^2-8x+12=0$의 두 근이다.

$x^2-8x+12=(x-6)(x-2)=0$

$\therefore a_4=6$, $a_5=2$ ($\because a_4=b_4$, $a_5=b_5$, $b_4>b_5$)

수열 $\{a_n\}$은 공차가 -4인 등차수열이므로

$a_4=a_1+(4-1)\times(-4)=6$

$\therefore a_1=18$ 답 18

524

주어진 등비수열의 공비를 r라 하면 세 실수 a, b, c는 각각 a, ar, ar^2이므로

$a+b+c=a+ar+ar^2$

$=a(1+r+r^2)=-5$ …… ㉠

$ab+bc+ca=a\times ar+ar\times ar^2+ar^2\times a$

$=a^2r(1+r+r^2)=10$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $ar=-2$

$\therefore abc=a\times ar\times ar^2=(ar)^3=(-2)^3=-8$ 답 ①

525

나머지정리에 의하여 삼차식 $x^3-2x^2+11x+a$에 $x=0$, $x=1$, $x=2$를 차례대로 대입하면

$\alpha=a$

$\beta=1-2+11+a=a+10$

$\gamma=8-8+22+a=a+22$

세 수 α, β, γ가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$\beta^2=\alpha\gamma$에서 $(a+10)^2=a(a+22)$

$2a=100$ $\therefore a=50$ 답 50

526

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열이라 하면

$a_n=ar^{n-1}$

$b_n=a_{n+1}-a_n=ar^n-ar^{n-1}=a(r-1)r^{n-1}$

즉, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $a(r-1)$, 공비가 r인 등비수열이다. (참)

ㄴ. [반례] 수열 $\{b_n\}$이 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이라 하면

$b_n=a_{n+1}-a_n$에서

$\{a_n\}$: 2 3 5 9 17 …

$\{b_n\}$: 1 2 4 8 …

즉, 수열 $\{b_n\}$은 등비수열이지만 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이 아니다. (거짓)

ㄷ. 수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열이라 하면

$a_n=ar^{n-1}$

$b_n=a_{n+1}-a_n=ar^n-ar^{n-1}$이므로

$a_nb_n=ar^{n-1}(ar^n-ar^{n-1})$

$=a^2(r^{n-1})^2(r-1)$

$=a^2(r-1)(r^2)^{n-1}$

즉, 수열 $\{a_nb_n\}$은 첫째항이 $a^2(r-1)$, 공비가 r^2인 등비수열이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

527

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\frac{1\times(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$

$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}=\frac{2(4^n-1)}{4-1}$

$=\frac{2}{3}(2^n+1)(2^n-1)$

$\therefore \frac{a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}}{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}=\frac{2}{3}(2^n+1)$

$=342$

$2^n+1=513$에서 $2^n=512=2^9$

$\therefore n=9$ 답 9

528

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=ar=6$ …… ㉠

$a_5=ar^4=162$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=27$ $\therefore r=3$ ($\because r$는 실수)

$r=3$을 ㉠에 대입하면 $a=2$

$\therefore a_n=2\times 3^{n-1}$

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$은 첫째항이 2, 공비가 3인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$\frac{2(3^n-1)}{3-1}\geq 1000$에서 $3^n-1\geq 1000$

$\therefore 3^n\geq 1001$

한편, $3^6=729$, $3^7=2187$이므로 $n\geq 7$

따라서 자연수 n의 최솟값은 7이다. 답 ②

529

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(r>0)$라 하면

$S_6-S_3=a_4+a_5+a_6=6$이므로

$$\frac{ar^3(r^3-1)}{r-1}=6 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$S_{12}-S_6=a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}=72$이므로

$$\frac{ar^6(r^6-1)}{r-1}=\frac{ar^6(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}=72 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉡÷㉠을 하면 $r^3(r^3+1)=12=3\times4$이므로

$r^3=3$ $(\because r>0)$

$$\therefore a_{10}+a_{11}+a_{12}=\frac{ar^9(r^3-1)}{r-1}=(r^3)^2\times\frac{ar^3(r^3-1)}{r-1}$$

$$=3^2\times6=54$$

답 54

530

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{1}{a}$, 공비가 $\frac{1}{r}$인 등비수열이므로

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=16 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{10}}=\frac{\frac{1}{a}\left\{\left(\frac{1}{r}\right)^{10}-1\right\}}{\frac{1}{r}-1}$$

$$=\frac{r^{10}-1}{ar^9(r-1)}=4 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠÷㉡을 하면 $\dfrac{\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}}{\frac{r^{10}-1}{ar^9(r-1)}}=a^2r^9=4$

$$\therefore a_4a_5a_6a_7=ar^3\times ar^4\times ar^5\times ar^6=a^4r^{18}$$

$$=(a^2r^9)^2=4^2=16$$

답 ③

531

n년 후에 원리합계가 원금의 2배를 넘는다고 하면

$a(1+0.07)^n>2a$

양변을 a로 나누고 상용로그를 취하면

$n\log 1.07>\log 2$

$$\therefore n>\frac{\log 2}{\log 1.07}=\frac{0.30}{0.029}=10.3\cdots$$

따라서 11년 후에 원리합계가 원금의 2배를 넘게 된다. 답 ④

532

등비수열을 이루는 세 실수를 a, ar, ar^2으로 놓으면

가

$a+ar+ar^2=13 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$a\times ar\times ar^2=(ar)^3=27$

$ar=3 \qquad \therefore a=\frac{3}{r}$

$a=\frac{3}{r}$을 ㉠에 대입하면

$$\frac{3}{r}+\frac{3}{r}\times r+\frac{3}{r}\times r^2=13$$

$$\frac{3}{r}+3+3r=13,\ 3r^2-10r+3=0$$

$(3r-1)(r-3)=0$

$\therefore r=\frac{1}{3}$ 또는 $r=3$

나

(i) $r=\frac{1}{3}$일 때

$a=\dfrac{3}{\frac{1}{3}}=9$이므로 등비수열을 이루는 세 실수는 9, 3, 1이다.

(ii) $r=3$일 때

$a=1$이므로 등비수열을 이루는 세 수는 1, 3, 9이다.

다

(i), (ii)에서 세 실수는 1, 3, 9이고, 이 중 가장 큰 수는 9이다.

라

단계	채점 요소	비율
가	세 실수를 a, ar, ar^2으로 놓기	20%
나	공비 r의 값 구하기	50%
다	세 실수 구하기	20%
라	가장 큰 수 구하기	10%

답 9

533

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$$S_{10}=\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=27 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$$S_{20}=\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}=\frac{a(r^{10}-1)(r^{10}+1)}{r-1}=45 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

가

㉠을 ㉡에 대입하면

$$27(r^{10}+1)=45,\ r^{10}+1=\frac{45}{27}=\frac{5}{3}$$

$$\therefore r^{10}=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3} \quad \cdots\cdots \text{㉢}$$

나

$$\therefore S_{40}=\frac{a(r^{40}-1)}{r-1}$$

$$=\frac{a(r^{20}-1)(r^{20}+1)}{r-1}$$

$$=45\times\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2+1\right\}\ (\because \text{㉡, ㉢})$$

$$=45\times\frac{13}{9}=65$$

다

단계	채점 요소	비율
가	첫째항을 a, 공비를 r라 하고 S_{10}과 S_{20}을 a, r에 대한 식으로 나타내기	30%
나	r^{10}의 값 구하기	30%
다	S_{40}의 값 구하기	40%

답 65

10 합의 기호 $\sum$와 여러 가지 수열

개념 콕콕 본문 p.97

534

(1) $\sum_{k=1}^{4} 6k = 6\times1+6\times2+6\times3+6\times4$

$= 6+12+18+24$

(2) $\sum_{n=1}^{5} 3^n = 3^1+3^2+3^3+3^4+3^5$

$= 3+9+27+81+243$

(3) $\sum_{m=1}^{n} (7m-2)$

$= (7\times1-2)+(7\times2-2)+(7\times3-2)+\cdots+(7n-2)$

$= 5+12+19+\cdots+(7n-2)$

(4) $\sum_{i=1}^{n} i(i+5)$

$= 1\times6+2\times7+3\times8+\cdots+n(n+5)$

$= 6+14+24+\cdots+(n^2+5n)$

답 풀이 참조

535

(1) $5+5^2+5^3+\cdots+5^{17} = \sum_{k=1}^{17} 5^k$

(2) 수열 2, 5, 8, …, $(3n-1)$, …의 제k항을 a_k라 하면

$a_k = 2+(k-1)\times3 = 3k-1$

이때, $3n-1$은 주어진 수열의 n번째 항이므로

$2+5+8+\cdots+(3n-1) = \sum_{k=1}^{n} (3k-1)$

(3) 수열 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, …, $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, …의 제$k$항을 a_k라 하면

$a_k = 1\times\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

이때, $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$은 주어진 수열의 n번째 항이므로

$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

(4) 수열 3, 7, 11, …, 31, …의 제k항을 a_k라 하면

$a_k = 3+(k-1)\times4 = 4k-1$

이때, $4k-1=31$에서 $4k=32$

$\therefore k=8$

$\therefore 3+7+11+\cdots+31 = \sum_{k=1}^{8} (4k-1)$

답 (1) $\sum_{k=1}^{17} 5^k$ (2) $\sum_{k=1}^{n} (3k-1)$ (3) $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ (4) $\sum_{k=1}^{8} (4k-1)$

536

(1) $\sum_{k=1}^{8} (2a_k-b_k) = \sum_{k=1}^{8} 2a_k - \sum_{k=1}^{8} b_k$

$= 2\sum_{k=1}^{8} a_k - \sum_{k=1}^{8} b_k$

$= 2\times6-9$

$= 3$

(2) $\sum_{k=1}^{8} (2a_k+3b_k+4) = \sum_{k=1}^{8} 2a_k + \sum_{k=1}^{8} 3b_k + \sum_{k=1}^{8} 4$

$= 2\sum_{k=1}^{8} a_k + 3\sum_{k=1}^{8} b_k + \sum_{k=1}^{8} 4$

$= 2\times6+3\times9+4\times8$

$= 12+27+32$

$= 71$

답 (1) 3 (2) 71

537

(1) $\sum_{k=1}^{10} (3k-2) + \sum_{k=1}^{10} (-3k+4) = \sum_{k=1}^{10} \{(3k-2)+(-3k+4)\}$

$= \sum_{k=1}^{10} 2$

$= 2\times10 = 20$

(2) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 - \sum_{k=1}^{n} (4k^2-4k) = \sum_{k=1}^{n} \{(2k-1)^2-(4k^2-4k)\}$

$= \sum_{k=1}^{n} 1$

$= n$

답 (1) 20 (2) n

538

(1) $\sum_{k=1}^{20} (3k-1) = 3\sum_{k=1}^{20} k - \sum_{k=1}^{20} 1$

$= 3\times\frac{20\times21}{2} - 1\times20$

$= 630-20$

$= 610$

(2) $\sum_{k=1}^{20} (2k^2+2k-5) = 2\sum_{k=1}^{20} k^2 + 2\sum_{k=1}^{20} k - \sum_{k=1}^{20} 5$

$= 2\times\frac{20\times21\times41}{6} + 2\times\frac{20\times21}{2} - 5\times20$

$= 5740+420-100$

$= 6060$

(3) $\sum_{k=1}^{20} (k^3-4k^2) = \sum_{k=1}^{20} k^3 - 4\sum_{k=1}^{20} k^2$

$= \left(\frac{20\times21}{2}\right)^2 - 4\times\frac{20\times21\times41}{6}$

$= 44100-11480$

$= 32620$

(4) $\sum_{k=1}^{20} (3k+1)(2k-3) = \sum_{k=1}^{20} (6k^2-7k-3)$

$= 6\sum_{k=1}^{20} k^2 - 7\sum_{k=1}^{20} k - \sum_{k=1}^{20} 3$

$= 6\times\frac{20\times21\times41}{6} - 7\times\frac{20\times21}{2} - 3\times20$

$= 17220-1470-60$

$= 15690$

답 (1) 610 (2) 6060 (3) 32620 (4) 15690

539

(1) 수열 3, 4, 5, …, 19, …의 제k항을 a_k라 하면

$a_k = 3+(k-1)\times1 = k+2$

이때, $k+2=19$에서 $k=17$

$\therefore 3+4+5+\cdots+19=\sum_{k=1}^{17}(k+2)$

$=\sum_{k=1}^{17}k+\sum_{k=1}^{17}2$

$=\frac{17\times18}{2}+2\times17$

$=153+34$

$=187$

(2) 수열 $3^2, 4^2, 5^2, \cdots, 19^2, \cdots$의 제$k$항을 a_k라 하면

$a_k=(k+2)^2$

이때, $(k+2)^2=19^2$에서 $k=17$

$\therefore 3^2+4^2+5^2+\cdots+19^2$

$=\sum_{k=1}^{17}(k+2)^2$

$=\sum_{k=1}^{17}(k^2+4k+4)$

$=\sum_{k=1}^{17}k^2+4\sum_{k=1}^{17}k+\sum_{k=1}^{17}4$

$=\frac{17\times18\times35}{6}+4\times\frac{17\times18}{2}+4\times17$

$=1785+612+68=2465$

(3) 수열 $3^3, 4^3, 5^3, \cdots, 19^3, \cdots$의 제$k$항을 a_k라 하면

$a_k=(k+2)^3$

이때, $(k+2)^3=19^3$에서 $k=17$

$\therefore 3^3+4^3+5^3+\cdots+19^3$

$=\sum_{k=1}^{17}(k+2)^3$

$=\sum_{k=1}^{17}(k^3+6k^2+12k+8)$

$=\sum_{k=1}^{17}k^3+6\sum_{k=1}^{17}k^2+12\sum_{k=1}^{17}k+\sum_{k=1}^{17}8$

$=\left(\frac{17\times18}{2}\right)^2+6\times\frac{17\times18\times35}{6}+12\times\frac{17\times18}{2}+8\times17$

$=23409+10710+1836+136$

$=36091$

답 (1) 187 (2) 2465 (3) 36091

540

(1) 수열 $\{a_n\}$을 $1\times2, 2\times3, 3\times4, \cdots, 9\times10, \cdots$이라 하면

$a_k=k(k+1)$

이때, 주어진 수열의 합은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제9항까지의 합이므로

$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+9\times10$

$=\sum_{k=1}^{9}k(k+1)$

$=\sum_{k=1}^{9}(k^2+k)$

$=\sum_{k=1}^{9}k^2+\sum_{k=1}^{9}k$

$=\frac{9\times10\times19}{6}+\frac{9\times10}{2}$

$=285+45$

$=330$

(2) 수열 $\{a_n\}$을 $1^2, 3^2, 5^2, \cdots, 15^2, \cdots$이라 하면

$a_k=(2k-1)^2$

이때, $2k-1=15$에서 $2k=16$ $\therefore k=8$

따라서 주어진 수열의 합은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제8항까지의 합이므로

$1^2+3^2+5^2+\cdots+15^2=\sum_{k=1}^{8}(2k-1)^2$

$=\sum_{k=1}^{8}(4k^2-4k+1)$

$=4\sum_{k=1}^{8}k^2-4\sum_{k=1}^{8}k+\sum_{k=1}^{8}1$

$=4\times\frac{8\times9\times17}{6}-4\times\frac{8\times9}{2}+1\times8$

$=816-144+8$

$=680$

답 (1) 330 (2) 680

541

(1) $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{10\times11}$

$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k(k+1)}$

$=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$

$=1-\frac{1}{11}$

$=\frac{10}{11}$

(2) $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{10\times12}$

$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k(k+2)}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{132+66-12-11}{132}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{175}{132}$

$=\frac{175}{264}$

(3) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{n}{2n+1}$

답 (1) $\frac{10}{11}$ (2) $\frac{175}{264}$ (3) $\frac{n}{2n+1}$

542

(1) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{11}}$

$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{10}\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$

$=\sum_{k=1}^{10}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{11}-\sqrt{10})$

$=\sqrt{11}-1$

(2) $\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{12}}$

$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+2}}$

$=\sum_{k=1}^{10}\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+2}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k}-\sqrt{k+2})}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$

$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

$+\cdots+(\sqrt{11}-\sqrt{9})+(\sqrt{12}-\sqrt{10})\}$

$=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{2}+\sqrt{11}+\sqrt{12})$

$=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{11}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}$

(3) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k-1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k-1}+\sqrt{k})(\sqrt{k-1}-\sqrt{k})}$

$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$

$=(1-\sqrt{0})+(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

$=\sqrt{n}-0$

$=\sqrt{n}$

답 (1) $\sqrt{11}-1$ (2) $\sqrt{3}+\frac{\sqrt{11}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}$ (3) $\sqrt{n}$

유형 콕콕

본문 p.98~101

543 ①	**544** ③	**545** 20	**546** ③	**547** ①	**548** 35
549 ①	**550** ⑤	**551** 650	**552** ③	**553** ④	**554** 31
555 ⑤	**556** ④	**557** $a_n=2^n+1$, $S_n=2^{n+1}+n-2$			
558 ④	**559** ②	**560** $\frac{53}{165}$	**561** ②	**562** 4	
563 8	**564** ①	**565** ②	**566** 14		

543

$\sum_{n=1}^{10}(a_n+1)(a_n-3)=\sum_{n=1}^{10}(a_n^2-2a_n-3)$

$=\sum_{n=1}^{10}a_n^2-2\sum_{n=1}^{10}a_n-\sum_{n=1}^{10}3$

$=70-2\times20-3\times10$

$=0$

답 ①

544

$\sum_{n=1}^{20}(3a_n-2b_n+1)=\sum_{n=1}^{20}3a_n-\sum_{n=1}^{20}2b_n+\sum_{n=1}^{20}1$

$=3\sum_{n=1}^{20}a_n-2\sum_{n=1}^{20}b_n+1\times20$

$=3\times5-2\times10+20$

$=15$

답 ③

545

$x^2+2kx+2k^2-1=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_k+\beta_k=-2k$, $\alpha_k\beta_k=2k^2-1$

가

$\therefore \alpha_k^2+\beta_k^2=(\alpha_k+\beta_k)^2-2\alpha_k\beta_k$

$=(-2k)^2-2(2k^2-1)$

$=2$

나

$\therefore \sum_{k=1}^{10}(\alpha_k^2+\beta_k^2)=\sum_{k=1}^{10}2=2\times10=20$

다

단계	채점 요소	비율
가	이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha_k+\beta_k$, $\alpha_k\beta_k$의 값 구하기	30%
나	$\alpha_k^2+\beta_k^2$의 값 구하기	40%
다	$\sum_{k=1}^{10}(\alpha_k^2+\beta_k^2)$의 값 구하기	30%

답 20

546

$\sum_{k=1}^{10}(k+2)^2-\sum_{k=3}^{12}(k-2)^2$

$=(3^2+4^2+\cdots+10^2+11^2+12^2)-(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)$

$=(11^2+12^2)-(1^2+2^2)$

$=121+144-5$

$=260$

다른 풀이

$\sum_{k=1}^{10}(k+2)^2-\sum_{k=3}^{12}(k-2)^2=\sum_{k=3}^{12}k^2-\sum_{k=1}^{10}k^2$

$=\left(\sum_{k=1}^{12}k^2-\sum_{k=1}^{2}k^2\right)-\sum_{k=1}^{10}k^2$

$=\left(\sum_{k=1}^{12}k^2-\sum_{k=1}^{10}k^2\right)-\sum_{k=1}^{2}k^2$

$=(11^2+12^2)-(1^2+2^2)$

$=121+144-5$

$=260$

답 ③

547

$\sum_{k=3}^{10}(k^3-k)-\sum_{m=1}^{9}(m^3-m)$

$=\{(3^3-3)+(4^3-4)+\cdots+(9^3-9)+(10^3-10)\}$

$-\{(1^3-1)+(2^3-2)+(3^3-3)+\cdots+(9^3-9)\}$

$=(10^3-10)-\{(1^3-1)+(2^3-2)\}$

$=990-6$

$=984$

다른 풀이

$\sum_{k=3}^{10}(k^3-k)-\sum_{m=1}^{9}(m^3-m)$

$=\sum_{k=3}^{10}(k^3-k)-\sum_{k=1}^{9}(k^3-k)$

$=\left\{\sum_{k=1}^{10}(k^3-k)-\sum_{k=1}^{2}(k^3-k)\right\}-\sum_{k=1}^{9}(k^3-k)$

$=\left\{\sum_{k=1}^{10}(k^3-k)-\sum_{k=1}^{9}(k^3-k)\right\}-\sum_{k=1}^{2}(k^3-k)$

$=(10^3-10)-\{(1^3-1)+(2^3-2)\}$

$=990-6$

$=984$

답 ①

548

$\sum_{k=3}^{15}(a_{2k-1}+a_{2k})$

$=(a_5+a_6)+(a_7+a_8)+(a_9+a_{10})+\cdots+(a_{29}+a_{30})$

$=a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}+\cdots+a_{29}+a_{30}$

$=\sum_{k=5}^{30}a_k$

$\therefore a=5,\ b=30$

가

$\therefore a+b=5+30=35$

나

단계	채점 요소	비율
가	a, b의 값 구하기	70%
나	$a+b$의 값 구하기	30%

답 35

549

수열 $1^2,\ 4^2,\ 7^2,\ \cdots,\ 25^2,\ \cdots$의 제$k$항을 a_k라 하면

$a_k=(3k-2)^2$

이때, $(3k-2)^2=25^2$에서 $k=9$

$\therefore 1^2+4^2+7^2+10^2+\cdots+25^2$

$=\sum_{k=1}^{9}(3k-2)^2$

$=\sum_{k=1}^{9}(9k^2-12k+4)$

$=9\sum_{k=1}^{9}k^2-12\sum_{k=1}^{9}k+\sum_{k=1}^{9}4$

$=9\times\frac{9\times10\times19}{6}-12\times\frac{9\times10}{2}+4\times9$

$=2565-540+36$

$=2061$

답 ①

550

수열 $1+2,\ 1+2+3,\ 1+2+3+4,\ \cdots$의 제$k$항을 a_k라 하면

$a_k=1+2+3+\cdots+(k+1)$

$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제9항까지의 합 S_9는

$S_9=\sum_{k=1}^{9}a_k=\sum_{k=1}^{9}\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{9}k^2+3\sum_{k=1}^{9}k+\sum_{k=1}^{9}2\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{9\times10\times19}{6}+3\times\frac{9\times10}{2}+18\right)$

$=219$

답 ⑤

551

$\sum_{k=1}^{12}k+\sum_{k=2}^{12}k+\sum_{k=3}^{12}k+\cdots+\sum_{k=11}^{12}k+\sum_{k=12}^{12}k$

$=(1+2+3+\cdots+12)+(2+3+4+\cdots+12)$

$+\cdots+(11+12)+12$

$=1\times1+2\times2+3\times3+\cdots+12\times12$

$=1^2+2^2+3^2+\cdots+12^2$

$=\sum_{k=1}^{12}k^2$

$=\frac{12\times13\times25}{6}$

$=650$

답 650

552

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+2n$

(i) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2+2n-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$

$=2n+1$ …… ㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=1^2+2\times1=3$

이때, $a_1=3$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n+1$

따라서 $a_{2k-1}=2(2k-1)+1=4k-1$이므로

$\sum_{k=1}^{10}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{10}(4k-1)$

$=4\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}1$

$=4\times\frac{10\times11}{2}-1\times10$

$=220-10$

$=210$

답 ③

553

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=2^{n+1}-2$

(i) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2^{n+1}-2)-(2^n-2)$

$=2\times2^n-2^n$

$=(2-1)\times2^n$

$=2^n$ …… ㉠

(ii) $n=1$일 때

$a_1=S_1=2^2-2=2$

이때, $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2^n$

따라서 $a_k^{\ 2}=(2^k)^2=2^{2k}=(2^2)^k=4^k$이므로

$\sum_{k=1}^{4}a_k^{\ 2}=\sum_{k=1}^{4}4^k=\frac{4(4^4-1)}{4-1}=\frac{4\times255}{3}=340$

답 ④

554

$\sum_{k=1}^{n} ka_k = n^3+2n^2+n-8$ …… ㉠

㉠의 양변에 n 대신 $n-1$을 대입하면

$\sum_{k=1}^{n-1} ka_k = (n-1)^3+2(n-1)^2+(n-1)-8$ (단, $n\geq 2$) …… ㉡

㉠－㉡을 하면

$na_n = 3n^2+n$ (단, $n\geq 2$) …… ㉢

㉢의 양변을 n으로 나누면

$a_n = 3n+1$ (단, $n\geq 2$)

가

$\therefore a_{10} = 3\times 10+1 = 31$

나

단계	채점 요소	비율
가	a_n 구하기	80%
나	a_{10}의 값 구하기	20%

답 31

555

주어진 수열을 $\{a_n\}$이라 하고, $a_{n+1}-a_n=b_n$이라 하면

$\{a_n\}$: 2, 6, 12, 20, 30, ⋯

$\{b_n\}$: 4, 6, 8, 10, ⋯

즉, $\{b_n\}$은 첫째항이 4, 공차가 2인 등차수열이므로

$b_n = 4+(n-1)\times 2 = 2n+2$

$$\begin{aligned}\therefore a_n &= a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 2+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+2) \\ &= 2+2\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}2 \\ &= 2+2\times\frac{(n-1)n}{2}+2(n-1) \\ &= n^2+n \text{ (단, } n\geq 2)\end{aligned}$$

이때, 272를 수열 $\{a_n\}$의 제m항이라 하면 $m^2+m=272$

$m^2+m-272=0$, $(m+17)(m-16)=0$

$\therefore m=16$ ($\because m$은 자연수)

따라서 272는 제16항이다.

답 ⑤

556

주어진 수열을 $\{a_n\}$이라 하고, $a_{n+1}-a_n=b_n$이라 하면

$\{a_n\}$: −2, 1, 7, 19, 43, ⋯

$\{b_n\}$: 3, 6, 12, 24, ⋯

즉, $\{b_n\}$은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열이므로

$b_n = 3\times 2^{n-1}$

$$\begin{aligned}\therefore a_n &= a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= -2+\sum_{k=1}^{n-1}3\times 2^{k-1} \\ &= -2+3\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1} \\ &= -2+3\times\frac{1\times(2^{n-1}-1)}{2-1} \\ &= -2+3(2^{n-1}-1) \\ &= 3\times 2^{n-1}-5 \text{ (단, } n\geq 2)\end{aligned}$$

이때, 1531을 수열 $\{a_n\}$의 제m항이라 하면 $3\times 2^{m-1}-5=1531$

$3\times 2^{m-1}=1536$, $2^{m-1}=512=2^9$

$m-1=9$ $\quad\therefore m=10$

따라서 1531은 제10항이다.

답 ④

557

수열 $\{a_n\}$에서 $a_{n+1}-a_n=b_n$이라 하면

$\{a_n\}$: 3, 5, 9, 17, 33, ⋯

$\{b_n\}$: 2, 4, 8, 16, ⋯

즉, $\{b_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이므로

$b_n = 2\times 2^{n-1} = 2^n$

$$\begin{aligned}\therefore a_n &= a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 3+\sum_{k=1}^{n-1}2^k \\ &= 3+\frac{2\times(2^{n-1}-1)}{2-1} \\ &= 2\times 2^{n-1}+1 \\ &= 2^n+1 \text{ (단, } n\geq 2)\end{aligned}$$

이때, $a_1=3$이므로 $a_n=2^n+1$

$$\begin{aligned}\therefore S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &= \sum_{k=1}^{n}(2^k+1) \\ &= \sum_{k=1}^{n}2^k+\sum_{k=1}^{n}1 \\ &= \frac{2\times(2^n-1)}{2-1}+n \\ &= 2^{n+1}+n-2\end{aligned}$$

답 $a_n=2^n+1$, $S_n=2^{n+1}+n-2$

558

수열 $\{a_n\}$을 1, $\frac{1}{1+2}$, $\frac{1}{1+2+3}$, ⋯, $\frac{1}{1+2+3+\cdots+2010}$, ⋯이라 하면

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{1}{1+2+3+\cdots+k} \\ &= \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}} \\ &= \frac{2}{k(k+1)} \\ &= 2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\end{aligned}$$

주어진 식은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제2010항까지의 합이므로

$$\begin{aligned}&1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+2010} \\ &= \sum_{k=1}^{2010} a_k \\ &= \sum_{k=1}^{2010} 2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\ &= 2\sum_{k=1}^{2010}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\ &= 2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2010}-\frac{1}{2011}\right)\right\} \\ &= 2\left(1-\frac{1}{2011}\right) \\ &= 2\times\frac{2010}{2011}=\frac{4020}{2011}\end{aligned}$$

답 ④

559

$\sum_{k=1}^{30}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{30}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{59}-\frac{1}{61}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{61}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{60}{61}=\frac{30}{61}$

따라서 $p=61$, $q=30$이므로

$p+q=61+30=91$ 답 ②

560

수열 $\{a_n\}$을 $\frac{1}{9-1}$, $\frac{1}{16-1}$, $\frac{1}{25-1}$, $\cdots$, $\frac{1}{100-1}$, $\cdots$,

즉 $\frac{1}{3^2-1}$, $\frac{1}{4^2-1}$, $\frac{1}{5^2-1}$, $\cdots$, $\frac{1}{10^2-1}$, $\cdots$이라 하면

$a_k=\frac{1}{(k+2)^2-1}=\frac{1}{(k+1)(k+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$

주어진 식은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제8항까지의 합이므로

$\frac{1}{9-1}+\frac{1}{16-1}+\frac{1}{25-1}+\cdots+\frac{1}{100-1}$

$=\sum_{k=1}^{8}a_k$

$=\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{212}{330}=\frac{53}{165}$ 답 $\frac{53}{165}$

561

수열 $\{a_n\}$을 $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$, $\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}$, $\cdots$, $\frac{1}{\sqrt{63}+\sqrt{64}}$, $\cdots$이라 하면

$a_k=\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}}$

$=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2})}$

$=\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}$

주어진 식은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제62항까지의 합이므로

$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{63}+\sqrt{64}}$

$=\sum_{k=1}^{62}a_k$

$=\sum_{k=1}^{62}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$

$=(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{64}-\sqrt{63})$

$=\sqrt{64}-\sqrt{2}=8-\sqrt{2}$ 답 ②

562

$\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3}}=\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3}}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3})}$

$=\sqrt{k+3}-\sqrt{k+2}$

가

$\therefore \sum_{k=1}^{22}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3}}$

$=\sum_{k=1}^{22}(\sqrt{k+3}-\sqrt{k+2})$

$=(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{4})+(\sqrt{6}-\sqrt{5})+\cdots+(\sqrt{25}-\sqrt{24})$

$=\sqrt{25}-\sqrt{3}$

$=5-\sqrt{3}$

$\therefore a=5,\ b=-1$

나

$\therefore a+b=5+(-1)=4$

다

단계	채점 요소	비율
가	근호가 포함된 식 유리화하기	30%
나	a, b의 값 구하기	60%
다	$a+b$의 값 구하기	10%

답 4

563

$f(n)=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

$=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})}$

$=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

$\therefore \sum_{k=4}^{99}f(k)=\sum_{k=4}^{99}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{5}-\sqrt{4})+(\sqrt{6}-\sqrt{5})+(\sqrt{7}-\sqrt{6})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$

$=\sqrt{100}-\sqrt{4}$

$=10-2=8$ 답 8

564

자연수 n에 대하여 7^n, 8^n을 10으로 나눈 나머지는 각각 7^n, 8^n의 일의 자리의 숫자와 같으므로 $n=1, 2, 3, \cdots$을 순서대로 대입하여 $f(n)$, $g(n)$, a_n을 구하면 다음과 같다.

n	$f(n)$	$g(n)$	$a_n=f(n)-g(n)$
1	7	8	-1
2	9	4	5
3	3	2	1
4	1	6	-5
5	7	8	-1
6	9	4	5
7	3	2	1
8	1	6	-5
9	7	8	-1
⋮	⋮	⋮	⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$은 -1, 5, 1, -5가 이 순서대로 반복되는 수열이다.

이때, $998=4\times249+2$이므로

$\sum_{n=1}^{998}a_n=(a_1+a_2+a_3+a_4)\times249+a_1+a_2$

$=(-1+5+1-5)\times249+(-1)+5$

$=4$ 답 ①

565

자연수 n에 대하여 3^n, 8^n의 일의 자리의 숫자를 각각 b_n, c_n이라 하면 3^n+8^n의 일의 자리의 숫자 a_n은 다음과 같다.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
b_n	3	9	7	1	3	9	7	1	$\cdots$
c_n	8	4	2	6	8	4	2	6	$\cdots$
a_n	1	3	9	7	1	3	9	7	$\cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 1, 3, 9, 7이 이 순서대로 반복되는 수열이다.
이때, $46=4\times11+2$이므로

$$\sum_{n=1}^{46} a_n=(a_1+a_2+a_3+a_4)\times11+a_1+a_2$$
$$=(1+3+9+7)\times11+(1+3)$$
$$=224$$

답 ②

566

$n=1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots$일 때, n^2의 값을 순서대로 구하면

$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, \cdots$ …… ㉠

㉠을 3으로 나눈 나머지는 각각

$1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, \cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 1, 1, 0이 이 순서대로 반복되는 수열이다.
이때, $20=3\times6+2$이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}$
$=(a_1+a_2+a_3)\times6+a_1+a_2$
$=6(1+1+0)+1+1=14$

답 14

실력 콕콕

본문 p.102~103

567 ①	568 ①	569 ④	570 ②	571 ②	
572 -185	573 ④	574 12	575 12	576 ④	577 ②
578 12	579 ③	580 37	581 65	582 211	

567

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9=\sum_{k=1}^{9} a_k$$
$$=\sum_{k=1}^{9}\{2^k+(-1)^k\}$$
$$=\sum_{k=1}^{9}2^k+\sum_{k=1}^{9}(-1)^k$$
$$=\frac{2(2^9-1)}{2-1}+\{(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)-1\}$$
$$=2^{10}-2-1$$
$$=2^{10}-3$$

답 ①

568

$$\sum_{k=1}^{10} a_k=a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10}$$
$$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_9+a_{10})$$
$$=\sum_{k=1}^{5}(a_{2k-1}+a_{2k})$$
$$=5^2=25$$

다른 풀이

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})$$
$$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})$$
$$=n^2$$
$$\therefore S_{2n}=n^2$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k=S_{10}=5^2=25$$

답 ①

569

$$\sum_{k=1}^{20}|k-9|-\sum_{k=1}^{20}(k-9)$$
$$=\sum_{k=1}^{20}\{|k-9|-(k-9)\}$$
$$=\sum_{k=1}^{8}\{-(k-9)-(k-9)\}+\sum_{k=9}^{20}\{(k-9)-(k-9)\}$$
$$=\sum_{k=1}^{8}\{-2(k-9)\}$$
$$=-2\sum_{k=1}^{8}k+\sum_{k=1}^{8}18$$
$$=-2\times\frac{8\times9}{2}+18\times8$$
$$=-72+144=72$$

답 ④

570

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{i}k\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}i(i+1)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(i^2+i)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}i^2+\sum_{i=1}^{n}i\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)}{6}\times\{(2n+1)+3\}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)}{6}\times(2n+4)$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$
$$=35$$

따라서 $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=35$에서

$\frac{5\times6\times7}{6}=35$이므로 $n=5$

답 ②

571

$$\sum_{k=1}^{20}(-1)^k\times(k+1)^2$$
$$=-2^2+3^2-4^2+5^2+\cdots-20^2+21^2$$
$$=(3^2-2^2)+(5^2-4^2)+\cdots+(21^2-20^2)$$
$$=(3+2)(3-2)+(5+4)(5-4)+\cdots+(21+20)(21-20)$$
$$=(2+3)+(4+5)+\cdots+(20+21)$$
$$=(1+2+3+4+5+\cdots+20+21)-1$$
$$=\sum_{k=1}^{21}k-1$$

$=\dfrac{21\times22}{2}-1=230$ 답 ②

572

$x^2-4nx+n^2=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a_n+b_n=4n,\ a_nb_n=n^2$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}(3-a_k)(3-b_k)$

$=\sum_{k=1}^{10}\{9-3(a_k+b_k)+a_kb_k\}$

$=\sum_{k=1}^{10}9-3\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)+\sum_{k=1}^{10}a_kb_k$

$=\sum_{k=1}^{10}9-3\sum_{k=1}^{10}4k+\sum_{k=1}^{10}k^2$

$=9\times10-3\times4\times\dfrac{10\times11}{2}+\dfrac{10\times11\times21}{6}$

$=90-660+385=-185$ 답 -185

573

수열 $\{a_n\}$을

$1,\ \dfrac{1+2}{2},\ \dfrac{1+2+3}{3},\ \cdots,\ \dfrac{1+2+3+\cdots+20}{20},\ \cdots$

이라 하면

$a_k=\dfrac{1+2+3+\cdots+k}{k}=\dfrac{\frac{k(k+1)}{2}}{k}=\dfrac{k+1}{2}$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합은

$1+\dfrac{1+2}{2}+\dfrac{1+2+3}{3}+\cdots+\dfrac{1+2+3+\cdots+20}{20}$

$=\sum_{k=1}^{20}a_k$

$=\sum_{k=1}^{20}\dfrac{k+1}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{20}(k+1)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{20}k+\sum_{k=1}^{20}1\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{20\times21}{2}+1\times20\right)$

$=\dfrac{1}{2}(210+20)=115$ 답 ④

574

$\sum_{k=1}^{n}a_k=\dfrac{1}{3}a_na_{n+1}$ ······ ㉠

㉠의 양변에 n 대신에 $n-1$을 대입하면

$\sum_{k=1}^{n-1}a_k=\dfrac{1}{3}a_{n-1}a_n$ (단, $n\geq2$) ······ ㉡

㉠－㉡을 하면

$a_n=\dfrac{1}{3}a_n(a_{n+1}-a_{n-1})$

$a_n-\dfrac{1}{3}a_n(a_{n+1}-a_{n-1})=0$

$a_n\{3-(a_{n+1}-a_{n-1})\}=0$

$3-(a_{n+1}-a_{n-1})=0$ ($\because a_n\neq0$)

$\therefore a_{n+1}=a_{n-1}+3$ (단, $n\geq2$) ······ ㉢

이때, $a_1=1$이므로 ㉢에서

$a_3=a_1+3=1+3=4$

$a_5=a_3+3=4+3=7$

$\therefore a_1+a_3+a_5=1+4+7=12$

보충 설명

$a_n=\begin{cases}1\ (n=1)\\0\ (n\geq2)\end{cases}$이면 ㉠이 성립하지 않는다.

답 12

575

$\{a_n\}$: $-3,\ -2,\ 0,\ 3,\ 7,\ \cdots$

$a_{n+1}-a_n=b_n$이라 하면

$\{b_n\}$: $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$

$\therefore b_n=n$

$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=-3+\sum_{k=1}^{n-1}k$

$=-3+\dfrac{(n-1)n}{2}$ (단, $n\geq2$)

이때, $a_m=63$이므로

$a_m=-3+\dfrac{(m-1)m}{2}=63$

$\dfrac{(m-1)m}{2}=66$

$m^2-m=132,\ m^2-m-132=0$

$(m+11)(m-12)=0$

$\therefore m=12$ ($\because m$은 자연수) 답 12

576

$\sum_{k=1}^{10}\dfrac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{10}\dfrac{1}{4k^2-1}$

$=\sum_{k=1}^{10}\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$=\sum_{k=1}^{10}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{19}-\dfrac{1}{21}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{21}\right)=\dfrac{10}{21}$ 답 ④

577

$a_n=(-1)^n\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$

$=(-1)^n\left(\dfrac{2n+1}{n}-\dfrac{2n+1}{n+1}\right)$

$=(-1)^n\left(2+\dfrac{1}{n}-2+\dfrac{1}{n+1}\right)$

$=(-1)^n\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right)$

$\therefore S_{99}=\sum_{k=1}^{99}a_k$

$=\sum_{k=1}^{99}(-1)^k\left(\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k+1}\right)$

$=-\left(1+\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)-\cdots-\left(\dfrac{1}{99}+\dfrac{1}{100}\right)$

$=-1-\dfrac{1}{100}$

$=-\dfrac{101}{100}$ 답 ②

578

$$\sum_{k=1}^{99}\frac{2}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{99}\frac{2(\sqrt{k-1}-\sqrt{k+1})}{(\sqrt{k-1}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k-1}-\sqrt{k+1})}$$
$$=\sum_{k=1}^{99}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1})$$
$$=(\sqrt{2}-0)+(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{99}-\sqrt{97})+(\sqrt{100}-\sqrt{98})$$
$$=0-1+\sqrt{99}+\sqrt{100}$$
$$=9+3\sqrt{11}$$

따라서 $a=9$, $b=3$이므로

$a+b=9+3=12$ 답 12

579

$\frac{n(n+1)}{2}=\sum_{k=1}^{n}k=1+2+\cdots+n=b_n$이라 하면 $\frac{n(n+1)}{2}$을 3으로 나눈 나머지는 a_n이므로

$b_1=1$ $\quad\therefore a_1=1$

$b_2=1+2=3$ $\quad\therefore a_2=0$

$b_3=1+2+3=6$ $\quad\therefore a_3=0$

$b_4=1+2+3+4=10$ $\quad\therefore a_4=1$

$b_5=1+2+3+4+5=15$ $\quad\therefore a_5=0$

$b_6=1+2+3+4+5+6=21$ $\quad\therefore a_6=0$

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$은 1, 0, 0이 이 순서대로 반복되는 수열이다.

이때, $1000=3\times333+1$이므로

$$\sum_{n=1}^{1000}a_n=(a_1+a_2+a_3)\times333+a_1=333(1+0+0)+1=334$$

답 ③

580

$a_n=n-4\left[\frac{n}{4}\right]$은 자연수 n을 4로 나눈 나머지이므로

$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, $a_4=0$,

$a_5=1$, $a_6=2$, $a_7=3$, $a_8=0$,

$a_9=1$, $\cdots$

이때, $25=4\times6+1$이므로

$$\sum_{n=1}^{25}a_n=(a_1+a_2+a_3+a_4)\times6+a_1=6\times(1+2+3+0)+1=37$$

보충 설명

정수 A를 B로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면

$A=BQ+R$ (단, $0\le R<B$)

이 식의 양변을 B로 나누면

$$\frac{A}{B}=Q+\frac{R}{B}$$

이때, $0\le\frac{R}{B}<1$이므로 $\left[\frac{R}{B}\right]=0$

$$\left[\frac{A}{B}\right]=\left[Q+\frac{R}{B}\right]=Q+\left[\frac{R}{B}\right]=Q$$

같은 원리로 1부터 n까지의 자연수 중에서 k의 배수의 개수는 n을 k로 나눈 몫, 즉 $\left[\frac{n}{k}\right]$이 된다.

따라서 같은 원리로 $\left[\frac{n}{4}\right]$은 n을 4로 나누었을 때의 몫이므로

$n=4\left[\frac{n}{4}\right]+R$ (단, R는 n을 4로 나눈 나머지이다.)

$\therefore R=n-4\left[\frac{n}{4}\right]$

즉, $a_n=n-4\left[\frac{n}{4}\right]$은 n을 4로 나눈 나머지가 된다. 답 37

581

a_n은 $x^2-(n+1)x+2n+1$을 $x-n$으로 나눈 나머지이므로 나머지정리에 의하여

가

$a_n=n^2-(n+1)n+2n+1=n+1$

나

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(k+1)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}1$$
$$=\frac{10\times11}{2}+1\times10$$
$$=55+10$$
$$=65$$

다

단계	채점 요소	비율
가	a_n이 주어진 이차식을 $x-n$으로 나눈 나머지임을 알기	30%
나	나머지정리를 이용하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항 구하기	40%
다	합의 기호 $\sum$를 사용하여 $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값 계산하기	30%

답 65

582

$\{a_n\}$: 9, 99, 999, 9999, $\cdots$이라 하면

$a_1=9=10-1$

$a_2=99=10^2-1$

$a_3=999=10^3-1$

$a_4=9999=10^4-1$

⋮

$a_n=10^n-1$

가

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{20}a_k=\sum_{k=1}^{20}(10^k-1)$$
$$=\sum_{k=1}^{20}10^k-\sum_{k=1}^{20}1$$
$$=\frac{10(10^{20}-1)}{10-1}-1\times20$$
$$=\frac{10^{21}-190}{9}$$

나

$\therefore m=21$, $n=190$

$\therefore m+n=21+190=211$

다

단계	채점 요소	비율
가	규칙을 찾아 주어진 수열의 제n항 구하기	50%
나	합의 기호 $\sum$를 사용하여 $\sum_{k=1}^{20}a_k$의 값 계산하기	30%
다	나에서 자연수 m, n의 값을 찾아 $m+n$의 값 구하기	20%

답 211

Ⅲ. 수열

11 수학적 귀납법

개념 콕콕

본문 p.105

583

(1) $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+3$에서
$a_2=a_1+3=1+3=4$
$a_3=a_2+3=4+3=7$
$a_4=a_3+3=7+3=10$
$\therefore a_5=a_4+3=10+3=13$

(2) $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+2^n$에서
$a_2=a_1+2^1=1+2=3$
$a_3=a_2+2^2=3+4=7$
$a_4=a_3+2^3=7+8=15$
$\therefore a_5=a_4+2^4=15+16=31$

(3) $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+(n+1)^2$에서
$a_2=a_1+2^2=2+4=6$
$a_3=a_2+3^2=6+9=15$
$a_4=a_3+4^2=15+16=31$
$\therefore a_5=a_4+5^2=31+25=56$

(4) $a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$에서
$a_3=a_1+a_2=1+2=3$
$a_4=a_2+a_3=2+3=5$
$\therefore a_5=a_3+a_4=3+5=8$

답 (1) 13 (2) 31 (3) 56 (4) 8

584

(1) 첫째항 a_1은 $a_1=2$이고, 이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면
$a_2-a_1=4-2=2$
$a_3-a_2=6-4=2$
$a_4-a_3=8-6=2$
⋮
$a_{n+1}-a_n=2$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)
따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는
$a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+2$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

(2) 첫째항 a_1은 $a_1=3$이고, 이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면
$a_2-a_1=0-3=-3$
$a_3-a_2=-3-0=-3$
$a_4-a_3=-6-(-3)=-3$
⋮
$a_{n+1}-a_n=-3$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)
따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는
$a_1=3$, $a_{n+1}=a_n-3$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

(3) 첫째항 a_1은 $a_1=1$이고, 이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면
$a_2\div a_1=2\div 1=2$
$a_3\div a_2=4\div 2=2$
$a_4\div a_3=8\div 4=2$
⋮
$a_{n+1}\div a_n=2$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)
따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는
$a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

(4) 첫째항 a_1은 $a_1=8$이고, 이웃하는 항들 사이의 관계를 살펴보면
$a_2\div a_1=-12\div 8=-\frac{3}{2}$
$a_3\div a_2=18\div(-12)=-\frac{3}{2}$
$a_4\div a_3=-27\div 18=-\frac{3}{2}$
⋮
$a_{n+1}\div a_n=-\frac{3}{2}$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)
따라서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는
$a_1=8$, $a_{n+1}=-\frac{3}{2}a_n$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

답 (1) $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+2$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)
(2) $a_1=3$, $a_{n+1}=a_n-3$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)
(3) $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)
(4) $a_1=8$, $a_{n+1}=-\frac{3}{2}a_n$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

585

(1) $a_{n+1}=a_n+2$, 즉 $a_{n+1}-a_n=2$에서 주어진 수열은 공차가 2인 등차수열이고, 첫째항이 $a_1=5$이므로
$a_n=5+(n-1)\times 2=2n+3$

(2) $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 주어진 수열은 등차수열이고, $a_1=-4$,
$a_2-a_1=-8-(-4)=-4$이므로 첫째항이 -4, 공차가 -4이다.
$\therefore a_n=-4+(n-1)\times(-4)=-4n$

(3) $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$에서 주어진 수열은 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이고, 첫째항이
$a_1=4$이므로
$a_n=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

(4) $a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$에서 주어진 수열은 등비수열이고, $a_1=2$,
$a_2\div a_1=-4\div 2=-2$이므로 첫째항이 2, 공비가 -2이다.
$\therefore a_n=2\times(-2)^{n-1}$

답 (1) $a_n=2n+3$ (2) $a_n=-4n$
(3) $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ (4) $a_n=2\times(-2)^{n-1}$

586

(1) $a_{n+1}-a_n=2n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$
\begin{array}{rl}
\cancel{a_2}-a_1 &= 2\times 1\\
\cancel{a_3}-\cancel{a_2} &= 2\times 2\\
\cancel{a_4}-\cancel{a_3} &= 2\times 3\\
&\vdots\\
+)\ a_n-\cancel{a_{n-1}} &= 2(n-1)\\
\hline
a_n-a_1 &= \sum_{k=1}^{n-1}2k
\end{array}
$$

$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2k=5+2\times\frac{(n-1)n}{2}$
$=n^2-n+5$

(2) $a_{n+1}-a_n=2^n$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\cancel{a_2}-a_1=2^1$$
$$\cancel{a_3}-\cancel{a_2}=2^2$$
$$\cancel{a_4}-\cancel{a_3}=2^3$$
$$\vdots$$
$$+\underline{)\ a_n-\cancel{a_{n-1}}=2^{n-1}}$$
$$a_n-a_1=\sum_{k=1}^{n-1}2^k$$
$$\therefore\ a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=3+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}$$
$$=3+2^n-2=2^n+1$$

(3) $a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\cancel{a_2}=\frac{2}{1}a_1$$
$$\cancel{a_3}=\frac{3}{2}\cancel{a_2}$$
$$\cancel{a_4}=\frac{4}{3}\cancel{a_3}$$
$$\vdots$$
$$\times\underline{)\ a_n=\frac{n}{n-1}\cancel{a_{n-1}}}$$
$$a_n=\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n-1}a_1$$
$$=\frac{n}{1}\times a_1=n\times 1=n$$

(4) $a_{n+1}=9^n a_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\cancel{a_2}=9^1a_1$$
$$\cancel{a_3}=9^2\cancel{a_2}$$
$$\cancel{a_4}=9^3\cancel{a_3}$$
$$\vdots$$
$$\times\underline{)\ a_n=9^{n-1}\cancel{a_{n-1}}}$$
$$a_n=9^1\times9^2\times9^3\times\cdots\times9^{n-1}a_1$$
$$=9^{1+2+3+\cdots+(n-1)}\times1$$
$$=9^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

답 (1) $a_n=n^2-n+5$ (2) $a_n=2^n+1$ (3) $a_n=n$ (4) $a_n=9^{\frac{n(n-1)}{2}}$

587

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=1$, (우변)$=\frac{1\times(1+1)}{2}=1$

따라서 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때

주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$

위의 식의 양변에 $k+1$을 더하면

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$
$$=\frac{\boxed{(k+1)(k+2)}}{2}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

답 $(k+1)(k+2)$

588

(1) $n=1$일 때

(좌변)$=2\times1=2$, (우변)$=1\times(1+1)=2$

따라서 주어진 등식이 성립한다.

(2) $n=k$일 때

주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$2+4+6+\cdots+2k=k(k+1)$

위의 식의 양변에 $2(k+1)$을 더하면

$$2+4+6+\cdots+2k+2(k+1)=k(k+1)+2(k+1)$$
$$=(k+1)(k+2)$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 등식이 성립한다.

답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

유형 콕콕   본문 p.106~109

589 ④ **590** ② **591** 27 **592** ④ **593** ③
594 6138 **595** ② **596** ① **597** 225 **598** ④ **599** ②
600 11 **601** 1 **602** ② **603** ③ **604** 1536
605 (1) 36 (2) $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+6$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ (3) $\frac{194}{9}$
606 (1) 30 (2) $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+7$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
(3) $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}+14$ (4) 101 km
607 262 **608** 15 **609** (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조
610 16 **611** (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

589

$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=a+d=10$ ⋯⋯ ㉠

$a_9=a+8d=24$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=8$, $d=2$

$\therefore\ a_n=8+(n-1)\times2=2n+6$

$\therefore\ a_{16}=2\times16+6=38$

다른 풀이

$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

이때, a_2, a_9, a_{16}은 이 순서대로 등차수열을 이루므로 a_9는 a_2, a_{16}의 등차중항이다.

즉, $2a_9=a_2+a_{16}$에서

$2\times24=10+a_{16}$, $48=10+a_{16}$

$\therefore\ a_{16}=38$

답 ④

590

$a_{n+1}=a_n-4$, 즉 $a_{n+1}-a_n=-4$에서 수열 $\{a_n\}$은 공차가 -4인 등차수열이고, 첫째항이 $a_1=120$이므로

$a_n=120+(n-1)\times(-4)=-4n+124$

이때, $a_k=8$이므로 $-4k+124=8$

$4k=116$ $\quad\therefore\ k=29$

답 ②

591

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고, $a_1=2$,

$a_2-a_1=4-2=2$이므로 첫째항이 2, 공차가 2이다.

$\therefore a_n=2+(n-1)\times 2=2n$

가

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k a_{k+1}}&=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2k(2k+2)}\\&=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{4k(k+1)}\\&=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}\\&=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{11}\right)\\&=\frac{1}{4}\times\frac{10}{11}=\frac{5}{22}\end{aligned}$$

따라서 $p=22$, $q=5$이므로

나

$p+q=22+5=27$

다

단계	채점 요소	비율
가	a_n 구하기	40%
나	p, q의 값 구하기	40%
다	$p+q$의 값 구하기	20%

답 27

592

${a_{n+1}}^2=a_n a_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, $a_1=2$, $\frac{a_2}{a_1}=\frac{4}{2}=2$

이므로 첫째항이 2, 공비가 2이다.

$\therefore a_n=2\times 2^{n-1}=2^n$

$\therefore a_9=2^9=512$

답 ④

593

$a_n=3a_{n+1}$, 즉 $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이고,

$a_2=9$이므로

$\frac{a_2}{a_1}=\frac{9}{a_1}=\frac{1}{3}$에서 $a_1=27$

$\therefore a_n=27\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

따라서 $a_7=27\times\left(\frac{1}{3}\right)^6=\frac{1}{3^3}=\frac{1}{3^k}$이므로

$k=3$

답 ③

594

$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

이때, 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$S_4=\frac{a(r^4-1)}{r-1}=90$ …… ㉠

$S_8=\frac{a(r^8-1)}{r-1}=\frac{a(r^4-1)(r^4+1)}{r-1}=1530$ …… ㉡

가

㉡÷㉠을 하면

$r^4+1=\frac{1530}{90}=17$

따라서 $r^4=16$이므로 $r=2$ ($\because a_n>0$)

나

$r=2$를 ㉠에 대입하면 $a=6$

$\therefore S_{10}=\frac{6(2^{10}-1)}{2-1}=6(2^{10}-1)=6138$

다

단계	채점 요소	비율
가	S_4, S_8을 첫째항 a와 공비 r를 이용하여 나타내기	40%
나	r의 값 구하기	30%
다	S_{10}의 값 구하기	30%

답 6138

595

$a_{n+1}=a_n+2n^2$의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}\cancel{a_2}&=a_1+2\times 1^2\\\cancel{a_3}&=\cancel{a_2}+2\times 2^2\\\cancel{a_4}&=\cancel{a_3}+2\times 3^2\\&\vdots\\+)\ a_n&=\cancel{a_{n-1}}+2(n-1)^2\\\hline a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2k^2\\&=3+2\times\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\end{aligned}$$

$\therefore a_8=3+2\times\frac{7\times 8\times 15}{6}=283$

답 ②

596

$a_n=a_{n-1}+3^{n-1}$, 즉 $a_n-a_{n-1}=3^{n-1}$의 n에 2, 3, 4, …, n을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}\cancel{a_2}-a_1&=3\\\cancel{a_3}-\cancel{a_2}&=3^2\\\cancel{a_4}-\cancel{a_3}&=3^3\\&\vdots\\+)\ a_n-\cancel{a_{n-1}}&=3^{n-1}\\\hline a_n-a_1&=\sum_{k=1}^{n-1}3^k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}3^k\\&=3+\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}\\&=3+\frac{3^n-3}{2}=\frac{3^n+3}{2}\end{aligned}$$

이때, $a_k=366$이므로 $\frac{3^k+3}{2}=366$

$3^k+3=732$, $3^k=729=3^6$

$\therefore k=6$

답 ①

597

$a_{n+1}=a_n+f(n)$에서 $f(n)=a_{n+1}-a_n$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}f(k)&=\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)\\&=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)\\&=a_{n+1}-a_1=a_{n+1}-1\end{aligned}$$

이때, $\sum_{k=1}^{n} f(k)=n^2+2n$이므로 $n^2+2n=a_{n+1}-1$

따라서 $n^2+2n+1=a_{n+1}$이므로 $a_{n+1}=(n+1)^2$

$\therefore a_n=n^2$

가

$\therefore a_{15}=15^2=225$

나

단계	채점 요소	비율
가	a_n 구하기	80%
나	a_{15}의 값 구하기	20%

답 225

598

$a_{n+1}=\frac{n+3}{n+1}a_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\cancel{a_2}=\frac{4}{2}a_1$$
$$\cancel{a_3}=\frac{5}{3}\cancel{a_2}$$
$$\cancel{a_4}=\frac{6}{4}\cancel{a_3}$$
$$\vdots$$
$$\times\Big)\, a_n=\frac{n+2}{n}\cancel{a_{n-1}}$$

$$a_n=\frac{4}{2}\times\frac{5}{3}\times\frac{6}{4}\times\cdots\times\frac{n+2}{n}a_1$$
$$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{30}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{30}\frac{2}{(k+1)(k+2)}$$
$$=2\sum_{k=1}^{30}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=2\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{31}-\frac{1}{32}\right)\right\}$$
$$=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{32}\right)=\frac{15}{16}$$

답 ④

599

$a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n$, 즉 $a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\cancel{a_2}=\frac{2}{1}a_1$$
$$\cancel{a_3}=\frac{3}{2}\cancel{a_2}$$
$$\cancel{a_4}=\frac{4}{3}\cancel{a_3}$$
$$\vdots$$
$$\times\Big)\, a_n=\frac{n}{n-1}\cancel{a_{n-1}}$$

$$a_n=\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n-1}a_1$$
$$=n\times1=n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{12}a_k=\sum_{k=1}^{12}k=\frac{12\times13}{2}=78$$

답 ②

600

$a_{n+1}=5^na_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\cancel{a_2}=5a_1$$
$$\cancel{a_3}=5^2\cancel{a_2}$$
$$\cancel{a_4}=5^3\cancel{a_3}$$
$$\vdots$$
$$\times\Big)\, a_n=5^{n-1}\cancel{a_{n-1}}$$

$$a_n=5\times5^2\times5^3\times\cdots\times5^{n-1}a_1$$
$$=5^{1+2+3+\cdots+(n-1)}\times3$$
$$=3\times5^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

이때, $a_k=3\times5^{55}$이므로 $3\times5^{\frac{(k-1)k}{2}}=3\times5^{55}$

$\frac{k(k-1)}{2}=55$, $k(k-1)=110$

$\therefore k=11$

답 11

601

$a_{n+2}+a_n=-a_{n+1}$에서

$a_{n+2}=-a_{n+1}-a_n$ ⋯⋯ ㉠

$a_1=1$, $a_2=2$이므로

㉠에 n 대신 1, 2, 3, ⋯을 차례대로 대입하여 a_3, a_4, a_5, ⋯의 값을 구해 보면

$a_3=-a_2-a_1=-3$

$a_4=-a_3-a_2=3-2=1$

$a_5=-a_4-a_3=-1+3=2$

$a_6=-a_5-a_4=-2-1=-3$

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$의 각 항은 1, 2, -3이 이 순서대로 반복되므로

$a_{n+3}=a_n$ (단, $n=1$, 2, 3, ⋯)

이때, $100=3\times33+1$이므로

$a_{100}=a_1=1$

답 1

602

$a_1=15$에서

$a_2=a_1+3=15+3=18$, $a_3=\frac{1}{2}a_2=\frac{1}{2}\times18=9$,

$a_4=a_3+3=9+3=12$, $a_5=\frac{1}{2}a_4=\frac{1}{2}\times12=6$,

$a_6=\frac{1}{2}a_5=\frac{1}{2}\times6=3$, $a_7=a_6+3=3+3=6$,

$a_8=\frac{1}{2}a_7=\frac{1}{2}\times6=3$, $a_9=a_8+3=3+3=6$,

$a_{10}=\frac{1}{2}a_9=\frac{1}{2}\times6=3$, $a_{11}=a_{10}+3=3+3=6$, ⋯

따라서 $n\ge5$일 때, $a_n=\begin{cases}3 & (n\text{은 짝수})\\ 6 & (n\text{은 홀수})\end{cases}$이므로

$a_{124}=3$

답 ②

603

$S_n=2a_n+2n$ ($n=1$, 2, 3, ⋯)에서

$S_{n+1}=2a_{n+1}+2(n+1)$

한편, $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ ($n=1$, 2, 3, ⋯)이므로

$a_{n+1}=2a_{n+1}+2(n+1)-(2a_n+2n)$

$a_{n+1}=2a_n-2$

$\therefore a_{n+1}-2=2(a_n-2)$

이때, $a_n-2=b_n$으로 놓으면

$b_{n+1}=2b_n$, $b_1=a_1-2=-2-2=-4$

즉, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 -4, 공비가 2인 등비수열이므로

$b_n=-4\times 2^{n-1}=-2^{n+1}$

따라서 $a_n=b_n+2=-2^{n+1}+2$이므로

$a_5=-2^6+2=-62$ 답 ③

604

$S_{n+1}=2S_n-1$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$에서

$S_{n+1}-1=2(S_n-1)$

즉, 수열 $\{S_n-1\}$은 첫째항이 $S_1-1=4-1=3$, 공비가 2인 등비수열이므로

$S_n-1=3\times 2^{n-1}$

$\therefore S_n=3\times 2^{n-1}+1$

$\therefore a_{11}=S_{11}-S_{10}$

$=3\times 2^{10}+1-(3\times 2^9+1)$

$=3\times 2^9=1536$ 답 1536

605

(1) 45 L의 물의 $\frac{1}{3}$을 퍼내고 6 L의 물을 새로 넣었을 때 통에 남아 있는 물의 양이 a_1 L이므로

$a_1=45\times\frac{2}{3}+6=36$

(2) n번 시행 후 통에 남아 있는 물의 양 a_n L에 대하여 이 물의 $\frac{1}{3}$을 퍼내고 6 L의 물을 새로 넣었을 때 통에 남아 있는 물의 양이 a_{n+1} L이므로

$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+6$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

(3) $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+6$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$a_2=\frac{2}{3}a_1+6=\frac{2}{3}\times 36+6=24+6=30$

$a_3=\frac{2}{3}a_2+6=\frac{2}{3}\times 30+6=20+6=26$

$a_4=\frac{2}{3}a_3+6=\frac{2}{3}\times 26+6=\frac{52+18}{3}=\frac{70}{3}$

$\therefore a_5=\frac{2}{3}a_4+6=\frac{2}{3}\times\frac{70}{3}+6=\frac{140+54}{9}=\frac{194}{9}$

답 (1) 36 (2) $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+6$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ (3) $\frac{194}{9}$

606

(1) 여행 첫째 날은 30 km를 이동하였으므로

$a_1=30$

(2) 여행 n번째 날 이동한 거리 a_n km에 대하여 이 거리의 $\frac{1}{2}$에 7 km를 더 이동한 거리가 a_{n+1} km이므로

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+7$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

(3) $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+7$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$에서

$a_{n+1}-14=\frac{1}{2}(a_n-14)$

즉, 수열 $\{a_n-14\}$는 첫째항이 $a_1-14=30-14=16$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$a_n-14=16\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore a_n=16\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+14=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}+14$

(4) (3)에 의하여 여행 첫째 날부터 5일째까지 이동한 총 거리는

$$\sum_{k=1}^{5}a_k=\sum_{k=1}^{5}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}+14\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}+\sum_{k=1}^{5}14$$

$$=\frac{16\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{2}}+14\times 5$$

$$=31+70=101$$

따라서 여행 첫째 날부터 5일째까지 이동한 총 거리는 101 km이다.

답 (1) 30 (2) $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+7$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

(3) $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}+14$ (4) 101 km

607

1시간 후에 살아 있는 세포의 수 a_1은

$a_1=(10-3)\times 2=14$

$(n+1)$시간 후에 살아 있는 세포의 수를 a_{n+1}이라 하면

$a_{n+1}=(a_n-3)\times 2=2a_n-6$

즉, $a_{n+1}=2a_n-6$에서

$a_{n+1}-6=2(a_n-6)$

$a_n-6=b_n$으로 놓으면

$b_{n+1}=2b_n$, $b_1=a_1-6=14-6=8$

즉, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 8, 공비가 2인 등비수열이므로

$b_n=8\times 2^{n-1}=2^{n+2}$

$\therefore a_n=b_n+6=2^{n+2}+6$

따라서 6시간 후에 살아 있는 세포의 수 a_6은

$a_6=2^8+6=256+6=262$ 답 262

608

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=1^2=1$, (우변)$=\frac{1}{6}\times 1\times 2\times 3=1$

따라서 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때

주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

위의 등식의 양변에 $\boxed{(k+1)^2}$을 더하면

$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+\boxed{(k+1)^2}$

$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+\boxed{(k+1)^2}$

$=\frac{1}{6}(k+1)\{2k^2+k+(\boxed{6k+6})\}$

$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(\boxed{2k+3})$

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

따라서 $f(k)=(k+1)^2$, $g(k)=6k+6$, $h(k)=2k+3$이므로

$\frac{g(1)h(1)}{f(1)}=\frac{12\times 5}{4}=15$ 답 15

609

(1) $n=1$일 때

$(\text{좌변})=1\times2=2$, $(\text{우변})=\dfrac{1\times2\times3}{3}=2$

따라서 주어진 등식이 성립한다.

(2) $n=k$일 때

주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

위의 등식의 양변에 $(k+1)(k+2)$를 더하면

$$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)}{3}\times(k+3)$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 등식이 성립한다.

답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

610

(i) $n=4$일 때

$(\text{좌변})=1\times2\times3\times4=24$, $(\text{우변})=2^4=16$

따라서 (좌변)>(우변)이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k(k\geq4)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$1\times2\times3\times\cdots\times k>2^k$

위의 부등식의 양변에 $\boxed{k+1}$을 곱하면

$1\times2\times3\times\cdots\times k\times(\boxed{k+1})>2^k\times(\boxed{k+1})$

이때, $k\geq4$이므로 위의 식의 우변에서

$2^k\times(\boxed{k+1})>2^k\times2=\boxed{2^{k+1}}$

$\therefore 1\times2\times3\times\cdots\times k\times(\boxed{k+1})>\boxed{2^{k+1}}$

따라서 $n=k+1$일 때에도 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n\geq4$인 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

따라서 $f(k)=k+1$, $g(k)=2^{k+1}$이므로

$$\frac{g(7)}{f(15)}=\frac{2^{7+1}}{15+1}=\frac{2^8}{16}=16$$

답 16

611

(1) $n=2$일 때

$(\text{좌변})=(1+h)^2=1+2h+h^2$, $(\text{우변})=1+2h$

이때, $h>0$에서 $h^2>0$이므로 주어진 부등식은 성립한다.

(2) $n=k(k\geq2)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$(1+h)^k>1+kh$

위의 부등식의 양변에 $1+h$를 곱하면

$$(1+h)^{k+1}>(1+kh)(1+h)$$
$$=1+kh+h+kh^2$$
$$>1+(k+1)h$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.

답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

실력 콕콕

본문 p.110~111

612 ④	613 9	614 ③	615 22	616 ②	617 15
618 ⑤	619 14	620 15	621 50	622 ②	623 ③
624 ⑤	625 ①	626 풀이 참조		627 풀이 참조	

612

$a_1=1$, $a_2=2$이고, 모든 자연수 n에 대하여 세 항 a_{2n-1}, a_{2n}, a_{2n+1}은 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 항 a_{2n}, a_{2n+1}, a_{2n+2}는 이 순서대로 등비수열을 이루므로 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례대로 구하면

$1,\ 2,\ 3,\ \dfrac{9}{2},\ 6,\ 8,\ 10,\ \cdots$

이때, $\{a_{2n-1}\}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$은 $1, 3, 6, 10, \cdots$이므로

$a_{2n+1}-a_{2n-1}=b_n$으로 놓으면

$\{b_n\}$: $2, 3, 4, \cdots$

$\therefore b_n=n+1$

$$a_{2n-1}=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$$
$$=1+\frac{(n-1)n}{2}+n-1$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}\ (\text{단, } n\geq2)$$

$$\therefore a_{15}=a_{2\times8-1}=\frac{8\times9}{2}=36$$

답 ④

613

$a_{n+1}=a_n+(-2)^n$에서 $a_{n+1}-a_n=(-2)^n$이므로 $a_{n+1}-a_n=b_n$으로 놓으면

$b_n=(-2)^n$

$$\therefore a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(-2)^k$$
$$=1+\frac{-2\{1-(-2)^{n-1}\}}{1-(-2)}$$
$$=\frac{1+2\times(-2)^{n-1}}{3}\ (\text{단, } n\geq2)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{5}a_k=\sum_{k=1}^{5}\frac{1+2\times(-2)^{k-1}}{3}$$
$$=\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{5}(-2)^{k-1}+\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{3}$$
$$=\frac{2}{3}\times\frac{1\{1-(-2)^5\}}{1-(-2)}+\frac{1}{3}\times5$$
$$=\frac{2}{3}\times11+\frac{5}{3}=9$$

답 9

614

주어진 식의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 a_1=\log_2 16=4$

$\log_2 a_{n+1}=\log_2\sqrt{a_n}=\dfrac{1}{2}\log_2 a_n$

즉, 수열 $\{\log_2 a_n\}$은 첫째항이 4, 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$\log_2 a_n=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$

$$\therefore \log_2 a_9=\left(\frac{1}{2}\right)^{9-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$$

답 ③

615

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+2$에서 $a_{n+1}-4=\frac{1}{2}(a_n-4)$

$a_n-4=b_n$으로 놓으면

$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$, $b_1=a_1-4=5-4=1$

즉, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$b_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore a_n=b_n+4=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+4$

$$\therefore \sum_{k=1}^{20}(a_k-4)=\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{1\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right\}=2-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$$

따라서 $p=2$, $q=20$이므로

$p+q=2+20=22$

답 22

616

$a_{n+1}=\frac{a_n}{1+na_n}$에서 양변에 역수를 취하면

$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1+na_n}{a_n}=\frac{1}{a_n}+n$

$b_n=\frac{1}{a_n}$로 놓으면 $b_{n+1}=b_n+n$

$\therefore b_{n+1}-b_n=n$

즉, 수열 $\{b_n\}$의 일반항은

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}k$$
$$=1+\frac{(n-1)n}{2}\ \left(\because b_1=\frac{1}{a_1}=1\right)$$
$$=\frac{n^2-n+2}{2}\ (\text{단, } n\geq 2)$$

$\therefore \frac{1}{a_{10}}=b_{10}=\frac{10^2-10+2}{2}=\frac{92}{2}=46$

답 ②

617

모든 자연수 n에 대하여

$4a_{n+1}-1=4\times\frac{3a_n-1}{4a_n-1}-1=2-\frac{1}{4a_n-1}$

이다. 수열 $\{b_n\}$을

$b_1=1$, $b_{n+1}=(4a_n-1)b_n\ (n\geq 1)$ …… (*)

이라 하면

$$b_{n+2}=\left(2-\frac{1}{4a_n-1}\right)b_{n+1}$$
$$=\left(2-\frac{b_n}{b_{n+1}}\right)b_{n+1}$$
$$=2b_{n+1}-b_n$$

$b_{n+2}-b_{n+1}=b_{n+1}-b_n$

이다.

이때, $b_2=(4a_1-1)b_1=(4\times1-1)\times1=3$

즉, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 $3-1=2$인 등차수열이므로

$b_n=1+(n-1)\times2=\boxed{2n-1}$

(*)에 의하여

$2n+1=(4a_n-1)(2n-1)$, $4a_n-1=\frac{2n+1}{2n-1}$

$4a_n=\frac{4n}{2n-1}$

$\therefore a_n=\boxed{\frac{n}{2n-1}}$

따라서 $f(n)=2n-1$, $g(n)=\frac{n}{2n-1}$이므로

$f(14)g(5)=27\times\frac{5}{9}=15$

답 15

618

$a_{n+1}-a_n=(-1)^{n+1}\times n$의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
&\cancel{a_2}-a_1=1\\
&\cancel{a_3}-\cancel{a_2}=-2\\
&\cancel{a_4}-\cancel{a_3}=3\\
&\quad\vdots\\
+)\ &\underline{a_n-\cancel{a_{n-1}}=(-1)^n\times(n-1)}\\
&a_n-a_1=1+(-2)+3+\cdots+(-1)^n\times(n-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore a_{100}&=1+1+(-2)+3+(-4)+\cdots+99\\
&=1+(1-2)+(3-4)+\cdots+(97-98)+99\\
&=1+(-1)\times49+99\\
&=51
\end{aligned}$$

답 ⑤

619

$a_{n+1}+a_n=n$의 n에 1, 3, 5, …, 29를 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
&a_2+a_1=1\\
&a_4+a_3=3\\
&a_7+a_5=5\\
&\quad\vdots\\
+)\ &\underline{a_{30}+a_{29}=29}\\
&a_1+a_2+\cdots+a_{30}=1+3+\cdots+29\\
&=\frac{15\{2\times1+(15-1)\times2\}}{2}\\
&=225
\end{aligned}$$

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_{30}=225$ …… ㉠

또한 $a_{n+1}+a_n=n$의 n에 2, 4, 6, …, 28을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
&a_3+a_2=2\\
&a_5+a_4=4\\
&a_5+a_6=6\\
&\quad\vdots\\
+)\ &\underline{a_{29}+a_{28}=28}\\
&a_2+a_3+\cdots+a_{29}=2+4+\cdots+28\\
&=\frac{14\{2\times2+(14-1)\times2\}}{2}\\
&=210
\end{aligned}$$

$\therefore a_2+a_3+\cdots+a_{29}=210$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면 $a_1+a_{30}=15$

$\therefore a_{30}=15-a_1=15-1=14$

답 14

620

$a_{n+1}+a_n=b_{n+1}-b_n$의 n에 1, 2, 3, …, 9를 차례대로 대입하여 변끼리

더하면

$$a_2+a_1=\cancel{b_2}-b_1$$
$$a_3+a_2=\cancel{b_3}-\cancel{b_2}$$
$$\vdots$$
$$+)\ a_{10}+a_9=b_{10}-\cancel{b_9}$$
$$2(a_1+a_2+\cdots+a_{10})-a_1-a_{10}=b_{10}-b_1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k=a_1+a_2+\cdots+a_{10}$$
$$=\frac{1}{2}(a_1-b_1+a_{10}+b_{10})$$
$$=\frac{1}{2}(a_1-a_1+30)=15\ (\because a_1=b_1,\ a_{10}+b_{10}=30)$$

답 15

621

$a_n=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)a_{n-1}$, 즉 $a_n=\frac{n^2-1}{n^2}a_{n-1}=\frac{(n-1)(n+1)}{n\times n}a_{n-1}$의 n에 2, 3, 4, ⋯, n을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\cancel{a_2}=\frac{1\times3}{2\times2}a_1$$
$$\cancel{a_3}=\frac{2\times4}{3\times3}\cancel{a_2}$$
$$\cancel{a_4}=\frac{3\times5}{4\times4}\cancel{a_3}$$
$$\vdots$$
$$\times)\ a_n=\frac{(n-1)(n+1)}{n\times n}\cancel{a_{n-1}}$$
$$a_n=\frac{1\times3}{2\times2}\times\frac{2\times4}{3\times3}\times\frac{3\times5}{4\times4}\times\cdots\times\frac{(n-1)(n+1)}{n\times n}a_1$$
$$=\frac{n+1}{2n}$$

이때, $a_k=\frac{51}{100}$이므로 $\frac{k+1}{2k}=\frac{51}{100}$

$100(k+1)=102k$, $100k+100=102k$

$2k=100$ $\therefore k=50$

답 50

622

$a_{n+1}=3^na_n$의 양변에 $n=1, 2, 3, \cdots, n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\cancel{a_2}=3^1a_1$$
$$\cancel{a_3}=3^2\cancel{a_2}$$
$$\cancel{a_4}=3^3\cancel{a_3}$$
$$\vdots$$
$$\times)\ a_n=3^{n-1}\cancel{a_{n-1}}$$
$$a_n=3^1\times3^2\times\cdots\times3^{n-1}\times a_1$$

$$\therefore a_n=3^{1+2+3+\cdots+n-1}\ (\because a_1=1)$$
$$=3^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

이때, $a^k=3^{55}$이므로 $3^{\frac{(k-1)k}{2}}=3^{55}$

$\frac{(k-1)k}{2}=55$에서 $(k-1)k=110$ $\therefore k=11$

답 ②

623

$a_1=1$, $a_2=2$에서

$$a_3=\frac{a_2+1}{a_1}=\frac{2+1}{1}=3$$
$$a_4=\frac{a_3+1}{a_2}=\frac{3+1}{2}=2$$
$$a_5=\frac{a_4+1}{a_3}=\frac{2+1}{3}=1$$
$$a_6=\frac{a_5+1}{a_4}=\frac{1+1}{2}=1$$
$$a_7=\frac{a_6+1}{a_5}=\frac{1+1}{1}=2$$
$$\vdots$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 1, 2, 3, 2, 1이 이 순서대로 반복되므로

$a_{n+5}=a_n$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

$$\therefore \sum_{k=1}^{100} a_k=(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)+(a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10})+\cdots+(a_{96}+a_{97}+a_{98}+a_{99}+a_{100})$$
$$=20(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)$$
$$=20(1+2+3+2+1)=180$$

답 ③

624

$a_1=a_2=1$에서

$$a_3=(-1)^1a_1a_2=(-1)\times1\times1=-1$$
$$a_4=(-1)^2a_2a_3=1\times1\times(-1)=-1$$
$$a_5=(-1)^3a_3a_4=(-1)\times(-1)\times(-1)=-1$$
$$a_6=(-1)^4a_4a_5=1\times(-1)\times(-1)=1$$
$$a_7=(-1)^5a_5a_6=(-1)\times(-1)\times1=1$$
$$a_8=(-1)^6a_6a_7=1\times1\times1=1$$
$$\vdots$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 1, 1, -1, -1, -1, 1이 이 순서대로 반복된다.

이때, $1004=6\times167+2$이므로

$$\sum_{k=1}^{1004} a_k=167(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)+a_1+a_2$$
$$=167\times0+1+1=2$$

답 ⑤

625

$a_{n+1}=S_n+2$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)이고, $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$이므로

$S_{n+1}-S_n=S_n+2$, $S_{n+1}=2S_n+2$

$\therefore S_{n+1}+2=2(S_n+2)$

즉, 수열 $\{S_n+2\}$는 첫째항이 $S_1+2=a_1+2=4$, 공비가 2인 등비수열이므로

$S_n+2=4\times2^{n-1}$

따라서 $S_n=2^{n+1}-2$이므로

$S_8=2^9-2=510$

답 ①

626

$a_n=2^{n+1}+3^{2n-1}$이라 하자.

(i) $n=1$일 때

$a_1=2^2+3^1=7$이므로 a_1은 7의 배수이다.

가

(ii) $n=k$일 때, 주어진 명제가 성립한다고 가정하면

$a_k=2^{k+1}+3^{2k-1}$은 7의 배수이다.

$n=k+1$일 때

$$a_{k+1}-a_k=(2^{k+2}+3^{2k+1})-(2^{k+1}+3^{2k-1})$$
$$=(2-1)2^{k+1}+(3^2-1)3^{2k-1}$$
$$=2^{k+1}+3^{2k-1}+7\times3^{2k-1}$$
$$=a_k+7\times3^{2k-1}$$

그런데 a_k와 $7\times3^{2k-1}$이 모두 7의 배수이므로 $a_{k+1}-a_k$는 7의 배수이다.

이때, a_k가 7의 배수이므로 a_{k+1}도 7의 배수이다.

나

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 a_n, 즉 $2^{n+1}+3^{2n-1}$은 7의 배수이다.

다

단계	채점 요소	비율
가	주어진 식을 a_n으로 놓고 $n=1$일 때, 주어진 명제가 성립함을 보이기	30%
나	$n=k$일 때, 주어진 명제가 성립한다고 가정하여 $n=k+1$일 때도 성립함을 보이기	60%
다	가, 나에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 명제가 성립함을 보이기	10%

답 풀이 참조

627

(i) $n=2$일 때

$$(\text{좌변})=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

$$(\text{우변})=\sqrt{2}$$

이므로 $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$

따라서 주어진 부등식이 성립한다.

가

(ii) $n=k$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)-\sqrt{k+1}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\sqrt{k+1}$$

$$>\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\sqrt{k+1}$$

$$=\frac{\sqrt{k(k+1)}-k}{\sqrt{k+1}}>0$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식이 성립한다.

나

(i), (ii)에 의하여 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

다

단계	채점 요소	비율
가	$n=2$일 때, 주어진 부등식이 성립함을 보이기	30%
나	$n=k$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하여 $n=k+1$일 때도 성립함을 보이기	60%
다	가, 나에 의하여 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립함을 보이기	10%

답 풀이 참조