



2023학년도 자연계열 모의논술고사

1. 출제문제

※ <문제 1>에서부터 <문제 4>까지 총 4개의 문제가 있고, 각 문제마다 3개의 세부 문항이 있습니다. 답안지의 지정된 양식 안에 각 세부 문항 별로 해당 문항 번호를 쓰고 답을 작성하십시오. 수식과 논리를 명확히 전개하고 근거와 과정을 제시하십시오.

(시험 시간: 100분, 답안 분량: 지정된 답안 양식 내 작성)

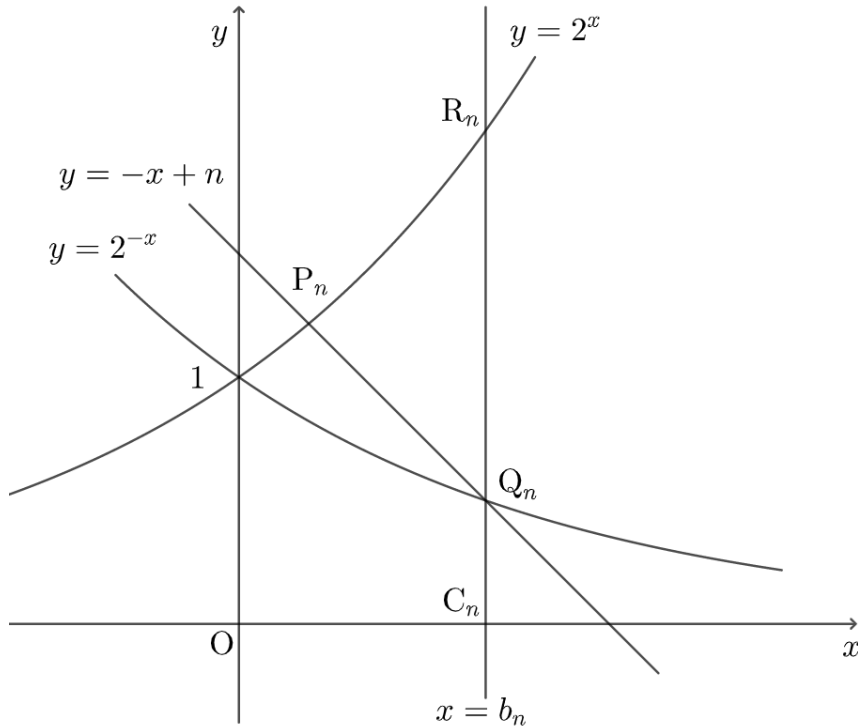
문제 1 $f(0) = -12$ 인 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \int_a^x (x^2 - tx)f(t)dt \quad (\text{단, } a \text{는 상수})$$

라 할 때, 다음 물음에 답하십시오. [총25점]

- (1) [10점] $f(x)$ 와 $g(x)$ 를 구하십시오.
- (2) [7점] 모든 실수 x 에 대해 $|g(x)| = g(x)$ 가 성립할 때, 곡선 $y = g(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하십시오.
- (3) [8점] 함수 $y = |g(x)|$ 가 미분가능하지 않은 점이 1개 이하가 되도록 하는 a 의 값을 모두 구하십시오.

문제 2 좌표평면에서 곡선 $y = 2^x$ 과 직선 $y = -x + n$ 이 만나는 점을 $P_n(a_n, 2^{a_n})$ 이라 하고, 곡선 $y = 2^{-x}$ 과 직선 $y = -x + n$ 이 만나는 점 중 x 좌표가 양수인 점을 $Q_n(b_n, 2^{-b_n})$ ($b_n > 0$)이라 하자. 또한, 점 Q_n 에서 x 축에 내린 수선의 발을 C_n 이라 하고, 직선 $x = b_n$ 과 곡선 $y = 2^x$ 이 만나는 점을 R_n 이라 하자. (단, n 은 2이상의 자연수이다.)



다음 물음에 답하시오. [총25점]

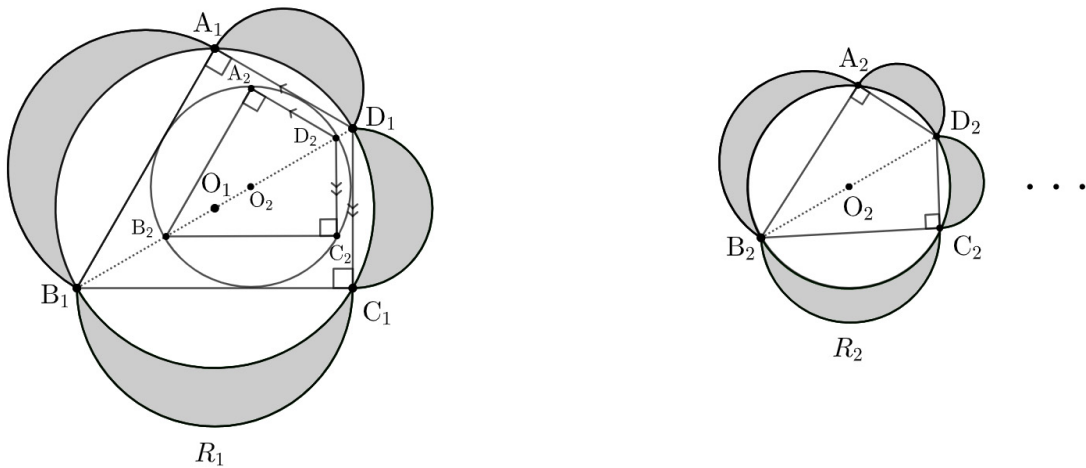
- (1) [10점] 선분 P_nP_{n+1} 의 길이가 $\sqrt{2}$ 보다 작음을 보이시오.
- (2) [5점] 부등식 $n - 1 < b_n < n$ 이 성립함을 보이시오.
- (3) [10점] 삼각형 OC_nR_n 의 넓이를 S_n , 삼각형 OC_nQ_n 의 넓이를 T_n 이라고 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n \times T_n}{n^2}$ 의 값을 구하시오.



문제 3 그림과 같이 $\angle D_1A_1B_1 = \angle B_1C_1D_1 = 90^\circ$ 이고, $\overline{A_1B_1} = \overline{B_1C_1}$, $\overline{C_1D_1} = \overline{D_1A_1}$ 인 사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 이 중심이 O_1 인 원 O_1 에 내접한다. 네 변 A_1B_1 , B_1C_1 , C_1D_1 , D_1A_1 을 각각 지름으로 하고 사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 의 외부에 그려진 4개의 반원의 내부와 원 O_1 의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림 을 R_1 이라 하자.

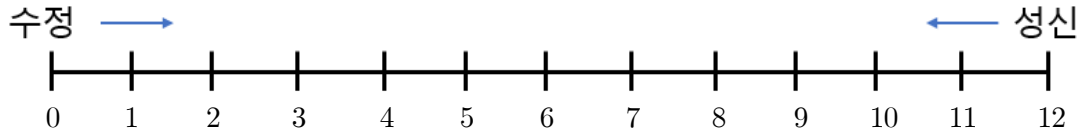
또 사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 에 내접하는 중심이 O_2 인 원 O_2 에 대하여 선분 O_2B_1 , 선분 O_2D_1 과 원 O_2 가 만나는 점을 각각 B_2, D_2 라고 하자. 점 D_2 에서 선분 A_1D_1 과 평행한 직선이 원 O_2 와 만나는 점 중 점 D_2 가 아닌 점을 점 A_2 라 하고, 점 D_2 에서 선분 D_1C_1 과 평행한 직선이 원 O_2 와 만나는 점 중 점 D_2 가 아닌 점을 점 C_2 라 하자. 이렇게 만들어지는 사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 네 변 A_2B_2 , B_2C_2 , C_2D_2 , D_2A_2 을 각각 지름으로 하고 사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 외부에 그려진 4개의 반원의 내부와 원 O_2 의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림 을 R_2 이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, 다음 물음에 답하시오. [총25점]



- (1) [7점] $\overline{A_1B_1} = a_1$, $\overline{D_1A_1} = b_1$ 이라고 할 때, S_1 을 a_1 과 b_1 로 나타내시오.
- (2) [8점] 원 O_1 과 원 O_2 의 반지름을 각각 r_1 , r_2 라고 할 때, r_1 과 r_2 를 a_1 과 b_1 로 나타내시오.
- (3) [10점] $a_1 = 2$ 이고 $b_1 = 1$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값을 구하시오.

문제 4 그림과 같이 수정이와 성신이가 수직선 위의 좌표 0과 12에 처음 말을 놓고 주사위를 던지는 게임을 한다. 두 사람이 각자 주사위를 2번 던져 나온 수의 합만큼 화살표 방향으로 말을 이동시킨다고 한다. 예를 들어 수정이가 주사위를 2번 던졌을 때 나온 수의 합이 7이면 수정이는 말을 7칸 움직여 수직선 위의 좌표 7에 말을 놓고, 성신이가 주사위를 2번 던졌을 때 나온 수의 합이 3이면 $12-3=9$ 이므로 성신이는 말을 3칸 움직여 수직선 위의 좌표 9에 말을 놓는다. 다음 물음에 답하시오. [총25점]



(1) [5점] 수정이가 주사위를 2번 던졌을 때 말이 놓이는 위치의 좌표를 X 라 할 때 좌표 X 에 수정이의 말이 위치하게 되는 경우의 수를 각각 구한 후 아래의 표를 참고하여 표로 나타내시오.

X	2	3	4	...
경우의 수				

(2) [10점] 이동 규칙을 변경하여 아래의 규칙을 만족시키도록 말을 이동시킬 때, 수정이의 말이 놓이는 위치의 좌표를 Y 라 하자. (단, 수정이의 말은 처음에 좌표 0에 위치한다.)

- (가) 주사위를 2번 던졌을 때, 나온 눈의 수가 다르다면 나온 두 수의 합만큼 화살표 방향으로 말을 이동시킨다.
- (나) 주사위를 2번 던졌을 때, 나온 눈의 수가 같다면 주사위를 1번 더 던져 총 3번 던진 주사위에서 나온 눈의 수들의 합만큼 화살표 방향으로 말을 이동시킨다. (단, 세 수의 합이 12이상일 경우 말은 12칸만 이동한다.)

좌표 Y 에 수정이의 말이 위치하게 되는 경우의 수를 각각 구한 후 아래의 표를 참고하여 표로 나타내시오.

Y	3	4	5	...
경우의 수				

(3) [10점] (2)의 규칙에 따라 게임을 진행하여 수정이와 성신이의 말이 같은 좌표에 놓였을 때의 좌표를 Z 라 하자. 수정이와 성신이의 말이 좌표 Z 에 같이 위치하게 되는 경우의 수를 각각 구한 후 아래의 표를 참고하여 표로 나타내시오.

(단, 수정이의 말은 처음에 좌표 0에 위치하고 성신이의 말은 처음에 좌표 12에 위치한다.)

Z	3	4	5	...
경우의 수				