**한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시**

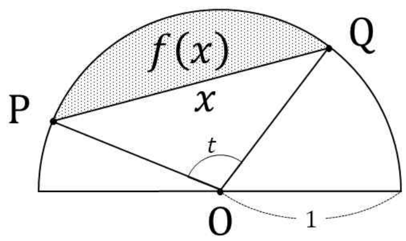
| 자 연 계 | **논 술 예 시 답 안** | 오후(2)-1번 |
|---|---|---|

1. 동전을 $x$번 던질 때 처음으로 같은 면이 두 번 연속으로 나오는 사건을 $A_x$ 라고 하자. 동전을 한 번 던질 경우 같은 면이 연속으로 두 번 나오게 되는 사건은 불가능하다. 즉 동전을 1번 던질 때 같은 면이 두 번 연속으로 나오는 확률은 $\mathrm{P}(A_1) = 0$이다. 동전을 두 번 던질 경우, 4가지의 결과 중 2가지, (앞면, 앞면), (뒷면, 뒷면)과 같이 동전의 같은 면을 두 번 연속으로 얻을 수 있다. 따라서 사건 $A_2$가 일어날 확률은 $\mathrm{P}(A_2) = 2/4 = 1/2 = 0.5^{2-1}$이 된다.
유사하게, 우리가 전 단계에서 멈추지 않고 동전을 계속 던진 경우에는 정확하게 결과들의 절반만큼 같은 면이 두 번 연속으로 나오는 것을 알 수 있다. 즉, 다음이 성립한다.

$\mathrm{P}(A_3) = \mathrm{P}(A_2)/2 = 0.5^{3-1}$
$\mathrm{P}(A_4) = \mathrm{P}(A_3)/2 = 0.5^{4-1}$
$\vdots$
$\mathrm{P}(A_x) = \mathrm{P}(A_{x-1})/2 = 0.5^{x-1}, x = 2, 3, \cdots, 2022.$

따라서 동전을 던진 횟수가 2022 이하일 확률은 $\sum_{x=2}^{2022} \mathrm{P}(A_x) = \sum_{x=2}^{2022} 0.5^{x-1}$이 되고 이는 첫째항이 0.5, 공비가 0.5인 등비수열을 첫째항부터 제 2021항까지 더한 것과 같다. 따라서 등비수열의 합은 $\dfrac{0.5(1-0.5^{2021})}{1-0.5} = 1-0.5^{2021}$이 된다.

2. 선분 AB의 중점을 O라 하자. 부채꼴 OPQ의 중심각을 $t\ (0<t<\pi)$라 하면,




$x = \overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{1^2+1^2-2\times1\times1\times\cos t} = \sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}$,
$y = f(x) = \dfrac{1}{2}\times1^2\times t - \dfrac{1}{2}\times1^2\times\sin t = \dfrac{1}{2}(t-\sin t)$ 이다.

$t = \dfrac{\pi}{3}$일 때 $x=1$이므로

$x=1$에서의 $f(x)$의 미분계수 $f'(1)$은 $t=\dfrac{\pi}{3}$일 때 $\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ 의 값이다.

$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1-\cos t}{2}$, $\quad \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\sin t}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}}$ 이므로, $f'(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 이다.

3. $f'(x) = \dfrac{1}{(x+e)\ln(x+e)}$ 이고 이를 한 번 더 미분하면

$$f''(x) = -\frac{1+\ln(x+e)}{(x+e)^2(\ln(x+e))^2}$$

이므로 모든 $x>0$에 대해 $f''(x)<0$이다. 즉, $f'$은 감소한다.
일반성을 잃지 않고 $a \ge b$라 가정하자. 그러면 평균값 정리에 의해 $\dfrac{f(a+b)-f(a)}{b} = f'(z)$인 $z$가 열린 구간 $(a, a+b)$에서 항상 존재하고, $\dfrac{f(b)}{b} = \dfrac{f(b)-f(0)}{b-0} = f'(w)$인 $w$가 열린 구간 $(0,b)$에서 항상 존재한다.
그런데 $0<w<b \le a<z<a+b$이므로 $w<z$, 따라서 $f'(w)>f'(z)$임을 알 수 있다. 이를 정리하면 $f(a+b)<f(a)+f(b)$를 얻는다.

**한양대학교 2022학년도 신입학전형 수시**

자 연 계

# 논 술 예 시 답 안

오후(2)-2번

1. 주어진 쌍곡선을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$으로 표현하면

$a^2=\frac{5}{2}$, $b^2=\frac{27}{2}$.

따라서 초점 F의 $x$좌표를 양수 $c$라 하면 $c=\sqrt{a^2+b^2}=4$

또한 $p=\overline{\mathrm{AF}}$, $q=\overline{\mathrm{AF'}}$라 하면, 쌍곡선의 정의와 코사인 법칙에 의하여

$q-p=2a=\sqrt{10}$, $\quad \cos(\angle \mathrm{F'AF})=\frac{7}{25}=\frac{p^2+q^2-8^2}{2pq}$

즉, $q=p+\sqrt{10}$이고 $14pq=25(p^2+q^2-64)$

첫 번째 식을 두 번째 식에 대입하면

$14p^2+14\sqrt{10}p=25(2p^2+2\sqrt{10}p-54)$

정리하면 $2p^2+2\sqrt{10}p-75=0$

그러므로 $p=\frac{3}{2}\sqrt{10}$이고 $q=\frac{5}{2}\sqrt{10}$

점 A의 좌표를 $(x_0,y_0)$이라고 하면

$\overline{\mathrm{AF'}}^2=\frac{125}{2}=(x_0+4)^2+y_0^2$이고

$\overline{\mathrm{AF}}^2=\frac{45}{2}=(x_0-4)^2+y_0^2$

이를 연립하여 풀면 $x_0=\frac{5}{2}$, $y_0=\frac{9}{2}$.

즉, A의 좌표는 $\left(\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right)$

비슷하게 점 B의 좌표를 구하면 $\left(-\frac{5}{2},-\frac{9}{2}\right)$

2. 점 P의 좌표를 $(t,s)$라 하면 접선의 기울기는 $-\frac{b^2t}{a^2s}$,

접선의 방정식은 $y-s=-\frac{b^2t}{a^2s}(x-t)$이다.

이를 정리하면 $b^2tx+a^2sy=b^2t^2+a^2s^2$이다.

$\frac{t^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}=1$이므로 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$b^2tx+a^2sy-a^2b^2=0$

따라서 $f(t)=\left(\frac{a^2b^2}{\sqrt{b^4t^2+a^4s^2}}\right)^2$이다.

$s^2=\frac{a^2b^2-b^2t^2}{a^2}$이므로

$$f(t)=\frac{a^4b^4}{b^4t^2+a^4\frac{a^2b^2-b^2t^2}{a^2}}=\frac{a^4b^4}{b^4t^2+a^4b^2-a^2b^2t^2}$$

$$=\frac{a^4b^4}{a^4b^2+b^2(b^2-a^2)t^2}=\frac{a^4b^2}{a^4+(b^2-a^2)t^2}\text{ 이다.}$$

$a^2-b^2=c^2$ $(b<a)$ 중 양수인 $c$를 선택하면

$$f(t)=\frac{a^4b^2}{a^4-c^2t^2}=\frac{a^4b^2}{2a^2}\left(\frac{1}{a^2-ct}+\frac{1}{a^2+ct}\right)\text{이다.}$$

$\int\frac{1}{a^2+ct}dt=\frac{1}{c}\ln(a^2+ct)+C_1$,

$\int\frac{1}{a^2-ct}dt=-\frac{1}{c}\ln(a^2-ct)+C_2$ ($C_1$, $C_2$는 상수)이므로,

$$\int_0^a f(t)dt=\frac{a^4b^2}{2a^2}\frac{1}{c}\left[\ln(a^2+ct)-\ln(a^2-ct)\right]_0^a$$

$$=\frac{a^4b^2}{2a^2c}\ln\frac{a^2+ca}{a^2-ca}\ \cdots\text{(A)}$$

$b=\frac{\sqrt{3}}{2}a$이면 $b^2=\frac{3}{4}a^2$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{a^2-\frac{3}{4}a^2}=\frac{a}{2}$이다.

따라서 $\text{(A)}=\frac{a^2\frac{3}{4}a^2}{2\frac{a}{2}}\ln\frac{a^2+\frac{a^2}{2}}{a^2-\frac{a^2}{2}}=\frac{3}{4}a^3\ln 3$ 이므로

$\frac{1}{a^3}\int_0^a f(t)dt=\frac{3}{4}\ln 3$이다.

3. 문제 2번에서 선택한 양수 $c$를 사용하여

$\mathrm{F_1}=(c,0)=(\sqrt{a^2-b^2},0)$,

$\mathrm{F_2}=(-c,0)=(-\sqrt{a^2-b^2},0)$이라고 하자.

점 P의 좌표를 $(t,s)$라 하면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PF_1}}^2&=(c-t)^2+s^2\\&=c^2-2ct+t^2+\frac{a^2b^2-b^2t^2}{a^2}\\&=\frac{a^2c^2-2cta^2+a^2t^2+a^2b^2-b^2t^2}{a^2}\\&=\frac{a^2(b^2+c^2)+t^2(a^2-b^2)-2cta^2}{a^2}\\&=\frac{a^4+t^2c^2-2cta^2}{a^2}=\frac{(a^2-tc)^2}{a^2}\end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{PF_2}}^2=\frac{(a^2+tc)^2}{a^2}$이다.

따라서 $h(t)=\frac{a^4-t^2c^2}{a^2}$이다.

2번에 의해 $f(t)=\frac{a^4b^2}{a^4+(b^2-a^2)t^2}$이다.

$$\therefore f(t)h(t)=\frac{a^4b^2}{a^4+(b^2-a^2)t^2}\times\frac{a^4-t^2c^2}{a^2}=a^2b^2$$